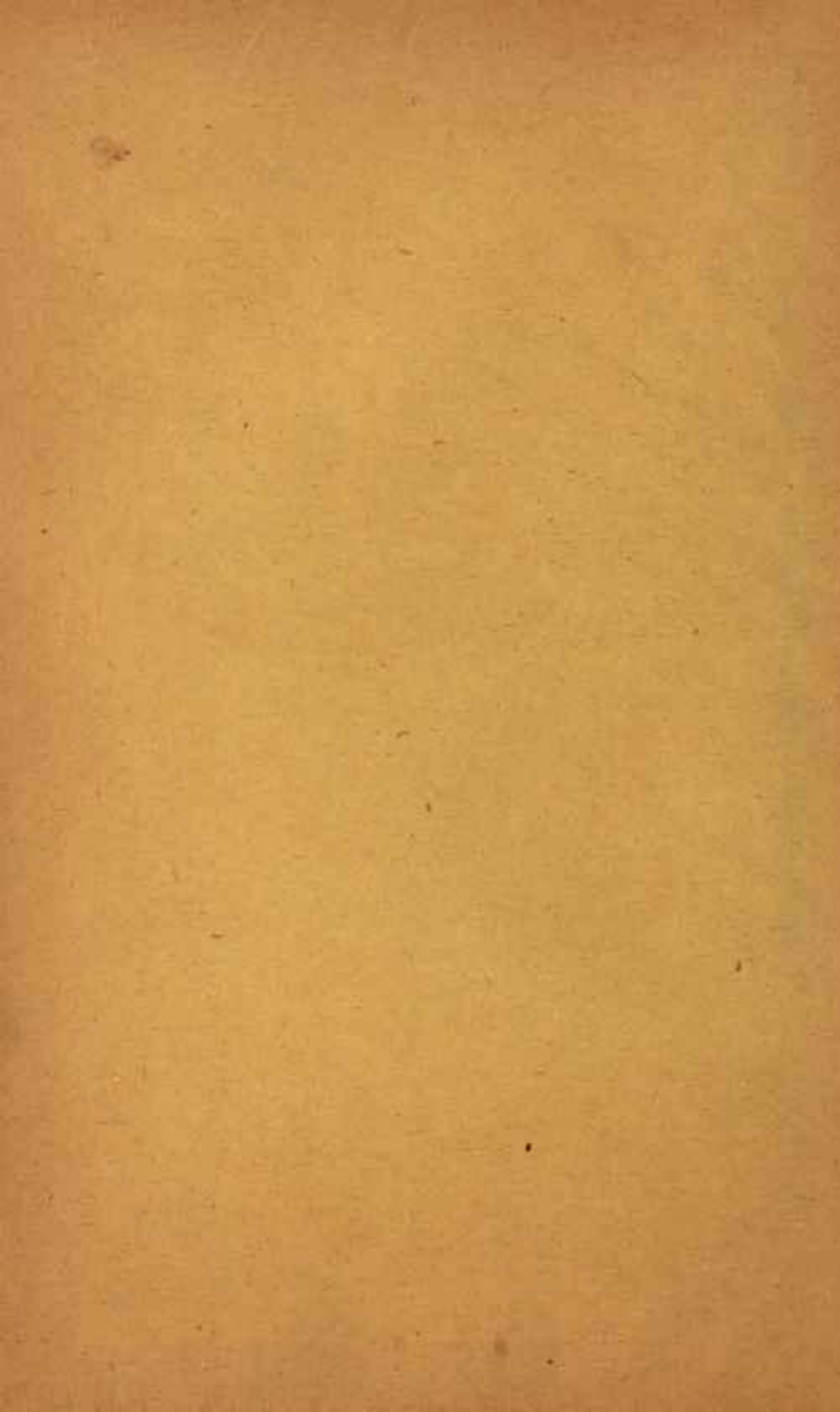


42-160













RESISTENCIA DE MATERIALES

y

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES





XIX  
2617

RESISTENCIA DE MATERIALES  
Y  
ESTABILIDAD  
DE LAS  
CONSTRUCCIONES

---

LECCIONES DE CLASE

POR

D. JOSE DE ARCE,

INGENIERO AGRÓNOMO,  
PROFESOR DE HIDRÁULICA APLICADA Y DE CONSTRUCCIÓN  
EN EL INSTITUTO AGRÍCOLA DE ALFONSO XII  
Y EXDIRECTOR DE LA ESCUELA GENERAL DE AGRICULTURA

TOMO I

---

SEGUNDA EDICIÓN, REFORMADA



MADRID  
ESTABLECIMIENTO TIPOGRAFICO DE IDAMOR MORENO  
*Blasco de Garay 9.*  
1898

Es propiedad del autor.  
Queda hecho el depósito  
que marca la ley.



---

## ADVERTENCIA

---

Reunir en pocas páginas cuanto podía interesar á nuestros alumnos acerca de los principios más importantes de Resistencia de materiales y Estabilidad de las construcciones, facilitándoles el estudio de tales materias y preparando su espíritu para ampliar y completar más tarde los conocimientos que constituyen, si así pudiera decirse, la *Teoría de la construcción*, tal fue el motivo que hace algunos años nos decidió á redactar el presente trabajo, al cual se ajustan las explicaciones de la primera parte del curso de Construcción que tenemos á nuestro cargo en la Escuela especial de Ingenieros agrónomos.

Animados á publicarlo por las excitaciones cariñosas de algunos compañeros, más que por el escaso valor que pueda representar una sencilla compilación de asuntos extensamente tratados en obras magistrales, harto conocidas de las personas competentes en este orden de estudios, nos proponemos completarlo con una serie de cuestiones resueltas, que podrán ser de alguna utilidad, por su carácter de aplicación á los casos más usuales del Arte de construir.

Redúcese, por tanto, nuestro propósito á prestar algún servicio á los alumnos de la clase de Construcción, cumpliendo al

propio tiempo con un gratísimo deber que de consuno nos imponen las necesidades de la enseñanza de la Escuela y las obligaciones anejas á nuestro cargo; y si por acaso este modesto trabajo pudiese á la vez contribuir en alguna pequeña parte á propagar los conocimientos á que se refiere, entre aquellas personas que no disponen de una extensa y clásica biblioteca, se verían totalmente satisfechas nuestras aspiraciones y nuestros deseos cumplidos con exceso.

\* \*  
\* \*

Esto decíamos en la edición anterior. Ahora solamente añadiremos que de las reformas introducidas en la edición actual del tomo primero, la más importante se refiere al estudio y aplicación de la línea elástica, para generalizar el cálculo de las flechas de flexión.

Finalmente, en el tomo segundo hemos creído preferible completar la doctrina que comprende, intercalando regular número de problemas, en lugar de constituir con ellos un grupo aparte, como habíamos pensado en un principio.

---



# ÍNDICE DEL TOMO PRIMERO

| NUM.                 | PÁGINAS. |
|----------------------|----------|
| ADVERTENCIA. . . . . | V        |

## Primera parte.

### NOCIONES PRELIMINARES DE ESTÁTICA GRÁFICA

|                                           |   |
|-------------------------------------------|---|
| 1.—Objeto de la Estática gráfica. . . . . | I |
|-------------------------------------------|---|

### NOCIONES ELEMENTALES DE CÁLCULO GRÁFICO

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.—Sentido cíclico de un polígono. . . . .                                             | 2  |
| 3.—Suma geométrica. . . . .                                                            | 2  |
| 16.—Resta geométrica. . . . .                                                          | 7  |
| 17.—Suma y resta gráfica de fracciones. . . . .                                        | 7  |
| 21.—Multiplicación gráfica. . . . .                                                    | 10 |
| 24.—División gráfica. . . . .                                                          | 13 |
| 29.—Elevación á potencias y extracción de raíces efectua-<br>das gráficamente. . . . . | 16 |
| 34.—Empleo de la espiral logarítmica. . . . .                                          | 22 |
| 37.—Empleo de la curva exponencial . . . . .                                           | 28 |
| 41. Cálculo gráfico de las áreas. . . . .                                              | 33 |
| 42.—Primer caso, cuando el contorno es rectilíneo. . . . .                             | 33 |
| 46.—Segundo caso, cuando el contorno es curvilíneo. . . . .                            | 36 |
| 47.—Teoría y empleo del planímetro polar de Amsler . . . . .                           | 36 |

## PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE ESTÁTICA GRÁFICA

*Preliminares relativos á la composición y equilibrio de las fuerzas.*

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 66.—Representación gráfica de las fuerzas. . . . .                         | 56 |
| 67.—Composición de las fuerzas aplicadas á un punto. . .                   | 57 |
| 68.—Descomposición de fuerzas aplicadas á un punto. . .                    | 58 |
| 69.—Condiciones de equilibrio de las fuerzas aplicadas á un punto. . . . . | 59 |
| 72.—Fuerzas normales á los lados de un contorno cerrado y plano. . . . .   | 60 |

*Teoría geométrica de los polígonos funiculares.*

|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 77.—Preliminares. . . . .                                                                                              | 62 |
| 83.—Tema fundamental. . . . .                                                                                          | 66 |
| 84.—Equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas situadas en un plano. . . . .                                       | 68 |
| 88.—Condiciones de existencia y determinación gráfica de la resultante de varias fuerzas situadas en un plano. . . . . | 70 |
| 90.—Propiedad mecánica fundamental de los polígonos funiculares. . . . .                                               | 71 |
| 91.—Pares de fuerzas. . . . .                                                                                          | 72 |
| 95.—Problemas sobre composición y descomposición de fuerzas. . . . .                                                   | 74 |
| 110.—Propiedades geométricas de los polígonos funiculares. . . . .                                                     | 88 |

*Teoría geométrica de las figuras recíprocas.*

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 120.—De las figuras geométricas en general. . . . .                                                                               | 95 |
| 121.—Figuras deformables, estrictamente indeformables y de líneas superabundantes. . . . .                                        | 95 |
| 122.—Condiciones necesarias para definir un polígono completo de $n$ vértices. . . . .                                            | 96 |
| 125.—Número de lados que corresponden á las figuras deformables, estrictamente indeformables y de líneas superabundantes. . . . . | 99 |



| NÚM.  | ÍNDICE                                                                         | IX<br>PÁGINAS. |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 127.— | De las figuras libremente dilatables.. . . .                                   | 100            |
| 128.— | De las figuras recíprocas. . . . .                                             | 100            |
| 130.— | De los sistemas articulados.. . . .                                            | 101            |
| 131.— | Condiciones de equilibrio de los sistemas articulados.                         | 101            |
| 136.— | Sistemas reticulares ó triangulados.. . . .                                    | 105            |
| 138.— | Condiciones de equilibrio de los sistemas reticulares..                        | 106            |
| 139.— | Determinación de las tensiones en los sistemas reticu-<br>lares.. . . .        | 107            |
| 143.— | Método de Maxwelli. . . . .                                                    | 110            |
| 145.— | Método de Culmanni. . . . .                                                    | 113            |
| 146.— | Construcción gráfica del momento de una fuerza. . .                            | 114            |
| 147.— | Construcción gráfica del momento de la resultante de<br>varias fuerzas.. . . . | 116            |
| 149.— | Determinación gráfica del centro de fuerzas paralelas.                         | 118            |
| 150.— | Determinación gráfica de los centros de gravedad.. .                           | 119            |

## Segunda parte.

### RESISTENCIA DE MATERIALES

|       |                                                 |     |
|-------|-------------------------------------------------|-----|
| 151.— | Objeto de la resistencia de materiales. . . . . | 121 |
| 152.— | Elasticidad de los materiales. . . . .          | 122 |
| 153.— | Cargas que soportan las construcciones. . . . . | 122 |
| 154.— | Resistencia de los prismas. . . . .             | 122 |
| 155.— | Deformaciones que las fuerzas originan. . . . . | 123 |

### DE LA TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

|       |                                                                                                                                                                 |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 156.— | Definiciones. . . . .                                                                                                                                           | 124 |
| 157.— | Coeficientes característicos.. . . .                                                                                                                            | 125 |
| 158.— | Resultados experimentales.. . . .                                                                                                                               | 125 |
| 160.— | Valores medios del peso del centímetro cúbico y coe-<br>ficientes de resistencia y de elasticidad de algunos<br>materiales importantes de construcción. . . . . | 126 |
| 161.— | Del esfuerzo cortante. . . . .                                                                                                                                  | 127 |



*Resistencia de los prismas á la extensión  
ó á la compresión.*

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 162.—Caso general. . . . .                                                                     | 128 |
| 163.—Caso particular en que es necesario tener en cuenta el<br>peso propio del prisma. . . . . | 128 |
| 164.—Caso en que el prisma no soporta más que su propio<br>peso. . . . .                       | 129 |

*Sólidos de igual resistencia á la extensión  
ó á la compresión.*

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 165.—Carga única. . . . . | 129 |
|---------------------------|-----|

*Medida de las deformaciones.*

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| 166.—Alargamiento ó acortamiento total de los prismas. . . | 132 |
|------------------------------------------------------------|-----|

*Resistencia viva de los prismas sometidos á acciones  
dinámicas de tracción ó de compresión.*

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| 169.—Prismas de sección constante. . . . . | 135 |
| 170.—Prismas de sección variable. . . . .  | 138 |

DE LA FLEXIÓN

*Flexión simple.—Determinación de las fuerzas  
moleculares.*

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 174.—Flexión elemental. . . . .  | 142 |
| 179.—Módulo de flexión. . . . .  | 145 |
| 180.—Momento de flexión. . . . . | 146 |

*Módulos de flexión de los perfiles usuales.*

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| 183.—Rectángulos macizos. . . . .                        | 146 |
| 184.—Rectángulos huecos y doble T de alas iguales. . . . | 148 |
| 185.—Doble T de alas dobles. . . . .                     | 150 |
| 186.—Perfiles en U, en T y en L. . . . .                 | 150 |





| NÚM.                                                                                                                       | PÁGINAS. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 226.—Diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos de flexión. . . . .                                                    | 187      |
| 229.—Carga aplicada en el punto medio. . . . .                                                                             | 190      |
| 233.—Cargas simultáneas. . . . .                                                                                           | 193      |
| 235.—Teoremas relativos á los diagramas de momentos de flexión. . . . .                                                    | 194      |
| 240.—Carga uniformemente repartida en todo el prisma. . .                                                                  | 199      |
| 243.—Carga uniformemente repartida en una parte del prisma. . . . .                                                        | 204      |
| 245.—Cargas móviles. . . . .                                                                                               | 207      |
| 246.—Carga única. . . . .                                                                                                  | 207      |
| 249.—Cargas móviles equidistantes. . . . .                                                                                 | 211      |
| 250.—Cargas simétricas. . . . .                                                                                            | 213      |
| <i>Flexión compleja.—Flexión compleja de los prismas empotrados.</i>                                                       |          |
| 251.—Nociones preliminares. . . . .                                                                                        | 215      |
| 255.—Teoremas relativos á las áreas de momentos. . . .                                                                     | 217      |
| <i>Prismas empotrados por un extremo y apoyados por el otro.</i>                                                           |          |
| 257.—Carga única. . . . .                                                                                                  | 220      |
| 266.—Carga uniformemente repartida. . . . .                                                                                | 229      |
| <i>Prismas empotrados por sus dos extremos.</i>                                                                            |          |
| 278.—Carga única. . . . .                                                                                                  | 239      |
| 292.—Carga uniformemente repartida. . . . .                                                                                | 249      |
| <i>Flexión de los prismas colocados sobre más de dos apoyos. — Teoremas fundamentales. — Teorema de los tres momentos.</i> |          |
| 300.—Caso en que los apoyos están al mismo nivel. . . .                                                                    | 256      |
| 302.—Caso en que los apoyos no están al mismo nivel. . .                                                                   | 258      |
| 303.—Teoremas relativos al momento intermedio. . . .                                                                       | 259      |
| 307.—Teoremas relativos al esfuerzo cortante. . . . .                                                                      | 262      |



*Prismas colocados sobre tres apoyos.*

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| 311.—Carga uniformemente repartida. . . . .               | 265 |
| 316.—Caso particular en que son iguales ambos tramos. . . | 269 |
| 321.—Carga móvil. . . . .                                 | 270 |

*Prismas colocados sobre cuatro apoyos.*

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 329.—Caso general. . . . .                                                       | 275 |
| 330.—Caso en que los tres tramos son iguales. . . . .                            | 276 |
| 336.—Caso en que son iguales dos tramos consecutivos. . .                        | 280 |
| 338.—Caso en que solamente son iguales los tramos ex-<br>tremos. . . . .         | 282 |
| 341.—Estudio de la línea elástica cuando los tres tramos<br>son iguales. . . . . | 282 |
| 342.—Observación sobre el uso de las plantillas parabólicas.                     | 288 |

*Flexión de los prismas cargados en la dirección  
de sus fibras.*

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 346.—Casos diversos. . . . .                                                                   |     |
| 347.—Prisma aislado bajo una sola carga. . . . .                                               | 291 |
| 351.—Prisma articulado por los dos extremos. . . . .                                           | 297 |
| 352.—Prisma articulado por un extremo y empotrado por<br>el otro. . . . .                      | 297 |
| 354.—Prisma empotrado por ambos extremos. . . . .                                              | 297 |
| 356.—Observaciones. . . . .                                                                    | 298 |
| 364.—Influencia del peso propio de los prismas verticales en<br>flexión de los mismos. . . . . | 303 |

*Flexión de los arcos.*

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 365.—Preliminares. . . . .                            | 305 |
| 366.—Fórmulas de los desplazamientos. . . . .         | 306 |
| 368.—Fórmulas de la resistencia. . . . .              | 308 |
| 372.—Arco cargado de un peso en su punto medio. . . . | 310 |
| 373.—Caso general. . . . .                            | 310 |
| 375.—Arco circular. . . . .                           | 313 |
| 390.—Arco parabólico. . . . .                         | 325 |

| NÚM.                                                                          | PÁGINAS. |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 395.—Arco cargado en un punto cualquiera. . . . .                             | 329      |
| 400.—Carga uniformemente repartida en proyección horizontal. . . . .          | 334      |
| 402.—Caso en que la carga está uniformemente repartida sobre el arco. . . . . | 339      |

## DE LA TORSIÓN.

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 404.—Preliminares. . . . .                                          | 341 |
| 407.—Ecuación de equilibrio en la torsión elemental.. . . .         | 343 |
| 408.—Módulo de torsión —Relación entre éste y el de flexión.. . . . | 345 |

*Módulos de torsión de los perfiles ó secciones usuales.*

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 410.—Sección circular llena. . . . .                           | 347 |
| 412.—Círculo hueco ó corona circular.. . . .                   | 348 |
| 415.—Sección cuadrada llena.. . . .                            | 350 |
| 416.—Hexágono macizo.. . . .                                   | 352 |
| 418.—Torsión de los prismas empotrados por un extremo. . . . . | 355 |
| 419.—Torsión ordinaria.. . . .                                 | 355 |
| 423.—Torsión compuesta. . . . .                                | 357 |

*Medida de las deformaciones.*

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 431.—Definiciones.. . . .                                                                              | 361 |
| 432.—Desplazamiento angular y ángulo de torsión. . . . .                                               | 361 |
| 436.—Valores del coeficiente de elasticidad transversal en algunos materiales de uso frecuente.. . . . | 362 |
| 437.—Resistencia viva de los prismas sometidos á acciones dinámicas de torsión.. . . .                 | 363 |
| 438.—Torsión de los prismas empotrados por sus dos extremos.. . . .                                    | 364 |



# ERRATAS PRINCIPALES

| PÁG. | LÍNEA | DICE                                                                                       | DEBE DECIR                                                                                 |
|------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 32   | 4     | $\left(\frac{y}{a}\right)^n$                                                               | $\left(\frac{1}{a}\right)^n$                                                               |
| 175  | 8     | todas ellas                                                                                | todos ellos                                                                                |
| 182  | 5     | $K = \frac{pL^2}{2Z} = \frac{Pl}{2Z}$                                                      | $K = \frac{pL^2}{2Z} = \frac{PL}{2Z}$                                                      |
| »    | 14    | siendo $\alpha$ y los coeficientes                                                         | siendo $\alpha$ y $\beta$ los coeficientes                                                 |
| 232  | 13    | $b = \frac{1}{2} L$                                                                        | $b = \frac{2}{3} L$                                                                        |
| 307  | 2 y 3 | $l = 1 \quad L = a$                                                                        | $l = a \quad L = 1$                                                                        |
| 313  | 17    | ejes $OX_1, OY_1$                                                                          | ejes $BX_1, BY_1$                                                                          |
| 316  | 7     | $L^2 = R^2 - (R - H)^2$                                                                    | $L^2 = R^2 - (R - h)^2$                                                                    |
| 328  | 17    | $\left(\frac{91}{25}\right)^2 L^2 - 18\left(\frac{9}{25}\right)L$                          | $\left(\frac{9}{25}\right)^2 L^2 - 18\left(\frac{9}{25}\right)L^2$                         |
| 329  | 7     | $f = \varepsilon \left( \frac{1}{2} QL^3 - PAa \right)$                                    | $f = \varepsilon \left( \frac{1}{3} QL^3 - PAa \right)$                                    |
| 329  | 10    | $A = \frac{3}{2} Lh$                                                                       | $A = \frac{2}{3} Lh$                                                                       |
| 339  | 17    | $-Q \frac{s}{S} \Sigma (x'y')$                                                             | $-Q \Sigma \left( \frac{s}{S} x'y' \right)$                                                |
| 340  | 6     | $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} - \frac{A'}{A} \times \frac{a'}{b'} \right)$ | $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} - \frac{A'}{A} \times \frac{a'}{b'} \right)$ |
| 353  | 4     | $oe = B \sqrt{3}$                                                                          | $oc = B \sqrt{3}$                                                                          |
| 353  | 20    | $Gn =$                                                                                     | $G_1 n =$                                                                                  |
| 362  | 9     | $A' = \frac{P\delta^2 L}{Z_0 Gd}$                                                          | $A' = \frac{2P\delta^2 L}{Z_0 Gd}$                                                         |
| 364  | 4 y 6 | $\frac{K^2}{G}$                                                                            | $\frac{K_0^2}{G}$                                                                          |
| 368  | 7     | $Z_0 = \frac{1}{2} L$                                                                      | $Z = \frac{1}{2} Z_0$                                                                      |





---

# RESISTENCIA DE MATERIALES

Y

## ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES.

---

### PRIMERA PARTE.

#### NOCIONES PRELIMINARES DE ESTÁTICA GRÁFICA.

---

**1. Su objeto.** — La Estática gráfica tiene por principal objeto la resolución de los problemas relativos al equilibrio de los sistemas de fuerzas, por los medios gráficos que se derivan de la *Geometría general* y especialmente de la *Geometría de posición*.

Creada aquella ciencia, ó cuando menos constituida en gran parte, por los trabajos de Culmann, profesor del Polytechnicum de Zürich, publicados el año 1866 con el título *Die Graphische Statik*, su exposición completa y ampliada con más recientes trabajos se encuentra hoy en las obras de Veyrauch, Levy, Greene, Bauschinger, Ebel, Wenck, Maurer, Chalmers, Hausser, etcétera, aparte de otras muchas y muy interesantes, aunque de carácter menos general, que pudieran citarse.

Su importancia es indudable, toda vez que casi siempre conduce á soluciones rápidas y elegantes, de suficiente exactitud en las aplicaciones propias del Arte del ingeniero; pero como en las cuestiones que nos interesan hemos de emplear, tanto las soluciones gráficas como las soluciones analíticas, según pueda convenir al caso de que se trate, bastará á nuestro especial objeto, presentar un brevísimo resumen de aquellos principios de *Estática gráfica* que hayan de prestarnos inmediata utilidad, comenzando por las siguientes

## NOCIONES ELEMENTALES DE CÁLCULO GRÁFICO.

**2. Sentido cíclico de un polígono.**—Se llama sentido cíclico, ó simplemente sentido de un polígono cerrado, el sentido en que un móvil lo recorrería sin retroceder en su marcha.

Si el contorno poligonal fuese abierto, imaginándolo cerrado por la línea (1) que une sus extremos, su sentido se definiría del mismo modo; siendo el origen de dicho contorno el punto en que el móvil lo alcanza, y su extremo aquel en que lo abandona.

**3. Suma geométrica.**—Se llama suma geométrica de un sistema cualquiera de líneas, situadas de cualquier modo en el espacio, ó en un plano y definidas en magnitud, dirección y sentido, á la resultante de componer dichas líneas de la misma manera que se componen las fuerzas en *Mecánica racional*, por la construcción del polígono correspondiente.

**4.** Las líneas de un sistema cualquiera se designarán con las cifras gruesas 1, 2, 3.... etc., y los lados correspondientes

---

(4) Siempre que no se lo advierta contrario, la palabra genérica *línea* la emplearemos como equivalente á la locución específica *línea recta*.

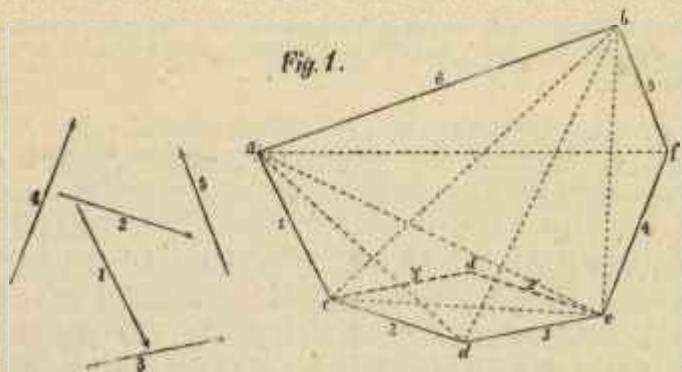


del polígono de dichas líneas con las ordinarias ó delgadas del mismo nombre 1. 2. 3..... etc.

El sentido de las líneas se indicará por una flecha situada en su extremo.

5. Con arreglo á lo que hemos dicho, si el sistema de líneas, cuya suma se quiera determinar, fuera el indicado en la figura 1.<sup>a</sup>, el polígono correspondiente sería el 1, 2, 3, 4, 5, y la suma el lado  $a b$ , igual pero de opuesto sentido, y por tanto, de signo contrario á la línea  $b a$ , que cierra dicho polígono.

6. Los lados de los contornos poligonales se designarán de ordinario con los números sucesivos 1, 2, 3, etc., con objeto de que el sentido cíclico de aquellos resulte ó se derive de la enunciación de dichos números en orden creciente: de este modo



resultará que el origen de un lado cualquiera queda definido por su intersección con el inmediato inferior, y el extremo del mismo por su encuentro con el inmediato superior.

En cuanto á la designación de vértices, se hará ordinariamente por los números de los lados á que correspondan; así, por ejemplo, si estos fueran los señalados con los números  $n$  y  $n+1$ , el vértice correspondiente se designará por  $n . n+1$ .

7. De la definición de la suma geométrica, resulta que las diagonales del polígono de las líneas representan las sumas parciales de cualquier número de ellas, siempre que sean consecutivas; y en efecto, la figura manifiesta que  $ad$  es la suma de las líneas 1, 2;  $ae$  la correspondiente á las 1, 2 3, y así de las demás.

Resulta también que una diagonal cualquiera, tomada en el sentido conveniente, representa la suma de los lados de cualquiera de las porciones en que el polígono queda dividido por aquélla.

Por ejemplo;  $ad$  es la suma de las líneas 1, 2, y  $da$  la de las líneas 3 4, 5 6; porque así como para el contorno  $acda$ ,  $a$  es el origen y  $d$  el extremo; para el  $defba$ ,  $d$  es el origen y  $a$  es el extremo; y ya se ha dicho que la línea que cierra un contorno y la suma geométrica de sus lados, sólo se diferencian en que son de opuesto sentido, siendo por tanto iguales y de signo contrario.

Establecido esto, conviene demostrar las proposiciones siguientes:

8. I.—*La suma geométrica de un sistema de líneas no varía, cualquiera que sea el orden en que se efectúe.*

Y es claro; si se invierte el orden de dos líneas consecutivas, tales como la 2 y la 3 para lo cual se trazaría la 3 á continuación de la 1 y la 2 á continuación de la 3, el vértice  $e$  no cambia; puesto que tanto pertenece al contorno primitivo como al que resulta de aquella inversión, y la línea que cierre el contorno general será la misma en ambos casos. Por consiguiente, no variando la suma por la inversión de dos líneas consecutivas cualesquiera, podrá lograrse, por el número suficiente de inversiones análogas, verificar la suma geométrica en el orden que se quiera, sin alteración del resultado.

De esta proposición se derivan dos consecuencias importantes, á saber:



9. *a.*—Si un polígono, cuyos lados definidos en magnitud, dirección y sentido cierra, cuando se suceden en un orden determinado, cerrará del mismo modo, cualquiera que sea el orden de sucesión de dichos lados.

10. *b.*—La suma geométrica de dos líneas que nacen de un mismo punto es igual en magnitud, dirección y sentido á la diagonal, trazada desde tal punto, del paralelógramo construído sobre dichas líneas.

11. II.—*La suma geométrica de un sistema de líneas no varía, reemplazando cualquier número de ellas por su suma geométrica correspondiente.*

Desde luego la proposición es evidente para un grupo de líneas consecutivas; pero como según hemos demostrado, es posible, por el suficiente número de inversiones, conseguir que un grupo cualquiera de líneas no consecutivas se sucedan como si lo fueran, la proposición resulta cierta en todos los casos.

12. III.—*La proyección sobre un plano ó sobre una recta de la suma geométrica de un sistema de líneas, es igual á la suma geométrica de sus proyecciones sobre dicho plano ó dicha recta.*

La proyección sobre un plano ó una recta de una línea, dada en magnitud, dirección y sentido, es otra línea cuyo origen es la proyección del origen de la primera, y cuyo extremo es la proyección del extremo de la misma; de donde resulta que el sentido de la proyección se deriva del que corresponde á la línea que se proyecta, quedando á la vez definido el signo que se le debe atribuir, si la proyección se verifica sobre un eje y se ha elegido convencionalmente el sentido de las distancias tomadas sobre él.

Determinado como queda dicho el sentido de las proyecciones de un sistema de líneas, la proposición es evidente, como es fácil comprobar en cualquier caso.

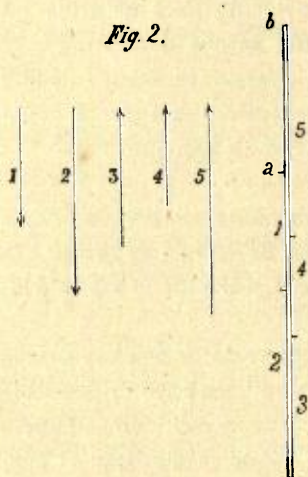


13. Como consecuencia, resulta que la suma geométrica de las proyecciones de los lados de un polígono cerrado, sobre un plano ó sobre un eje, es nula.

14. Si todas las líneas de un sistema fueran paralelas, claro es que el polígono correspondiente se reduciría á una recta, y la suma geométrica sería entonces igual á la suma aritmética ó algébrica de dichas líneas, según que todas ellas fueran del mismo sentido ó el sistema se compusiera de dos grupos de sentido contrario.

En este caso particular de líneas paralelas, la recta que representa el polígono del sistema la haremos doble para indicar

con mayor claridad la magnitud y sentido de las líneas que se suman, tal como se indica en la figura 2.<sup>a</sup>, en la cual se ve que  $a$  es el origen del polígono,  $b$  su extremo,  $b a$  la línea que cierra dicho polígono, y  $a b$  la suma del sistema propuesto.

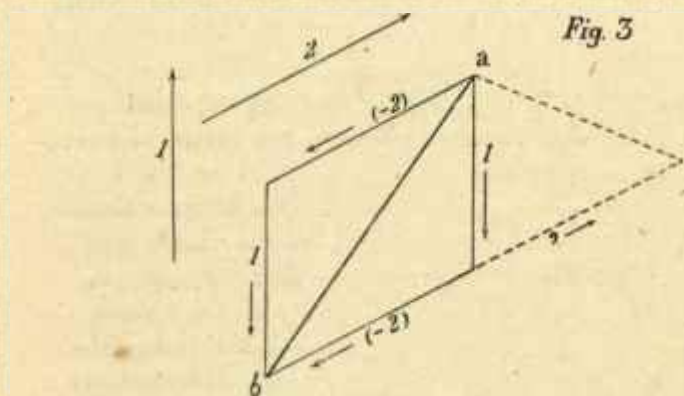


15. Todo cuanto acabamos de exponer es cierto para cualquier sistema de líneas; pero es claro que sólo será posible efectuar gráficamente la suma, cuando todas ellas se hallen en un mismo plano.

En el caso contrario se representarían en su verdadera posición por los medios usuales de la Geometría descriptiva; y con arreglo á la proposición III, procediendo á determinar la suma geométrica de las proyecciones, se obtendrían fácilmente las proyecciones de la suma buscada, la cual quedará por ellas suficientemente definida en magnitud, dirección y sentido.

**16. Resta geométrica.**—Restar geoméricamente una línea de otra, es lo mismo que sumar la segunda con la primera tomada en sentido contrario.

Así, para restar la línea **2** de la **1** (figura 3), se trazará, por



un punto cualquiera  $a$ , la **1** y á continuación la **2** tomada con signo contrario, y la línea  $ab$  será la resta geométrica buscada. Sería lo mismo, como la figura manifiesta, trazar primero por el punto  $a$  la línea (**-2**) y luego la **1**; pues ya hemos visto que la inversión de los sumandos no altera la suma.

**17. Suma y resta gráfica de fracciones.**—Desde luego, toda fracción puede representarse por una línea; porque siendo aquella, por ejemplo,  $\frac{a}{b}$ , y  $c$  la línea desconocida que decimos la representa, podremos establecer

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

de donde resulta que la línea  $c$  es una cuarta proporcional, fácil de construir.

Veamos ahora cómo se reduce gráficamente una fracción

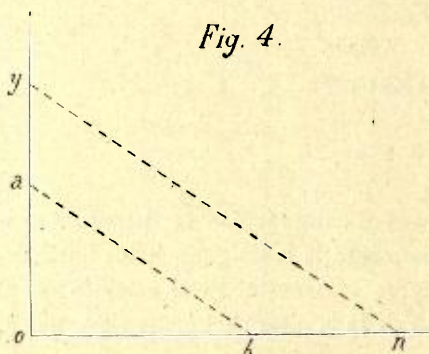
cualquiera  $\frac{a}{b}$ , á otra equivalente de denominador determinado,

y por tanto de la forma  $\frac{y}{n}$ .

La igualdad

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{n}$$

nos dice que para hallar el numerador desconocido, basta por cualquiera de los medios usuales construir una cuarta proporcional á las líneas  $b$ ,  $a$  y  $n$ .



En la figura 4.<sup>a</sup>, en la cual

$o b = b$ ,  $o a = a$ ,

$o n = n$ ,  $o y = y$ ,

se ponen de manifiesto las construcciones necesarias, cuya sencillez excusa toda explicación.

**18.** Supongamos ahora que se trate de construir la suma

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3}.$$

Imaginando reducidas estas fracciones á un común denominador arbitrario  $n$ ; y llamando  $y_1, y_2, y_3$  á los numeradores desconocidos correspondientes, tendremos

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{n}.$$

Si desde el origen y sobre el eje O B, (figura 5.<sup>a</sup>) se toman los denominadores  $b_1, b_2, b_3$  y el denominador común arbi-



trario  $n$ ; sobre el eje  $OA$  los numeradores  $a_1, a_2, a_3$  y desde el punto  $n$  se trazan las rectas  $n y_1, n y_2, n y_3$ , respectivamente paralelas á las  $b_1 a_1, b_2 a_2, b_3 a_3$ ; es claro que los numeradores de las fracciones reducidas serán

$$O y_1 = y_1;$$

$$O y_2 = y_2;$$

$$O y_3 = y_3;$$

y portanto, bastará sumarlos para obtener el numerador de la fracción equivalente á la suma buscada.

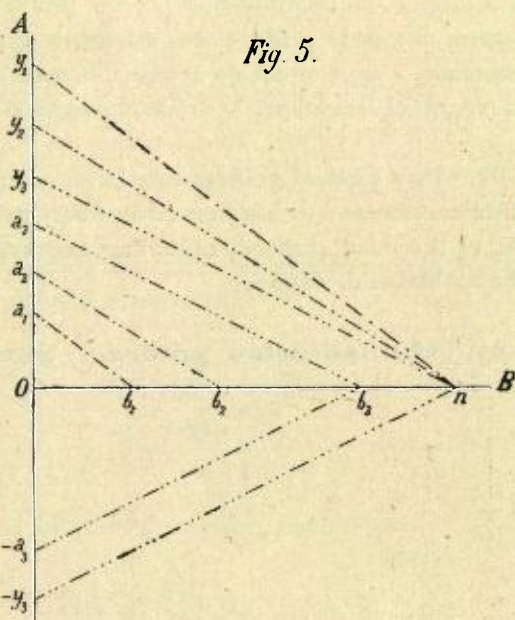
Como  $n$  es una magnitud arbitraria, tomándola igual á la unidad, la suma propuesta tendría por expresión lineal

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} = y_1 + y_2 + y_3,$$

y de esta suerte, dicha suma de fracciones tendría por representación gráfica la línea

$$Z = y_1 + y_2 + y_3.$$

19. Si alguna de las fracciones, por ejemplo, la  $\frac{a_3}{b_3}$ , hubiera de restarse, la suma algébrica de las fracciones propuestas sería entonces



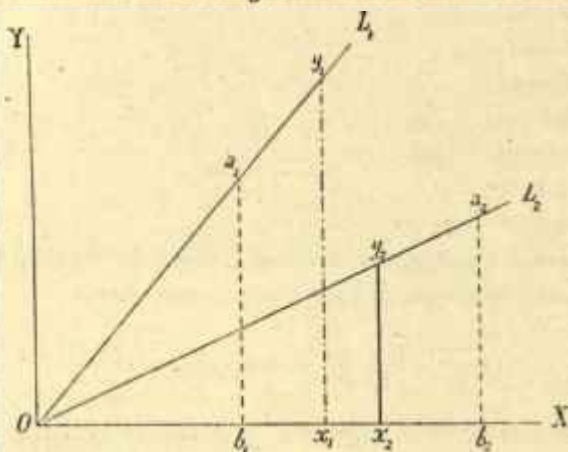
$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_1 + y_2 - y_3}{n};$$

y para obtenerla gráficamente no habría más que tomar el numerador  $-a_3$ , por debajo del eje OB, es decir en sentido negativo, procediendo, por lo demás, como en el caso anterior.

20. Para efectuar gráficamente la suma de números mixtos, basta considerar á los enteros, como fracciones cuyo denominador es la unidad, pudiendo así aplicar el procedimiento general que acabamos de exponer.

21. **Multiplicación gráfica.** — Supongamos el caso

Fig. 6.



más general de multiplicar dos líneas, numéricamente representadas por las fracciones  $\frac{a_1}{b_1}$ ,  $\frac{a_2}{b_2}$ .

Desde el origen de un sistema de ejes rectangulares (figura 6.<sup>a</sup>), tomemos los denominadores  $b_1$ ,  $b_2$  como abscisas, y tracemos, como ordenadas, los numeradores respectivos  $a_1$ ,  $a_2$ , cuyos

extremos determinarán las rectas  $L_1$ ,  $L_2$ , tiradas desde el origen. Tracemos la ordenada  $y_1$  de la recta  $L_1$ , correspondiente á una abscisa arbitraria  $x_1$ ; y tomemos la abscisa  $x_2$  igual á la ordenada anterior  $y_1$ , trazando por último la ordenada correspondiente  $y_2$  de la línea  $L_2$ .

Vamos á demostrar que

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_1}.$$

De la semejanza de los triángulos que aparecen en la figura, se deducen las relaciones siguientes:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_2}$$

Multiplicándolas miembro á miembro, tendremos

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_1}{x_1} \times \frac{y_2}{x_2}$$

pero como por construcción se verifica que  $x_2 = y_1$ , resultará:

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_1}$$

como queríamos demostrar.

Siendo  $x_1$  una magnitud arbitraria, será siempre posible dar al producto de dos fracciones el denominador que se quiera; y es claro que tomando  $x_1$  igual á la unidad, dicho producto tendría por representación gráfica la línea  $y_2$ .

**22.** Del propio modo se efectúa la multiplicación de cualquier número de fracciones. En efecto, supongamos que se trata de construir el producto de las  $n$  fracciones siguientes:



$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \dots \frac{a_n}{b_n}.$$

Determinadas como antes las rectas  $L_1, L_2, L_3 \dots L_n$ , se tomaría una abscisa arbitraria  $x_1$  como base, levantando la ordenada correspondiente  $y_1$  de la recta  $L_1$ . Tomaríamos  $x_2 = y_1$ , y se trazaría la ordenada  $y_2$  de la recta  $L_2$ ; tomaríamos  $x_3 = y_2$ , levantando la ordenada  $y_3$  de la recta  $L_3$ , y así sucesivamente hasta llegar á construir la ordenada  $y_n$  de la recta  $L_n$ .

Teniendo en cuenta las igualdades de condición

$$x_2 = y_1$$

$$x_3 = y_2$$

$$x_4 = y_3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_n = y_{n-1}$$

á las cuales satisface la construcción explicada, y multiplicando ordenadamente las relaciones de la forma  $\frac{a}{b} = \frac{y}{x}$ , que se derivan de la semejanza de los triángulos resultantes, obtendríamos la fórmula general del producto de  $n$  fracciones

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} \times \dots \times \frac{a_n}{b_n} = \frac{y_n}{x_1}.$$

Tomando la base  $x_1$  igual á la unidad, la última ordenada  $y_n$  sería la representación gráfica del producto de las fracciones propuestas.

**23.** Finalmente, para multiplicar varias líneas

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n$$

se procedería como acabamos de indicar, considerando á cada una de ellas como una fracción de la forma  $\frac{a}{1}$ ; y haciendo  $x_1 = 1$ , tendríamos evidentemente

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n = y_n$$

La figura 7.<sup>a</sup> indica, como ejemplo, las construcciones necesarias para efectuar el producto de cuatro líneas

$$a_1, a_2, a_3, a_4.$$

#### 24. División gráfica.

—Para construir el cociente de dos fracciones

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2},$$

representándolo gráficamente por la relación de dos líneas, basta re-

ducir aquellas á un común denominador, en cuyo caso dicho cociente será igual al de los numeradores de las fracciones reducidas; puesto que representando por  $y_1$ ,  $y_2$  los numeradores nuevos y por  $n$  el denominador común, tendremos

$$\frac{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)}{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)} = \frac{\left(\frac{y_1}{n}\right)}{\left(\frac{y_2}{n}\right)} = \frac{y_1}{y_2}.$$

La determinación de  $y_1$  é  $y_2$  se haría como se dijo anteriormente y se indica en la figura 8.<sup>a</sup>

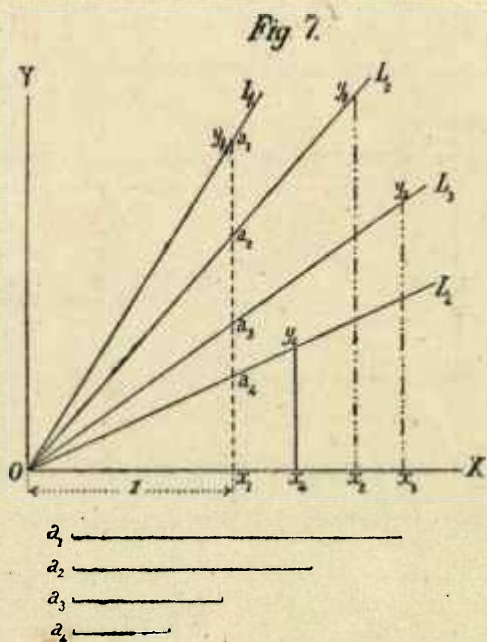
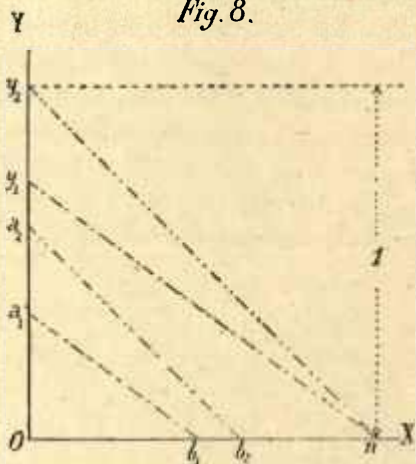


Fig. 8.



Considerando que

$$\frac{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)}{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)} = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{b_2}{a_2},$$

podrá reducirse la división de dos fracciones á una multiplicación, y resolver por tanto el problema como hemos visto anteriormente.

**25.** Si quisiéramos obtener el cociente por la representación de una sola línea, bastaría tomar  $y_2 = 1$ , en cuyo caso

$$\frac{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)}{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)} = y_1;$$

y para esto, una vez fijados sobre los ejes los valores de los términos de las fracciones propuestas, tomaríamos sobre el eje OY, la magnitud  $Oy_2$  igual á la unidad, por el extremo trazamos la recta  $y_2 n$  paralela á  $a_2 b_2$ , y por dicho punto  $n$  la paralela  $n y_1$  á la  $a_1 b_1$ , siendo por tanto  $Oy_1$  la representación gráfica del cociente de dichas fracciones.

**26.** En el caso de la división de dos líneas  $a$  y  $b$  llamando  $y$  al cociente, tendríamos

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{1},$$

lo que nos dice que dicho cociente se hallaría gráficamente por



la construcción de una cuarta proporcional entre las líneas  $b$ ,  $a$  y  $1$ ; para lo que podrá emplearse cualquiera de los medios usuales.

27. La multiplicación y división de números mixtos, se hará también por cuartas proporcionales.

En efecto; llamando  $y$  al producto de la fracción  $\frac{a}{b}$  por el entero  $c$ , tendremos

$$\frac{a}{b} \times c = y;$$

ó bien

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{c}.$$

23. Si se tratara de dividir el entero  $c_1$  por la fracción  $\frac{a_1}{b_1}$ , ó al contrario, tendríamos en el primer caso, llamando  $y_1$  al cociente

$$\frac{c_1}{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)} = y_1$$

de donde

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{y_1}{b_1},$$

y en el segundo

$$\frac{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)}{c_1} = y_1 = \frac{1}{x_1}$$

ó bien

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{x_1}{c_1};$$

lo que nos dice que la determinación gráfica del cociente queda





$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{y_n}{x_1};$$

y si hubiéramos tomado  $x_1$  igual á la unidad, la expresión anterior se reduciría á la forma

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = y_n;$$

lo que nos dice que la línea  $y_n$  sería entonces la representación gráfica de la potencia cuyo valor queríamos determinar.

La figura 9.<sup>a</sup> indica las construcciones necesarias en el caso de que  $n = 5$  y  $\frac{a}{b} < 1$ ; y en ella se verifica que  $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = y_5$ .

30. Si la fracción fuera impropia, es decir, si  $\frac{a}{b} > 1$ , resultaría evidentemente

$$x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n$$

$$y_1 < y_2 < y_3 \dots < y_n;$$

y tal podría ser la magnitud de las ordenadas, puesto que crecen á medida que  $n$  aumenta, que no cupiese la construcción en los límites del dibujo.

Para obviar este inconveniente se construiría, como se ha dicho, la potencia  $n$  de la fracción propia  $\frac{b}{a}$ , inversa ó recíproca de la propuesta; en cuyo caso, habiendo hecho  $x_1 = 1$ , la última ordenada  $y_n$  representaría el valor  $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ ; pero como

$$\frac{1}{y_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

claro es que para deducir el valor de la potencia propuesta sólo es necesario, como la igualdad anterior nos dice, construir una línea que representaremos por  $Y$  y cuyo valor sea el recíproco de  $y_n$ .

De la relación





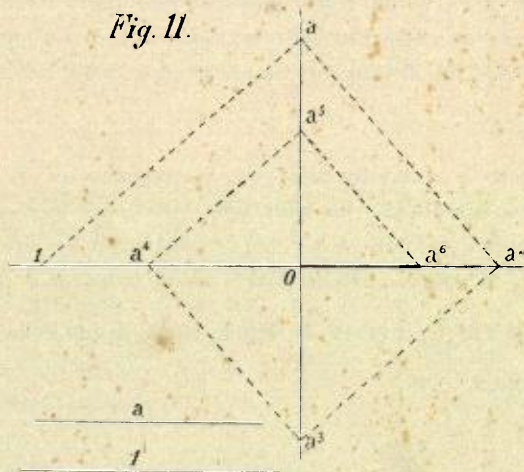
$n$  de una línea cualquiera  $a$ . Puesto que  $a^n = \left(\frac{a}{1}\right)^n$  podríamos aplicar el procedimiento anterior, haciendo

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ b &= 1; \end{aligned}$$

pero tal vez, de una manera más sencilla, se obtendrá el mismo resultado, procediendo del modo siguiente.

Sobre un sistema de ejes rectangulares tomemos en uno de ellos la magnitud  $O1 = 1$  y en el otro  $Oa = a$ . Por el punto  $a$  tra-

*Fig. 11.*



ceamos la recta  $a a^2$  perpendicular á la  $1 a$ ; enseguida la  $a^2 a^3$  perpendicular á la anterior inmediata  $a a^2$ , y así sucesivamente.

Recordando que en todo triángulo rectángulo, la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto á la hipotenusa, es media proporcional entre los segmentos en que por aquella queda dividida; si consideramos los triángulos rectángulos  $1 a a^2$ ;  $a a^2 a^3$ ;  $a^2 a^3 a^4$  .....  $a^{n-2} a^{n-1} a^n$  resultará:

$$\begin{array}{ll}
 \text{en el } 1.^{\circ}..... & Oa = a \\
 \text{» } 2.^{\circ}..... & Oa^2 = a^2 \\
 \text{» } 3.^{\circ}..... & Oa^3 = a^3 \\
 \text{» } n.^{\circ}..... & Oa^n = a^n ;
 \end{array}$$

lo que nos dice que las partes de los ejes comprendidas entre el origen y los vértices de la línea resultante  $1 a a^2 a^3 ..... a^n$  representan las potencias sucesivas de la línea  $a$ .

La figura 11 contiene las construcciones necesarias para obtener gráficamente la sexta potencia de la línea  $a$ , siendo  $a < 1$ .

**32.** Si el exponente  $n$  fuera algo grande y  $a < 1$ , la magnitud  $a^n$  pudiera resultar tan pequeña que fuera difícil medirla con la necesaria exactitud. En tal caso, se tomaría por unidad una magnitud lineal suficientemente grande, para salvar aquella dificultad.

**33.** Por el contrario: si  $a > 1$ , los segmentos de los ejes, que van representando las sucesivas potencias de  $a$ , crecerían rápidamente y podrían salir fuera de los límites del dibujo, si el exponente era algo elevado. Entonces se empezaría por construir la línea  $\frac{1}{a}$ , inversa de la propuesta, á que llamaremos  $y$ , y tendríamos

$$\frac{1}{a} = y,$$

de donde

$$a^n = \frac{1}{y^n},$$

lo que nos dice que operando con  $y$ , que es menor que la unidad, como antes se ha indicado, y determinada la potencia  $y^n$ , bastaría construir, por una tercera proporcional, su recíproca, para hallar la potencia propuesta.



Sea la línea  $a > 1$ , cuya tercera potencia se quiere construir, como ejemplo de lo expuesto.

Trazando las rectas perpendiculares entre sí,  $OA=a$  y  $OB=1$ , y la  $BC$  perpendicular á la  $AB$ , la distancia  $OC$  será la inversa de  $a$ , es decir,  $\frac{1}{a}$ .

Si ahora se determina por el procedimiento general la línea

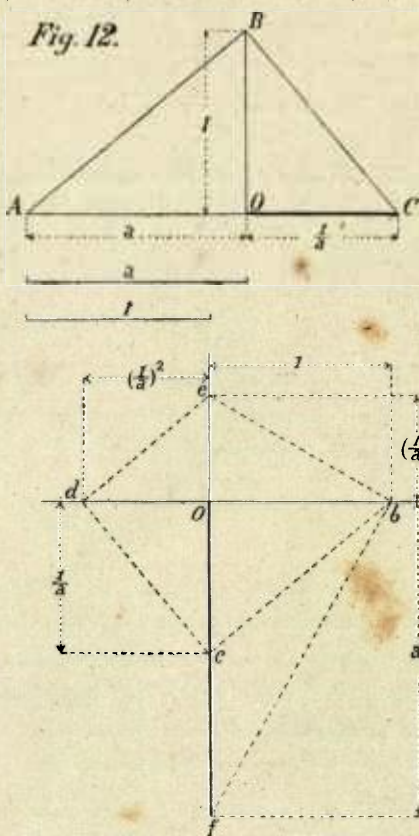
$$Oe = \frac{1}{a}^3, \text{ y se}$$

unen los puntos  $e$  y  $b$ , y por este último se traza la recta  $bf$ , perpendicular á la  $eb$ , el segmento  $Of$  será la representación gráfica de la tercera potencia de  $a$ , puesto que en el triángulo rectángulo  $ebf$  se verifica, como sabemos:

$$\overline{Ob}^2 = Oe \times Of,$$

de donde

$$Of = \frac{\overline{Ob}^2}{Oe},$$



ó bien

$$Of = \left( \frac{1}{a} \right)^2 = a^2,$$

como nos proponíamos encontrar.

**34. Empleo de la espiral logarítmica.**—La ecuación de esta curva referida á un sistema de coordenadas polares es, como sabemos,

$$\rho = a^{\omega}.$$

Si damos al parámetro  $a$  el valor de la base de uno de los sistemas usuales de logaritmos, por ejemplo, del sistema vulgar ó decimal, tendremos

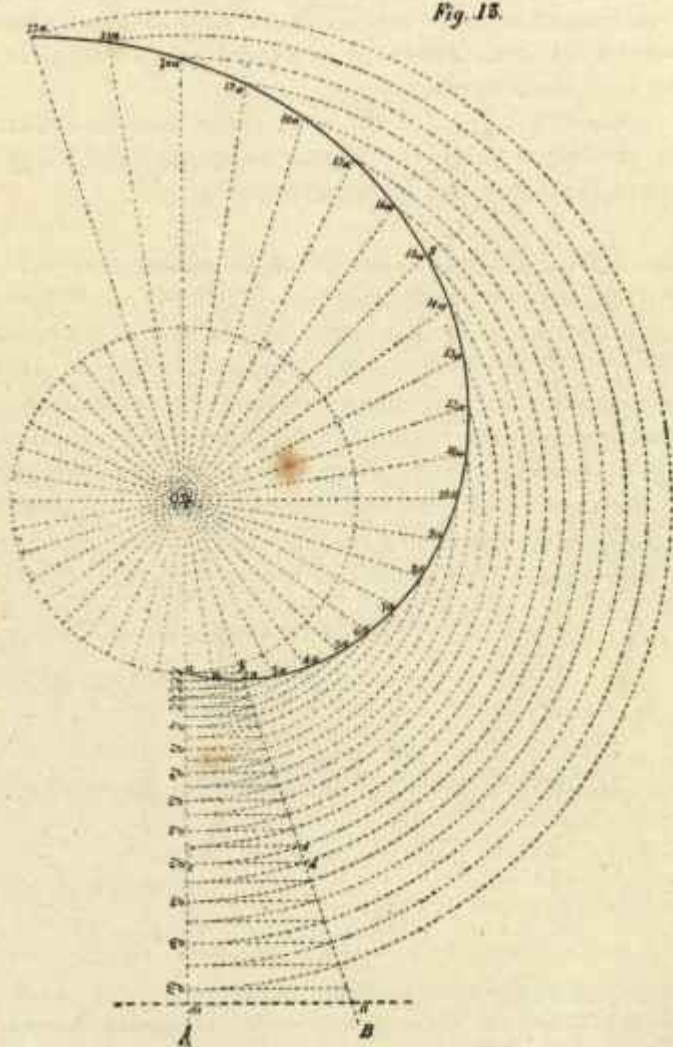
$$\omega = \log \rho;$$

de donde resulta que, cuando  $a = 10$ , los valores numéricos de las amplitudes en la espiral correspondiente, son los logaritmos vulgares de los valores representados por los radios vectores respectivos; y por tanto, que dicha curva podrá emplearse como una tabla gráfica de logaritmos ordinarios, lo mismo en las operaciones de que nos ocupamos, que en las de multiplicación y división.

**35.** Para construir la espiral logarítmica, puede procederse del modo siguiente (fig. 13):

Alrededor de un punto  $O$  se describe una circunferencia

Fig. 13.



con un radio de suficiente longitud, se divide en un número arbitrario, pero grande, de partes iguales, y se trazan los radios co-



respondientes, los cuales se prolongan lo bastante para satisfacer las exigencias de la construcción, de cuya suerte resultarán alrededor del punto O una serie de ángulos iguales entre sí, cuyo valor lo representaremos por  $\alpha$ .

Llamando  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$  etc., á los radios vectores consecutivos y correspondientes á los ángulos ó amplitudes  $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$  etcétera, tendremos las siguientes relaciones:

$$\rho_0 = IO^0 = 1$$

$$\rho_1 = IO^\alpha$$

$$\rho_2 = IO^{2\alpha}$$

$$\rho_3 = IO^{3\alpha}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\rho_n = IO^n ;$$

y por tanto

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = IO^{\alpha-0} = IO^\alpha$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = IO^{2\alpha-\alpha} = IO^\alpha$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = IO^{3\alpha-2\alpha} = IO^\alpha$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} = IO^{n\alpha-(n-1)\alpha} = IO^\alpha ;$$

cuyos resultados nos dicen que todos los triángulos formados por cada dos radios vectores sucesivos y la recta que une sus extremos son semejantes, siendo además cada radio vector una media proporcional entre los inmediatos anterior y posterior; pues de las últimas relaciones resulta

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ó bien

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_0 \times \rho_2}$$

y en general

$$\rho_n = \sqrt{\rho_{n-1} \times \rho_{n+1}}$$

De esta propiedad se deduce que basta conocer dos radios vectores, por ejemplo,  $\rho_0 = 1$ , correspondiente al ángulo 0, y el siguiente  $\rho_1$  al ángulo  $\alpha$ , para determinar todos los demás por la simple construcción de terceras proporcionales.

Atribuyendo por lo tanto al ángulo  $\alpha$  un valor conveniente y apropiado á la apreciación de los logaritmos, claro es que el valor de  $\rho_1$  será el número correspondiente al logaritmo  $\alpha$ . Así, por ejemplo, si se considerase suficiente apreciar los logaritmos con dos decimales, sería necesario que  $\alpha$  fuera un ángulo claramente divisible en  $n$  partes iguales, estando su valor representado por  $\frac{n}{100}$  de la unidad angular arbitrariamente establecida.

Como se tiene muy próximamente

$$\log 1,05 = 0,02;$$

en la figura que como ejemplo se presenta hemos hecho

$$\alpha = 0,02$$

y por consiguiente

$$\rho_1 = 1,05.$$

Es este caso la relación constante entre dos radios vectores consecutivos cualesquiera es

$$\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} = \frac{100}{105}$$

Por esto, para construir la curva de que nos ocupamos, se

forma un triángulo  $Omn$ , cuyos lados  $Om$  y  $On$  guarden aquella relación, es decir, en el cual se verifique que

$$\frac{Om}{On} = \frac{100}{105};$$

sobre el lado menor  $Om$  se fija la magnitud  $Ob$  que se elija por unidad, y se traza por el punto  $b$  la recta  $ab$ , paralela á la  $mn$ . Hecho esto, y haciendo centro en  $O$ , con el radio  $Ob$  se describe un arco trasportando el punto  $b$  al  $p_1$ . Por éste se traza otra recta paralela á la  $mn$ , y desde su extremo se describe, haciendo centro en  $O$ , como antes, el arco correspondiente. Por el punto en que este arco encuentre al lado  $OA$  se traza otra paralela á la  $mn$ ; y así se continúa la construcción hasta el límite que fuera conveniente; resultando por lo tanto, una serie de triángulos semejantes, en los cuales se verifica que el lado mayor ó de primera magnitud de cada uno de ellos es igual al lado mediano ó de segunda magnitud del que inmediatamente le sigue.

Para demostrar que los radios de los arcos interceptados por el ángulo  $AOB$  son los radios vectores de la espiral logarítmica que nos proponemos construir, recordaremos la relación establecida entre tres radios vectores consecutivos, y que dice:

$$\rho_n = \sqrt{\rho_{n-1} \times \rho_{n+1}}$$

de donde

$$\rho_{n+1} = \frac{\rho_n^2}{\rho_{n-1}};$$

y compararemos dos triángulos sucesivos cualesquiera, tales como los  $Ofe$  y  $Ocd$ , en los cuales supondremos que

$$Of = \rho_{n-1}$$

$$Oc = \rho_n$$

y resultará



$$\frac{Of}{Oe} = \frac{Oc}{Od};$$

pero como por construcción se verifica que  $Oe = Oc = \rho_n$  tendremos

$$Od = \frac{\rho_n^2}{\rho_{n-1}}$$

y por tanto

$$Od = \rho_{n+1}.$$

Resultando que, por la construcción que hemos hecho, se obtiene cada radio vector por el concurso de los dos inmediatos que le preceden, claro es que de los dos primeros,  $\rho_0 = 1$  y  $\rho_1$  se habrá obtenido seguramente el  $\rho_2$ ; de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  el  $\rho_3$ , y así sucesivamente, como queríamos demostrar.

Los arcos trazados desde O como centro, cuyo origen está en el lado Om, y cuyos extremos se hallan en la prolongación de los radios que dividen el círculo en partes iguales y determinan las amplitudes sucesivas  $\alpha$ ,  $2\alpha$ ,  $3\alpha$ ... etc., originan por lo tanto, por su intersección con los radios correspondientes, puntos de la curva, cuyo trazado queda reducido á unirlos por una línea continua.

Siendo muy próximamente 0,3 el logaritmo vulgar de 2, y además  $15\alpha = 0,3$ , debe resultar como comprobación del buen trazado, que el radio vector Os correspondiente á dicha amplitud  $15\alpha$ , sea doble del radio  $\rho_0 = Oa$ , que se ha tomado por unidad; y en efecto, así resulta.

36. En realidad, no es necesario que la espiral logarítmica corresponda á la base del sistema decimal, como sucede con la que acabamos de presentar como ejemplo; pues siendo las propiedades de los logaritmos independientes del sistema á que pertenezcan, es evidente que toda espiral logarítmica, cualquiera que sea el sistema á que corresponda, se podrá aplicar del

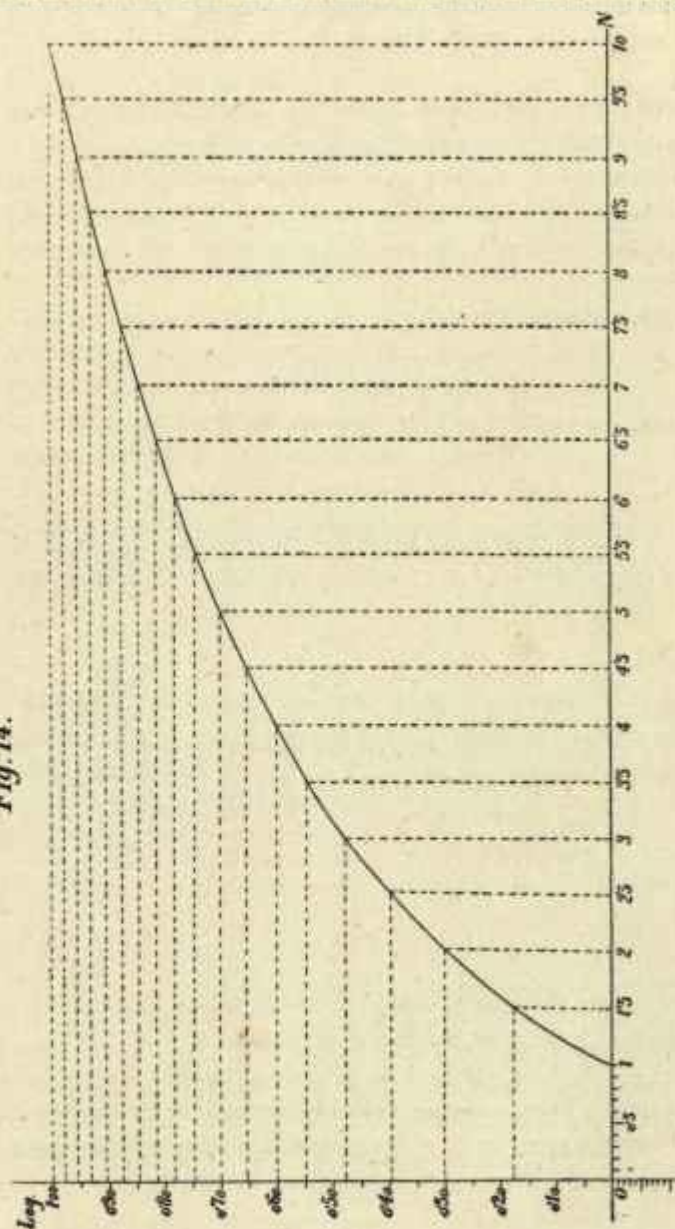
mismo modo al cálculo gráfico de las operaciones de multiplicar, dividir, elevar á potencias y extracción de raíces.

Esta libertad de poder elegir arbitrariamente la base del sistema, y por tanto de fijar como nos plazca la relación entre dos radios vectores consecutivos y en consecuencia la magnitud de  $\rho_1$ , pudiera parecer útil y ventajosa, toda vez que la construcción de la curva se haría con absoluta independencia y sin el auxilio de las tablas; pero como los errores inherentes á dicha construcción pueden alcanzar, y en efecto alcanzan con facilidad, aunque se proceda con gran esmero, valores inadmisibles, creemos lo mejor determinar el valor de  $\rho_1$  por una tabla de logaritmos vulgares ó de logaritmos neperianos; con lo cual, fijando *à priori* las magnitudes de aquellos radios vectores que correspondan á los valores de la amplitud, múltiplos de  $z$ , que se hallen en las tablas, con un error menor que el que convenga señalar, claro es que la suma de errores gráficos quedará circunscrita á límites tanto más reducidos, cuanto mayor haya sido el número de radios vectores que hubiésemos determinado; y de esta suerte lograremos que el trazado de la curva ofrezca las garantías necesarias de exactitud.

**37. Empleo de la curva exponencial.**—Más sencillo y preferible nos parece el empleo de una curva exponencial referida á un sistema de ejes rectangulares, en la cual las abscisas representen los números sucesivos, y las ordenadas los logaritmos correspondientes; porque valiéndose de papel bien cuadriculado y de unas tablas de logaritmos, la construcción de dicha curva resulta sin duda más fácil, rápida y exacta que la de la espiral logarítmica, de que nos hemos ocupado.

**38.** Para el trazado de la curva exponencial tomaríamos (figura 14) como abscisas, magnitudes proporcionales á números suficientemente próximos, y como ordenadas magnitudes que representarían, según la escala establecida, los logaritmos de di-

Fig. 14.





chos números; y por los puntos así obtenidos se trazaría cuidadosamente una línea continua.

39. Para dar idea del empleo de las curvas indicadas en las operaciones gráficas de multiplicar, dividir, elevar á potencias y extraer raíces, bastará que consideremos líneas cualesquiera como elementos del cálculo; puesto que ya hemos visto que toda fracción tiene por representación gráfica una línea, fácil de construir.

Sea el producto

$$N = a \times b \times c \dots$$

de donde

$$\log N = \log a + \log b + \log c + \dots$$

Para efectuarlo con la espiral logarítmica, determinaríamos las amplitudes  $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$  correspondientes á los radios vectores  $\rho = a, \rho' = b, \rho'' = c \dots$ ; y como tenemos

$$\begin{aligned} \log a &= \log \rho = \alpha \\ \log b &= \log \rho' = \alpha' \\ \log c &= \log \rho'' = \alpha'' \end{aligned}$$

resultará:

$$\log N = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots = \Sigma \alpha;$$

lo que nos dice que  $N$  será el radio vector que corresponde á la amplitud  $\Sigma(\alpha)$ , fácil, por tanto, de determinar.

Con la curva exponencial procederíamos del modo siguiente:

Siendo  $y, y', y'' \dots$  los logaritmos correspondientes á los números  $x = a, x' = b, x'' = c, \dots$  de donde

$$\log a = \log x = y$$

$$\log b = \log x' = y'$$

$$\log c = \log x'' = y''$$

tendríamos

$$\log N = y + y' + y'' + \dots = \Sigma (y);$$

lo que demuestra que la suma de las ordenadas, correspondientes á los factores propuestos, representa el logaritmo del producto, el cual tendrá por representación gráfica en la curva exponencial aquella abscisa que corresponda á una ordenada, cuyo valor sea  $Y = \Sigma (y)$ .

El cociente de dos líneas  $a$  y  $b$  se construiría con la misma facilidad, teniendo en cuenta que

$$\log \left( \frac{a}{b} \right) = \log a - \log b.$$

En cuanto á la determinación gráfica de la potencia de una línea, podrá suceder que el exponente sea positivo ó negativo, y no consideramos el caso de que sea fraccionario, porque el cálculo se haría de la misma manera.

Sea por lo tanto

$$N = a^n;$$

de donde

$$\log N = n \log a.$$

En este caso,  $N$  sería en la espiral el radio vector correspondiente á  $n$  veces la amplitud del radio vector  $a$ , y en la curva exponencial  $N$  sería la abscisa de una ordenada igual á  $n$  veces la de aquella cuyo valor numérico fuera  $a$ .

Si tuviéramos

$$N = a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n;$$

para reducir este caso al anterior bastaría construir primero la línea inversa de  $a$ , que representaremos por  $c$ , puesto que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = c^n = N.$$

Por último, para construir la raíz de un grado cualquiera de una línea

$$N = \sqrt[n]{a},$$

tomaríamos logaritmos, de donde

$$\log N = \frac{\log a}{n},$$

lo que nos dice que con cualquiera de las curvas procederíamos á determinar el radio vector en la primera, ó la abscisa en la segunda, de la enésima parte de  $\log a$ , representado en la espiral logarítmica por la amplitud del radio vector, igual á la línea  $a$ , y en la curva exponencial por la ordenada, correspondiente á la abscisa igual á dicha línea  $a$ .

**40.** Si  $n$  fuera igual á 2, es decir, si se tratase de construir la raíz cuadrada de una línea, pudiera procederse, como se sabe, directamente, describiendo una semicircunferencia sobre un diámetro igual á  $1 + a$ , y la perpendicular levantada en el extremo común á los segmentos 1 y  $a$ , y limitada por el diámetro y la semicircunferencia, sería la raíz cuadrada buscada.

Otro tanto pudiera decirse respecto de las expresiones

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

de cuya construcción se ocupa la Geometría elemental.



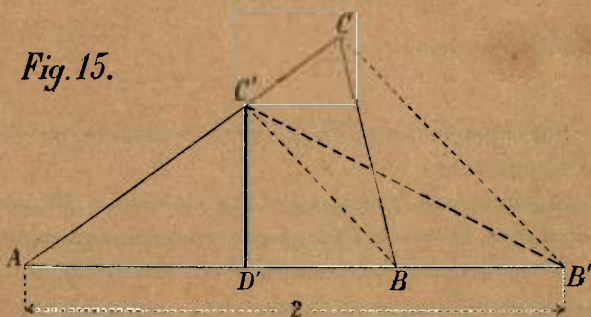
**41. Cálculo gráfico de las áreas.**— Consideremos dos casos, según la naturaleza del contorno.

**42. 1.º CASO.** *Cuando el contorno es rectilíneo.*— En este caso el área puede representarse gráficamente por una línea, obtenida por construcciones geométricas sencillas y de las cuales vamos á ocuparnos.

El problema queda reducido á transformar un polígono cualquiera en un triángulo equivalente, y éste á su vez en otro triángulo de la misma superficie, y cuya base sea igual á 2; porque es claro que su área, y por lo tanto la del polígono propuesto, tendrá por representación gráfica la altura del triángulo resultante.

**43.** Veamos, ante todo, cómo se transforma un triángulo en otro equivalente, cuya altura sea la representación gráfica del primero.

*Fig. 15.*



Sea el triángulo ABC. Sobre uno de sus lados, prolongado si uera necesario, se toma una magnitud  $AB' = 2$ , se une el extremo  $B'$  con el vértice C; por B se traza la recta  $BC'$  paralela á la  $B'C$ , y el punto  $C'$  será el vértice del triángulo cuya base es  $AB'$  y cuya altura  $C'D'$  representa el área del propuesto.

En efecto; los triángulos  $BC'C$  y  $BC'B'$  son equivalentes por tener la misma base é igual altura: es decir

$$BC'C = BC'B'$$

y como por otra parte tenemos

$$ABC = ABC' + BC'C$$

$$AB'C' = ABC' + BC'B'$$

resultará

$$ABC = AB'C'$$

El área del triángulo  $AB'C'$  es

$$AB'C' = \frac{1}{2} AB' \times C'D';$$

por construcción se verifica

$$AB' = 2,$$

luego

$$AB'C' = C'D'$$

como queríamos demostrar.

**44.** Supongamos ahora un polígono cualquiera; tal como el ABCDEF (figura 16).

Prolonguemos uno de sus lados, por ejemplo, el AF, para que sobre él resulte uno de los del primer triángulo equivalente, debiendo ser el otro lado el adyacente AB del polígono; tracemos la diagonal FD y por el vértice E la recta  $EE'$  paralela á dicha diagonal. Los triángulos DFE y DFE' serán equivalentes por tener la misma base é igual altura; por lo tanto, el polígono propuesto será equivalente al ABCDE', por componerse ambos de la parte común ABCDF y respectivamente de los triángulos BFE y DFE', de la misma superficie. Quedando así reemplazado el triángulo DEF por el DFE' y referido el vértice E á la recta AL, resulta que por esta primera construcción se ha transformado el polígono propuesto en otro equivalente de un lado menos.





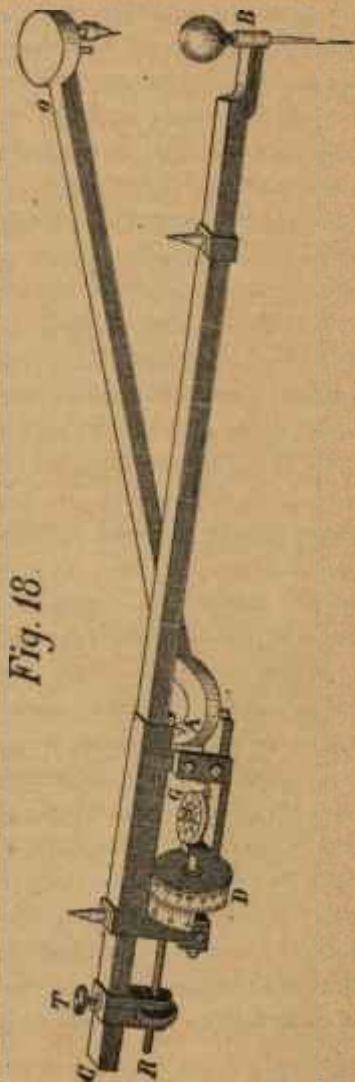


masium» de «Schaffausen» (Suiza), consta esencialmente (figura 18) de dos varillas OA, CB, articuladas en el punto A.

La primera lleva en su extremo O una punta de acero, que se clava en el papel y sirve de centro general de rotación de todo el planimetro; y la segunda presenta en su extremo B un estilite y en el C una ruleta graduada D, de borde estrecho y redondeado, cuyo plano es perpendicular á la dirección de la varilla BC.

El eje de la ruleta lleva un tornillo sin fin que engrana con un piñón de diez dientes, situado en el eje vertical de una rueda contadora G; todo lo cual está convenientemente dispuesto en una armadura metálica, que contiene la línea de fe de dicha rueda, y además un nonius circular para medir las fracciones de revolución de la ruleta que no pueden apreciarse directamente.

La ruleta está dividida en cien partes iguales, el nonius en diez y la rueda contadora en otras diez; de donde resulta que la rueda





contadora aprecia revoluciones completas de la ruleta; ésta por su graduación propia, centésimas de revolución y el nonius milésimas de revolución.

Las indicaciones del planimetro dan, por tanto, á conocer el número de revoluciones efectuadas por la ruleta con un error menor que una milésima.

Situado el instrumento sobre un tablero horizontal, de manera que la punta fija y el estilete ó punta móvil sean verticales, la ruleta debe descansar sobre el papel en todas las posiciones del planimetro, verificándose además por construcción que las varillas y el eje de aquélla son horizontales, y por tanto perfectamente paralelos al plano del tablero.

La distancia DA, del plano de la ruleta, al punto A de articulación de las varillas, es invariable; pero la magnitud AB del brazo del planimetro puede, entre ciertos límites, variarse á voluntad, según la unidad de superficie á que se quiera que corresponda la lectura. Para lograr esto, la armadura de la ruleta lleva una caja en la que entra y se desliza el brazo variable del planimetro, el cual presenta diversas divisiones que se ponen en coincidencia con la línea de fe marcada en un extremo de dicha caja por medio de un tornillo de presión T y otro de coincidencia R, convenientemente dispuestos.

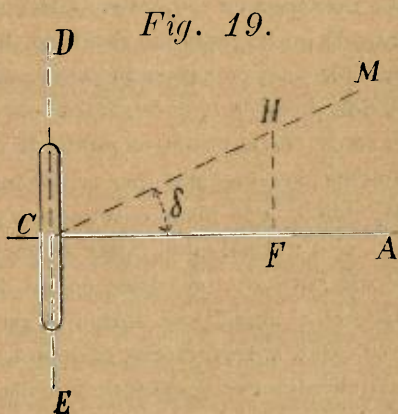
El estilete ó punta móvil B termina por su parte superior en una pequeña esfera por la que se coge y manipula el planimetro, para hacer que dicho estilete recorra exactamente el contorno de la figura cuya área se quiere calcular; y con objeto de que la punta fija permanezca clavada en el papel y no se salga del pequeño taladro en que se aloja, á pesar de los esfuerzos horizontales á que resulta sometida durante la operación, y especialmente en determinadas posiciones del instrumento, se coloca sobre el extremo de la varilla correspondiente y encima de la punta fija una pesa provista de un pequeño vástago que penetra en un taladro practicado en dicha varilla.

48. Para medir el área de una figura cualquiera, se fija el



papel (1) en que esté trazada sobre un tablero horizontal, de modo que la superficie de aquél resulte perfectamente plana y adaptada á la del tablero. Se señala en el contorno un punto cualquiera de partida y se elige como polo ó centro general de rotación del planimetro otro punto convenientemente situado, que puede ser interior ó exterior á la figura. Hecho esto, se clava en este último punto la punta fija, se coloca el estilete móvil sobre el punto de partida ú origen del contorno, asegurándose bien del íntimo contacto entre la ruleta y la superficie del papel, y se verifica la lectura que acusa el instrumento en la posición inicial en que queda colocado. Dicha lectura podrá ser 0 si se ha tenido cuidado de poner en coincidencia los ceros con las líneas de fe. Acto continuo se conduce el estilete ó punta móvil sobre el contorno, recorriéndolo cuidadosamente *de izquierda á derecha*, es decir, en el sentido que se mueven las manecillas de un reloj, hasta volver al punto de partida, en cuyo caso se verifica una segunda lectura de la cual se resta la primera.

**49.** Veamos ahora cómo de la diferencia positiva ó negativa de ambas lecturas, ó lo que es lo mismo, del número total de revoluciones efectuadas por la ruleta, que es lo que expresa aquella diferencia, se deduce ó resulta la superficie



(1) El papel debe ser mate y de grano fino, para que la ruleta no deje de girar sobre sí misma, cuando deba hacerlo, por falta de la adherencia conveniente entre su borde y la superficie sobre que descansa y se mueve.

de la figura cuyo contorno se ha recorrido con el estilete del planimetro.

Para esto es necesario, ante todo, conocer la ley á que obedecen los movimientos de rotación de la ruleta alrededor de su eje, cuando se la obliga á recorrer una trayectoria cualquiera sobre un plano al cual sea constantemente perpendicular.

Si la trayectoria recorrida por el punto de contacto fuera la traza horizontal DE del plano de la ruleta (figura 19), ó una curva cualquiera; pero bajo la condición, en este caso, de que la proyección horizontal de la ruleta fuese siempre tangente á la trayectoria, es evidente que aquélla rodaría sobre ésta sin deslizamiento alguno. Por lo tanto, llamando E al espacio recorrido por el punto de contacto,  $r$  al radio de la ruleta y  $n$  al número de revoluciones que hubiere efectuado, tendremos

$$n = \frac{E}{2\pi r}.$$

Si la trayectoria fuese la proyección del eje CA de la ruleta, ó una curva cualquiera, recorrida con la condición de que el plano de aquélla contenga en todas sus posiciones á la normal á la curva, trazada por el punto de contacto, en ambos casos es también indudable que, no habiendo razón para que la ruleta gire en un sentido preferente, se deslizará sobre la trayectoria conservando sobre ella el primitivo punto de contacto.

Finalmente, supongamos que la ruleta se mueva sobre una recta CM, oblicua á su plano ó sobre una curva de modo que ni la tangente ni la normal en el punto de contacto coincidan con la proyección horizontal del disco en sus diversas posiciones.

Llamando  $\delta$  al ángulo que forma el eje de la ruleta con la tangente actual á la trayectoria, podemos considerar cada uno de los movimientos elementales de aquélla como resultante de una traslación CF á lo largo del eje y una rotación perpendicular al mismo FH. Por virtud de la primera, la ruleta se deslizará sin girar, y como consecuencia de la segunda recorrerá el es-



pacio infinitamente pequeño  $FH = de$ , al cual corresponderá un elemento de revolución expresado por

$$dn = \frac{de}{2\pi r},$$

y puesto que  $FH = CH \sin \delta$ , ó bien  $de = dE \sin \delta$ , resultará

$$dn = \frac{dE \sin \delta}{2\pi r}.$$

Si la trayectoria fuese rectilínea,  $\sin \delta$  sería constante, y por lo tanto, para un espacio total recorrido  $E$ , tendríamos

$$n = \frac{E \sin \delta}{2\pi r}.$$

Si aquélla fuera curvilínea,  $\sin \delta$  sería variable; y entonces el número de revoluciones correspondientes al camino  $E$ , recorrido sobre la trayectoria, tendría por expresión

$$n = \frac{1}{2\pi r} \int dE \sin \delta;$$

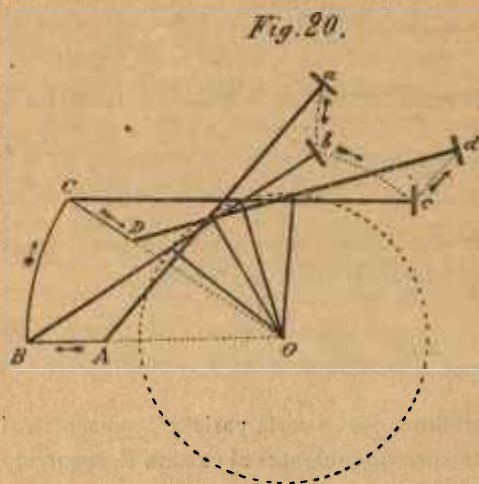
pero en este caso  $\int dE \sin \delta$  no representa otra cosa que la proyección de la trayectoria recorrida sobre la dirección del plano de la ruleta.

**50.** Antes de pasar adelante, conviene poner de manifiesto una propiedad notable del planimetro, y es la siguiente. Obedeciendo las revoluciones de la ruleta á los movimientos simultáneos y perpendiculares del estilete móvil; uno á lo largo del radio vector y el otro, según la tangente, al elemento de circunferencia de círculo descrito en cada instante, tales movimientos se acusarán en la ruleta por la suma ó la diferencia de las revoluciones correspondientes á cada uno de ellos.

Para poner en evidencia aquella propiedad, supongamos que la punta móvil recorre la trayectoria ABCD (figura 20), siendo



$OA = OD$  y  $BC$  un arco de círculo de radio  $OB$ , estando el polo en el centro.



Si convenimos en considerar positivas las revoluciones efectuadas de derecha á izquierda, y negativas las de izquierda á derecha, imaginando siempre al observador mirando á la ruleta desde el punto de articulación, es evidente que al recorrer la punta móvil el segmento

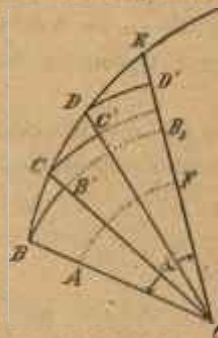
$AB$ , en la dirección del radio vector, sin engendrar ésta superficie alguna, la ruleta girará de izquierda á derecha, en el caso de la figura, y registrará un cierto número negativo de revoluciones,  $-n'$ . De  $B$  á  $C$ , en cuyo trayecto el radio vector es constante, la ruleta girará también en sentido negativo y registrará otra lectura,  $-n$ . Finalmente, al recorrer el estilete el segmento  $CD$ , aquélla girará en sentido contrario al que giró para el segmento  $AB$ ; y como recorrer el segmento  $CD$  equivale á recorrer el  $BA$ , no sólo porque ambos son iguales entre sí, sino porque ocupan la misma región del vector general, ahora la ruleta girará la misma cantidad que la primera vez, pero en sentido contrario, y registrará por lo tanto la lectura  $+n'$ , que anulará á la primera.

Resulta, pues, que la ruleta acusará el mismo número de revoluciones al recorrer el estilete la trayectoria  $ABCD$  que solamente la  $BC$ .

Consideremos ahora la trayectoria  $ABEF$  (figura 21) com-

puesta de un arco de curva cualquiera BE y dos segmentos diferentes de vector, AB y EF, siendo  $OA = OF$ , y O el polo. Dividimos el ángulo  $\alpha$  en partes iguales, y desde el polo, como centro, tracemos los arcos de círculo BB', CC', etc.

Fig. 21.



Es claro que si el estilete recorre la trayectoria escalonada ABB'CC', etcétera, sucederá ahora lo propio que en el caso anterior, pues en el fondo las condiciones son las mismas; es decir, que las revoluciones que dé la ruleta al recorrer el estilete los segmentos sucesivos de vector AB, B'C..... etc., quedarán anuladas por un número igual de revoluciones de sentido contrario, al pasar el estilete de E á F; porque evidentemente, la suma de los primeros es igual á este último, y además la región de vector en que tales movimientos contrarios se verifican es la misma, por ser  $OA = OF$ . Así, pues, la misma lectura acusará el planimetro recorriendo la trayectoria AB.....EF, que solamente la BEB<sub>1</sub> siendo  $OB = OB_1$ .

Pero como lo propio sucede cualquiera que sea el número de partes en que se divida el ángulo  $\alpha$ , es evidente que en el límite, cuando el ángulo de los vectores sucesivos sea infinitamente pequeño, la trayectoria escalonada se confundirá con el arco de curva BE, el estilete la recorrerá entonces exactamente, y la propiedad que nos ocupa subsistirá de la misma manera; porque lo que antes eran movimientos alternados, tan pequeños como se quiera, son ahora movimientos simultáneos sucesivos infinitamente pequeños, de la misma clase.

Queda, pues, demostrado que las revoluciones de la ruleta responden por completo á la independencia de los movimientos simultáneos del estilete, y por consiguiente, que las originadas por cualquiera de ellos desaparecerán de la lectura si el esti-





$r$ , el radio de ésta;

$V$ , el radio  $OB$  del círculo, cuya circunferencia recorre el estilete móvil;

$Z$ , el radio de la circunferencia descrita por el punto de contacto de la ruleta;

$\alpha$ , el ángulo de las dos varillas;

$\beta$ , el que forma la varilla  $OA$  con el plano de la ruleta;

$\gamma$ , el formado por los radios  $R$  y  $Z$ ;

$\delta$ , el ángulo que forma el radio de la trayectoria circular que describe la ruleta y el plano de la misma.

El espacio recorrido por el punto de contacto en una revolución del radio  $Z$  será  $2\pi Z$  y por lo tanto, en  $N$  revoluciones,  $2\pi ZN$ .

Siendo  $n$  el número total de revoluciones efectuadas por la ruleta, su expresión será, puesto que en este caso  $E = 2\pi ZN$ ,

$$n = N \left( \frac{Z}{r} \right) \sin \delta; \quad (1)$$

y como  $\delta = \beta + \gamma$  y  $\beta \triangleq 90 - \alpha$ , será  $\delta = 90 - (\alpha - \gamma)$  y  $\sin \delta = \cos (\alpha - \gamma)$ ; por tanto

$$n = N \left( \frac{Z}{r} \right) (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma) \quad (2)$$

De los triángulos rectángulos  $OCs$  y  $sCA$  se deducen las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} Cs = Z \sin \gamma = \rho \sin \alpha \\ Os = Z \cos \gamma = R + \rho \cos \alpha \end{array} \right\} \text{ de donde } \left\{ \begin{array}{l} Z = \rho \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\rho \sin \alpha}{R + \rho \cos \alpha} \end{array} \right.$$

Sustituyendo el valor de  $Z$  en la ecuación (2) resulta

$$n = N \frac{\rho}{r} \left( \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\operatorname{tg} \gamma} + \sin^2 \alpha \right)$$

y reemplazando el valor de  $\operatorname{tg} \gamma$

$$n = N \frac{R \cos \alpha + \rho}{r} \quad (3)$$

Esta expresión nos dice que  $n$  disminuye á medida que  $\alpha$  aumenta, y recíprocamente.

Si  $\alpha = 0$ , y por tanto  $\delta = 90^\circ$  y  $\cos \alpha = 1$ , tendremos

$$n = N \frac{R + \rho}{r};$$

y la ruleta describirá una circunferencia de radio  $R + \rho$ , girando sin deslizamiento alguno.

Si  $\alpha = 180^\circ$  (aun cuando á ello se opone en realidad la disposición del planimetro) tendríamos  $\cos \alpha = -1$ , y por tanto

$$n = -N \frac{R - \rho}{r}.$$

En este caso también rodaría la ruleta sin deslizamiento alguno; pero en sentido contrario que antes, y describiría una circunferencia de radio  $R - \rho$ .

Claro es que entre estos valores límites de  $\alpha$  debe haber uno que corresponda á la condición  $\delta = 0$ , y para el cual la ruleta describa una circunferencia deslizándose sobre ella y sin girar en ningún sentido.

Como entonces  $n = 0$  y por tanto  $R \cos \alpha + \rho = 0$ , el valor de  $\alpha$  quedará definido por la relación

$$\cos \alpha = -\frac{\rho}{R};$$

lo que nos dice desde luego que  $\alpha > 90^\circ$ .

Su suplemento  $\lambda$  estará definido por la relación

$$\cos \lambda = \frac{\rho}{R}$$

y gráficamente se determinaría su valor, describiendo una semicircunferencia sobre  $R$  como diámetro, trazando desde  $A$  como centro y con un radio  $\rho$  un arco que corte á aquélla. El punto de intersección  $C''$ , unido con el  $A$ , nos daría la dirección que corresponde al ángulo  $\lambda$  y por tanto á su suplemento  $\alpha$ .

En este caso la punta móvil describiría una circunferencia de radio  $K$ , cuyo valor dependerá naturalmente de las dimensiones relativas del planimetro; y es claro que suponiendo que el estilete se mueva constantemente de izquierda á derecha, la ruleta girará de derecha á izquierda si  $V > K$ , y de izquierda á derecha si  $V < K$ ; acusando en el primer caso lecturas positivas, y en el segundo negativas.

En el triángulo  $OAB$  tenemos, según el teorema fundamental de la Trigonometría rectilínea,

$$V^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \cos \alpha,$$

de donde

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + l^2 - V^2}{2Rl}$$

Este valor sustituido en la ecuación (3) nos da

$$n = N \frac{R^2 + l^2 + 2l\rho - V^2}{2lr}$$

Multiplicando esta ecuación por  $\pi \frac{2lr}{N}$ , resultará

$$\frac{2\pi rl}{N} n = \pi (R^2 + l^2 + 2l\rho) - \pi V^2 \quad (4)$$

El segundo miembro de esta ecuación representa la diferencia de dos círculos, cuyos radios son  $\sqrt{R^2 + l^2 + 2l\rho}$  y  $V$ , ó lo que es igual, la superficie anular comprendida entre ambos.

**52.** Demostremos que el radio constante del primero es precisamente igual á  $K$ .

En efecto; en el triángulo rectángulo  $OB'C'$  se verifica, siendo  $OC' = c$ ,

$$K^2 = c^2 + (l + \rho)^2 = c^2 + l^2 + 2l\rho + \rho^2;$$



del triángulo OAC' se deduce que

$$c^2 + \rho^2 = R^2,$$

por tanto

$$K^2 = R^2 + l^2 + 2lp \quad \text{y} \quad K = \sqrt{R^2 + l^2 + 2lp},$$

como queríamos demostrar.

**53.** Representando por A el factor constante  $2\pi rl$ , la ecuación (4) toma la forma

$$\frac{A}{N} n = \pi K^2 - \pi V^2$$

Si  $A = 1$ , lo que exige que  $l = \frac{1}{2\pi r}$ , tendremos

$$n = N (\pi K^2 - \pi V^2) \quad (5)$$

relación hallada en el supuesto de que  $V < K$ , como manifiesta la figura; y si  $V > K$ , sería entonces

$$n = N (\pi V^2 - \pi K^2) \quad (6)$$

lo que nos dice que la ruleta del planimetro registra, en función de la primera potencia de las revoluciones que da, N veces la superficie de una corona, uno de cuyos radios, K, es constante y hemos visto cómo se determina, y el otro, V, es el del círculo propuesto.

**54.** Si despejamos  $N\pi V^2$  en las ecuaciones (5) y (6) tendremos

$$N\pi V^2 = N\pi K^2 - n \quad \dots \quad \text{Si } V < K$$

$$N\pi V^2 = N\pi K^2 + n \quad \dots \quad \text{Si } V > K$$

de donde resulta, que para deducir, del valor absoluto de la lectura del planimetro, la superficie total del círculo dado ó la del sector correspondiente al arco recorrido, cuando la punta fija ocupa el centro, será necesario sumarla ó restarla del área cons-

tante  $\pi K^2$  ó  $N\pi K^2$ . Habrá de sumarse cuando  $V > K$  y restarse en el caso contrario, es decir, cuando  $V < K$ .

**55.** De las ecuaciones (5) y (6) se deduce, que la expresión general de  $n$  es

$$n = \pm N (\pi V^2 - \pi K^2),$$

pero como, cualquiera que sea el valor de  $N$ , el radio constante  $V$  habrá girado un cierto ángulo  $\tau$ , dicha expresión podemos también escribirla del siguiente modo

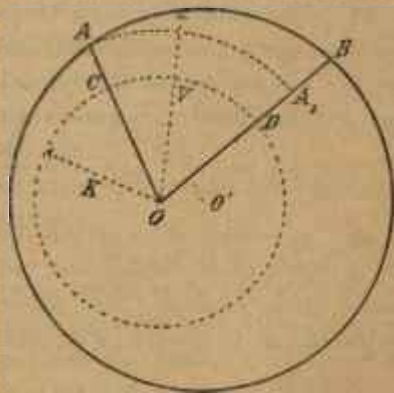
$$n = \pm \left( \frac{1}{2} V^2 \tau - \frac{1}{2} K^2 \tau \right) = \int_0^\tau \pm \left( \frac{1}{2} V^2 d\tau - \frac{1}{2} K^2 d\tau \right)$$

lo que nos dice que las funciones del planimetro consisten sencillamente en verificar mecánicamente la integración del elemento superficial  $\frac{1}{2} V^2 d\tau - \frac{1}{2} K^2 d\tau$ , es decir, de la diferencia entre el sector elemental engendrado por el radio vector y el correspondiente al círculo de radio constante  $K$ .

**56.** Pues supongamos ahora que el polo  $O$  no coincide con el centro  $O'$  del círculo, y recorramos con el estilete un arco cualquiera (figura 22 a).

Si el arco recorrido es menor que una circunferencia, por ejemplo  $AB$ , y los radios extremos son de valor distinto, en virtud de la propiedad notable del planimetro oportunamente demostrada, la lectura que registre

*Fig. 22 a.*



la ruleta se compondrá de dos partes, que se sumarán ó restarán, según su signo; una  $n$ , correspondiente al movimiento de rotación del estilite, que representará exactamente la diferencia entre el área del sector OAB y la del OCD, y la otra  $n'$ , originada por la traslación de dicho estilite á lo largo del vector, al recorrer el camino  $BA_1 = OB - OA$ . Pero el número  $n'$  de revoluciones extrañas al cálculo de la superficie engendrada por el vector variable, podemos hacer que desaparezca de la lectura, con sólo conducir la punta móvil desde el extremo B del arco hasta un punto  $A_1$  tal, que  $OA = OA_1$ ; y entonces la lectura que se obtenga será  $n$ , que representa el área engendrada por el radio variable  $V$ , disminuída en la del sector correspondiente de radio  $K$ .

Si recorremos la circunferencia entera una sola vez, como el estilite vuelve al punto de partida, las revoluciones extrañas desaparecerán de la lectura, y ésta expresará fielmente la diferencia entre el área del círculo propuesto y la del de radio  $K$ ; lo mismo exactamente que cuando el polo y el centro coincidían. De suerte que, cuando se recorre la circunferencia un número exacto de veces, el número de revoluciones registradas por la ruleta será el mismo, ya esté el polo en el centro ó fuera de él.

57. En virtud de lo expuesto, es claro que en el caso particular en que las circunferencias de radios  $V$  y  $K$  se cortaran, la lectura  $n$  representaría la diferencia de las superficies no comunes  $A - B$  (figura 23), y entonces tendríamos

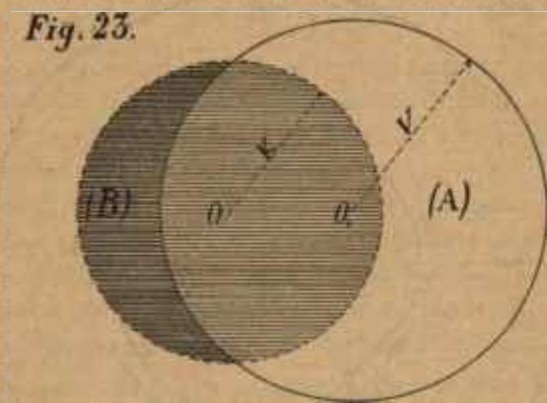
$$S = \pi V^2 = (A - B) + \pi K^2 = n + \pi K^2.$$

58. Si consideramos que las funciones del planimetro, cuando la punta móvil recorre una circunferencia de círculo, consisten, como ya hemos visto, en verificar mecánicamente la integración de la diferencia de sectores elementales,

$$\frac{1}{2} V^2 d\tau - \frac{1}{2} K^2 d\tau,$$



y tenemos además en cuenta que el valor ideal correcto del primer sector tiene exactamente la misma expresión, cualquiera que sea la curva recorrida por el estilete, es claro que



dichas funciones serán completamente generales y aplicables, por tanto, á todo género de curvas planas.

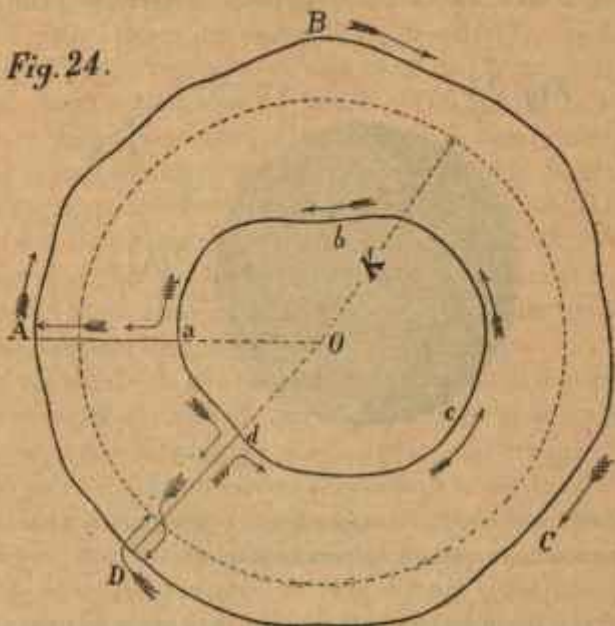
**59.** Los casos que pueden ocurrir, en cuanto á la situación relativa del círculo de radio  $K$  y la curva cuya superficie se quiere calcular, son cuatro, á saber:

- 1.º Cuando la curva es interior al círculo.
- 2.º Cuando el círculo es interior á la curva.
- 3.º Cuando estando el polo  $O$  dentro de la curva, ésta y la circunferencia del círculo se cortan.
- 4.º Cuando el polo  $O$  es exterior á la curva, haya ó no intersección entre ella y la circunferencia.

**60.** En el primer caso, como indica la curva  $abcd$  (figura 24) la ruleta girará de izquierda á derecha, las indicaciones sucesivas del contador serían, por ejemplo, 999, 998, ....., en orden decreciente, y por lo tanto, para deducir el número final de revoluciones, sería necesario restar la lectura correspondiente de

10, 100, 1000, etc., porque en este caso el planimetro inscribe y registra un número negativo.

Fig. 24.



La expresión de la superficie  $a b c d a$  sería

$$S = -n + \pi K^2.$$

61. En el segundo caso, la ruleta giraría en sentido contrario, es decir, de derecha á izquierda, las indicaciones del contador serían constantemente crecientes, acusando al fin un número  $n$  de revoluciones positivas, y por tanto, la superficie ABCDA sería

$$S = +n + \pi K^2.$$

62. En el tercer caso (no indicado en la figura) el contador marcaría números crecientes, para aquellas porciones de contorno que fueran exteriores á la circunferencia de radio  $K$ , y



decrecientes para las que fuesen interiores á dicha circunferencia.

La expresión de la superficie sería entonces

$$S = \pm n + \pi K^2,$$

siendo  $n$  positivo ó negativo según que la suma de los números registrados por la ruleta, para las porciones exteriores de la curva, fuera mayor ó menor que la suma de los correspondientes á las porciones interiores de la misma.

Como el círculo constante no aparece realmente trazado en el papel, el signo de  $n$  se conocerá del siguiente modo:

Si  $m$  es el número de veces que pasa el 0 por la línea de fe en sentido positivo, es decir, de derecha á izquierda, y  $q$  el número de veces que pasa en sentido contrario; cuando las primeras indicaciones sean crecientes,  $n$  será positivo si  $m \geq q$ , y negativo si  $m < q$ . Cuando las primeras indicaciones sean decrecientes,  $n$  será positivo si  $m > q$ , y negativo si  $m \leq q$ .

La estricta aplicación de estas reglas supone que los ceros coinciden en la posición inicial del planimetro; pero si no coincidieran, sería aplicable la primera, si al principio se encontrara el 0 á la izquierda de la línea de fe, y la segunda si estuviera á la derecha.

Para no cometer error, ni en la magnitud ni el signo de  $n$ , como consecuencia de las anteriores, puede aplicarse la siguiente regla, no olvidando que la primera lectura ha de tomarse siempre como sustraendo; á saber:

*Cada vez que pase el 0 por la línea de fe en sentido positivo, se añadirá 10000 á la segunda lectura: y cada vez que pase el 0 por dicho índice en sentido negativo, se añadirá 10000 á la primera.*

Las lecturas se hacen tomando como unidad la milésima de revolución de la ruleta, que es lo que aprecia el nonius.

**63.** Para comprender con entera claridad el cuarto caso,



propongámonos antes medir el área comprendida por las curvas propuestas ABCDA, *abcd*a, y tomemos en ellas como puntos de partida los A y *a*, en línea recta con el polo O.

El medio que naturalmente se ocurre para esto es recorrerlas separadamente con el estilete y restar las superficies totales de cada una.

Pero si observamos que, siendo *n* y *n'* las lecturas respectivas, tenemos

$$S = \pi K^2 + n$$

$$s = \pi K^2 - n'$$

y por tanto

$$S - s = n + n',$$

podremos proceder de una sola vez recorriendo ambas curvas en el sentido indicado por las flechas, pasando de una á otra por la recta Aa, y volviendo á pasar por la misma para llegar finalmente al punto de partida A.

En efecto; al recorrer por completo la curva exterior, el planimetro marcará el número *n*. Las revoluciones de la ruleta, originadas por la trayectoria Aa, que el estilete sigue para pasar á la curva interior, se anularán, como sabemos, por el mismo número de revoluciones efectuadas en sentido contrario al pasar de nuevo el estilete del punto *a* al punto A; y por último, como ahora la curva interior se recorre en sentido contrario, es decir, de derecha á izquierda, así como antes el número *n'* de revoluciones resultaba negativo, ahora resultará evidentemente positivo. Por lo tanto, la lectura final será *n* + *n'* como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que ambas curvas estuvieran unidas por las rectas Aa y Dd, faltando los arcos AD y *ad*. Es indudable que si el estilete recorre la trayectoria ABCDdcbA, la lectura final representará la superficie de que ahora se trata; porque ahora, como antes, dicha lectura no representa otra cosa que la suma integral de la diferencia de los sectores elementales, engendrados por el radio vector en ambas curvas, y la realización

de dicha suma es completamente general é independiente del ángulo total descrito por el radio vector.

**64.** Como consecuencia de lo que acabamos de exponer, resulta que en el cuarto caso, es decir, cuando el polo es exterior á la curva, no es necesario tener para nada en cuenta la constante  $\pi K^2$ ; pues, como hemos visto, la lectura final representa fielmente la superficie de la curva propuesta.

**65.** Dijimos al principio que la longitud del brazo del planímetro puede variarse á voluntad, según la unidad de superficie á que se quiera que corresponda la lectura.

En cada división marcada en dicho brazo, se indica la escala de la figura y el valor que hay que atribuir á la unidad. Así, por ejemplo, cuando se pone en coincidencia la línea de fe con la división que marca  $2 \square M$  1:500, quiere decir esto que, siendo la escala del plano que se mide de  $\frac{1}{500}$ , cada unidad de lectura representa dos metros cuadrados, y por consiguiente la superficie del terreno representada por la figura del papel se obtendrá en metros cuadrados, multiplicando la lectura del planímetro por 2.

Pero puede suceder muy bien que la escala de la figura sea distinta de todas las marcadas en el instrumento, y entonces hay que saber cómo se halla la superficie real de la figura, en metros cuadrados, cualquiera que sea la división que se ponga en coincidencia; pues de tal suerte ya no habrá dificultad en calcular la correspondiente del terreno.

Para esto, llamemos  $s$  al área de la figura en el papel y  $S$  á la de su semejante del terreno, ambas en metros cuadrados;  $c$  al valor de la unidad que se indica en la división, expresado en metros cuadrados, y  $\frac{1}{N}$  la escala marcada á su lado en el planímetro.

Si la lectura obtenida es  $n$ , es evidente que será  $S = cn$ , y



como por razón de semejanza se verifica que  $\frac{s}{S} = \left(\frac{1}{N}\right)^2$  ten-

dremos  $s = c \left(\frac{1}{N}\right)^2 n$ , fórmula que resuelve el problema.

Las instrucciones suficientemente claras que acompañan al planímetro polar de Amsler nos excusan de entrar en más detalles acerca de su empleo.

## PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE ESTÁTICA GRÁFICA

### PRELIMINARES RELATIVOS Á LA COMPOSICIÓN Y EQUILIBRIO DE LAS FUERZAS

**66. Representación gráfica de las fuerzas**—Todo sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo ó sólido invariable, se representa en Estática gráfica por medio de dos figuras distintas. La primera se compone del sistema de rectas que indican las direcciones ó líneas de acción de las fuerzas: en ella se dan á conocer los puntos de aplicación de cada una, y por medio de flechas el sentido en que obran, poniendo así de manifiesto su verdadera distribución sobre el sistema material de que se trate. La segunda figura no es más que el polígono correspondiente de las fuerzas que se consideran, y cuyos lados representan las magnitudes de cada una de ellas, con arreglo á la escala establecida.

Tratándose de un sólido invariable, no es necesario fijar en la primera figura los puntos de aplicación, toda vez que cual-

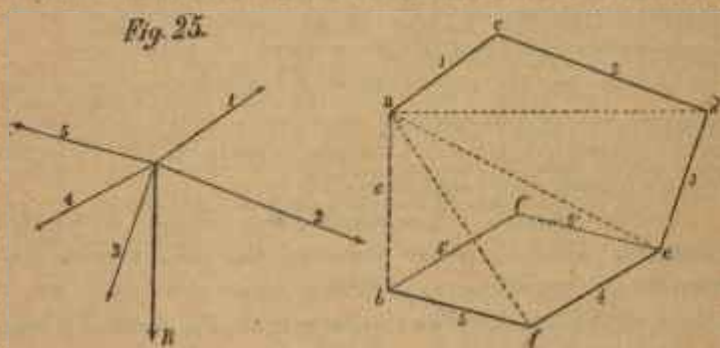


quiera de las fuerzas puede trasladarse, como sabemos, de un punto á otro de su línea de acción, si ambos están invariablemente unidos.

Las líneas de acción se indicarán por las cifras gruesas **1, 2, 3...** y los lados correspondientes del polígono de las fuerzas, por las delgadas del mismo nombre **1, 2, 3...**; de manera que, como ya en otro lugar establecimos, resulte el sentido cíclico de dicho polígono, recorriendo sus lados en orden creciente.

**67. Composición de las fuerzas aplicadas á un punto.**—El procedimiento ordinario de componer cualquier número de fuerzas aplicadas á un punto, por la regla conocida del polígono correspondiente, nos dice que la resultante pasa por dicho punto y es igual en magnitud y sentido á la suma geométrica de las componentes.

Sean, por ejemplo, las fuerzas **1, 2, 3, 4, 5** (figura 25), y tra-



ceamos el polígono de las mismas **1, 2, 3, 4, 5**. La recta **a b**, igual y contraria á la **b a**, que cierra el contorno, es la suma geométrica de las líneas que representan las fuerzas dadas, y por Mecánica racional sabemos que dicha recta representa en magnitud y sentido la resultante de las mismas.

Las diagonales trazadas desde el origen **a** del polígono re-

presentarán, por tanto, las resultantes parciales de los grupos **1, 2; 1, 2, 3; etc.**

Reducida la composición de fuerzas concurrentes á una suma geométrica de líneas, y con arreglo á lo que oportunamente se ha establecido, podemos afirmar que la proyección sobre un eje, de la resultante de varias fuerzas aplicadas á un punto de un sistema material, es igual á la suma algebraica de las proyecciones de sus componentes.

**68. Descomposición de fuerzas aplicadas á un punto.**—Descomponer una fuerza que actúa sobre un punto de un sistema material, en otras varias aplicadas á dicho punto, equivale á encontrar los sumandos de una suma geométrica conocida; y es claro que el problema será completamente indeterminado, si no se establecen las condiciones necesarias que puedan convenir en cada caso.

Desde luego, una fuerza puede descomponerse en otras  $n$ , fijando arbitrariamente  $n - 1$  de las componentes; porque debiendo tener el polígono de las  $n$  fuerzas el mismo origen y el mismo extremo que aquella que se quiere descomponer, la componente desconocida quedará determinada por el lado que cierra el polígono de las  $n - 1$  componentes dadas y la fuerza propuesta tomada como signo contrario.

Así, por ejemplo, si quisiéramos descomponer la fuerza  $R$  (figura 25) en cinco, siendo cuatro de ellas las **1, 2, 3, 4**, construiríamos el polígono  $ba = -R$ . 1. 2. 3. 4 y el lado 5 que lo cierra representaría en dirección, magnitud y sentido, la componente que satisface á la cuestión.

Si todas las fuerzas hubieran de estar en el mismo plano, pueden fijarse arbitrariamente todas las componentes, menos dos, así como las direcciones de estas últimas; porque entonces la magnitud y sentido de ellas resultará construyendo el polígono correspondiente á la fuerza dada, tomada en sentido contrario y á las  $n - 2$  componentes que se hayan fijado. El cierre del contorno se obtendrá trazando por su origen y por su extremo



dos rectas respectivamente paralelas á las direcciones de las componentes desconocidas, y el punto de intersección las definirá suficientemente en magnitud y sentido.

Por lo tanto, para descomponer la fuerza  $R$  en cinco, dadas las **1**, **2** y **3** y las direcciones de **4** y **5**, se construirá el polígono  $ba = -R$ . 1. 2. 3; por el punto  $e$  se traza una paralela á la dirección de la **4** y por  $b$  otra paralela á la dirección de la **5** y el punto  $f$  determina la magnitud y sentido de las componentes buscadas.

Este problema admite dos soluciones: una la que acabamos de indicar, y otra la que, como la figura manifiesta, resultaría trazando por  $e$  una paralela á la **5** y no á la **4** y por  $b$  otra paralela á la **4** y no á la **5**, resultando en el primer caso el polígono 1. 2. 3. 4. 5. 6, y en el segundo el 1. 2. 3. 5.' 4.' 6.

**69. Condiciones de equilibrio de las fuerzas aplicadas á un punto.**—Para que varias fuerzas aplicadas á un punto de un sistema material estén en equilibrio, sabemos que es necesario y suficiente que su resultante sea nula, y por tanto que lo sea su suma geométrica; de donde resulta que la condición gráfica equivalente será que el polígono de las fuerzas cierre, ó lo que es lo mismo, que estas sean iguales ó proporcionales á los lados de un polígono cerrado, respectivamente paralelas á ellos y del sentido que resulte de recorrerlos todos en un sentido constante.

**70.** Como sabemos que cuando varias fuerzas concurrentes están en equilibrio, se verifica que cada una de ellas es igual y directamente opuesta á la resultante de todas las demás, la solución á las cuestiones siguientes no puede ofrecer dificultad ni duda alguna.

1.<sup>a</sup> Dadas varias fuerzas, aplicadas á un punto material, y cuya resultante no sea nula, determinar la fuerza que, aplicada al mismo punto, las equilibre.

2.<sup>a</sup> Equilibrar una fuerza, que obre sobre un punto material, por otras varias aplicadas al mismo punto.



**71.** Todo cuanto se ha dicho acerca de la composición, descomposición y equilibrio de las fuerzas que actúan sobre un punto de un sistema material, es extensivo á todo sistema de fuerzas aplicadas á puntos distintos de un sólido invariable, siempre que todas las líneas de acción se corten en un mismo punto del sólido ó en otra cualquiera del espacio que se supone invariablemente unido á aquél; porque para reducir este caso al anterior bastaría trasladar las fuerzas del sistema, sobre sus líneas de acción correspondientes, al punto en que se cortan, lo cual es posible, como sabemos, sin alterar el estado de equilibrio del sólido invariable.

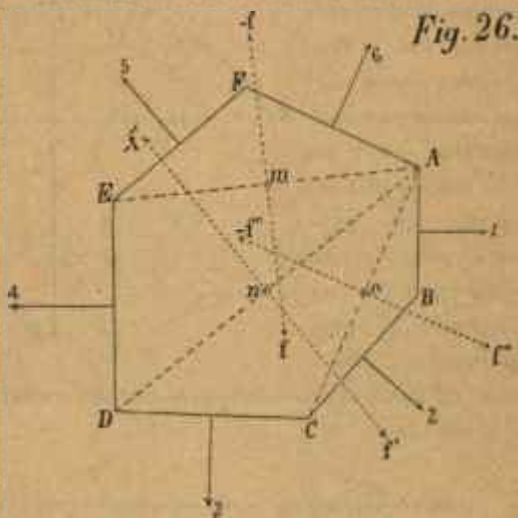
**72. Fuerzas normales á los lados de un contorno cerrado y plano.**—Suponiendo invariables los lados de un polígono cualquiera, cerrado y plano, si en el punto medio de cada uno se aplican fuerzas normales y proporcionales á dichos lados, situadas en el plano del polígono, y dirigidas todas hacia el interior ó hacia el exterior del mismo, tales fuerzas constituirán un sistema en equilibrio.

**73.** La proposición es evidente tratándose de un triángulo; porque las tres fuerzas aplicadas en los puntos medios de sus lados se cortan en un punto, y además, por ser proporcionales á dichos lados, el polígono de las mismas será un triángulo semejante al propuesto, siendo nula la resultante del sistema.

**74.** Supongamos que se trate de un polígono cualquiera. Si desde uno de sus vértices se trazan las diagonales AC, AD, AE (figura 26), y en el punto medio de cada una de ellas, es decir, en  $m$ ,  $n$  y  $o$ , introducimos dos fuerzas iguales y contrarias, normales y proporcionales á dichas diagonales,  $f$ ,  $-f$ ;  $f'$ ,  $-f'$ ;  $f''$ ,  $-f''$ ; es claro que el estado de equilibrio del polígono no sufrirá por ello alteración alguna; pero así se ve que los grupos de fuerzas 1, 2,  $-f'$ ;  $f''$ , 3,  $-f'$ ;  $f''$ , 4,  $-f$ ; y  $f$ , 5, 6; que se hallan en las condiciones del caso anterior, están en equilibrio;

por tanto, también lo estará el polígono bajo la acción de todos ellos, como queríamos demostrar. •

**75.** Observando que cada una de las fuerzas normales consideradas puede ser la resultante de una fuerza ó presión normal, de igual valor y uniformemente repartida en toda la longitud del lado correspondiente, podremos decir también, que todo polígono plano, cerrado y rígido estará en equilibrio



bajo la acción de una presión normal uniformemente repartida en todo su contorno, ya obre de dentro á fuera ó de fuera á dentro.

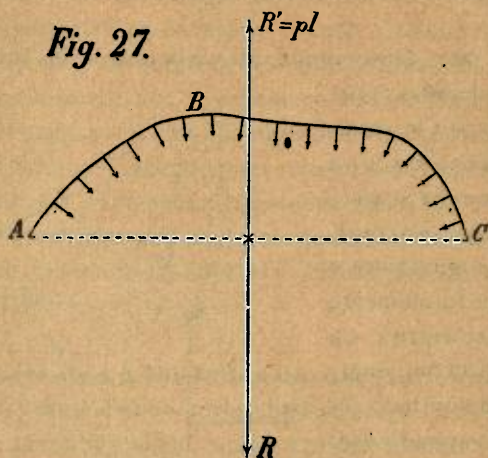
**76.** Siendo cierta la proposición que precede para un polígono, cualquiera que sea el número de sus lados, lo será también para toda curva cerrada, plana y rígida ó invariable.

Lo mismo pudiéramos decir respecto de un contorno mixtilíneo cualquiera.

Así, por ejemplo, si consideramos el arco de curva ABC (figura 27) unido invariablemente á su cuerda AC, y suponemos que todo el contorno se halle sometido á una presión normal de  $p$  kilogramos por unidad de longitud, es claro que el sistema estará en equilibrio; y la suma de las presiones que obran sobre la cuerda será  $R' = pl$ , siendo  $l$  su longitud; pero como esta



fuerza equilibra indudablemente á la suma de las presiones que actúan sobre el arco, es claro que la primera será igual y contraria á la resultante  $R$  de estas últimas. Por lo tanto, toda presión normal uniformemente repartida sobre un arco admite una resultante que pasa por el punto medio de la cuerda que subtiende, es perpendicular á ella y tiene por valor el producto de la presión unitaria por la longitud de la cuerda.



#### TEORÍA GEOMÉTRICA DE LOS POLÍGONOS FUNICULARES

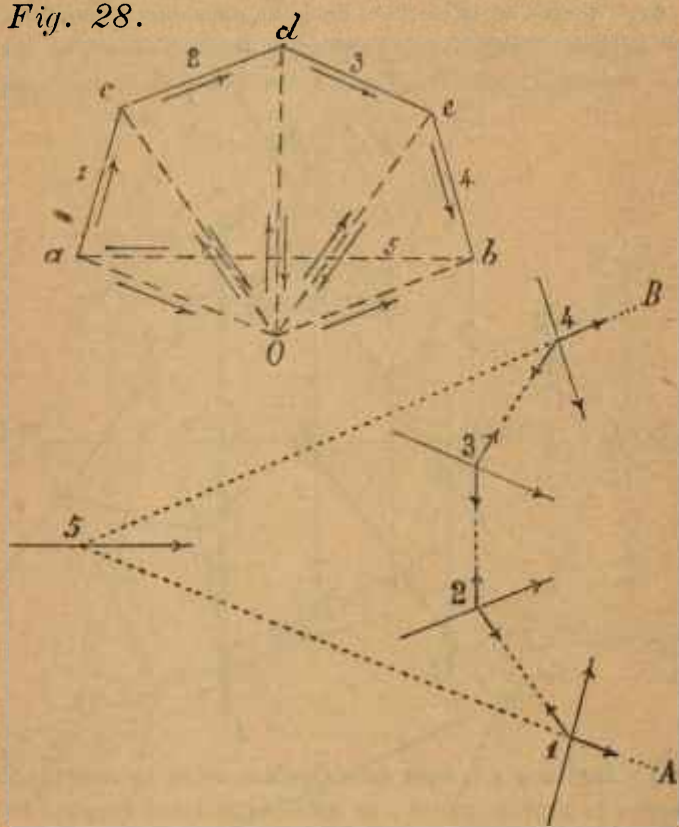
**77. Preliminares.**—Consideremos un sistema cualquiera de fuerzas situadas en un plano, cuyas líneas de acción (figura 28), sean, por ejemplo, **1, 2, 3, 4**; siendo 1, 2, 3, 4 los lados del polígono correspondiente á aquellas.

Si desde un punto arbitrario O, como *polo* de dicho polígono, trazamos los *radios polares* Oa, Oc, Od, Oe, Ob, que de aquí en adelante designaremos por las cifras de los lados que concurren en sus extremos, es decir, por 5.  $1 = Oa$ ;  $1. 2 = Oc$ ;  $2. 3 = Od$ ;  $3. 4 = Oe$ , y  $4. 5 = Ob$ ; y desde otro punto arbitrario A se traza la recta A **1**, paralela al radio polar 5. 1; por el punto de encuentro con la línea de acción **1**, la **1. 2** paralela al radio polar 1. 2; por el encuentro **2** la paralela **2. 3** al radio 2. 3, y así sucesivamente; el contorno que resulte, recibe el nombre de *polígono funicular* de las fuerzas dadas, relativo al polo O.



78. De aquí se deduce que un polígono funicular de un sistema de fuerzas está caracterizado por tener sus vértices sobre las líneas de acción de aquellas, y sus lados, paralelos á los radios polares del polígono de las mismas.

Fig. 28.

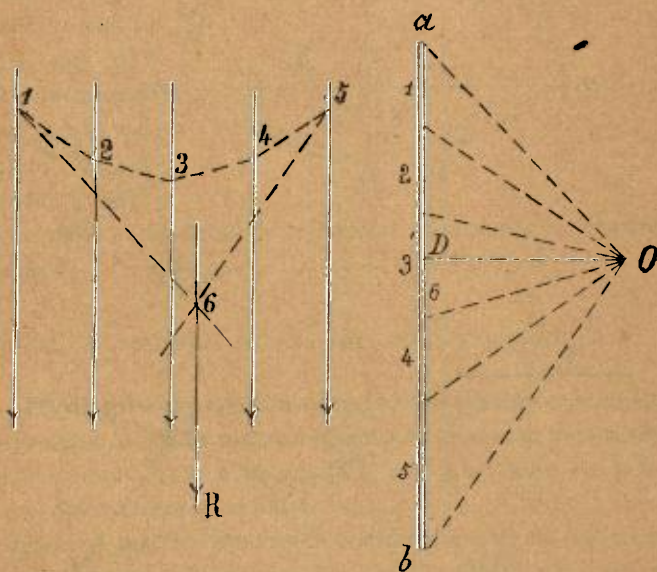


79. Disponiendo arbitrariamente de la situación del polo y del origen del polígono funicular, es claro que á todo sistema de fuerzas corresponderá un número infinito de polígonos funiculares, los cuales resultan de los cambios de posición, aislados ó simultáneos, de aquellos dos puntos.

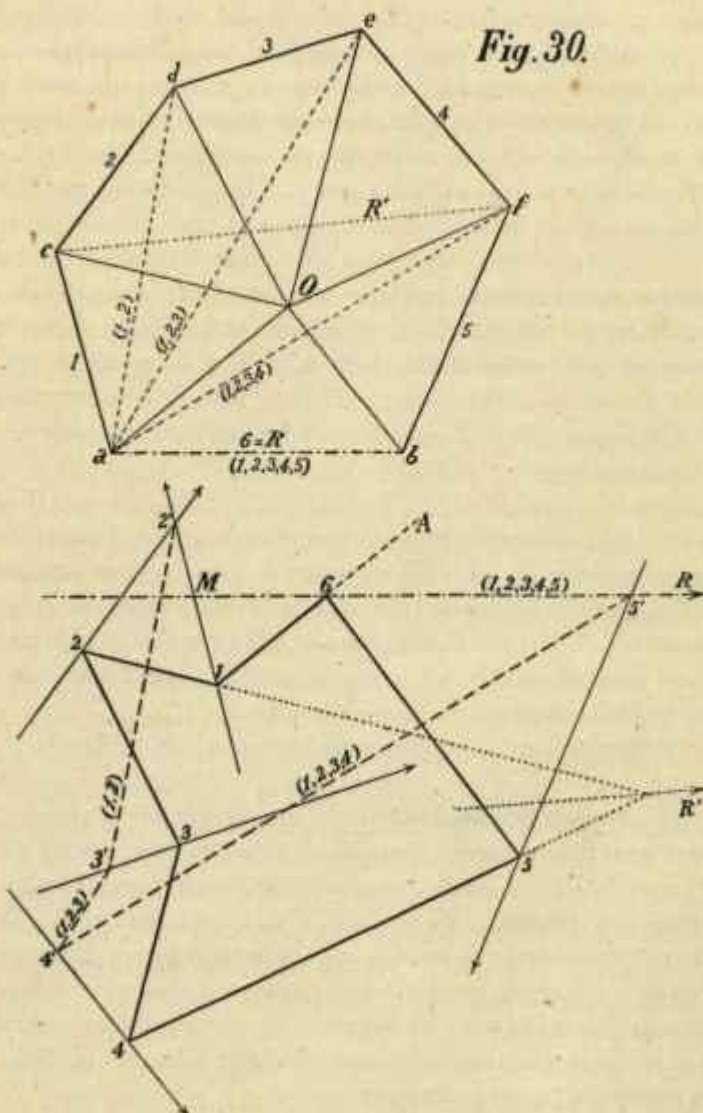
80. Si las fuerzas del sistema fueran paralelas, el polígono de las mismas se reducirá á una recta; pero la construcción sería la misma (figura 29). La distancia OD del polo á la recta  $ab$ , que representa el polígono de las fuerzas, se llama *distancia polar*.

81. Acerca de la elección del polo, para que la construcción del polígono funicular sea posible, es necesario tener en cuenta que, debiendo encontrar el lado A. 1 á la línea de acción 1 (figura

Fig. 29.



28), el lado 1. 2 á la línea de acción 2. y así sucesivamente, convendrá en general que el polo no se halle sobre ninguno de los lados del polígono de las fuerzas, ni sobre sus prolongaciones. Sin embargo, será posible la construcción del polígono funicular eligiendo el polo, por ejemplo, sobre el lado 1, si en vez de tomar un punto arbitrario de partida, como A, tomamos uno cualquiera de la línea de acción 1; pues en tal caso el primer lado del polígono funicular coincidirá con dicha línea de acción, y su extremo



estará definido por la intersección de las líneas 1 y 2, desde



cuyo punto se continuará el trazado como en el caso general.

En la figura 30 se ponen de manifiesto las construcciones necesarias para obtener los polígonos funiculares correspondientes al polo O, situado en las condiciones generales, y al polo *a*, tomado en el origen del lado 1 del polígono de las fuerzas 1. 2. 3. 4. 5. El primero se indica con líneas llenas, y el segundo con líneas de trazos.

Si en vez de considerar todas las fuerzas del sistema, nos refiriésemos solamente á un grupo de ellas, con tal que sean consecutivas, por ejemplo, las 2, 3, 4, veríamos, como se indica en la figura, que las líneas 1. 2; 2. 3; 3. 4; 4. 5, del polígono funicular del sistema propuesto y relativo al polo O, constituyen el polígono funicular correspondiente á las fuerzas elegidas y relativo al mismo polo.

**82.** De aquí resulta una consecuencia importante, á saber: que toda propiedad de los lados extremos de los polígonos funiculares es común á dos cualesquiera de los demás lados; pues como acabamos de ver, dos cualesquiera de ellos pueden considerarse como lados extremos del polígono funicular correspondiente á las fuerzas comprendidas entre los mismos.

Establecido esto, demostremos la proposición siguiente.

**83. Lema fundamental.**—*Siempre que varias fuerzas, aplicadas á un sistema invariable, se hallen en el mismo plano y de cualquier modo que estén distribuidas, se pueden, sin excepción alguna, reducir á dos, cuyas líneas de acción sean los lados extremos de cualquiera de los polígonos funiculares de las fuerzas propuestas, y cuya magnitud y sentido serán los que tengan los radios polares extremos, imaginando que se recorren yendo directamente por ellos del origen al extremo del polígono de las fuerzas.*

Consideremos las cuatro de la figura 28. Vamos á demostrar la posibilidad de reducirlas á dos, que tengan por líneas de ac-

ción los lados extremos A. 1 y B. 4 del polígono funicular y sean respectivamente iguales á los radios polares  $aO$  y  $Ob$ .

Puesto que se trata de un sólido invariable, si trasladamos las fuerzas dadas á los vértices 1, 2, 3, 4, del polígono funicular, y cada una de ellas la descomponemos en dos, según las direcciones de los lados que en cada vértice concurren, el sistema que así resulte será equivalente al primero y no alterará el estado anterior del sólido.

La descomposición á que nos referimos está realmente hecha en el polígono de las fuerzas; porque las componentes, como vamos á ver, están representadas por los diversos radios polares.

En efecto; el triángulo  $aOc$ , formado por los dos primeros radios y la fuerza —1, podemos considerarlo como polígono de tres fuerzas en equilibrio, paralelas y proporcionales á sus lados. Siendo una de ellas la  $ca$  igual y contraria á la fuerza 1, las otras dos serán la  $aO$  y  $Oc$ ; y claro es que la primera tomada en sentido contrario será la resultante de las últimas, las cuales serán las componentes buscadas.

Del propio modo podemos observar que en el triángulo  $cOd$  los radios polares  $cO$  y  $Od$  son las componentes de la fuerza 2, paralelos á los lados 1. 2 y 2. 3 del polígono funicular; y decimos  $cO$  y  $Od$ , y no  $Oc$  y  $dO$ ; porque siendo  $cd$  el sentido de la fuerza 2,  $dcOd$  será el sentido cíclico del triángulo, lo que determina por completo el sentido de aquellas componentes.

Resulta de estas consideraciones, que pudieran repetirse para los triángulos sucesivos, que cada radio polar, excepto los dos extremos, representa dos fuerzas iguales y de sentido contrario, aplicadas á los extremos del mismo lado del polígono funicular.

Así, por ejemplo, la fuerza  $Oc$  resultará aplicada en el extremo 1 del lado 1. 2, y la  $cO$  en el extremo 2 del mismo lado. Como otro tanto ocurre en todos los demás lados del polígono funicular, excepto en los dos extremos A. 1 y B. 4, claro es que, reemplazando el sistema propuesto por el equivalente que re-



sulta de la descomposición efectuada, las componentes situadas en los lados intermedios se anularán dos á dos, por ser iguales y de sentido contrario, podrán por lo tanto suprimirse y quedará reducido el sistema primitivo á las dos fuerzas que actúan en los lados extremos A. **1** y B. **4** del polígono funicular, y cuyo sentido y magnitud serán los que corresponden á los radios polares extremos  $aO$  y  $Ob$ ; como queríamos demostrar.

**84. Equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas situadas en un plano.**—Para que varias fuerzas, aplicadas á un sistema invariable y distribuidas de cualquier modo en un plano, estén en equilibrio, es necesario y suficiente: 1.º que el polígono de dichas fuerzas sea cerrado: 2.º que cualquiera de sus polígonos funiculares lo sea también, en cuyo caso todos los demás ofrecerán la misma propiedad.

En efecto; pudiendo reducir todas las fuerzas del sistema que se considere á dos resultantes parciales, de las condiciones expresadas en el lema fundamental, claro es que para que aquél esté en equilibrio será necesario que dichas dos resultantes tengan la misma línea de acción y sean además iguales y de sentido contrario.

Por consiguiente, si consideramos las fuerzas **1 2, 3, 4**, (figura 28), se ve que esta condición exige que las líneas **1. A** y **4. B** coincidan, así como también los radios polares  $aO$  y  $Ob$ ; ó lo que es lo mismo, que tanto el polígono de las fuerzas, como el polígono funicular sean cerrados; lo que demuestra que las expresadas condiciones son necesarias.

Para demostrar que son suficientes, basta observar que si el polígono funicular cierra, aquellas resultantes tendrán la misma línea de acción, y si el polígono de las fuerzas lo hace igualmente, serán además iguales y de sentido contrario; y el sistema estará, por tanto, en equilibrio.

De esta proposición resultan dos corolarios que conviene consignar.

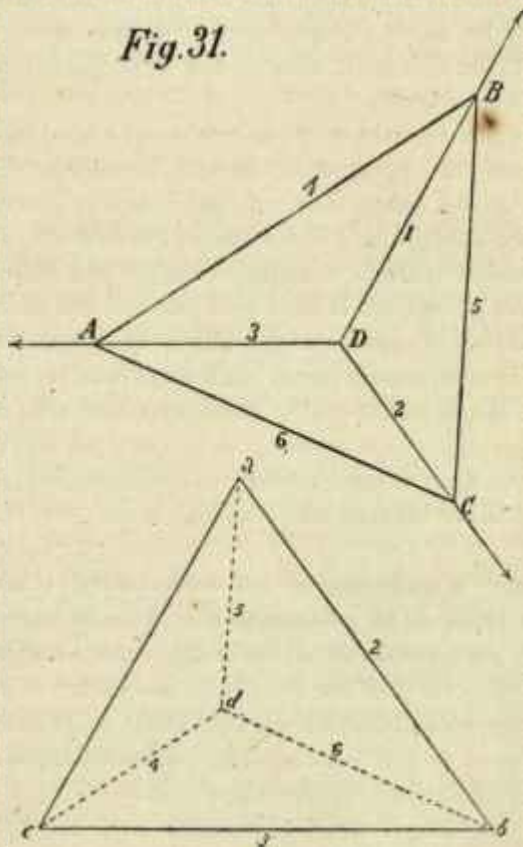


**85. I.** Si el polígono de las fuerzas es cerrado y lo es asimismo uno cualquiera de sus polígonos funiculares, lo serán también todos los demás.

En efecto; si se verifican tales condiciones, resultará en virtud del lema que las fuerzas estarán en equilibrio; y por estarlo, las resultantes

á que se reduzcan, dirigidas según los lados de un polígono funicular distinto del primero, serán iguales y de sentido contrario, teniendo la misma línea de acción, lo cual exige que el nuevo polígono funicular sea cerrado.

*Fig. 31.*



**86. II.**—Si las fuerzas que se consideran sobre un plano estuvieran todas aplicadas á un punto del sistema invariable, sería sólo necesario y suficiente para que el

equilibrio exista, que se verificase la primera condición; pero en virtud del lema se verificará también la segunda.

De aquí resulta una proposición de gran utilidad, y es la siguiente:

**87.** Supongamos dos sistemas de seis líneas cada uno, uniendo cuatro puntos las del primero, y otros cuatro las del segundo. Si cinco líneas de la primera figura son paralelas á cinco de la segunda, y á los dos triángulos que forman las primeras corresponden en las segundas grupos de tres líneas concurrentes en un punto, la sexta línea de una de las figuras será paralela á la sexta de la otra.

Sean (fig. 31), **1, 2, 3**, tres fuerzas en equilibrio, aplicadas al punto D, y **1. 2. 3** el triángulo de las mismas.

Como sabemos, el polígono funicular correspondiente á un polo cualquiera *d* será cerrado. Por lo tanto, si tomamos como punto de partida, por ejemplo, el punto A sobre la línea de acción **3**, se traza la recta A B, paralela al radio polar **4**, la B C paralela al radio polar **5**, y por C la paralela al radio **6**, ésta pasará seguramente por el punto de partida del polígono funicular; de donde resulta que las dos figuras satisfacen á las condiciones enunciadas en la proposición, la cual, por otra parte, podrá generalizarse á mayor número de líneas, considerando igual número de fuerzas aplicadas al mismo punto.

**88. Condiciones de existencia y determinación gráfica de la resultante de varias fuerzas situadas en un plano.**—Si un sistema de fuerzas admite una resultante R diferente de 0, es claro que una fuerza R' igual y contraria mantendrá el sistema en equilibrio; el polígono de las fuerzas dadas y de la R' será cerrado, y no lo será, por consiguiente, el polígono de las del sistema propuesto.

No siendo cerrado el polígono de las fuerzas que por hipótesis admiten una resultante, si consideramos (fig. 28) un polígono funicular, cuyo polo O se halle fuera de la línea *ab* que cierra el contorno del primero, los radios polares extremos tendrán direcciones distintas, y por tanto los lados extremos **1.A** y **4.B** del

polígono funicular, los cuales son paralelos á dichos radios, se cortarán en un punto, tal como 5; y como tales lados, según sabemos, son las líneas de acción de las dos fuerzas á que pueden reducirse todas las que constituyen el sistema que se considera, estas dos fuerzas se cortarán y trasportándolas á su punto de intersección 5, darán una resultante que será la misma que la del sistema propuesto; la cual, como vemos, pasa por dicho punto y es igual á la suma geométrica de las fuerzas dadas, como lo manifiesta el triángulo  $aOb$ , que no es más que el polígono de las resultantes parciales y de la total del sistema, tomada en sentido contrario.

De aquí resulta la proposición siguiente.

**89.** Para que varias fuerzas situadas en un plano y aplicadas á un sistema invariable admitan una resultante diferente de 0, es necesario y suficiente que el polígono de dichas fuerzas no cierre, en cuyo caso la resultante será igual en magnitud, dirección y sentido á su suma geométrica, y su línea de acción pasará por el punto en que se corten los lados extremos de uno cualquiera de sus polígonos funiculares.

Por lo tanto, el procedimiento gráfico para hallar la resultante de varias fuerzas situadas en un plano, y aplicadas á un sistema material invariable, consistirá sencillamente en construir el polígono de las mismas y un polígono funicular cualquiera; puesto que por el punto en que se corten los lados extremos de este último pasará la línea de acción de la resultante, cuya magnitud, dirección y sentido quedarán suficientemente definidos por la recta que cierre el polígono de las fuerzas, tomada desde el origen hasta el extremo del mismo.

Para evitar la indeterminación que resultaría, como fácilmente puede comprobarse, de tomar el polo sobre la línea  $ab$  que cierra el polígono de las fuerzas, conviene elegirlo fuera de ella, ó en todo caso, en uno cualquiera de sus extremos.

## **90. Propiedad mecánica fundamental de los poli-**



**gonos funiculares.**—El punto de intersección de dos lados cualesquiera de un polígono funicular pertenece á la línea de acción de la resultante parcial de las fuerzas comprendidas entre aquellos, estando dicha resultante representada en dirección, sentido y magnitud por la suma geométrica de las referidas fuerzas.

Como se ve, esta propiedad importante es una consecuencia inmediata de los principios establecidos; y acerca de su aplicación sólo hay que advertir que, cuando se quieran obtener todas las resultantes parciales por medio del mismo polígono funicular, será conveniente, para evitar toda indeterminación gráfica, que el polo se halle fuera de las diagonales del polígono de las fuerzas, ó en todo caso en cualquiera de sus vértices.

**91. Pares de fuerzas.**—Sabemos que dos fuerzas situadas en un plano, iguales y de sentido contrario, constituyen un sistema irreductible á que se da el nombre de *par*, y el de *braço de palanca* á la distancia entre sus líneas de acción.

Aparte de las diversas cuestiones relativas á los pares y que conocemos por Mecánica racional, por el momento sólo nos interesa estudiar las condiciones gráficas que son necesarias para que varias fuerzas situadas en un plano se reduzcan á un par.

**92.** Consideremos (figura 32) las fuerzas **1, 2, 3, 4, 5**, el polígono de las mismas **1. 2. 3. 4. 5** y el polígono funicular relativo al polo **O** y á un punto cualquiera de partida **A**; y supongamos que aquellas puedan reducirse al par **R, — R**.

Desde luego, el polígono de las fuerzas no puede ser abierto; porque si lo fuera, el sistema admitiría una resultante única, lo que es contrario á la hipótesis.

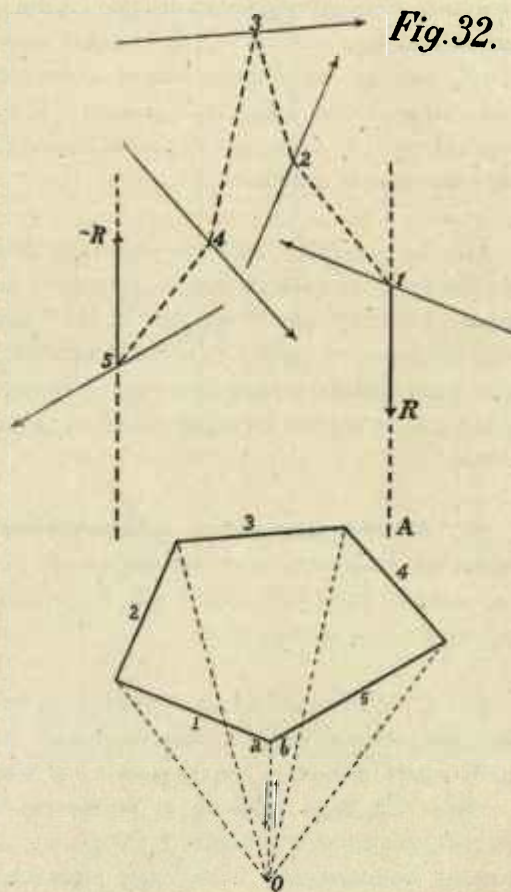
Debiendo, por tanto, ser cerrado, cualquiera de los polígonos funiculares habrá de ser necesariamente abierto; porque de lo contrario el sistema estaría en equilibrio y la resultante sería nula.

De donde resulta que, para que varias fuerzas aplicadas á un

sólido invariable y distribuídas de cualquier manera en un plano, se reduzcan á un par, es necesario y suficiente que el polígono de dichas fuerzas cierre, y que no cierre uno de sus polígonos funiculares, y por lo tanto ninguno de ellos.

**93.** Así como, cuando el polígono de las fuerzas era abierto, los radios polares  $aO$ ,  $Ob$  representaban las resultantes parciales del sistema aplicadas sobre los lados del polígono funicular correspondiente, en el caso que consideramos dichas resultantes serán iguales y

de sentido contrario; puesto que los puntos  $a$  y  $b$  coinciden, así como los indicados radios polares; y es claro que los lados extremos del polígono funicular serán paralelos, ó se reducirán á una sola línea. Si sucede lo primero, el sistema propuesto se reducirá á un par, tal como el que indica la figura, y si sucede lo





segundo, el sistema estará en equilibrio, aún cuando correctamente pudiéramos decir que se había reducido á un par, cuyo brazo de palanca es nulo, toda vez que las resultantes parciales estarían como siempre representadas por los radios polares  $aO$  y  $Ob$ , serían iguales y contrarias y tendrían la misma línea de acción.

No hay para qué decir que los diversos pares correspondientes á otros tantos polígonos funiculares distintos serán todos equivalentes; es decir, que el producto de la fuerza por el brazo de palanca será constante.

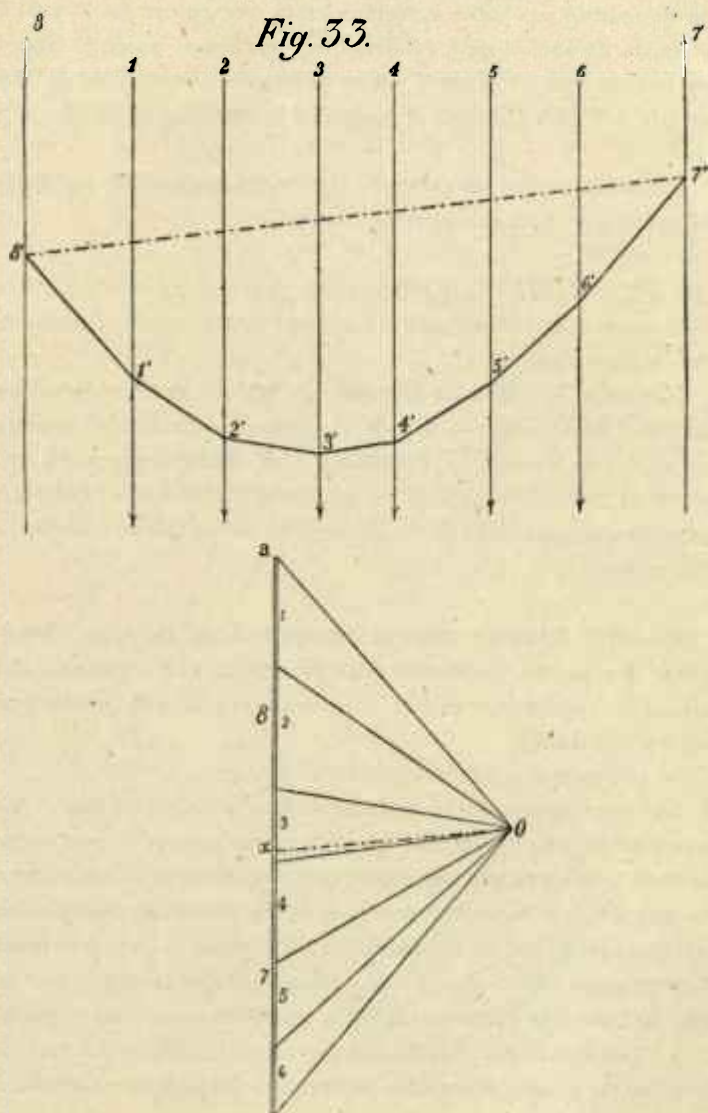
**94.** La equivalencia de dos pares, y lo mismo pudiera decirse de dos sistemas cualesquiera de fuerzas, se comprobará gráficamente, construyendo el polígono de las fuerzas de uno de ellos más las del otro tomadas en sentido contrario, y uno de sus polígonos funiculares. Ambos deben ser cerrados, puesto que corresponden á un sistema en equilibrio si los propuestos son equivalentes.

**95. Problemas sobre composición y descomposición de fuerzas.**—Los problemas más frecuentes relativos á la composición y descomposición de fuerzas, que nos interesa consignar, son los siguientes.

**96** 1.—*Dado un sistema de fuerzas paralelas, hallar otras dos que pasen por puntos determinados, sean paralelas á las primeras y con ellas constituyan un sistema en equilibrio.*

Sean 1, 2, 3, 4, 5, 6 (fig. 33) las fuerzas dadas, 1. 2. 3. 4. 5. 6 su polígono correspondiente, 7 y 8 las líneas de acción de las fuerzas desconocidas. Como entre estas y las propuestas ha de resultar un sistema en equilibrio, el polígono funicular, cuyo polo sea un punto cualquiera  $O$ , será cerrado; la suma de 7 y 8 será igual y de sentido contrario á la suma de las fuerzas dadas y el radio polar  $Ox$ , que define las magnitudes de las fuerzas que se buscan, paralelo al lado del polígono funicular comprendido entre las líneas de acción 7 y 8. Por consiguiente; si construimos





el polígono funicular  $1' . 2' . 3' . 4' . 5' . 6'$  del sistema propuesto

y prolongamos sus lados extremos hasta que corten en  $7'$  y  $8'$  á las líneas de acción de las fuerzas desconocidas, uniendo aquellos puntos por la recta  $7'.8'$  y trazando por el polo la  $Ox$  paralela á  $7'.8'$ , el punto  $x$  resolverá la cuestión siendo  $bx = 7$  y  $xa = 8$ .

Del mismo modo se procedería si todas las fuerzas paralelas del sistema no tuvieran el mismo sentido.

**97. II.—Reducir un sistema de fuerzas paralelas á dos de la misma dirección que las propuestas y cuyas líneas de acción sean dadas.**

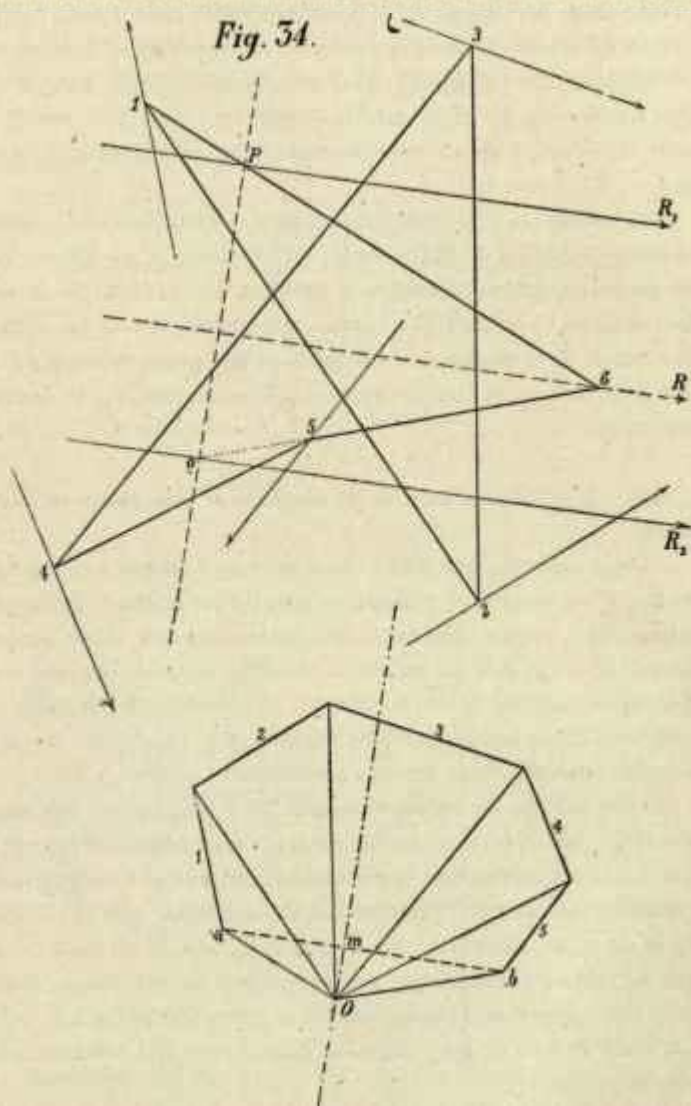
Llamando  $R$  y  $R'$  á las fuerzas que han de determinarse, es claro que las opuestas  $-R, -R'$  constituirán, con las del sistema que se da, un sistema en equilibrio; por consiguiente, para resolver el problema actual, se procedería como en el anterior, tomando con signo contrario las fuerzas que equilibren al sistema propuesto.

**98. III.—Dado un sistema cualquiera de fuerzas, determinar dos que lo equilibren, sean paralelas á la resultante del mismo y tengan por líneas de acción rectas que pasen por dos puntos dados**

Se procederá del modo que en el problema I.

La única diferencia en la construcción consiste en que el polígono de las fuerzas dadas no será como entonces una recta. Por tanto, uniendo sus extremos, que designaremos como siempre por  $a$  y  $b$ , y construyendo un polígono funicular cuyos lados extremos terminen en las líneas de acción que se dan, si se unen los puntos en que dichos lados y tales líneas se corten, y por el polo se traza una paralela á la recta que determinan, los segmentos en que quede dividida la suma geométrica  $ab$  de las fuerzas propuestas, representarán las fuerzas que se buscan y satisfacen á la cuestión.

**99. IV.—Reducir un sistema cualquiera de fuerzas á dos**



que tengan por líneas de acción dos rectas dadas, paralelas á la resultante del sistema.



Se procederá como en el problema que precede, con la diferencia de tomar en sentido contrario las resultantes obtenidas.

En la figura 34 se indican las construcciones que exigen ambos problemas. En el actual, las resultantes parciales son  $R_1 = am$ ;  $R_2 = mb$ ; y en el anterior son dichas resultantes —  $R_1 = ma$ , —  $R_2 = bm$ .

El primer lado del polígono funicular, cuyo polo es O, corta á la línea de acción de la fuerza  $R_1$  en el punto  $p$ ; el último lado de dicho polígono encuentra á la línea de acción de la otra fuerza  $R_2$  en el punto  $o$ . La recta  $Om$  es paralela á la  $op$ ; siendo, por tanto,  $m$  el punto que divide á la suma geométrica  $ab$  en dos segmentos, los cuales representan las fuerzas que se querían encontrar.

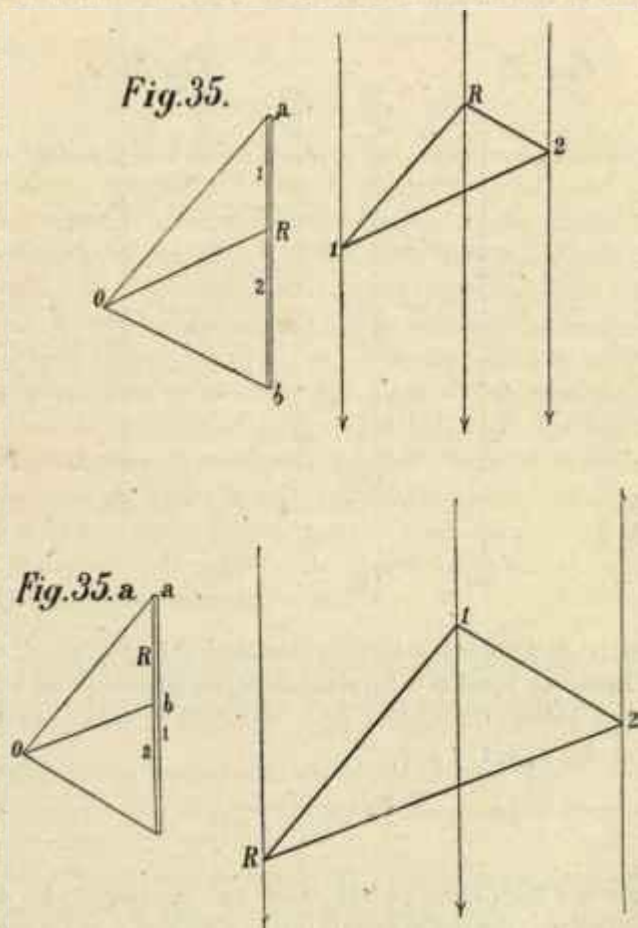
**100. V.—Determinar la resultante de dos fuerzas paralelas.**

Como sabemos que dicha resultante es paralela á las fuerzas dadas, y en magnitud y sentido, igual á su suma ó diferencia aritméticas, según que sean del mismo sentido ó de sentido contrario, el problema quedará resuelto hallando un punto de la línea de acción de la resultante, por medio de un polígono funicular, como se indica en las figuras 35 y 35 *a*. Pero es más sencillo proceder de la manera siguiente.

Sobre la línea de acción 1 (figuras 36 y 36 *a*) se lleva la magnitud  $a_2b_2$  de la fuerza 2, y sobre la línea 2 la magnitud  $a_1b_1$  de la fuerza 1; magnitudes que se toman en la región que se quiera de ambas líneas. Se une el origen de cada fuerza con el extremo de la otra, por medio de las rectas  $a_2b_1$ ,  $a_1b_2$ ; y el punto C en que se cortan veremos que corresponde á la resultante, si demostramos que dicho punto está en la intersección de los lados extremos de uno de los polígonos funiculares del sistema propuesto.

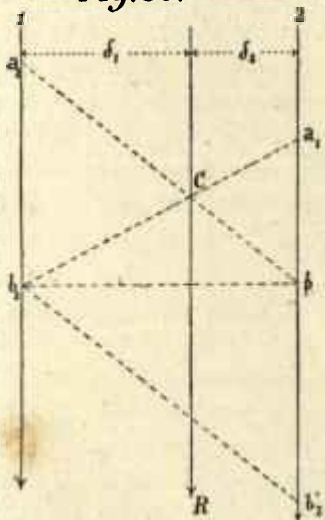
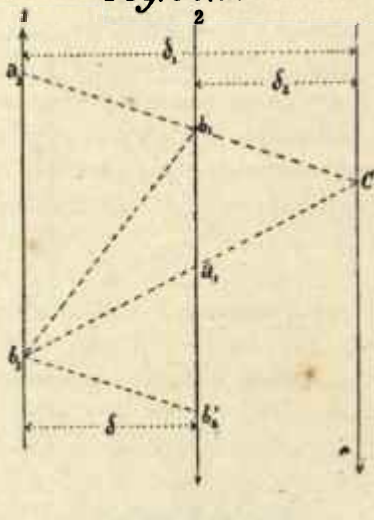
En efecto, trazando la recta  $b_2b'_2$ , paralela á la  $a_2b_1$ , es claro que tendremos  $a_1b_1 = 1$ ;  $b_1b'_2 = 2$ , y por tanto la recta  $a_1b_1b_2$  podrá considerarse como el polígono de las fuerzas dadas. Si

tomamos como polo el punto  $b_2$ , los radios polares serán  $b_2a_1$ ;  $b_2b_1$ ,  $b_2b'_2$ ; y tomando  $a_1$  como punto de partida del polígono funicular correspondiente á dicho polo, es evidente que su primer



jado coincidirá con el radio polar  $a_1b_2$ , el segundo lado coincidirá á su vez con el radio  $b_2b_1$ , y el tercero y último lado se obtendrá trazando por  $b_1$  una paralela al tercer radio polar  $b_2b'_2$ , la cual coincidirá, por tanto con  $b_1a_2$ . Resulta, según vemos, que

las rectas  $a_1b_2$  y  $b_1a_2$  son lados extremos de uno de los polígonos funiculares del sistema de que se trata; y como consecuencia, que el punto C en que se cortan pertenece á la línea de acción de la resultante.

*Fig. 36.**Fig. 36.a.*

**101.** Si designamos las componentes por  $F_1, F_2$ , y por  $\delta_1, \delta_2$ , las distancias de aquellas á las resultantes, tendremos en los dos casos que indican las figuras, y por virtud de la semejanza de los triángulos  $a_2 b_2 C$  y  $a_1 b_1 C$ ,

$$\frac{F_2}{\delta_1} = \frac{F_1}{\delta_2} \dots (a);$$

lo que nos dice, como ya sabíamos, que las magnitudes de las componentes son inversamente proporcionales á sus distancias á la línea de acción de la resultante; y es claro que si las componentes son del mismo sentido, la resultante estará comprendida entre ellas y será igual á su suma, y si son de sentido contrario caerá fuera de las mismas, será igual á su diferencia, se ha-



llará del lado de la mayor y tendrá el mismo sentido que ésta.

De la relación (a) se deduce:

$$\frac{F_2}{\delta_1} = \frac{F_2 - F_1}{\delta_1 - \delta_2},$$

de donde

$$(F_2 - F_1) \delta_1 = F_2 (\delta_1 - \delta_2) \quad (b).$$

Supongamos que, siendo  $F_2 > F_1$ , la fuerza menor  $F_1$  crezca indefinidamente teniendo por límite la mayor  $F_2$ . Si las líneas de acción no varían, claro es que en el límite las fuerzas consideradas constituirán un par, cuyo brazo de palanca será la distancia constante  $\delta = \delta_1 - \delta_2$ . En tal caso, como el segundo miembro de la relación (b) permanece constante, y el primero expresa siempre el producto de la resultante  $F_2 - F_1$  por su distancia á la fuerza  $F_1$ , podremos considerar que todo par es equivalente á una fuerza infinitamente pequeña, cuyo punto de aplicación está infinitamente lejano, pero de tal manera, que el producto de la misma por la distancia de dicho punto á una cualquiera de las fuerzas del par es una cantidad finita é igual al producto de la fuerza del par por su brazo de palanca, cuyo producto, como sabemos, recibe el nombre de momento del par.

**102. VI.—Descomponer una fuerza en dos paralelas á ella y cuyas líneas de acción pasen cada una por un punto determinado.**

En realidad, este problema es un caso particular del II; pero su resolución es más sencilla considerándolo como el inverso del que precede.

Si la fuerza dada fuera R (figura 36), y las líneas de acción de las fuerzas desconocidas, la 1 y la 2, bastaría tomar sobre una cualquiera de éstas, por ejemplo, sobre la 2, una magnitud  $a_1 b'_2 = R$ , unir sus extremos con un punto cualquiera  $b_2$ , tomado en la línea 1, trazando las rectas  $a_1 b_2$ ,  $b'_2 b_2$  y dirigir por el punto C una paralela á esta última, que sería  $a_2 b_1$ . Las fuerzas

buscadas serían, por lo tanto,  $1 = a_1 b_1$ ,  $2 = b_1 b'_2 = a_2 b_2$ , ambas del mismo sentido, si la fuerza propuesta se hallara comprendida entre las líneas de acción dadas, ó de sentido contrario si aquélla fuera exterior á dichas líneas.

**103. VII.**—*Dada una fuerza y la dirección, magnitud y sentido de una de sus componentes paralelas, hallar la otra.*

Sea  $R$  la fuerza dada (figura 36) y  $2$  la línea de acción de la componente conocida  $2$ . Sobre dicha línea se toma una magnitud  $a_1 b'_2 = R$  y á continuación la fuerza  $2$  en sentido contrario, con lo cual resultará  $b'_2 b_1 = -2$ . El punto  $b_1$  será intermedio á los  $a_1$  y  $b'_2$  si  $R$  y  $2$  son del mismo sentido, ó exterior á dichos puntos si  $R$  y  $2$  fueran de sentido contrario.

En ambos casos los puntos  $a_1$  y  $b_1$  se unen con otro cualquiera  $C$  de la línea de acción de la fuerza  $R$ , por  $b'_2$  se traza una paralela  $b'_2 b_2$  á la recta  $b_1 C$ , y el punto  $b_2$  en que se cortan  $a_1 C$ , prolongada lo necesario, y  $b'_2 b_2$  pertenecerá evidentemente á la línea de acción de la fuerza desconocida, cuya magnitud y sentido estarán representados por el segmento  $a_1 b_1$ .

**104. VIII.**—*Equilibrar una fuerza dada por otras dos paralelas á ella y cuyas líneas de acción pasen por un punto determinado cada una.*

Basta resolver el problema VI, tomando las resultantes que se obtengan en sentido contrario.

**105. IX.**—*Equilibrar una fuerza por otras dos paralelas á ella, de las cuales una, se conozca en dirección, magnitud y sentido.*

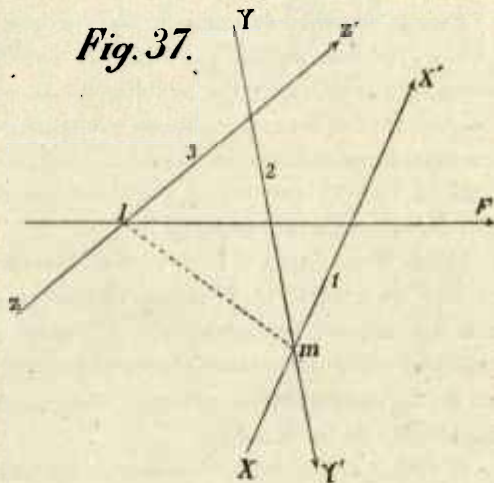
Se procederá como en el problema VII, cambiando primero el sentido de la fuerza dada y tomando la que se obtenga en sentido contrario.

**106. X.**—*Descomponer un sistema de fuerzas situadas en*

*un plano, en tres, cuyas líneas de acción estén determinadas en dicho plano.*

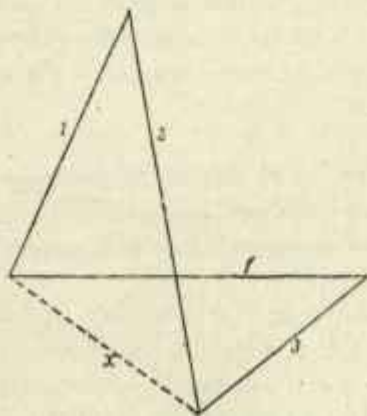
Consideremos dos casos, según que el sistema propuesto se componga de una sola fuerza ó de varias de ellas.

*Fig. 37.*



**107.** 1.º Sea F (figura 37) la fuerza única que queremos descomponer en tres, según las líneas de acción  $XX'$ ,  $YY'$ ,  $ZZ'$ .

Si prolongamos la línea de acción de la fuerza dada hasta que corte á una cualquiera de las otras, por ejemplo, á la  $ZZ'$  y unimos el punto I con el de intersección  $m$  de las  $YY'$  y  $XX'$  por medio de la recta  $I m$ , es claro que



descomponiendo la fuerza F en dos, una sobre  $ZZ'$  y otra sobre  $I m$ , y esta última se traslada al punto  $m$  y se descompone en otras dos, según las líneas  $YY'$  y  $XX'$ , el problema quedará resuelto.

Para efectuar la primera descomposición se traza la recta  $f$ ,



que represente en dirección, magnitud y sentido la fuerza propuesta  $F$ ; por sus extremos se trazan las paralelas 3 y  $x$  á  $ZZ'$  y á  $Im$ , respectivamente, y las primeras componentes estarán representadas por los lados 3 y  $x$ .

Para la segunda descomposición, es decir, para descomponer  $x$  en dos fuerzas, según  $YY'$  y  $XX'$ , por los extremos del lado  $x$  se trazan las paralelas 1 y 2 á aquellas líneas, y es evidente que las componentes serán 1, 2, 3; puesto que el polígono cerrado 1. 2. 3.  $f$  demuestra que dichas componentes equilibran á la fuerza  $F$  tomada en sentido contrario, y por tanto que constituyen un sistema equivalente á dicha fuerza.

Si las tres líneas  $XX'$ ,  $YY'$ ,  $ZZ'$  fueran concurrentes y la fuerza  $F$  no pasara por el punto en que se cortan, el problema sería desde luego imposible; pero si pasara por dicho punto el problema sería indeterminado, pudiendo fijar arbitrariamente una de las componentes, en cuyo caso quedarían definidas las magnitudes de las otras dos.

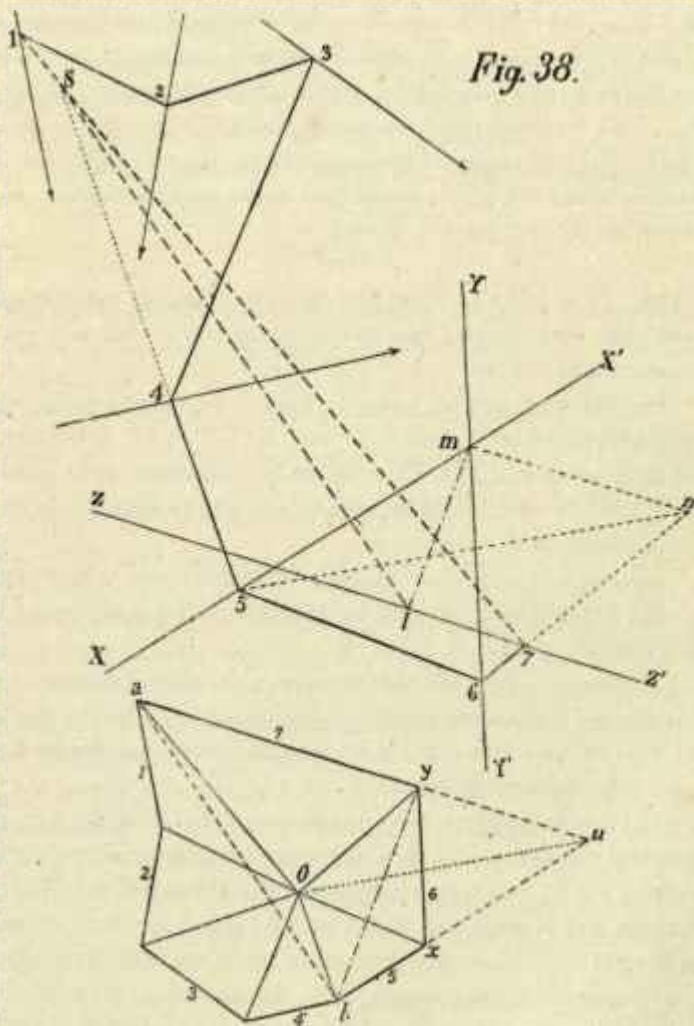
Si dichas líneas de acción fueran paralelas y la fuerza  $F$  tuviera dirección distinta, el problema sería también imposible; y si tuviere la misma dirección sería indeterminado.

En todos los demás casos el problema es posible y determinado.

**108.** 2.º Si el sistema propuesto se compusiera de varias fuerzas, es claro que empezaríamos por determinar su resultante, descomponiendo ésta de la manera que acabamos de decir en el caso anterior.

Así, por ejemplo, si tuviéramos las fuerzas cuyas líneas de acción son **1, 2, 3, 4** (fig. 38), construyéramos el polígono de las mismas 1. 2. 3. 4, y quisiéramos reducirlas á un sistema equivalente de tres fuerzas dirigidas según las rectas  $XX'$ ,  $YY'$ ,  $ZZ'$ , las cuales designaremos por **5, 6, 7**, tomando un polo cualquiera  $O$  trazáramos el polígono funicular **7. 1. 2. 3. 4. 5**. Sus lados extremos **7. 1** y **5. 4**, paralelos respectivamente á los radios polares  $Oa$  y  $Ob$ , darán por su intersección en  $S$  un punto de la

resultante, la cual tendrá por magnitud la recta  $ab$  y por línea de acción la  $SI$  paralela á dicha recta.



Quedando así reducida la cuestión al caso anterior, trazáramos la recta  $Im$ , que une la intersección  $I$  de la resultante encon-

trada y la línea  $ZZ'$  con el encuentro  $m$  de las líneas  $YY'$ ,  $XX'$ . Trazando por el origen  $a$  del polígono de las fuerzas la recta 7 paralela á la línea de acción  $ZZ'$ , y por el extremo  $b$  la  $by$  paralela á la  $Im$ , las componentes de dicha resultante serán la  $ay=7$  según la línea  $ZZ'$  y la  $by$  según la línea de acción  $Im$ . Esta última fuerza quedará descompuesta en otras dos según las líneas  $XX'$ ,  $YY'$ , trazando por  $b$  una paralela á  $XX'$  y por  $y$  otra á  $YY'$ , con lo cual resultarán las fuerzas  $bx=5$ , y  $xy=6$  según las indicadas líneas  $XX'$ ,  $YY'$ ; siendo por tanto, las tres fuerzas buscadas, las  $ay=7$ ,  $yx=6$ ,  $xb=5$ .

**109.** Otro procedimiento podemos emplear para resolver este problema, más cómodo que el que acabamos de indicar y gráficamente más exacto.

Supongamos que se trate de hallar las fuerzas 5, 6, 7 que aplicadas sobre las líneas de acción  $XX'$ ,  $YY'$ ,  $ZZ'$  equilibren á las propuestas 1, 2, 3, 4. Es evidente que aquéllas serán iguales y de sentido contrario á las que se consideran como incógnitas en el problema que nos ocupa.

Imaginemos resuelta la cuestión que ahora nos proponemos, y sean 5, 6, 7 las magnitudes de las fuerzas que equilibran á las del sistema dado.

Puesto que entre las fuerzas dadas y las que se buscan ha de resultar un sistema en equilibrio, es claro que, tanto el polígono de todas ellas como el polígono funicular correspondiente á un polo arbitrario, serán cerrados.

Del primer polígono se conocen en realidad los lados 1, 2, 3, 4 y la dirección de los 7 y 5, observando que éstos parten de los puntos  $a$  y  $b$  y son respectivamente paralelos á  $ZZ'$  y á  $XX'$ ; de manera que la magnitud de las fuerzas 5, 6, 7 quedará definida si fijamos la posición particular de la recta  $xy$ , paralela á  $YY'$ .

Del segundo polígono, es decir, del polígono funicular cuyo polo es  $O$  y cuyo punto de partida es 7, conocemos la parte de su contorno 7. 1. 2. 3. 4. 5, cuyos lados son respectivamente paralelos á los radios polares 7. 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4, 4. 5.



Supongamos, como antes decíamos, resuelto el problema y conocido todo el contorno de ambos polígonos. Prolonguemos en el de las fuerzas los lados 5 y 7 hasta su encuentro en  $u$ , y tracemos la recta  $Ou$ .

En el polígono funicular tracemos por el punto  $m$  la recta  $mn$  paralela á la  $ZZ'$ , y prolonguemos el lado 6. 7 hasta su encuentro en  $n$  con  $mn$ , trazando además la recta 5  $n$ .

Si consideramos las seis líneas del polígono funicular que unen los cuatro puntos

$$5, 6, m, n$$

y las seis del polígono de las fuerzas que unen los otros cuatro

$$O, x, y, u;$$

y observamos que por construcción las cinco líneas

$$5m, mn, m6, 56, 6n$$

son respectivamente paralelas á las cinco

$$xu, yu, xy, Ox, Oy;$$

y además que á los dos triángulos que forman las cinco líneas de una de estas figuras, corresponden en la otra dos grupos de tres líneas cada uno y concurrentes en un punto, se verificará, como sabemos por la proposición oportunamente demostrada, que las líneas 5  $n$  y  $Ou$  serán paralelas.

Utilizando esta propiedad, el punto  $n$  se determinará fácilmente trazando por  $m$  una paralela  $mn$  á  $ZZ'$  y por 5 la recta 5  $n$  paralela al radio polar  $Ou$  del punto en que se cortan las prolongaciones de los lados 7 y 5, cuyas direcciones se conocen.

Hallado el punto  $n$  y unido con 7, (origen del polígono funicular) la recta  $n7$  cortará á la línea de acción  $YY'$  en el punto 6, y de esta suerte quedarán determinados los lados 5. 6 y 6. 7, que eran los únicos del polígono funicular que no se conocían.

Finalmente, para hallar los puntos  $x$  é  $y$ , que en el polígono

de las fuerzas definen suficientemente la magnitud de las tres desconocidas 5, 6, 7, bastará trazar por el polo las paralelas  $Ox$  y  $Oy$  á los lados 5.6 y 5.7 del polígono funicular; y su intersección con el lado 5, la primera, y con el 7 la segunda, determinarán dichos puntos y el problema quedará, por tanto, resuelto.

Las fuerzas  $bx$ ,  $xy$ ,  $ya$  son las que equilibran al sistema 1. 2. 3. 4.

Las mismas fuerzas tomadas en sentido contrario, es decir,  $ay$ ,  $yx$ ,  $xb$ , forman el sistema equivalente al propuesto, y constituyen por lo tanto la solución que corresponde al problema actual.

Si las tres líneas  $XX'$ ,  $YY'$ ,  $ZZ'$  se cortaran en un mismo punto,  $m$   $n$  coincidiría con  $ZZ'$  y el punto 7 con el  $n$ . En tal caso el problema sería imposible ó indeterminado; imposible, si la resultante del sistema propuesto no pasara por el punto en que aquellas líneas se cortan; indeterminado, en el caso en que pase por dicho punto.

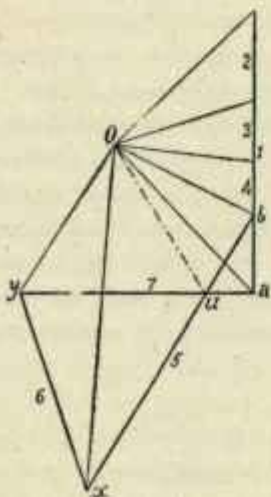
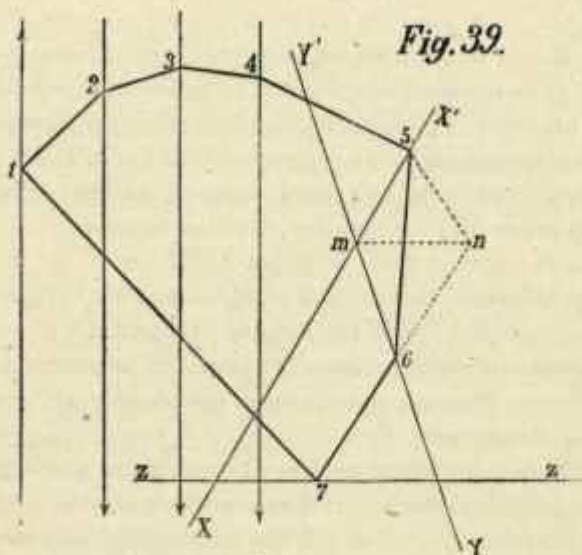
La figura 39 corresponde al caso particular en que las fuerzas dadas sean paralelas. Como el procedimiento para hallar la solución propia de este caso no ofrece novedad alguna, y las notaciones son las mismas que las del caso anterior, bastará la inspección de la figura para su cabal inteligencia.

**110. Propiedades geométricas de los polígonos funiculares.**—Las propiedades generales de los polígonos funiculares, relativos á fuerzas cualesquiera, se resumen en las proposiciones siguientes:

**111. I.**—*De cualquier modo que varíe de posición el polo del polígono funicular de un sistema dado de fuerzas, el lugar geométrico de las intersecciones de dos cualesquiera de sus lados es una recta paralela á la suma geométrica de las fuerzas comprendidas entre ellos.*

Como según hemos demostrado, la intersección de dos lados cualesquiera corresponde á la línea de acción de la resultante

de las fuerzas que comprenden, y dicha línea es de posición



invariable y paralela á la suma geométrica de tales fuerzas, la proposición es cierta, puesto que en dicha línea estarán todas



las intersecciones que corresponden á los cambios de posición del polo.

**112. II.**—*Si dos sistemas de fuerzas (F) y (F') son equivalentes y se construyen dos polígonos funiculares, uno (P), relativo al sistema (F) y otro (P'), relativo al (F'), y para ambos se toma el mismo polo y el mismo punto de partida, sus lados extremos coincidirán, bajo el supuesto de que los polígonos de las fuerzas (F) y (F') tengan el mismo origen.*

Sea  $a$  el origen común de dichos polígonos de las fuerzas;  $b$  y  $b'$  los extremos correspondientes. Llamemos  $O$  al polo y  $A$  al punto de partida de los dos polígonos funiculares.

El primer lado del polígono (P) coincidirá seguramente con el primero de (P'); pues ambos parten del mismo punto  $A$ , y son paralelos al radio polar  $Oa$ .

Imaginemos reducidos los sistemas propuestos á dos fuerzas cada uno, dirigidas según los lados extremos de los polígonos funiculares respectivos. Como dichas fuerzas, según sabemos, están representadas por los radios polares extremos, y el  $Oa$  es común á ambos sistemas, representaremos las resultantes parciales del sistema (F) por  $f$  y  $f'$ , y las del sistema (F') por  $f$  y  $f''$ .

Los sistemas (F) y (F') son por hipótesis equivalentes; por consiguiente, también lo serán los  $(f, f')$ ,  $(f, f'')$ , á que respectivamente los hemos reducido; pero como  $f$  es común á estos últimos sistemas y tiene la misma línea de acción,  $f'$  y  $f''$  serán necesariamente iguales y tendrán la misma línea de acción. Los radios polares  $Ob$  y  $Ob'$ , coincidirán, y por tanto, los lados extremos de los polígonos funiculares (P) y (P') coincidirán también, como queríamos demostrar.

**113. III.**—*El lugar geométrico de los polos de los polígonos funiculares que satisfacen á la condición de que sus lados extremos pasen respectivamente por dos puntos fijos, no varía reemplazando el sistema de fuerzas que se considere por otro cualquiera equivalente.*

Sean A y B aquellos puntos y O uno de los polos de los polígonos funiculares del sistema de fuerzas (F). En virtud de la proposición anterior, si desde O, como polo, y desde A, como punto de partida, se construye el polígono funicular de un sistema (F') equivalente al propuesto (F), el último lado pasará por B; y como esto ocurre, cualquiera que sea el punto O, el lugar geométrico de los polos será el mismo, tanto para el sistema propuesto como para otro cualquiera equivalente, bajo las condiciones expresadas.

**114 IV.** *El lugar geométrico de los polos de los polígonos funiculares, que satisfacen á la condición de que dos de sus lados pasen respectivamente por dos puntos fijos, es una recta paralela á la que éstos determinan.*

Supongamos que se trate de los lados extremos del polígono funicular de un sistema de fuerzas, debiendo pasar aquéllos por los puntos A y B, y admitamos que dicho sistema pueda reducirse á una resultante R.

Sea *ab* (figura 40) el lado que representa esta resultante en el polígono de las fuerzas, y cuya línea de acción se obtendría, como sabemos, construyendo un polígono funicular.

Si descomponemos R en las fuerzas paralelas  $F_1$ ,  $F_2$ , que pasen por los puntos dados y cuyas magnitudes estarán representadas por *am* y *mb*, el punto *m* se encontrará fácilmente, recordando que las componentes están en razón inversa de sus distancias á la resultante.

Por dicho punto *m* tracemos la recta *mn* paralela á AB, y tomemos en ella un punto cualquiera O, como polo. Para construir el polígono funicular relativo al sistema  $F_1$ ,  $F_2$ , á que hemos reducido el sistema propuesto, trazariámos, tomando A como punto de partida, la recta AA' paralela al primer radio polar Oa, por A una paralela al segundo radio mO, la cual será AB, pues AB y *mn* son paralelas por construcción, y por último por B la BB' paralela al tercer radio polar Ob.

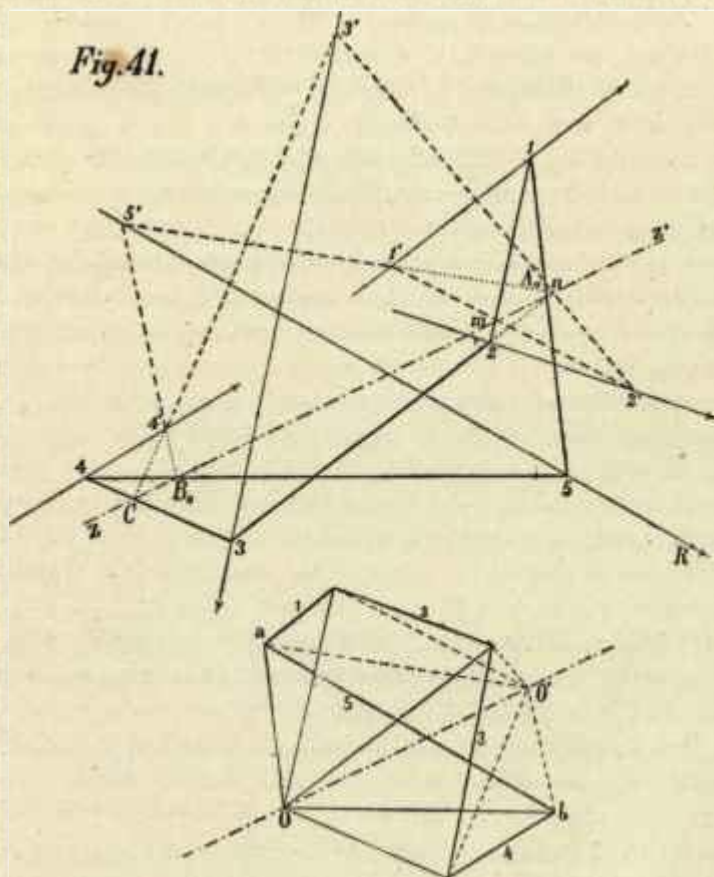
Del mismo modo veríamos que para otro punto cualquiera,







116. Finalmente, siendo cierta la proposición para los lados extremos de los polígonos funiculares, lo será también para dos cualesquiera de dichos lados, considerándolos como extremos



de los polígonos funiculares relativos á las fuerzas comprendidas entre ellos y procediendo, por lo demás, con la resultante parcial de dichas fuerzas, como se ha hecho con la resultante de todas las que constituyen el sistema propuesto.

**117.** V.—*Todos los lados correspondientes de dos polígonos funiculares cualesquiera de un sistema de fuerzas, se cortan en puntos situados sobre una misma recta paralela á la que une los polos de dichos polígonos.*

Si consideramos un sistema de fuerzas, cuyas líneas de acción sean, por ejemplo, **1, 2, 3, 4** (figura 41), y construimos el polígono de las mismas **1. 2. 3. 4**, y dos polígonos funiculares, el **1. 2. 3. 4. 5**, correspondiente al polo  $O$ , y el **1'. 2'. 3'. 4'. 5'** correspondiente al polo  $O'$ , siendo  $A_0$  y  $B_0$  los puntos en que se cortan los lados extremos de dichos polígonos, según la proposición que precede, la recta  $ZZ'$  que los une será paralela á la  $OO'$  que los polos determinan; por consiguiente, si se verifica que la intersección de otros dos lados cualesquiera, pero correspondientes, de dichos polígonos funiculares, se encuentra sobre la misma recta  $ZZ'$ , la proposición quedará demostrada.

Consideremos, por ejemplo, los lados **3. 4** y **3'. 4'**; y llamemos  $C$  al punto en que se cortan. Dichos lados son extremos de los polígonos funiculares  $A_0. 1. 2. 3.$   $C$  y  $A_0. 1'. 2'. 3'.$   $C$ , correspondientes al polo  $O$  el primero, y al polo  $O'$  el segundo, y ambos relativos al sistema de fuerzas **1. 2. 3.**

Según la proposición anterior, las rectas  $OO'$  y  $A_0C$  serán paralelas, y como la  $A_0B_0$  lo es á la  $OO'$ , según hemos visto, la  $A_0C$  y  $A_0B_0$ , que tienen un punto común  $A_0$  y son paralelas á una tercera  $OO'$ , coincidirán; y por tanto el punto  $C$  estará sobre la recta  $ZZ'$ , como queríamos demostrar.

De esta proposición resultan, como consecuencia inmediata, las dos siguientes:

**118.** (a)—*Cuando dos lados de un polígono funicular cambian de posición, girando cada uno alrededor de un punto fijo, los demás lados hacen lo propio alrededor también de puntos fijos situados sobre la recta que determinan los primeros.*

**119.** (b)—*Cuando el polo de un polígono funicular recorre una recta, y uno de los lados de dicho polígono, al variar de*

*posición, gira alrededor de un punto fijo, todos los demás lados hacen lo propio alrededor también de puntos fijos, situados sobre una recta paralela á la que el polo describe y que pasa por el primero de dichos puntos.*

#### TEORÍA GEOMÉTRICA DE LAS FIGURAS RECÍPROCAS.

**120. De las figuras geométricas en general.**— Si consideramos una figura formada por un sistema de rectas que unan diversos puntos, distribuídos de cualquier modo en un plano, daremos el nombre de *vértices* á dichos puntos, el de *línea* ó *lado* de la figura á toda porción de recta comprendida entre dos vértices y el de *nudo* al conjunto de lados que concurran en un mismo vértice.

Las figuras que nos interesan, como veremos más adelante, son aquéllas cuyos lados pasan por dos vértices á lo menos; y desde luego podemos admitir que cada lado pasa solamente por dos de ellos, considerando como lados distintos de la figura los diferentes segmentos en que quede dividido todo lado que pase por más de dos vértices.

**121. Figuras deformables, estrictamente indeformables y de líneas superabundantes.**— Las figuras geométricas á que nos hemos referido, se dividen en dos clases: *figuras deformables*, que son aquéllas cuyos ángulos pueden variar, permaneciendo constantes las magnitudes de sus lados; y *figuras indeformables*, en las cuales se verifica, por el contrario, que los ángulos quedan determinados, conocidas que sean las magnitudes de los lados.

Las figuras indeformables se dividen, á su vez, en dos categorías, que es necesario distinguir: las *estrictamente indeformables* ó *estrictamente definidas de forma*, las cuales dejan de ser indeformables con sólo suprimir uno de sus lados, y las de *líneas superabundantes*, caracterizadas por conservar la condi-



ción de indeformabilidad, aun cuando se suprima uno ó más de sus lados, y por tener, en consecuencia, mayor número de líneas que las estrictamente necesarias para que su forma quede definida.

Así, por ejemplo, un triángulo es una figura estrictamente indeformable; un cuadrilátero articulado es deformable; la figura formada por un cuadrilátero y una de sus diagonales es estrictamente indeformable, y un cuadrilátero *completo*, es decir, la figura formada por las seis líneas que unen cuatro puntos de un plano, contiene una línea superabundante; puesto que con sólo cinco de ellas basta para definir por completo la forma de la figura. Claro es que en este caso existirá siempre una relación, por medio de la cual podrá deducirse una línea cualquiera en función de las cinco restantes, ya sea por procedimientos analíticos ó por procedimientos gráficos.

**122. Condiciones necesarias para definir un polígono completo de  $n$  vértices.**—Daremos el nombre de *polígono completo de  $n$  vértices* á la figura formada por el conjunto de líneas que unan, dos á dos,  $n$  puntos situados en un plano. Como en cada vértice concurren  $n - 1$  lados, y cada uno de éstos une dos puntos, es claro que el número total de lados de la figura de que se trata será  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

**123.** Veamos cuál es el número de relaciones distintas que hay entre dichos lados.

Sean A y B dos vértices cualesquiera del polígono completo (fig. 42.) El número de líneas que unen los  $n - 2$  vértices restantes, dos á dos, será indudablemente  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ ; y es claro que ninguna de ellas pasa por las puntas A y B.

En A concurren  $n - 2$  líneas y en B otras tantas que provienen de los  $n - 2$  vértices distintos de A y de B; por consiguiente, el número total de líneas que pasan por estos últimos puntos,





concurrir en dos puntos especiales tales como A y B; pero desde luego se comprende que las  $2n - 3$  líneas que deben darse para determinar las restantes de la figura, tienen que satisfacer á la condición de ser *independientes*, es decir, que entre ellas no exista ninguna de las relaciones que expresan las ecuaciones por medio de las cuales han de determinarse las  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$

líneas desconocidas. Tal sucedería si entre las líneas dadas figurasen las seis que unen cuatro puntos; porque entonces, ó la magnitud asignada á dichas líneas sería origen de incompatibilidad entre las ecuaciones del sistema que había de resolverse, y el problema sería imposible; ó bien, si dichas magnitudes correspondían á la cuestión, no serían seis líneas las que realmente se daban, sino cinco, por ser la sexta una consecuencia de las otras, y entonces el problema resultaría indeterminado por falta de datos suficientes.

Por lo tanto, si las  $2n - 3$  líneas dadas son realmente independientes, las demás se podrán determinar en función de aquellas por medio de las relaciones que se establezcan; pero el examen de las expresiones que se encuentren en cada caso indicará si el problema es posible ó no lo es. Así, por ejemplo, tratándose de un triángulo, quedará definido por el conocimiento de sus tres lados; pero para que su construcción sea posible, será necesario que uno cualquiera de ellos sea menor que la suma de los otros dos. Para todas las demás figuras será asimismo necesario que sus lados satisfagan á ciertas condiciones ó desigualdades que el *Análisis* ó la *Geometría* determinan en cada caso.

Si la figura estuviera construída y, por tanto, no hubiese duda acerca de su posibilidad, es claro que conociendo  $2n - 3$  lados independientes, los demás quedarán completamente definidos.

De las consideraciones que preceden resulta la siguiente proposición.

124. Para que  $\frac{n(n-1)}{2}$  distancias mutuas de  $n$  puntos



*de un plano queden determinadas es necesario y suficiente conocer  $2n - 3$  de ellas.*

Conocidas todas las distancias entre los diversos puntos, es fácil calcular los ángulos que las líneas forman entre sí, puesto que cualquiera de dichos ángulos forma parte de un triángulo cuyos tres lados se conocen. Hecho esto, quedarán determinados todos los elementos que constituyen la forma de la figura.

Por consiguiente, podemos decir que *la forma de una figura de  $n$  vértices queda definida por el conocimiento de  $2n - 3$  de sus lados.*

**125. Número de lados que corresponden á las figuras deformables, estrictamente indeformables y de líneas superabundantes.**—Llamando  $m$  al número de lados que realmente contiene una figura cualquiera de  $n$  vértices, y siendo, como hemos visto,  $\frac{n(n-1)}{2}$  el máximo número de lados que puede contener, es claro que tendremos

$$m < \frac{n(n-1)}{2},$$

pudiendo por tanto establecer que

$$m = 2n - 3 + K,$$

siendo  $K$  un número entero positivo ó negativo.

**126.** De esta última expresión, y en virtud de lo expuesto, se deduce:

1.º Si  $K < 0$ , la figura será deformable; porque aun conociendo todos sus lados, su forma, que necesita, como sabemos, el conocimiento de  $2n - 3$  lados distintos, no quedará definida, y por tanto, sus ángulos podrán variar aunque aquéllos conserven sus longitudes primitivas.

2.º Si  $K = 0$  la figura será estrictamente indeformable.

3.º Si  $K > 0$  la figura contendrá  $K$  líneas superabundantes, las cuales podrán deducirse conociendo las otras  $2n - 3$ .

**127. De las figuras libremente dilatables.**—Se dirá que una figura es *libremente dilatable*, cuando cualquiera de sus lados pueda dilatarse ó contraerse, sin que por ello deban experimentar variación alguna las longitudes de los demás.

Para que una figura presente esta propiedad, será, en general, necesario y suficiente que no contenga ninguna línea superabundante, ó lo que es lo mismo, que sea deformable ó estrictamente indeformable.

**128. De las figuras recíprocas.**—Se dice que dos figuras son recíprocas cuando satisfacen á las condiciones siguientes:

1.ª Que á cada línea de la primera corresponda una sola línea paralela en la segunda. Dichas líneas reciben el nombre de *recíprocas* ó *correspondientes*.

2.ª Que á cada nudo de una de las figuras corresponda en la otra un polígono cerrado.

Las dos figuras que se consideraron en el número 87 son recíprocas, puesto que satisfacen á las condiciones enunciadas.

**129.** Para que una figura tenga su recíproca es necesario, pero no suficiente:

1.º Que cada nudo se componga de tres lados, por lo menos.

2.º Que entre los sistemas de polígonos cerrados que contenga la figura haya uno, por lo menos, que satisfaga á la condición de que cada lado de la figura pertenezca solamente á dos polígonos de tal sistema.

En efecto, con arreglo á la definición establecida, á cada nudo de la figura propuesta debe corresponder en la recíproca un polígono cerrado, y como este ha de componerse por lo menos de tres lados, necesariamente habrá de contener tres líneas por lo menos cada nudo de la propuesta.

Sabemos también que en cualquiera de las figuras, cada lado



pasa solamente por dos vértices; por consiguiente, cada lado de la figura recíproca, si existe, formará parte solamente de dos nudos, y su correspondiente en la propuesta pertenecerá á dos polígonos cerrados, y solamente á aquellos dos que correspondan á dichos nudos; de donde resulta que en la figura dada hay por lo menos un sistema de polígonos que satisface á la segunda condición.

**130. De los sistemas articulados.**—Si consideramos una figura de las que poco há hemos definido, cuyos lados sean materiales y suficientemente rígidos, de modo que conserven sus dimensiones primitivas, cualquiera que sea su forma, y cuyos nudos estén articulados por un cilindro circular que atraviese todos los lados que en ellos concurren, resultando así en cada vértice una *charnela* ó *punto de articulación*, dicha figura recibe el nombre de *sistema articulado*.

Si los lados afectan la forma de cilindros circulares, de sección recta relativamente pequeña, se llaman *barras*; pero como puede ser cualquiera la forma de dichos lados, en ciertos casos sucederá que algunos de ellos estén formados á su vez por un sistema de barras.

Cuando la sección recta no es circular, los lados del sistema reciben diferentes nombres, los cuales se indicarán oportunamente al tratar de los sistemas articulados á que correspondan.

**131. Condiciones de equilibrio de los sistemas articulados.**—Desde luego podemos afirmar que para que un sistema articulado esté en equilibrio, es necesario y suficiente que lo estén las diversas partes de que consta, es decir, cada uno de sus lados y cada una de sus charnelas.

Por otra parte, sabemos que cada lado puede considerarse como libre bajo la acción de las fuerzas que directamente lo soliciten y de las reacciones engendradas por las dos charnelas que lo atraviesan en sus extremos.

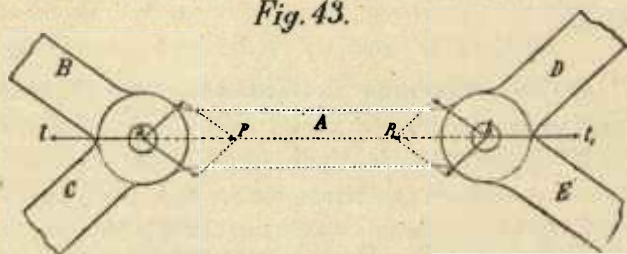
Sea A uno de los lados materiales del sistema, articulado en



a y en b con otros varios, por ejemplo, con B, C, D y E (fig. 43.)

Si en toda su longitud no obra ninguna fuerza exterior y se halla solamente sometido á las reacciones de las charnelas a y b, es claro que tales fuerzas deberán ser iguales y contrarias para que el lado A se encuentre en equilibrio; por lo tanto, podremos

Fig. 43.



considerarlo como libre y como separado ó independiente del resto del sistema bajo la sola acción de aquellas reacciones  $p=p_1$ , aplicadas á los puntos de articulación y que podrán ser atractivas, como indica la figura, comprimiendo dicho lado, ó repulsivas, en cuyo caso determinarían la tracción ó extensión del mismo.

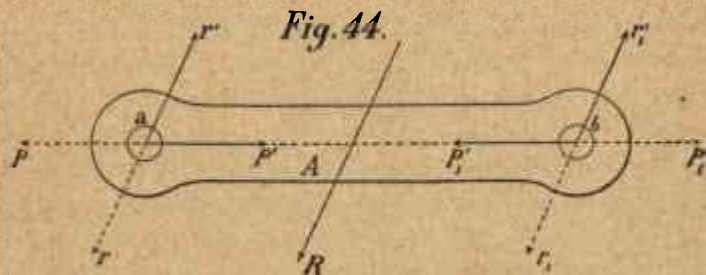
Del propio modo, podemos imaginar que se suprime el lado de que se trata, sin que por ello se altere el estado de equilibrio del resto del sistema, con la condición de introducir en los puntos a y b dos fuerzas  $t$ , y  $t_1$  respectivamente iguales y contrarias á las reacciones  $p$  y  $p_1$ , puesto que dichas reacciones que las charnelas engendran son necesariamente iguales y contrarias á las acciones que reciben.

De aquí resulta que si las fuerzas aplicadas al lado A son atractivas, las que obran sobre los ejes de las charnelas serán repulsivas y recíprocamente.

**132.** Puede suceder que sobre el lado A actúen una ó varias fuerzas exteriores cuya resultante sea R. En tal caso, descomponiéndolo (fig. 44) las reacciones engendradas por las charnelas en dos componentes; una según la recta que une los puntos de ar-

ticulación y otra paralelamente á la resultante  $R$ , el lado  $A$  se hallará en equilibrio bajo la acción de las cinco fuerzas  $R, r', r_1', p', p_1'$ , cuyo polígono correspondiente deberá ser cerrado.

Ahora bien; como tales fuerzas se ejercen solamente en dos direcciones, es claro que debiendo ser separadamente nulas las proyecciones de las mismas sobre dichas direcciones, que



son  $ab$  y  $R$ , será necesario que el polígono de las tres primeras  $R, r', r_1'$  sea cerrado, lo mismo que el de las dos segundas  $p', p_1'$ , ó en otros términos, que la suma de  $r'$  y  $r_1'$  sea igual y contraria á la resultante  $R$  de las fuerzas exteriores, y que  $p'$  y  $p_1'$  sean iguales y de sentido contrario.

Las acciones que el lado  $A$  ejerce sobre las charnelas serán, como siempre, iguales y contrarias á las reacciones que éstas dsenvuelven, y por tanto se obtendrán componiendo las fuerzas  $r, p; r_1, p_1$  respectivamente iguales y contrarias á las  $r', p'; r_1', p_1'$ .

1.º 3. De estas consideraciones resulta que, si el lado  $A$  está en conexión con otros varios, por dos articulaciones solamente.

1.º Para que el sistema total esté en equilibrio, cuando sobre dicho lado no hay ninguna fuerza directamente aplicada, es necesario y suficiente que imaginándolo suprimido resulte el sistema en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas que lo soliciten, y de dos fuerzas iguales y contrarias aplicadas á los puntos de articulación y dirigidas sobre la recta que los une.



2.º Si el lado de que se trata recibe la acción de una resultante exterior, este caso quedará reducido al que precede, descomponiéndola en dos de su misma dirección y aplicadas á las charnelas respectivas.

Claro es que si las fuerzas exteriores que directamente obran sobre el lado que se considera, se reducen á un par, se descompondrían del mismo modo cada una de las fuerzas que lo constituyen.

134. Resulta de aquí, que en el estudio de las condiciones de equilibrio de los sistemas articulados podrá prescindirse de las fuerzas directamente aplicadas sobre los lados, y considerar solamente las que obran sobre los diversos puntos de articulación.

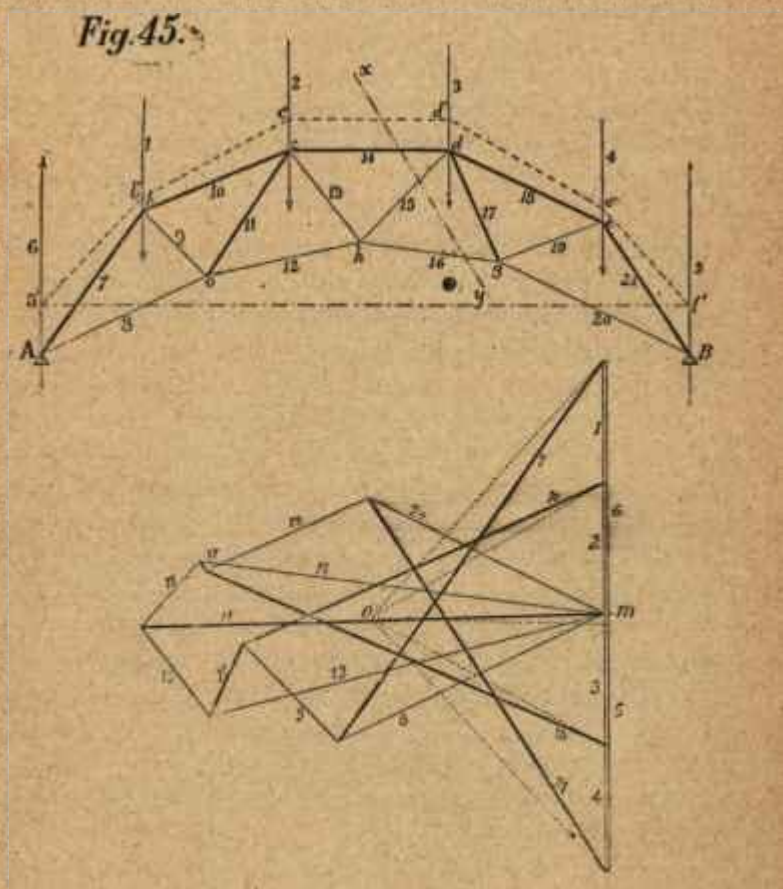
Como lo que acabamos de decir respecto de uno cualquiera de los lados es aplicable por completo á todos los demás, podremos imaginarlos todos suprimidos, sin que por ello cambien las condiciones de equilibrio del sistema, con tal de introducir las fuerzas iguales y contrarias que, aplicadas á las distintas articulaciones, representen las acciones ejercidas sobre ellas por los lados suprimidos.

De esta manera, podrán considerarse las charnelas como libres é independientes entre sí, sometidas á las fuerzas directamente aplicadas sobre ellas y á las que hemos introducido en sustitución de las acciones de los lados materiales; y así se ve que para que el sistema total esté en equilibrio, es necesario y suficiente que lo estén las charnelas, lo cual exige, como sabemos, que el polígono de las fuerzas que soliciten á cada una de ellas sea cerrado.

135. Siendo iguales y contrarias las fuerzas que reemplazan á las acciones de cada lado material, es claro que éstos estarán comprimidos cuando aquellas fuerzas sean repulsivas, y extendidos cuando sean atractivas, ó bien sucederá lo primero cuando trasportada una de las fuerzas que los solicitan al punto de aplicación de su opuesta, caiga en la prolongación del lado correspondiente, y lo segundo cuando caiga sobre él.



136. **Sistemas reticulares.**—Reciben este nombre ó el de *sistemas triangulados* (en inglés, *frameworks*; y en alemán, *fachwerk*), aquellos sistemas articulados constituídos por una serie de triángulos, á la manera como se indica en la figura 45, y los cuales constan de un polígono de forma variable, dividido



en diversos triángulos por barras que lo atraviesan, uniendo sus distintos vértices.

**137.** Los caracteres esenciales de estos sistemas son los siguientes:

1.º Se componen de triángulos simplemente yustapuestos, formando figuras estrictamente indeformables y libremente dilatables.

2.º Presentan por lo menos un nudo y generalmente dos, cada uno de los cuales comprende solamente dos barras, y por lo menos otro nudo, y de ordinario dos de ellos constituidos solamente por tres barras.

3.º Por un punto cualquiera del sistema puede darse una sección de tal modo, que el plano ó superficie secante corte únicamente á tres barras.

Conociendo las fuerzas que obran en cada vértice, el problema que tenemos que resolver se reduce á determinar: 1.º, las condiciones de equilibrio del sistema, y 2.º, las tensiones que se desarrollan en cada uno de sus lados.

**138.** 1.º *Condiciones de equilibrio.*—Siendo indeformable la figura del sistema reticular, es claro que para que estén en equilibrio las fuerzas que lo solicitan, será necesario y suficiente, como sabemos, que tanto el polígono de las fuerzas como uno cualquiera de sus polígonos funiculares sean cerrados. Por consiguiente, sólo hay que ver si tales condiciones se verifican.

Para ello (fig. 45) se numeran las fuerzas principiando por cualquiera de ellas y siguiendo el contorno del sistema, con lo cual tendremos las líneas de acción

**1, 2, 3, 4, 5, 6.**

Se construye el polígono de las fuerzas, cuyos lados serán

**1, 2, 3, 4, 5, 6**

representados por líneas dobles para distinguirlos con claridad del resto de la figura.

Finalmente, se traza un polígono funicular, tal como el



$$a' . b' . c' . d' . e' . f'$$

relativo á un polo O, arbitrariamente elegido.

Si ambos polígonos cierran, podrá afirmarse que el sistema estará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores que lo solicitan.

Si supiéramos de antemano que dichas fuerzas están en equilibrio, sería inútil el trazado de aquellos polígonos; pero como en las aplicaciones los sistemas reticulares suelen descansar en dos puntos de apoyo, el auxilio de aquéllos es necesario para determinar las reacciones que se desenvuelven en dichos puntos, como veremos en los diversos casos particulares que hemos de estudiar más adelante.

**139. 2.º *Determinación de las tensiones.***—Desde luego la figura que se considera no puede admitir, como sabemos, una figura recíproca, por el hecho de que en los puntos A y B no concurren más que dos barras; pero no sucederá lo mismo si la completamos con los lados de un polígono funicular y con las porciones de las líneas de acción de las fuerzas, limitadas entre el sistema articulado y el referido polígono.

Vamos á demostrar que una vez completada la figura, como acaba de decirse, es posible construir una figura recíproca, bajo la condición de que las líneas recíprocas de las líneas de acción de las fuerzas exteriores sean precisamente los lados del polígono de dichas fuerzas.

Por otra parte, como oportunamente hemos visto que si una figura admite una recíproca, á cada nudo de ésta corresponde en aquella un polígono cerrado, de tal manera que cada lado de la figura propuesta pertenece solamente á dos de aquellos polígonos cerrados; demostraremos también que en todos los sistemas reticulares, dichos polígonos pueden definirse de antemano, según la regla única que ahora se establecerá.

Para esto dividiremos las líneas de la figura completa en cuatro grupos, á saber:



1.º Las barras principales que forman el contorno del sistema reticular.

2.º Las barras de relleno ó interiores.

3.º Las líneas de acción de las fuerzas exteriores.

4.º Los lados del polígono funicular.

**140.** Respecto de estas líneas conviene observar:

1.º Que cada barra principal forma parte de dos polígonos cerrados, de los cuales uno es un triángulo del sistema reticular, y el otro un polígono constituido por las líneas de acción de las dos fuerzas aplicadas á los extremos de dicha barra y las partes de polígono funicular y del sistema propuesto, limitadas por aquellas fuerzas.

Así, por ejemplo, la barra *cd* comprendida entre las fuerzas **2** y **3** pertenece, tanto al triángulo *cdh*, como al cuadrilátero *cc'd'd*.

Es claro que, si faltara alguna de las fuerzas indicadas, aquella barra principal que no se encontrase en el caso anterior formaría parte, no de un cuadrilátero, sino de un polígono de mayor número de lados, como fácilmente puede comprobarse.

2.º Cada barra interior ó de relleno pertenece sólo á dos triángulos que claramente se manifiestan en la figura. La barra **9**, por ejemplo, corresponde al triángulo *Aob* y al *obc*; y lo mismo sucede respecto de todas las demás de igual categoría.

3.º La línea de acción de una fuerza exterior cualquiera corresponde á dos polígonos cerrados, definidos por la línea que se considera, una de las dos fuerzas inmediatas ó más próximas y las porciones correspondientes del polígono funicular y del contorno del sistema.

Así, por ejemplo, la línea *cc'* corresponde á los cuadriláteros *bb'c'c* y *cc'd'd*, los cuales satisfacen á las condiciones indicadas.

4.º Cada lado del polígono funicular forma parte de este polígono, que desde luego es cerrado, y de uno de los que anteriormente se indicaron.

Por ejemplo, el lado  $c'd'$  pertenece al polígono funicular á  $b'c'd'e'f'$  y al cuadrilátero  $c'd'de$ .

**141.** Las proposiciones que quedan establecidas pueden demostrarse fácilmente construyendo la figura recíproca que se busca; y para ello pudiéramos fundarnos en el carácter de este género de figuras; el cual consiste, según la definición que de ellas se ha dado, en que á cada nudo de la propuesta debe responder un polígono cerrado en la recíproca, y viceversa. Pero para proceder más en armonía con lo que realmente hay que hacer en las aplicaciones, es preferible construir la figura que se necesita bajo las condiciones siguientes:

1.ª Que á cada nudo de la propuesta corresponda en la que se construye un polígono cerrado, y

2.ª Que á cada uno de los polígonos cerrados de la propuesta de los que quedan definidos, corresponda un nudo en la nueva figura.

No hay para qué decir que la figura que resulte de este modo, si su construcción es posible, no sólo será recíproca de la propuesta, con arreglo á la definición dada oportunamente, toda vez que á sus nudos corresponden en la otra polígonos cerrados, sino que estos polígonos serán precisamente aquéllos á que antes nos hemos referido.

Para construir dicha figura se numeran, primero, las líneas de acción de las fuerzas exteriores, siguiendo el contorno de las barras principales y dando á todas las del sistema los números siguientes, en un orden cualquiera.

Estas líneas se designan con cifras gruesas, y sus recíprocas con cifras delgadas del mismo nombre.

Los lados  $a' b'$ ,  $b' c'$ , etc., del polígono funicular no hay necesidad de numerarlos.

Hecho esto, se trazan las líneas 1, 2, 3, 4 que son las recí-



procas de **1, 2, 3, 4**, ó de  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$ ,  $ee'$ , y después el polígono funicular  $a' b' c' d' e' f'$ , relativo á un polo arbitrario  $O$ , con lo cual la recta  $O m$ , paralela á la  $a' f'$ , definirá la magnitud de las fuerzas **5 y 6**, es decir, de las reacciones en los apoyos, cuyas recíprocas son las **5 y 6**, siendo por tanto **1. 2. 3. 4. 5. 6** el polígono cerrado de las fuerzas exteriores en equilibrio, que obran sobre el sistema reticular.

Desde luego, la posición de las líneas recíprocas de las barras principales es conocida, puesto que perteneciendo éstas á un polígono cerrado, el cual ha de corresponder en la figura que se construye á un nudo ó sistema de líneas concurrentes, basta saber dónde se cortan dos cualesquiera de ellas, sabiendo, por otra parte, como sabemos, que toda línea y su recíproca son paralelas. Así, por ejemplo, la barra  $b c$ , que pertenece al cuadrilátero  $b c c' b'$ , tendrá por recíproca una línea paralela á ella, trazada por el punto en que se cortan las recíprocas conocidas de los lados **1 y 2**; es decir, por el vértice **1. 2** del polígono de las fuerzas.

**142.** Podemos por tanto establecer la siguiente regla:

*La recíproca de una barra principal pasa por el vértice del polígono de las fuerzas en que concurren aquéllas que son limítrofes de la misma.*

Fijando así *à priori* la posición de las líneas recíprocas de las barras principales, podrá omitirse el trazado del polígono funicular, á menos que para determinar las reacciones en los apoyos ó por otros motivos fuera necesaria su construcción.

**143.** Dicho esto, principiemos por cualquiera de los nudos de tres líneas,  $A$  ó  $B$ ; por ejemplo, por  $A$ .

A las tres líneas

**6 7, 8**

de este nudo, deben corresponder los tres lados de un triángulo. De él conocemos el lado **6** del polígono de las fuerzas; y



como las direcciones de los otros dos se conocen, y según la regla anterior, la recíproca de la barra 7 ha de pasar por el vértice 6. 1 del polígono de las fuerzas, aquel triángulo queda completamente determinado, y será por tanto el

6. 7. 8.

Observando que el punto A está en equilibrio bajo la acción de la fuerza 6 y de las tensiones de las barras 7 y 8, dirigidas, como sabemos, según las líneas que unen sus respectivos extremos, claro es que el polígono de tales fuerzas será un triángulo cuyos lados serán paralelos y proporcionales á ellas, y por tanto, será el

6. 7. 8

que hemos construído, cuyos lados 7 y 8 representan las tensiones de las barras del mismo nombre.

**144.** Ahora bien; para saber si dichas barras experimentan un esfuerzo de tracción ó de compresión, observaremos que el sentido cíclico del triángulo de que se trata es 6. 7. 8, como lo indica el sentido de la fuerza 6, que de antemano se conoce; en cuyo caso podremos aplicar la regla que se estableció oportunamente.

Trasportada la fuerza 7 paralelamente á sí misma y aplicada al nudo A, cae en la *prolongación* de la barra 7; por lo tanto, ésta sufrirá una *compresión* total igual á 7.

Haciendo lo propio con la fuerza 8, se ve que cae *sobre* la barra correspondiente; de donde se deduce que la barra 8 experimentará un esfuerzo total de *tracción* igual á 8.

Por esto, los lados 7 y 7 de ambas figuras se representan con líneas gruesas, y la 8 y 8 con líneas finas.

**145.** Del nudo A podemos pasar al nudo *b*, porque como de las cuatro fuerzas que lo mantienen en equilibrio se conocen dos de ellas, la 1 y la 7, y las direcciones de las otras dos, será po-

sible la construcción del cuadrilátero recíproco correspondiente.

Si observamos que la barra **10** está comprendida entre las fuerzas **1** y **2**, es claro que la línea recíproca de aquella barra debe partir del punto de intersección **1. 2** del polígono de las fuerzas, desapareciendo así la indeterminación que pudiera haber en el trazado de los lados **9** y **10** del cuadrilátero recíproco del nudo que se considera. Para completarlo se trazará, según esto, por el extremo de la línea **7** una paralela á la barra **9** y por el extremo de la línea **1**, es decir, por el vértice **1. 2**, una paralela á la barra **10**.

Conocido el sentido de la fuerza **1**, el sentido cíclico del cuadrilátero construido será

7. 1. 10. 9.:

lo que define suficientemente el sentido de las fuerzas que mantienen en equilibrio al nudo *b*, y nos dice que la barra **7** y **10** están comprimidas y la **9** extendida, bajo la acción de las fuerzas cuya magnitud está representada por los lados correspondientes **7**, **10**, y **9**.

Como las fuerzas que obran sobre el nudo *o* son las tensiones de las cuatro barras que lo forman, y de aquéllas sólo se desconocen dos, la construcción del cuadrilátero recíproco, y por tanto la determinación gráfica de las tensiones que experimentan los lados **11** y **12**, es fácil.

Desde luego, por pertenecer la barra **11** al triángulo **9. 10. 11**, cuya figura recíproca será un nudo del cual hay trazadas las líneas **9** y **10**, es claro que la recíproca de dicha barra **11** será la paralela á ella trazada por el punto en que se cortan las líneas **9** y **10**; lo que nos dice además que el lado **12** del cuadrilátero de que se trata, partirá del origen de la **8** y que dicho cuadrilátero es, por tanto, el

8. 9. 11. 12.

Respecto de su sentido cíclico no hay duda que será el que



indica el orden de sucesión de sus lados, tal como se ha establecido; puesto que experimentando las barras **8** y **9** esfuerzos de tracción, según hemos visto, el sentido de los lados **9** y **8** queda definido y como consecuencia el del cuadrilátero que se considera.

La aplicación de la regla antes empleada, nos dice que la barra **11** estará comprimida y la **12** extendida.

Continuando del mismo modo, se irían construyendo los polígonos recíprocos de los nudos siguientes y determinando si los esfuerzos á que las barras han de resistir son de tracción ó de compresión.

Si las construcciones se han ejecutado con la necesaria exactitud, los lados **20** y **21**, obtenidos al construir las figuras recíprocas de los nudos *g* y *e*, á que pertenecen respectivamente, deben coincidir con las que resulten de la construcción de la recíproca del último nudo *B*, á que ambos corresponden; y si tal sucede, será porque no habrá habido errores gráficos, y por tanto podrá considerarse bien resuelto, y con la exactitud suficiente para las aplicaciones, el problema de determinar la naturaleza y magnitud de las tensiones desarrolladas en un sistema articulado bajo la acción de un sistema conocido de fuerzas exteriores.

De lo expuesto resulta, que el polígono funicular sólo ha sido necesario para averiguar las reacciones en los apoyos, y que, una vez conocidas éstas, es independiente de dicho polígono la ejecución del resto de las operaciones.

**145 Método de Culmann.**—Este método, que ahora expondremos, tiene la ventaja de dar *directamente* la tensión de una barra cualquiera, sin necesidad de pasar por las que anteceden, evitando así toda causa de acumulación de errores. Tal vez no reuna la elegancia del que anteriormente hemos expuesto, debido á Maxwell, y conocido con el nombre de método de las figuras recíprocas; pero hay casos en que su empleo es absolutamente necesario por sí sólo ó simultáneamente y como complemento del método de Maxwell.



Para aplicar el método de Culmann, sólo se necesita que sea posible dividir el sistema reticular en dos partes, imaginando que se cortan tres barras á lo sumo.

En efecto, supongamos que  $xy$  sea una sección cualquiera, plana ó no plana, que encuentre sólo á tres barras, en este caso (fig. 45) á las **14, 15, 16**. Es evidente que, si imaginamos separada la parte de la derecha del sistema reticular, para que la izquierda subsista en equilibrio será necesario y suficiente que la resultante  $R$  de todas las fuerzas exteriores que obran sobre ella y las tensiones de las barras, que se suponen cortadas, aplicadas á los puntos de intersección, constituyan un sistema en equilibrio.

Aquella resultante es fácil de determinar por medio de uno de los polígonos funiculares, y la cuestión queda, por tanto, reducida, y en esto consiste el método del Culmann, á descomponer dicha resultante en tres componentes respectivamente dirigidas según los ejes de las tres barras cortadas; problema resuelto oportunamente, y sobre el cual no hay para qué insistir.

Con objeto de que en todos los casos las fuerzas, cuya resultante hay que determinar, sean consecutivas en el polígono de las mismas, y dicha resultante pueda obtenerse inmediatamente por el polígono funicular que se hubiere construído, es necesario numerar las fuerzas exteriores, no como antes hemos dicho, siguiendo estrictamente el contorno del sistema, sino recorriendo en zig-zag todas las barras que lo constituyen, desde cualquiera de aquellos nudos en que sólo concurren dos barras.

**146. Construcción gráfica del momento de una fuerza.**—Sea **1** la línea de acción de una fuerza de magnitud  $f$ , y  $C$  un punto, respecto del cual se considera el momento de dicha fuerza. El brazo de palanca será la línea  $CP$  (figura 46), y la expresión del momento  $f \times CP$ .

Sea  $ab = f$  la fuerza de que se trata, y  $O$  un polo cualquiera. El polígono funicular, relativo al polo  $O$ , será el  $A1B$ . Prolonguemos el lado  $1B$ , y por  $C$  tracemos la  $mn$ , paralela á la línea

de acción 1, é interceptada por los dos lados del polígono funicular.

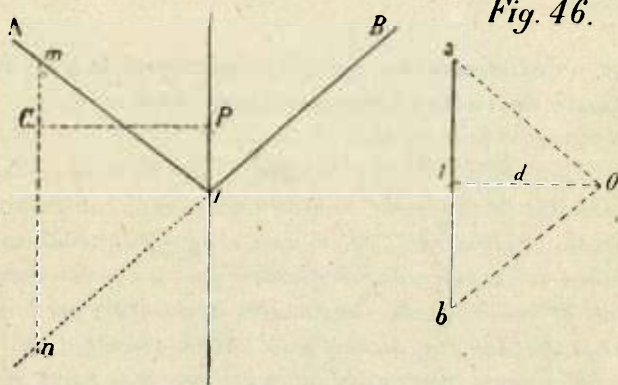


Fig. 46.

Decimos que el momento de  $f$ , respecto del punto C, es el producto de  $mn$  por la distancia polar  $d$ .

En efecto, por ser semejantes los triángulos  $1mn$  y  $Oab$ , tendremos:

$$\frac{mn}{ab=f} = \frac{CP}{d},$$

de donde

$$f \times CP = mn \times d,$$

como queríamos demostrar.

Para que el producto  $mn \times d$  sea homogéneo, es necesario medir uno de sus factores con la escala de fuerzas que se haya establecido para su representación, y el otro con la correspondiente de longitudes.

Claro es que si hubiéramos tomado  $d = 1$ , el valor numérico de la línea  $mn$  representaría el del momento de que se trata; pero si no resultara cómodo proceder así, lo que conviene es que la magnitud de  $d$ , como factor común á todos los momentos,

guarde una relación sencilla, ya con la unidad de fuerzas, ó bien con la unidad de longitud, según que la representación y medida del segmento  $mn$  se haga con la segunda ó la primera de estas unidades.

**147. Construcción gráfica del momento de la resultante de varias fuerzas.**—Esta construcción se funda en la siguiente proposición.

*El momento de la resultante de un sistema de fuerzas distribuidas de cualquier modo en un plano, con relación á un punto cualquiera C del mismo, es igual al producto de la longitud del segmento interceptado por los lados extremos de uno de los polígonos funiculares de las fuerzas consideradas y trazado por dicho punto paralelamente á la resultante del sistema, por la distancia del polo á la recta que cierra el polígono de las fuerzas.*

Consideremos por ejemplo (figura 47), las fuerzas cuyas líneas de acción sean

1, 2, 3, 4;

siendo el polígono de las mismas el

1. 2. 3. 4.

Sea A. 1. 2. 3. 4. B el polígono funicular, correspondiente á dichas fuerzas y relativo al polo arbitrario O.

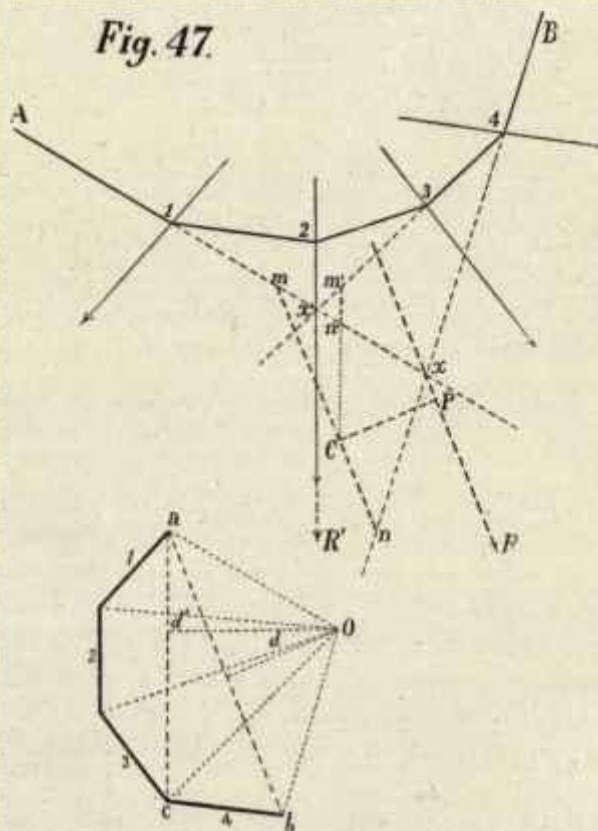
La resultante R, como sabemos, pasará por el punto  $x$  en que se cortan los lados extremos del polígono funicular, y estará representada en el polígono de las fuerzas por  $ab$ , siendo su línea de acción paralela á ésta. Pero como, según el caso anterior, el momento de R con relación al punto C es  $mn \times d$ , siendo  $d$  la distancia del polo á la recta  $ab$ , la proposición queda demostrada.

No hay para qué decir que el momento de la resultante R, con relación al punto C, ó cualquiera otro, es igual á la suma de los momentos de las componentes con relación al mismo punto;



y que en el caso actual son aplicables las consideraciones hechas en el que precede respecto á la manera de valuar los factores  $mn$  y  $d$ .

El mismo polígono funicular puede utilizarse para construir



el momento de la resultante de cualquier número de fuerzas consecutivas del sistema propuesto. Si estas fueran, por ejemplo, la 1, 2 y 3, bastaría trazar por C una paralela  $Cm'$  á la diagonal  $ac$ , y el segmento  $m'n'$ , comprendido entre los lados A 1

y 3.4 que comprenden entre sí á las fuerzas que se consideran, multiplicado por la distancia  $d'$  del polo á la línea  $ac$ , sería el momento de que se trata.

**148.** En el caso de que las fuerzas sean paralelas, los factores  $d$ ,  $d'$ , etc., según se trate del momento de la resultante total ó del correspondiente á las resultantes parciales de fuerzas consecutivas, son iguales á la distancia polar, de donde resulta la siguiente proposición.

*El momento de la resultante de varias fuerzas paralelas, situadas en un plano, con relación á un punto del mismo, es igual al producto de la ordenada paralela á las fuerzas, trazada por el punto que se considera y comprendida entre los lados extremos del polígono funicular correspondiente, por la distancia polar.*

**149. Determinación gráfica del centro de fuerzas paralelas** —Esta determinación se funda en el teorema siguiente:

*Si hacemos girar cada una de las fuerzas paralelas de un sistema cualquiera, un mismo ángulo  $\alpha$ , en el mismo sentido y sin cambiar la relación de sus magnitudes, alrededor de un punto fijo elegido arbitrariamente sobre su línea de acción; la resultante no hará otra cosa que girar alrededor de un punto fijo, independiente del ángulo  $\gamma$  de la relación en que se hubieren modificado las magnitudes de las fuerzas.*

Este punto fijo recibe el nombre de *centro* de fuerzas paralelas.

Supongamos el caso más sencillo, cuando sean dos las fuerzas paralelas. Excepción hecha del caso en que estas constituyan un par, en todos los demás sabemos que el punto en que la resultante corta á la línea que une los puntos de aplicación de las componentes, es independiente de la dirección común de las fuerzas y de las magnitudes absolutas de las mismas, y sólo depende de la posición particular de aquellos puntos de aplicación

de las componentes y de la relación de sus magnitudes; de donde resulta que para este caso la proposición es cierta.

Para generalizarla, supongamos que se verifique para un sistema de  $n$  fuerzas, y vamos á demostrar que se verificará del propio modo cuando  $n + 1$  sea el número de ellas, es decir, cuando el sistema se componga de una fuerza más.

En efecto; sea  $Q$  la resultante de las  $n$  primeras, y  $R$  la resultante de  $Q$  y de la otra; es decir de la  $(n + 1)^{ma}$ , la cual designaremos por  $P_{n+1}$ . Claro es que  $R$  será la resultante de las  $n + 1$  fuerzas.

Hagamos girar á cada una de ellas un mismo ángulo en igual sentido, alrededor de un punto fijo de su línea de acción y modifiquemos, si se quiere, sus magnitudes en una relación arbitraria pero determinada y constante para todas. La resultante  $R$ , de  $Q$  y  $P_{n+1}$ , girará asimismo alrededor de un punto fijo de su línea de acción la misma cantidad angular, y resultará modificada en la misma relación que las demás, en virtud de lo demostrado en el caso anterior; por consiguiente, si el teorema es cierto para  $n$  fuerzas lo será también para  $n + 1$ , y como lo es para dos, lo será para tres y en general para todo sistema de fuerzas paralelas, cualquiera que sea el número de sus componentes.

**150. Determinación gráfica de los centros de gravedad.**—Consideraremos solamente los centros de gravedad de las líneas y de las superficies.

**1.º Centro de gravedad de una línea cualquiera.**—Para determinar el centro de gravedad de una línea quebrada ó contorno poligonal cualquiera, basta aplicar al punto medio de cada uno de sus lados una fuerza proporcional á su magnitud paralelamente á una dirección determinada. De esta suerte la cuestión queda reducida á determinar el centro de fuerzas paralelas, como acaba de indicarse.

Si la línea fuera curva, se divide en partes iguales y suficientemente pequeñas para que cada arco pueda considerarse como igual á su cuerda; en cuyo caso, sustituida la curva propuesta



por un contorno poligonal inscrito y sensiblemente confundido con ella, se procedería del mismo modo que se ha dicho para el caso de los contornos poligonales.

2.º *Centro de gravedad de una superficie.*—Cualquiera que sea el contorno que la limite, la marcha general para determinar el centro de gravedad de una superficie, consiste en descomponerla en triángulos, reduciendo estos á otros equivalentes de igual base, para que las alturas sean proporcionales á sus áreas respectivas, en cuyo caso aplicando en los centros de gravedad de dichos triángulos fuerzas paralelas á una cierta dirección y proporcionales á aquellas alturas, la cuestión quedará reducida, como antes, á la aplicación del método gráfico para determinar el centro de fuerzas paralelas de la manera que anteriormente se ha establecido.

---

---

## SEGUNDA PARTE.

### RESISTENCIA DE MATERIALES.

---

151. **Su objeto.**—Siempre que una fuerza exterior actúa sobre un cuerpo cualquiera, determina, como es sabido, una deformación, sensible algunas veces é imperceptible otras, que varía con la intensidad y duración de la fuerza y con las propiedades del cuerpo. En ocasiones recobra éste su forma primitiva, cuando cesa la acción de la fuerza, y en otras, por el contrario, la deformación persiste aún cuando aquélla deje de obrar. De aquí que deban considerarse dos clases de deformaciones, no sólo por el carácter diferencial que las distingue, y que por tal motivo las denominaremos respectivamente deformaciones elásticas y deformaciones permanentes, sino porque en realidad corresponden á estados de equilibrio, no bien conocidos, pero seguramente muy distintos entre las fuerzas exteriores y las reacciones ó fuerzas elásticas que se desenvuelven en las moléculas del cuerpo.

Puede decirse, por tanto, que el objeto principal y práctico de la Resistencia de materiales es determinar las dimensiones de los elementos más importantes de una construcción, de tal manera, que no excedan de cierto límite las deformaciones elásticas que aquellas hayan de experimentar, ó bien las tensiones moleculares que se desarrollen bajo la influencia de las fuerzas exteriores.

**152. Elasticidad de los materiales.**—A pesar de la complicación propia de los fenómenos elásticos, admitiremos la siguiente ley, deducida de la experimentación directa sobre numerosos materiales.

*Para todos los cuerpos existe un límite de deformación, más ó menos lejano del que corresponde á la ruptura y llamado límite de elasticidad, antes de llegar al cual se verifica que las deformaciones son sensiblemente elásticas y proporcionales á las cargas que las determinan.*

**153. Cargas que soportan las construcciones.**—Las cargas á que las construcciones se hallan sometidas, pueden dividirse en cargas estáticas ó permanentes, y cargas dinámicas, más ó menos momentáneas ó accidentales. En rigor, son cargas estáticas las que no producen choque, y cargas dinámicas las que producen dicho fenómeno, ó varían de intensidad ó de condiciones de aplicación.

A pesar de los experimentos practicados hasta el día acerca de los efectos de las cargas dinámicas, podemos sentar como principio que la única base cierta de todo cálculo de resistencia es el límite de elasticidad correspondiente á las cargas estáticas.

Siendo arriesgado someter los materiales á cargas que correspondan al límite de elasticidad, para determinar en general las cargas máximas que pueden actuar sin peligro alguno, se admiten los siguientes límites de seguridad:

Para construcciones fijas  $\frac{1}{2}$  del límite de elasticidad.

Para construcciones mecánicas de  $\frac{1}{4}$  á  $\frac{1}{20}$  de dicho límite.

Tratándose de materiales, cuyo límite de ruptura sea el que únicamente se conozca, se acepta como límite convencional de elasticidad  $\frac{1}{5}$  del de ruptura.

**154. Resistencia de los prismas.**—Aun cuando la for-



ma y dimensiones de las piezas de una construcción son muy variables; en razón á su frecuente uso y á su forma poco resistente, nos ocuparemos ante todo del estudio de la resistencia de los prismas.

Entenderemos por prisma toda pieza de cierta longitud, de aristas laterales, paralelas ó casi paralelas, y en la cual, por lo tanto, la sección recta sea constante ó presente variaciones poco notables.

Para considerar con claridad los fenómenos elásticos, supondremos que los prismas están constituidos por fibras elementales muy delgadas, paralelas á las aristas laterales, y en cada una de las que se desarrolla una tensión propia bajo la influencia de las fuerzas exteriores.

Si se corta un prisma por un plano ideal cualquiera, es evidente que debe haber equilibrio entre las fuerzas moleculares desarrolladas en los diversos elementos de la sección y las fuerzas exteriores situadas á cualquiera de los lados del plano. La sección recta más pequeña de todas será sin duda la menos resistente, y es la única que por lo mismo importa ó se necesita considerar. A dicha menor sección la llamaremos de ordinario y simplemente sección del prisma.

Para simplificar las cuestiones reduciremos todas las fuerzas exteriores que actúan sobre los prismas á fuerzas irreductibles, que son las fuerzas propiamente dichas y los pares, que descompondremos, cuando sea necesario, según direcciones paralelas ó perpendiculares á las fibras elementales de los prismas.

### **155. Deformaciones que las fuerzas originan.—**

Las fuerzas propiamente dichas originan tres clases distintas de deformaciones simples:

- 1.<sup>a</sup> La compresión, cuando las fibras elementales se acortan.
- 2.<sup>a</sup> La extensión ó tracción, cuando dichas fibras se alargan.
- 3.<sup>a</sup> La acción cortante, cuando las fibras tienden á ser cortadas, sin alargarse ó acortarse.

Los pares originan dos clases de deformaciones.

1.<sup>a</sup> La flexión, cuando las fibras experimentan efectos de curvatura paralelamente á un plano, ó de simple curvatura.

2.<sup>a</sup> La torsión, cuando dichas fibras tienden á ser retorcidas ó experimentan, en otros términos, efectos de doble curvatura.

Estas dos últimas deformaciones no son otra cosa en realidad que combinaciones de las tres precedentes; porque bajo el punto de vista de la dirección de las fuerzas pueden dividirse las deformaciones; en longitudinales, que comprenden la extensión, la compresión y la flexión, y transversales, que comprenden la acción cortante propiamente dicha y la torsión.

Como la acción cortante no se presenta nunca aislada, dividiremos el estudio de las deformaciones en los tres grupos siguientes:

1.º Extensión y compresión.

2.º Flexión, que comprenderá dos secciones: la flexión simple, caracterizada por una sola curvatura del mismo sentido y la flexión compleja, en la cual la curvatura de las fibras cambia de sentido.

3.º Torsión.

## TRACCIÓN Y COMPRESIÓN.

**156. Definiciones.**—Llábase *extensión* ó *tracción* la deformación que experimenta un prisma bajo la acción de las fuerzas ó de las resultantes de las fuerzas exteriores, las cuales por ser paralelas á las aristas laterales y directamente opuestas á las resultantes de las tensiones desarrolladas, tienden á producir el mismo alargamiento en todas las fibras elementales del prisma.

Extensión hay, por ejemplo, cuando en los extremos de un prisma obran dos fuerzas iguales y directamente opuestas, que tienden á separar sus moléculas entre sí. Lo propio sucede cuando fijado sólidamente el prisma por uno de sus extremos, se halla sometido por el otro á la acción de una fuerza paralela á



sus aristas, que tienda á arrancarlo del punto de empotramiento. En este caso el extremo empotrado se halla sometido á la reacción de dicho punto; la cual, por ser igual y contraria á la acción que se ejerce en el otro extremo, la equilibra.

La *compresión* es una deformación de sentido contrario á la extensión, y se produce siempre que las fuerzas exteriores tienden á aproximar las moléculas de un prisma, acortando todas sus fibras la misma cantidad.

En algunos casos la compresión de un prisma determina una deformación más compleja, la flexión; constituyendo un caso particular de ésta como veremos oportunamente.

**157. Coeficientes característicos.**—Las tensiones y las deformaciones longitudinales de los prismas están caracterizadas por ciertas relaciones denominadas coeficientes característicos, que pueden dividirse en coeficientes de resistencia, de ruptura, de seguridad y de elasticidad.

Llámase *coeficiente de resistencia*, la relación entre la carga que corresponde al límite de elasticidad de un prisma y su sección recta; ó en otros términos, la carga límite de las deformaciones elásticas por unidad de sección, ó la tensión que la equilibra ó contrarresta.

*Coeficiente de ruptura* es la carga por unidad de sección que determina la ruptura del prisma.

*Coeficientes de seguridad*, son ciertas fracciones de los coeficientes de resistencia ó de ruptura, que se adoptan en la práctica de las construcciones.

Finalmente se llama *coeficiente de elasticidad* la relación constante que hay, dentro de los límites de la elasticidad, entre la carga por unidad de sección y el alargamiento ó acortamiento por unidad de longitud. Pudiera decirse también que es la relación entre el coeficiente de resistencia y la deformación proporcional, en el límite de elasticidad.

**158. Resultados experimentales.**—La experimenta-



ción demuestra que el valor del coeficiente de elasticidad de cada cuerpo, es sensiblemente el mismo á la extensión que á la compresión, pero que los coeficientes de resistencia y de ruptura difieren generalmente en cantidades más ó menos notables. Así, por ejemplo, para los hierros y maderas el coeficiente de resistencia ó de ruptura á la extensión es mayor que el correspondiente á la compresión. Sin embargo, como la diferencia es pequeña, no suele tenerse en cuenta en las aplicaciones.

Para la fundición, por el contrario, dichos coeficientes son mucho mayores á la compresión que á la tracción ó extensión, pues á veces el coeficiente de resistencia á la compresión se ha encontrado cuatro veces mayor que á la extensión. A pesar de esto, en la práctica sólo se admite que la resistencia á la compresión de las piezas fundidas es doble de la correspondiente á la extensión.

Hay que tener muy en cuenta que cuando ambas deformaciones se combinan, ó mejor dicho, son simultáneas en un prisma como sucede en la flexión, es indispensable emplear el menor de los coeficientes.

**159. Observación.**—En todas las fórmulas y aplicaciones que serán objeto de nuestro estudio, las cantidades se referirán siempre al centímetro y kilogramo, tomados como unidades.

Por lo tanto, las longitudes, secciones y volúmenes se expresarán en centímetros, centímetros cuadrados y centímetros cúbicos, y las fuerzas se valuarán en kilogramos.

Los coeficientes de resistencia, de ruptura y de elasticidad, se expresarán en kilogramos por centímetro cuadrado de sección.

**160.** Los valores medios de los coeficientes de resistencia y de elasticidad, así como el peso en kilogramos del centímetro cúbico de algunos materiales importantes de construcción son los siguientes.

| MATERIALES               | Peso<br>del centímetro<br>cúbico.<br>—<br>Kilogramos. | Coefficiente<br>de<br>resistencia.<br>—<br>Kilogramos. | Coefficiente<br>de<br>elasticidad<br>—<br>Kilogramos. |
|--------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Madera de pino, seca.... | 0,000.530                                             | 180                                                    | 90.000                                                |
| Madera de encina, id.... | 0,000.800                                             | 240                                                    | 120.000                                               |
| Hierro fundido.....      | 0,007.200                                             | 750                                                    | 1.000.000                                             |
| Hierro dulce.....        | 0,007.800                                             | 1.500                                                  | 2.000.000                                             |
| Acero ordinario.....     | 0,007.800                                             | 3.000                                                  | 2.000.000                                             |
| Acero templado.....      | 0,007.800                                             | 6.000                                                  | 3.000.000                                             |

Los coeficientes de ruptura son sensiblemente dobles de los de resistencia, y de ordinario se considera que para la madera en general, el coeficiente de elasticidad es de  $10^5 = 100.000$ .

**161. Esfuerzo cortante.**—Se dice que una sección de un prisma experimenta un esfuerzo cortante, cuando se halla sometida á la acción de una fuerza exterior, situada en el plano de aquélla y directamente opuesta á la resultante de las tensiones moleculares desarrolladas en dicha sección.

La fuerza que produce la acción de que se trata se denomina esfuerzo cortante.

Dicha acción se produce generalmente al propio tiempo que otras deformaciones de mayor importancia, y en tales casos no hay inconveniente en despreciarla; pero conviene notar que la consideración de los esfuerzos cortantes es esencial, como veremos más adelante, en la teoría de la flexión de cierto género de vigas.

Las leyes de la resistencia al esfuerzo cortante son, por lo demás, las mismas que á la compresión y á la extensión. La única diferencia que puede establecerse, consiste en admitir, conforme con las indicaciones de la teoría general de la elasticidad, que la resistencia al esfuerzo cortante es solamente los  $\frac{4}{5}$  de la correspondiente á la extensión.

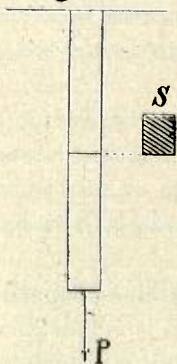


## RESISTENCIA DE LOS PRISMAS Á LA EXTENSIÓN Ó Á LA COMPRESIÓN.

**162. Caso general.**—Es evidente que bajo la misma tensión unitaria, la resistencia de un prisma es proporcional á su sección recta.

Establecido esto, fácil es expresar algébricamente la resistencia que opone un prisma (figura 48) á la acción de una fuerza exterior que tienda á acortarlo ó á alargarlo.

Fig. 48.



Llamando

K... al coeficiente de seguridad adoptado,

P... á la fuerza exterior,

S... á la sección del prisma;

es claro que siendo K la resistencia que opone una fibra de sección 1, la resistencia total, opuesta por toda la sección S, será KS, y como esta tensión debe equilibrar á la fuerza exterior P, tendremos la ecuación general de equilibrio siguiente:

$$P = KS.$$

Esta ecuación recibe también el nombre de fórmula de la resistencia del prisma y permite resolver los tres problemas que siguen:

- 1.º Determinar la carga P, que con toda seguridad puede soportar un prisma de sección S.
- 2.º Determinar la sección S de un prisma para que resista con seguridad á la acción de una fuerza P.
- 3.º Determinar la tensión K, desarrollada en cada unidad de la sección S, de un prisma sometido á la carga P.

**163. Caso particular en que es necesario tener en cuenta el peso propio del prisma.**—Cuando el peso de



prisma es considerable por su gran longitud, la sección más lejana al punto de aplicación de la carga soporta, no sólo la acción de ésta, sino el peso total del prisma; razón por la cual se denomina *sección peligrosa*, y á ella hay necesidad de referirse en los cálculos de resistencia.

Claro es que, representando

L... la longitud total del prisma, en centímetros,

S... su sección recta en centímetros cuadrados,

p... el peso en kilogramos del centímetro cúbico de la materia que constituye el prisma,

el peso total de éste será  $pLS$ , y tendremos la nueva ecuación de equilibrio

$$KS = P + pLS.$$

Como  $p$  suele ser un dato forzosamente impuesto por las circunstancias, los problemas á que da lugar son solamente cuatro, según que se considere como incógnita de la cuestión cualquiera de las cantidades  $P$ ,  $S$ ,  $L$  ó  $K$ .

**164. Caso en que el prisma no soporta más que su propio peso.**—Cuando es nula la carga  $P$ , la fórmula anterior se convierte en

$$K = pL;$$

relación que demuestra que en este caso la resistencia de un prisma es independiente de su sección recta y directamente proporcional á su longitud.

#### SÓLIDOS DE IGUAL RESISTENCIA Á LA EXTENSIÓN.

**165. Carga única.**—El único caso que consideraremos es el de un prisma de gran longitud, sometido en uno de sus extremos á una sola carga.

Si la sección fuera constante, ya hemos visto que la sección peligrosa es la que desarrolla la mayor tensión, y las demás por el contrario, la desarrollan tanto menor cuanto más se acercan al punto de aplicación de la carga. Es evidente, que el efecto que produce el exceso de materia del prisma considerado, es aumentar las dimensiones de la sección peligrosa, aunque no desarrolle mayor tensión que la que se señale; y es claro que para que la tensión sea la misma en todas las secciones, es necesario que estas vayan disminuyendo á medida que se alejan de la sección peligrosa.

La pieza que resulta de esta disminución gradual de las secciones, no será seguramente un prisma tal como debe ser en sentido geométrico; pero en resistencia de materiales suele aceptarse aquella palabra para designar los sólidos que tienen la propiedad de desarrollar la misma tensión en todas sus secciones; y que por tal motivo reciben el nombre de prismas de igual resistencia, aunque con más propiedad deben llamarse sólidos de igual resistencia.

Nos limitaremos solamente á calcular la forma aproximada de dichos sólidos, y con ello basta en las aplicaciones; porque es claro que calculando las secciones suficientemente próximas, la forma resultante diferirá de la forma rigurosa en tan poco como se quiera.

La marcha general consiste en dividir el sólido en partes iguales, comenzando por asignar á cada una la forma de un prisma propiamente dicho, cuya sección será fácil de calcular, conociendo la carga máxima á que se halle sometido, y luego sustituir la superficie escalonada resultante por una superficie continua que pase por las aristas de las secciones determinadas.

Supongamos (fig. 49) el caso de un prisma sometido á su propio peso y á una carga adicional  $P$ ; siendo  $p$  el peso del centímetro cúbico de la materia empleada, y  $l$  la longitud de cada una de las partes en que se divide la longitud total del prisma

Sean  $S_1, S_2, S_3, \dots$  las secciones de los prismas parciales.

La sección  $S_1$  más próxima á la carga adicional se determi-



nará, como ya sabemos por la relación  $KS_1 = P + pl S_1$ ; de donde

$$S_1 = \frac{P}{K - pl} = \frac{K}{K - pl} \times \frac{P}{K} = \frac{K}{K - pl} S_1$$

llamando  $S$  á la sección que sería capaz de soportar solamente la carga  $P$ .

El peso total  $p_1$  que soporta la sección peligrosa del primer prisma parcial, tiene por expresión  $p_1 = KS_1$ ; puesto que se establece como condición que todas las secciones desenvuelvan la misma tensión unitaria.

Sustituyendo en vez de  $S_1$  su valor, resultará

$$p_1 = \frac{K}{K - pl} KS = \frac{K}{K - pl} P.$$

La sección  $S_2$  del prisma siguiente deberá satisfacer á la relación:

$$KS_2 = P + p_1 S_1 + pl S_2 = KS_1 + pl S_2$$

de donde

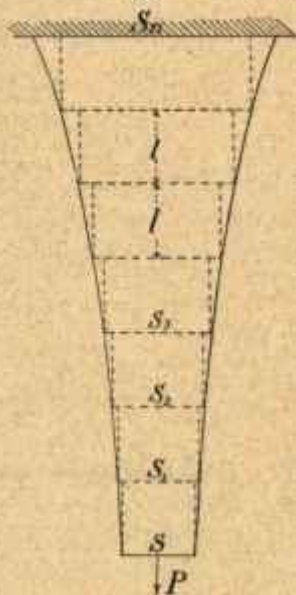
$$S_2 = \frac{K}{K - pl} S_1.$$

El peso  $p_2$  á que debe resistir la sección peligrosa en este segundo prisma será:

$$p_2 = KS_2 = \frac{K}{K - pl} KS_1 = \frac{K}{K - pl} p_1.$$

La inspección de los resultados obtenidos basta para poner de manifiesto la ley de variación de las secciones y de los pesos que soportan.

Fig. 49.





Por lo tanto tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Prisma 1.º } S_1 &= \frac{K}{K-pl} S \dots\dots p_1 = \frac{K}{K-pl} P \\ \text{» 2.º } S_2 &= \frac{K}{K-pl} S_1 \dots\dots p_2 = \frac{K}{K-pl} p_1 \\ \text{» 3.º } S_3 &= \frac{K}{K-pl} S_2 \dots\dots p_3 = \frac{K}{K-pl} p_2 \end{aligned}$$

$$\text{» } n.º \quad S_n = \frac{K}{K-pl} S_{n-1} \dots p_n = \frac{K}{K-pl} p_{n-1} (1).$$

#### MEDIDA DE LAS DEFORMACIONES.

**166. Alargamiento ó acortamiento total de los prismas.**—Hemos establecido que dentro de los límites de elasticidad las deformaciones son proporcionales á las cargas, y hemos llamado coeficiente de elasticidad á la relación constante que existe entre la carga y la deformación proporcionales, es decir, entre la carga por unidad de sección y la deformación correspondiente á la unidad de longitud.

Siendo  $l$  el alargamiento ó el acortamiento (según se trate de la extensión ó de la compresión) que sufre un prisma de longi-

(1) La forma exacta de igual resistencia en el caso que hemos considerado, se determina por la fórmula  $\log. nep \frac{S_n}{S} = \frac{pl}{K}$ , en la cual representa  $S$  la sección del extremo libre, determinada por la relación  $\frac{P}{K}$ ;  $S_n$  la sección que se quiere calcular;  $l$  su distancia al extremo libre;  $p$  y  $K$  lo mismo que en el caso anterior.

tud  $L$  y de sección  $S$ , bajo una carga  $P$ , la carga proporcional será  $\frac{P}{S}$ , y la deformación proporcional  $\frac{l}{L}$ ; por consiguiente, representando por  $E$  el coeficiente de elasticidad, su expresión será:

$$E = \frac{\left(\frac{P}{S}\right)}{\left(\frac{l}{L}\right)}.$$

Esta relación permite determinar los alargamientos ó acortamientos de los prismas, así como las tensiones que resultan, sometidos á esfuerzos determinados de tracción ó de compresión, puesto que  $\frac{P}{S} = K$ .

Tenemos pues;

1.º Tensión de un prisma que se alarga ó acorta la cantidad  $l$ .

$$\frac{P}{S} = K = \frac{l}{L} E.$$

2.º Alargamiento ó acortamiento proporcional bajo una tensión determinada:

$$\frac{l}{L} = \frac{P}{ES} = \frac{K}{E}.$$

3.º Alargamiento ó acortamiento total:

$$l = \frac{PL}{SE} = \frac{K}{E} L.$$

La relación  $\frac{l}{L}$  es un número abstracto, cuya magnitud no depende de la unidad de longitud adoptada; y como por otra parte la relación  $\frac{P}{S}$  es la carga por unidad de sección, el co-



ciente de dividir esta carga por la relación  $\frac{l}{L}$  será otra carga, que deberá necesariamente expresarse en las mismas unidades y referirse á la misma unidad de sección que el coeficiente de resistencia. De suerte que en definitiva el coeficiente de elasticidad no es otra cosa que un cierto número de kilogramos por unidad de sección.

Resulta, además, que dentro de los límites de elasticidad, así como la deformación total que experimenta el prisma es la fracción  $\frac{l}{L}$  de su longitud, del mismo modo la carga ó la tensión por unidad de sección del prisma es igual á la misma fracción del número E.

Así pues, si en los indicados límites el alargamiento ó acortamiento de un prisma fuera la diezmilésima parte de su longitud, la tensión del mismo por unidad de sección sería también la diezmilésima parte del número E, y recíprocamente.

**167.** De otro modo puede definirse el coeficiente de elasticidad. En efecto, si suponemos  $l = L$ , resultará

$$K = E;$$

lo cual quiere decir que el coeficiente de elasticidad representa la tensión ó carga por unidad de sección, capaz de producir en un prisma un alargamiento ó acortamiento igual á su longitud, si las leyes de la elasticidad pudieran subsistir hasta tal punto de deformación.

**168. Nota.**—En el cálculo de las secciones de los prismas sometidos á determinadas cargas, no basta tener en cuenta que la tensión por unidad de sección no exceda del límite de seguridad que se señale; pues pudiera suceder que resultando el prisma calculado perfectamente resistente, la deformación total alcanzara valores inadmisibles. En tales casos es preciso que la sección calculada satisfaga á la condición de que la deformación no



exceda de ciertos límites que la práctica y el objeto del prisma determinan fácilmente.

Esta condición que llamaremos condición de rigidez es esencial, como veremos más adelante en ciertos casos.

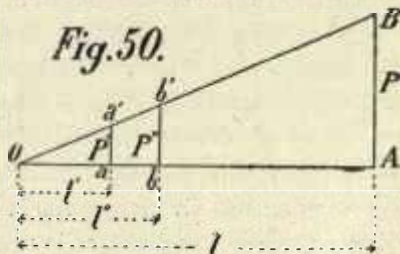
RESISTENCIA VIVA DE LOS PRISMAS SOMETIDOS Á ACCIONES  
DINÁMICAS DE TRACCIÓN Ó DE COMPRESIÓN.

**169. Prismas de sección constante.**—Llamaremos resistencia viva de elasticidad de un prisma, sometido á las acciones indicadas, al trabajo molecular desarrollado por el mismo para experimentar una deformación determinada, dentro de los límites de la elasticidad.

Supongamos que  $l', l''$ ..... etc., sean, por ejemplo, los alargamientos sucesivos correspondientes á los valores  $P', P''$ ..... etc., de una carga que crece progresivamente de 0 á  $P$ .

Si sobre una recta  $OA$  (figura 50) tomamos desde su origen  $O$  las cantidades  $Oa, Ob$ ..... etc., con arreglo á la escala de longitudes, de manera que representen los alargamientos indicados, y se levantan las perpendiculares  $aa', bb'$ ..... medidas con la escala de fuerzas para que representen los valores correspondientes de la carga, es claro que el área del diagrama  $OAB$  representará el trabajo molecular totalmente desarrollado por el prisma para alcanzar la deformación  $l$ .

Si el valor final de la fuerza  $P$  no excede de la carga límite de elasticidad, los valores sucesivos  $P', P''$ ..... serán, como sabemos, proporcionales á las deformaciones  $l', l''$ .....; en cuyo caso la línea  $OB$  será una recta: y por tanto la expresión de dicho trabajo molecular será



$$T_m = \frac{Pl}{2}.$$

Este trabajo no es otra cosa que la expresión de la semifuerza viva que el prisma es capaz de consumir para experimentar una deformación total  $l$ , variando en consecuencia su tensión unitaria de 0 á  $\frac{P}{S}$ .

Representando por  $K$  el coeficiente de seguridad adoptado, tendremos como condición de resistencia

$$P = KS$$

y como además la expresión  $l$  es, según sabemos,

$$l = \frac{KL}{E},$$

si sustituímos estos valores en la expresión del trabajo molecular, resultará

$$T_m = \frac{1}{2} SL \frac{K^2}{E} = \frac{1}{2} V \frac{K^2}{E}$$

representando  $V$  el volumen inicial del prisma.

No hay para qué advertir que como las unidades adoptadas son el centímetro y el kilogramo, la unidad de trabajo será para la expresión establecida la centésima parte del kilográmetro, y á cuya unidad pudiéramos llamar kilogramo-centímetro; por consiguiente, para obtener en kilográmetros el valor de dicho trabajo será necesario dividir por 100 la expresión de  $T_m$ .

Esta expresión nos dice que la resistencia viva de un prisma es proporcional á la relación  $\frac{K^2}{E}$ , por lo cual, si comparásemos las resistencias vivas de elasticidad de los materiales ordinarios, y tomásemos por unidad la del más débil, obtendríamos los resultados siguientes:

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| Madera .....          | 1     |
| Fundición .....       | 1.46  |
| Hierro .....          | 2.82  |
| Acero ordinario ..... | 11.25 |
| Acero templado .....  | 30.00 |

El trabajo de las fuerzas exteriores, equivalente á una resistencia viva dada de un prisma, puede expresarse de varios modos.

Si, por ejemplo, la fuerza  $Q$  de tracción que actúa sobre el prisma es constante para todos los estados de la deformación total  $l$ , es claro que su trabajo será  $Ql$ ; y por lo tanto tendremos

$$Ql = \frac{1}{2} Pl$$

de donde

$$Q = \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} KS;$$

lo que nos dice que la fuerza constante necesaria para producir una tensión molecular determinada, es precisamente la mitad de la carga estática correspondiente á dicha tensión. Tal sucedería en el caso de abandonar súbitamente una carga, sostenida al extremo de un prisma, que estuviese á punto de solicitarlo.

Si la fuerza viva exterior fuera la originada por un peso  $Q$  que cae de una altura  $h$ , tendríamos entonces

$$Qh = \frac{1}{2} Pl = \frac{1}{2} V \frac{K^2}{E}.$$

Finalmente, si dicha fuerza viva fuera la de una masa  $\frac{Q}{g}$ , animada de una velocidad  $v$ , y la cual quedase anulada por la resistencia del prisma, la expresión del trabajo exterior sería

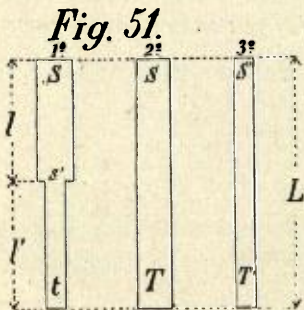


$$\frac{1}{2} \times \frac{Q}{g} v^2 = \frac{1}{2} V \frac{K^2}{E} = \frac{1}{2} Pl,$$

de donde

$$Q = \times \frac{1}{2} \frac{V}{\left(\frac{v^2}{2g}\right)} \times \frac{K^2}{E}.$$

**170. Prismas de sección variable.**—Supongamos (figura 51) tres prismas de longitud  $L$ . El primero, compuesto de dos partes, una  $l$  de sección  $S$ , y otra  $l'$  de sección  $S'$ , siendo  $S > S'$ ; y los otros dos de sección constante; la del segundo, igual á la mayor  $S$ , y la del tercero igual á la menor  $S'$ , y comparemos las resistencias vivas que á dichos tres prismas corresponden.



La del primero tendrá por expresión

$$t = \frac{1}{2E} (Sl K^2 + S'l' K'^2);$$

y es claro que bajo la acción dinámica de una carga cualquiera, la tensión  $K'$  de la sección menos resistente será mayor que la tensión  $K$  de la otra sección; lo que prueba que es necesario expresar  $K$  en función de  $K'$ , por ser ésta la mayor de las tensiones desarrolladas. Ahora bien, como dichas tensiones son inversamente proporcionales á las secciones correspondientes, tendremos

$$K = \frac{S'}{S} K',$$

y substituyendo en la relación anterior

$$t = \frac{1}{2E} S' K'^2 \left( l' + l \frac{S'}{S} \right)$$

ó bien sumando y restando  $l$  dentro del paréntesis y separando  $l + l' = L$ , como si fuera factor común,

$$t = \frac{1}{2E} S' L K'^2 \left[ 1 - \frac{l}{L} \left( 1 - \frac{S'}{S} \right) \right].$$

La resistencia del segundo prisma, bajo la misma tensión máxima  $K'$ , será;

$$T = \frac{1}{2E} S L K'^2,$$

y la correspondiente del tercero, bajo igualdad de tensión máxima;

$$T' = \frac{1}{2E} S' L K'^2.$$

Las relaciones de resistencias vivas son por tanto:

Entre el primero y segundo prismas

$$\frac{t}{T} = \frac{S'}{S} \left[ 1 - \frac{l}{L} \left( 1 - \frac{S'}{S} \right) \right],$$

y entre el primero y tercero,

$$\frac{t}{T'} = 1 - \frac{l}{L} \left( 1 - \frac{S'}{S} \right).$$

Como por hipótesis

$$\begin{aligned} l &< L, \\ S' &< S, \end{aligned}$$

es claro que

$$\frac{l}{L} \left( 1 - \frac{S'}{S} \right) \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$$

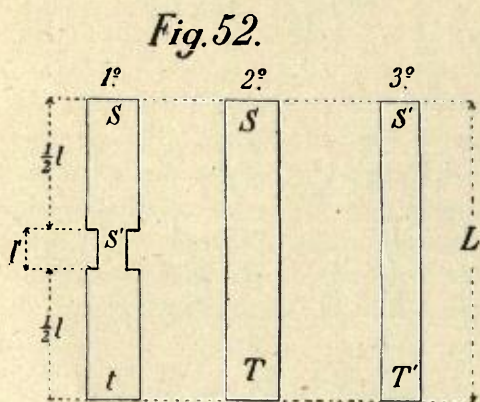
y por lo tanto

$$\begin{aligned} t &< T \\ t &< T' \end{aligned}$$

Estos resultados nos demuestran que un prisma de sección variable es menos resistente á las acciones dinámicas que otro de la misma naturaleza é igual longitud y de sección constante, ya sea esta igual á la mayor ó bien á la menor de las secciones del primero.

171. De aquí se deriva una consecuencia importante, á saber: que las formas de igual resistencia que anteriormente hemos estudiado son inconvenientes para las piezas que hayan de someterse á acciones dinámicas de tracción ó de compresión, porque reduciendo aquéllas á las de prismas de igual longitud y de sección constante é igual á la menor de sus secciones, la resistencia viva de los prismas resultantes sería mayor, como hemos demostrado, á pesar de su menor volumen, que la de dichos sólidos de igual resistencia á las acciones estáticas.

172. Comparemos ahora las resistencias vivas de tres primas de la misma naturaleza y longitud; el primero de sección  $S$  y con



una muesca ó entalladura que reduce aquélla en el lugar que ocupa á  $S'$ ; el segundo de sección constante igual á  $S$ , y el tercero de sección constante también é igual á  $S'$ .

Considerando que la entalladura ocupa un espacio relativamente pequeño y despreciable respecto de la longitud total  $L$ , podremos admitir sin gran error que  $l=L$ , en cuyo caso la expresión de las indicadas resistencias vivas serán las siguientes:



$$\text{Primer prisma..... } t = \frac{1}{2E} S' L K'^2 \frac{S'}{S}$$

$$\text{Segundo íd..... } T = \frac{1}{2E} S L K'^2$$

$$\text{Tercer íd..... } T' = \frac{1}{2E} S' L K'^2,$$

de donde

$$\frac{t}{T} = \left( \frac{S'}{S} \right)^3$$

$$\frac{t}{T'} = \frac{S'}{S}.$$

Como  $S' < S$ , resultaría también en este caso

$$t < T$$

$$t < T'.$$

Si, por ejemplo, la entalladura redujese á la mitad la sección del prisma, tendríamos entonces

$$t = \frac{1}{4} T$$

$$t = \frac{1}{2} T'$$

lo que nos dice que la resistencia viva de un prisma se reduce á la cuarta parte, por el sólo hecho de practicar en él una entalladura que reduzca su sección á la mitad, á pesar de que su resistencia estática sería solamente la mitad de la primitiva. Vemos también que, á pesar de su menor volumen, el tercer prisma posee una resistencia viva doble que la del primero.

17°. De las consideraciones expuestas, resulta en último término: que las variaciones de sección en las piezas que hayan de someterse á acciones dinámicas de tracción ó compresión, son

perjudiciales porque disminuyen la resistencia viva de aquéllos, siendo por lo tanto de verdadera importancia que presenten una sección constante en toda su longitud.

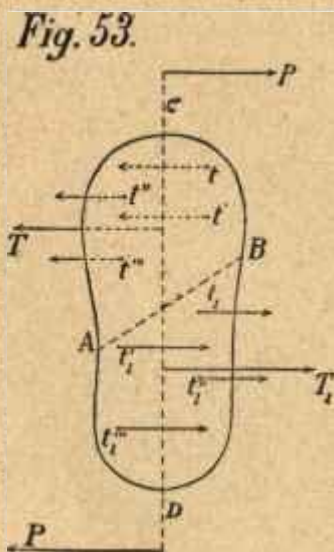
## DE LA FLEXIÓN.

### FLEXIÓN SIMPLE.

#### *Determinación de las fuerzas moleculares.*

**174. Flexión elemental.**—Se dice que una sección recta de un prisma experimenta una flexión elemental cuando se halla

sometida á la acción de un par, cuyo plano es perpendicular al plano de la sección.



En el caso frecuente de que el plano del par sea un plano de simetría del prisma, y corte por lo tanto á todas sus secciones, según un eje de simetría, el efecto que el par produce no es otro, como desde luego se conoce, que hacer girar la sección alrededor de una recta AB situada en su plano y perpendicular al eje de simetría CD, denominada *eje neutro* ó de *fibras invariables*.

Las fibras situadas á un lado del eje neutro, sufren una tracción propia y el alargamiento correspondiente; mientras que las



demás, situadas al otro lado de dicho eje sufren una compresión propia y el acortamiento correspondiente. Las fibras que no se hallan ni extendidas ni comprimidas, son precisamente las que determinan el eje neutro.

**175.** Las resultantes de las tensiones desarrolladas en cada una de las dos partes de la sección, separadas por el eje neutro, constituyen un par que equilibra al par exterior; y por lo tanto, la propiedad característica de la flexión elemental de una sección de un prisma es la siguiente.

La resultante, ó lo que es lo mismo, la suma de las tensiones desarrolladas por el alargamiento de las fibras situadas á uno de los lados del eje neutro, es igual á la suma de las tensiones producidas por el acortamiento de las fibras situadas al otro lado de dicho eje.

Por otra parte, demuestra la experiencia que, dentro de los límites de seguridad generalmente adoptados, el valor del coeficiente de elasticidad es el mismo para la tracción que para la compresión.

Estos dos principios, puede decirse que constituyen la base de toda la teoría de la flexión.

**176.** Representando por  $t$  la tensión de una cualquiera de las fibras extendidas, y por  $t_1$  la tensión de una cualquiera de las fibras comprimidas, la expresión algébrica del primer principio será

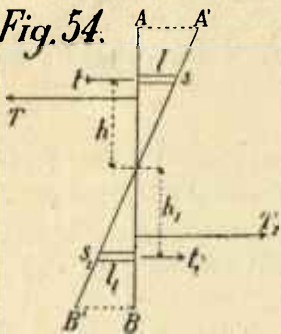
$$\Sigma t = \Sigma t_1 \quad (1)$$

Recordando además que

$$E = \frac{\left(\frac{P}{S}\right)}{\left(\frac{l}{L}\right)}$$



Fig. 54.



resulta  $P = Sl \frac{E}{L}$ ; es decir, que las tensiones  $P = (t, t', t'' \dots)$  ó  $P = (t_1, t'_1, t''_1 \dots)$  son proporcionales á los productos  $Sl$ , ó bien á los productos  $sl, s'l' \dots s_1l_1, s'_1l'_1, s''_1l''_1 \dots$  (figura 54).

La ecuación (1) puede escribirse bajo la forma

$$\sum sl \frac{E}{L} = \sum s_1l_1 \frac{E}{L}$$

ó suprimiendo el factor común y constante  $\frac{E}{L}$

$$\sum sl = \sum s_1l_1 \quad (2)$$

Inspiciendo la figura 54 se advierte que las deformaciones  $l, l' \dots l_1, l'_1 \dots$  son proporcionales á sus distancias  $h, h' \dots h_1, h'_1 \dots$  al eje neutro ó de rotación, y llamando  $m$  á la razón comun

$$\frac{l}{h} = \frac{l'}{h'} = \dots = \frac{l_1}{h_1} = \frac{l'_1}{h'_1} = \dots = m$$

tendremos

$$\sum smh = \sum s_1mh_1$$

y dividiendo por  $m$

$$\sum sh = \sum s_1h_1 \quad (3)$$

Ahora bien, siendo  $sh$  el momento del elemento de sección, situado á un lado del eje neutro, y  $s_1h_1$  el momento del elemento de sección, situado al otro lado de dicho eje, es claro que la igualdad de la suma de los momentos que expresa la ecuación (3), demuestra que el eje neutro ó de rotación pasa por el centro de gravedad de la sección del prisma.

**177.** Tratemos ahora de determinar la resistencia que opone la sección del prisma á la acción del par exterior.

Representemos por  $M$  el momento del par originado por las fuerzas exteriores é indiquemos los momentos de las fuerzas moleculares que se desarrollan en los distintos puntos de la sección con relación al eje neutro, encerrando en un paréntesis las letras que las representan. Tendremos como condición de equilibrio

$$M = \Sigma(t) + \Sigma(t_1),$$

ó bien, teniendo en cuenta las relaciones establecidas,

$$M = \left[ \Sigma(sl) + \Sigma(s_1 l_1) \right] \frac{E}{L}$$

**178.** Pudiendo, según lo expuesto, representar por el producto  $sl \frac{E}{L}$  la tensión de una fibra, es claro que la suma de todas las tensiones análogas se podrá representar por el volumen dilatado ó comprimido correspondiente, multiplicado por la relación  $\frac{E}{L}$ .

Además, como la suma de los momentos de los volúmenes elementales es igual al momento del volumen total, que no es otra cosa sino el producto del volumen total dilatado ó comprimido,  $V$  ó  $V_1$ , por la distancia  $X$  ó  $X_1$  de su centro de gravedad al eje de momentos, podremos establecer

$$M = \left( VX + V_1 X_1 \right) \frac{E}{L}.$$

**179.** Los productos  $VX \frac{E}{L}$  y  $V_1 X_1 \frac{E}{L}$  se pueden expresar siempre, como pronto veremos, en función de la tensión máxima  $K$  ó  $K_1$  de la fibra más lejana al eje neutro ó de rotación, en cuyo caso y poniendo de manifiesto dicho valor  $K$  de la tensión máxima, llegaremos finalmente á una relación de la forma



$$M = KZ,$$

en la cual la cantidad  $Z$  recibe el nombre de *módulo de flexión* de la sección considerada.

**180.** El producto  $KZ$ , que tiene el mismo valor que el momento  $M$  del par exterior, se denomina *momento de flexión* de la sección. Dicho producto representa por lo tanto la resistencia á la flexión de la sección considerada, y la fórmula que precede constituye la ecuación de equilibrio ó de resistencia del prisma á la flexión.

**181.** La fórmula general  $M = KZ$  permite la resolución de dos problemas fundamentales:

1.º Determinar el momento exterior que puede equilibrar una sección dada.

2.º Determinar la sección capaz de resistir á un momento de flexión conocido.

Para abordar la resolución de estos problemas es necesario conocer de una manera general el momento de flexión en una sección cualquiera del prisma, y además el de toda resultante de las fuerzas que obran sobre él.

**182.** La teoría de la flexión comprende, pues, dos problemas generales, á saber:

1.º Determinación de los módulos de flexión de las secciones ó perfiles usuales.

2.º Determinación de los momentos exteriores á todas las secciones de un prisma sometido á la flexión.

#### MÓDULOS DE FLEXIÓN DE LOS PERFILES USUALES.

**183. Rectángulos macizos.**—El eje neutro ó de rotación divide el rectángulo en dos partes iguales, y como el volu-



men dilatado será, por lo tanto, igual al volumen contraído, tendremos

$$M = 2VX \frac{E}{L}$$

Además

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{H}{2} \cdot B = \frac{1}{4} BHl,$$

$$X = \frac{2}{3} \times \frac{H}{2} = \frac{1}{3} H.$$

Por tanto,

$$M = \frac{1}{6} BH^3 \frac{E}{L}$$

Ahora bien, recordando la re-

lación  $E = \frac{\left(\frac{P}{S}\right)}{\left(\frac{l}{L}\right)}$ , de donde  $\frac{P}{S} = l \frac{E}{L}$ , y observando que en

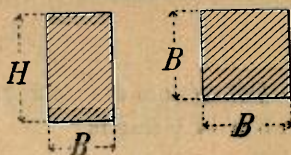
esta última expresión la relación  $\frac{P}{S}$  no representa otra cosa que la tensión por unidad de una fibra que experimenta la deformación  $l$ , es claro que en el caso que nos ocupa, como  $l$  representa la deformación de la fibra más lejana al eje neutro,  $l \frac{E}{L}$  representará la tensión  $K$  por unidad correspondiente á dicha fibra; es decir, la tensión máxima por unidad que en la sección del prisma se desarrolla, por lo cual tendremos

$$M = \frac{1}{6} BH^3 K.$$

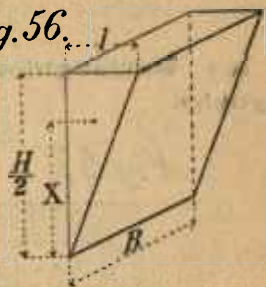
Comparando esta expresión particular con la condición general de resistencia que ya hemos establecido

$$M = KZ,$$

*Fig. 55.*



*Fig. 56.*



se ve inmediatamente que en este caso el módulo de flexión  $Z$  tiene por expresión

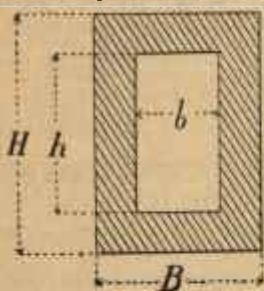
$$Z = \frac{1}{6} BH^2.$$

Del módulo del rectángulo se deduce el del cuadrado haciendo  $B = H$ , y resulta

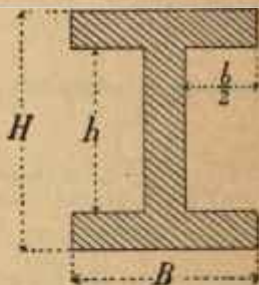
$$Z = \frac{1}{6} B^3.$$

**184. Rectángulos huecos. — Doble T de alas iguales.**

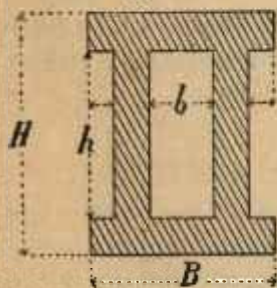
*Fig. 57.*



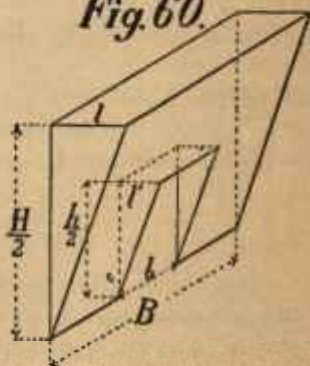
*Fig. 58.*



*Fig. 59.*



*Fig. 60.*



La resistencia total será la diferencia entre la de los rectángulos BH y  $bh$ , y llamando K á la tensión por unidad correspondiente á la deformación  $l$ , y  $k$  á la correspondiente á la deformación  $l'$  tendremos:

$$\text{Para el rectángulo BH} \dots \quad Z_1 K = \frac{1}{6} BH^3 K$$

$$\text{Para el } \quad \quad \quad bh \dots \quad Z_2 k = \frac{1}{6} bh^3 k$$

Pero como

$$ZK = Z_1 K - Z_2 k,$$

y además

$$Z_1 K - Z_2 k = \frac{1}{6} (BH^3 K - bh^3 k),$$

tendremos

$$ZK = \frac{1}{6} (BH^3 K - bh^3 k).$$

Como las tensiones son proporcionales á las deformaciones, de la figura 60 se deduce

$$\frac{k}{K} = \frac{h}{H}, \quad k = \frac{h}{H} K.$$

Sustituyendo este valor de  $k$  en la última fórmula, resultará

$$ZK = \frac{1}{6} \left( BH^3 K - \frac{bh^3 K}{H} \right) = \frac{1}{6} K \frac{BH^3 - bh^3}{H},$$

de donde

$$Z = \frac{1}{6} \frac{BH^3 - bh^3}{H}.$$



**185. Doble T de alas dobles.**—El módulo de esta doble

T se obtiene fácilmente observando que su resistencia es igual á la del rectángulo BH, disminuída en la de los rectángulos bh y b'h'.

Por lo tanto, podremos establecer

$$ZK = \frac{1}{6} BH^3K -$$

$$\frac{1}{6} bh^3k - \frac{1}{6} b'h'^3k'.$$

Además, como se verifica que

$$\frac{k}{K} = \frac{h}{H}, \quad \frac{k'}{K} = \frac{h'}{H},$$

de donde

$$k = \frac{hK}{H}, \quad k' = \frac{h'K}{H};$$

sustituyendo y reduciendo, resultará:

$$Z = \frac{1}{6} \frac{BH^3 - bh^3 - b'h'^3}{H}.$$

**186. Perfiles en U, en T y en L.** (Figuras 62, 63, 64 y 65).—Aunque para el último de estos perfiles no existe en realidad el plano de simetría que para los demás, se le suele referir al perfil en simple T.

En estos tres perfiles, el eje de rotación no puede ser eje de simetría. Veamos cómo se determina aquél.

Sea  $\zeta$  la distancia del eje neutro ó de rotación á la arista A.

*Fig. 61.*

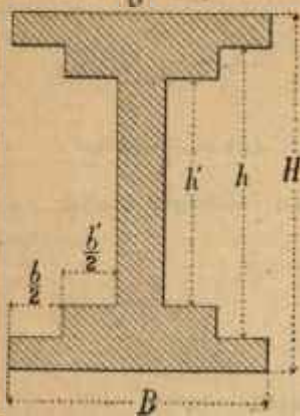


Fig. 62.

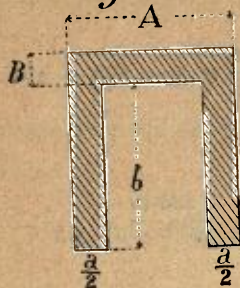


Fig. 63.

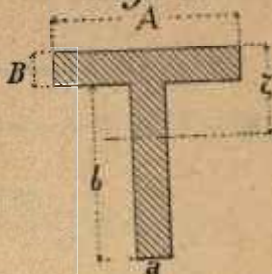
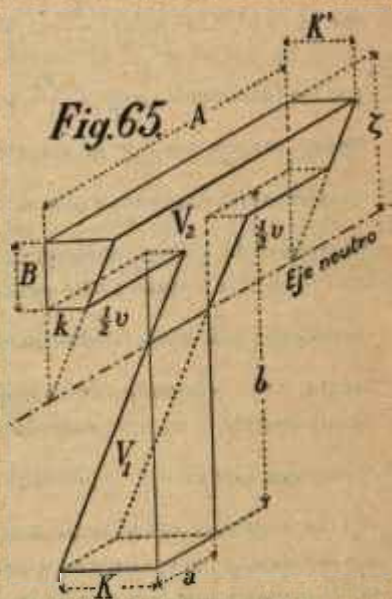
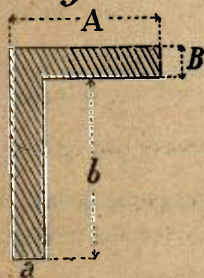


Fig. 64.



Su valor se determinará fácilmente, tomando los momentos con relación á dicha arista.

Para la superficie AB, el brazo de palanca es  $\frac{1}{2} B$ .

Para la id. ab, el id. id. es  $B + \frac{1}{2} b$ .



Para la superficie total  $AB + ab$  el brazo de palanca es  $\zeta$ .  
Por consiguiente

$$(AB \times \frac{1}{2} B) + \left( ab (B + \frac{1}{2} b) \right) = (AB + ab) \zeta$$

de donde

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{AB^2 + ab^2 + 2ab B}{AB + ab}$$

Ahora bien; si para simplificar el razonamiento recordamos que  $M = [VX + V_1 X_1] \frac{E}{L} = V \frac{E}{L} X + V_1 \frac{E}{L} X_1$  y observamos que los factores  $V \frac{E}{L}$  y  $V_1 \frac{E}{L}$  no son otra cosa que los volúmenes originados por la rotación de la sección recta que se considera, multiplicados por la constante  $\frac{E}{L}$ ; como uno de los elementos de dichos volúmenes es la deformación máxima de las fibras más lejanas al eje neutro,  $l$  ó  $l'$ , es claro que podemos considerar que los referidos factores  $V \frac{E}{L}$ , y  $V_1 \frac{E}{L}$  son sencillamente otros volúmenes de la misma altura que los  $V$  y  $V_1$  respectivamente, y en los cuales la dimensión  $l$  ó  $l'$ , de la base, se reemplaza por la  $l \frac{E}{L}$  ó por la  $l' \frac{E}{L}$ ; expresiones que representan las tensiones unitarias desarrolladas por las fibras de las aristas más lejanas al eje neutro, y que por tanto podremos representar la primera por  $K$  y por  $K'$  la segunda.

Estos nuevos volúmenes son los que representa la fig. 65, y ella manifiesta que el volumen dilatado  $V_2$  es la diferencia de otros dos que llamaremos  $V'$  y  $\nu$ ; de modo que podremos establecer  $V_2 = V' - \nu$ .

Tenemos además  $V' = \frac{1}{2} \zeta AK'$ ;  $\nu = \frac{1}{2} (A - a) (\zeta - B)k$ :



y siendo para  $V'$  el brazo de palanca  $\frac{2}{3} \zeta$

y para  $v$  id. id.  $\frac{2}{3} (\zeta - B)$

con respecto al eje neutro, tomado como eje de momentos, tendremos;

$$\text{Momento de } V' = V'X' = \frac{1}{3} A \zeta^2 K'$$

$$\text{Momento de } v = vx = \frac{1}{3} (A - a) (\zeta - B)^2 k.$$

Pero como  $V_2 = V' - v$ ; llamando  $X_2$  al brazo de palanca del volumen  $V_2$ , tendremos

$$V_2 X_2 = V'X' - vx = \frac{1}{3} (A \zeta^2 K' - (A - a) (\zeta - B)^2 k)$$

que es la expresión general del momento del volumen dilatado.

En cuanto al volumen comprimido, su brazo de palanca es

$$X_1 = \frac{2}{3} (B + b - \zeta)$$

y la expresión de dicho volumen

$$V_1 = \frac{1}{2} a(B + b - \zeta)K.$$

Su momento será

$$V_1 X_1 = \frac{1}{3} a(B + b - \zeta)^2 K.$$

Si en la fórmula general  $KZ = (VX + V_1 X_1) \frac{E}{L}$ , reducida por las consideraciones precedentes á la forma más sencilla

$$M = KZ = VX + V_1 X_1,$$

sustituyéramos los valores encontrados para los términos del segundo miembro, resultaría una fórmula en que entrarían las tensiones  $K$ ,  $k$  y  $K'$ ; pero como en la expresión  $KZ$ ,  $K$  representa la tensión de las fibras más fatigadas, y por tanto más alejadas del eje de rotación, será necesario sustituir antes, en vez de  $K'$  y  $k$  sus valores en función de  $K$ ; tensión, en este caso, de las fibras situadas en la arista  $a$ , que es la más lejana al eje neutro.

Ahora bien, tenemos

$$\frac{K'}{K} = \frac{\zeta}{B + b - \zeta}, \quad \frac{k}{K} = \frac{\zeta - B}{B + b - \zeta};$$

de donde

$$K' = \frac{\zeta}{B + b - \zeta} K, \quad k = \frac{\zeta - B}{B + b - \zeta} K.$$

Sustituyendo, tendremos

$$ZK = \frac{1}{3} a (B + b - \zeta)^2 K + \frac{1}{3} \left[ A \zeta^2 \frac{\zeta}{B + b - \zeta} K - (A - a) (\zeta - B)^2 \frac{\zeta - B}{B + b - \zeta} K \right]$$

ó bien

$$ZK = \frac{1}{3} K \left[ (B + b - \zeta)^2 a + \frac{A \zeta^3}{B + b - \zeta} - \frac{(A - a)(\zeta - B)^2}{B + b - \zeta} \right]$$

y reduciendo

$$Z = \frac{1}{3} \frac{A \zeta^3 - (A - a)(\zeta - B)^2 + a(B + b - \zeta)^3}{B + b - \zeta}$$

**187.** Esta expresión general del módulo de flexión pudiera reducirse á términos muy sencillos, en algunos casos particulares, estableciendo relaciones determinadas entre las cantidades  $A$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $b$ ; como sucede con frecuencia en la práctica.

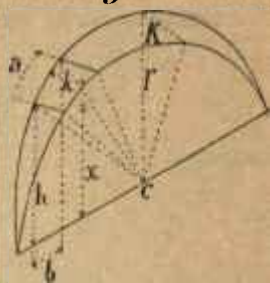


**188. Círculo macizo.**—Considerando como en el caso anterior, del propio modo que haremos adelante sin necesidad de advertirlo, que los volúmenes dilatados ó comprimidos sean los que corresponderían al caso hipotético de

Fig. 66.



Fig. 67.



que la deformación tuviera el mismo valor numérico que la tensión correspondiente; claro es que para el círculo macizo, lo mismo el volumen dilatado que el volumen comprimido pueden considerarse como la suma de pequeñas pirámides, análogas á la representada en la figura 67, y cuyo vértice se halle en el centro de la sección circular.

Siendo  $a$  y  $k$  los lados de la base de una cualquiera de dichas pirámides y  $r$  su altura, el volumen será

$$v = \frac{1}{3} akr,$$

y la distancia de su centro de gravedad al eje neutro será

$$x = \frac{3}{4} h.$$

Por lo tanto, el momento del volumen elemental tendrá por expresión

$$vx = \frac{1}{4} ahrk.$$

Ahora bien, tenemos las relaciones

$$\frac{k}{K} = \frac{h}{r}, \quad k = \frac{h}{r} K.$$



Por tanto,

$$vx = \frac{1}{4} ah^2 K.$$

Además, como se verifica la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{r}{h}, \text{ de donde } ah = br,$$

tendremos

$$vx = \frac{1}{4} brhK.$$

Efectuando la suma de productos análogos resultará

$$\Sigma(vx) = VX = vx + v'x' + \dots = \frac{1}{4} rK (bh + b'h' + \dots),$$

ó bien

$$VX = \frac{1}{4} rK \times \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{8} \pi r^3 K.$$

Ahora bien; como, por ser el eje neutro eje de simetría de la sección circular, se verifica que

$$V_1 X_1 = \frac{1}{8} \pi r^3 K,$$

la fórmula fundamental

$$ZK = VX + V_1 X_1$$

se convertirá, en este caso, en

$$ZK = 2 \times \frac{1}{8} \pi r^3 K,$$

de donde

$$Z = \frac{1}{4} \pi r^3 = \frac{1}{32} \pi d^3.$$

**189. Círculo hueco.**—Representando por  $2V_1X_1$  el momento de flexión correspondiente á la sección  $D$ , por  $2vx$  el momento de flexión de la sección  $d$ , y por  $2VX$  el de la sección considerada, es claro que

$$VX = V_1X_1 - vx.$$

Según lo establecido en el caso anterior, tenemos

$$V_1X_1 = \frac{1}{8} \pi R^3 K, \quad vx = \frac{1}{8} \pi r^3 k;$$

por lo tanto

$$VX = \frac{1}{8} \pi [R^3 K - r^3 k].$$

Como, por otra parte, se verifica que

$$\frac{k}{K} = \frac{r}{R}, \quad \text{de donde} \quad k = \frac{r}{R} K,$$

sustituyendo tendremos

$$VX = \frac{1}{8} \pi \left[ R^3 K - \frac{r^3 K}{R} \right] = \frac{1}{8} \pi \frac{R^4 - r^4}{R} K;$$

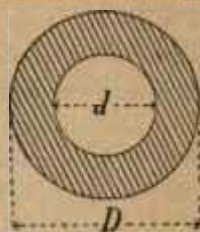
y como

$$ZK = 2VX,$$

resultará finalmente

$$Z = \frac{1}{4} \pi \frac{R^4 - r^4}{R} = \frac{1}{32} \pi \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

*Fig. 68.*



**190. Consecuencias de las fórmulas que preceden.**—1.<sup>a</sup> La resistencia de un perfil rectangular es proporcional á su anchura y al cuadrado de su altura, por lo cual se expli-



ca la ventaja de aumentar esta última dimensión en detrimento de la primera; así como que los rectángulos, ó mejor dicho, las piezas de sección rectangular, resistan más colocados de canto que de plano.

2.<sup>a</sup> Fundándose en lo que precede, es también ventajoso ensamblar sólidamente perfiles superpuestos, de modo que su perfil se comporte como un perfil único.

3.<sup>a</sup> A sección equivalente, son más resistentes los perfiles que tienen un eje central de simetría, y cuya materia queda repartida lo más lejos posible de dicho eje.

Comparando un perfil de doble T en que el espesor de las alas sea igual á la sexta parte de la altura y el del alma sea un doceavo de la misma, con el rectangular de la misma sección, y cuya altura sea en ambos doble de la base, sus resistencias están en la relación :: 2, 5 : 1, próximamente.

La relación análoga de resistencias entre la de un cilindro hueco, cuyo espesor sea  $\frac{1}{10}$  del diámetro exterior, y la de un cilindro macizo de sección equivalente es :: 2, 7 : 1.

## FLEXIÓN SIMPLE DE LOS PRISMAS EMPOTRADOS.

### FLEXIÓN ORDINARIA.

**191. Preliminares.**—Llámanse flexión de un prisma, la deformación total que experimenta por virtud de la flexión elemental de cada una de sus secciones.

Puede decirse que la flexión de un prisma se verifica siempre que en todas sus secciones no puedan reducirse las fuerzas que lo solicitan á una fuerza única, opuesta directamente á las tensiones ó acciones moleculares que en ellas se desarrollan.

Generalmente se determina la flexión de un prisma por la acción de fuerzas exteriores dirigidas en un plano de simetría



longitudinal de aquél; lo cual quiere decir que la flexión ordinaria es una deformación en la que todas las fibras se encorvan, permaneciendo, sin embargo, paralelas á un plano de simetría del prisma.

**192.** Desde el punto de vista de la dirección de las fuerzas que ocasionan la flexión con respecto al eje longitudinal del prisma, ha lugar á distinguir:

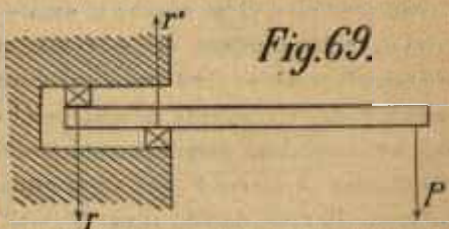
1.º La flexión ordinaria propiamente dicha, cuando todas las fuerzas son perpendiculares al eje longitudinal.

2.º La flexión compuesta, en el caso contrario; estando constituida, como se comprende fácilmente, por una flexión ordinaria acompañada de una tracción ó compresión, igual para todas las fibras.

**193.** Desde el punto de vista de la dirección respectiva de las fuerzas que determinan la deformación de que se trata, puede dividirse á su vez la flexión ordinaria en dos secciones: *flexión simple*, cuando la curvatura del prisma no puede cambiar de sentido, y *flexión compleja* en el caso contrario.

En términos generales puede decirse que habrá flexión simple siempre que en toda la extensión del prisma no sea posible reducir las fuerzas que lo solicitan á más de tres fuerzas consecutivas, alternativamente de direcciones contrarias, pudiendo por lo demás ser aquéllas, ó fuerzas propiamente dichas ó reacciones de puntos de apoyo ó de empotramiento.

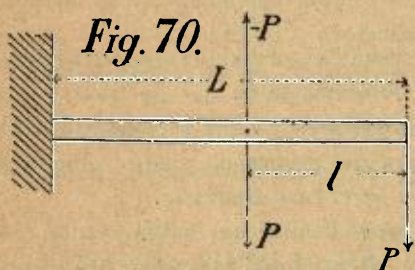
**194.** Los puntos de empotramiento, en realidad equivalen á dos puntos de apoyo, como indica la figura 69; porque su objeto no es otro que mantener las fibras del prisma en una posición bien determinada,



perpendiculares, por ejemplo, á los esfuerzos exteriores de flexión, lo cual se consigue lo mismo empotrando el extremo del prisma que mediante los apoyos representados, los cuales desenvuelven las reacciones  $r$  y  $r'$  que indica la figura.

#### DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS DE FLEXIÓN EN LOS PRISMAS EMPOTRADOS.

**195. Carga única.**—El caso más sencillo de flexión ordinaria se presenta cuando un prisma empotrado por un extremo está solicitado por el otro, por una sola fuerza perpendicular á la dirección de sus fibras (Figura 70).



Sea  $P$  la fuerza ó carga única que obra en el extremo libre, y veámos á qué género de acciones tiene que resistir una sección cualquiera del prisma, situada á la distancia  $l$  de dicho extremo.

Imaginemos aplicadas en el centro de gravedad de la sección que se considera, dos fuerzas directamente opuestas, iguales y paralelas á la carga  $P$ . No hay para qué decir que las fuerzas introducidas no podrán alterar el estado ó condiciones de equilibrio del prisma, puesto que su resultante es nula. La presencia de tales fuerzas, sin embargo, nos permite considerar, ó mejor dicho, poner claramente de manifiesto que la sección resiste á dos esfuerzos bien distintos: un esfuerzo ó acción cortante producido por la fuerza  $P$ , que obra situada en su plano, y un esfuerzo de flexión, debido al par  $(P, -P)$ , cuyo brazo de palanca es  $l$ . De donde resulta, que la sección que se considera experimenta simultaneamente una acción cortante y una flexión elemental.



Hay que advertir que como por virtud de la primera de dichas acciones las fibras no tienden á ser dilatadas ni comprimidas, sus efectos no aumentan ni disminuyen los producidos por la flexión. De aquí resulta que la sección debe calcularse para que resista á la mayor de las acciones, que generalmente suele ser el momento del par de flexión.

Representando por  $m$  dicho momento, cuya expresión general es  $Pl$ , tendremos

$$m = Pl;$$

y es claro, como  $l$  varía de 0 á  $L$  el momento variará de 0 á  $PL$ , y el momento máximo de flexión se engendrará en la sección empotrada y tendrá por expresión

$$M = PL;$$

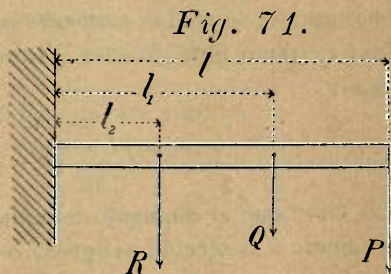
siendo, por tanto, la ecuación de resistencia

$$ZK = PL$$

**Observación.** Cuando sea necesario tener en cuenta el signo de un momento de flexión cualquiera, ya se consideren las fuerzas que queden á la izquierda del punto de que se trate, ó ya las que queden á su derecha, tomaremos como *positivas*, las *fuerzas exteriores ascendentes* y como *negativas* las *descendentes*. Los momentos de las fuerzas positivas, serán positivos y los de las fuerzas negativas, negativos, cualquiera que sea el extremo del prisma que se tome como origen de distancias.

#### 196. Varias cargas.

— Fácil es hacer extensiva la teoría que precede al caso en que sean varias las fuerzas que soliciten al prisma, siendo todas paralelas y perpendiculares á sus fibras (figura 71).





En virtud de la independencia de las acciones de las fuerzas, el momento de flexión en una sección cualquiera será igual á la suma de los momentos correspondientes á cada una de ellas.

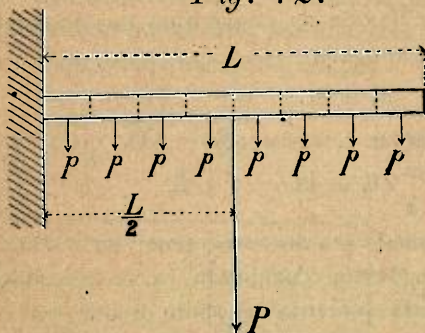
En la sección peligrosa, se verificará por lo tanto

$$M = Pl + Ql_1 + \text{etc...}$$

**197. Carga uniformemente repartida.**—Sea un prisma de longitud  $L$  (figura 72), sometido á una carga uniformemente repartida de  $p$

kilogramos por unidad de longitud.

*Fig. 72.*



Como en el caso anterior, se verificará que para una sección cualquiera el momento de flexión se compondrá de la suma de los momentos de las fuerzas exteriores y comprendidas entre

dicha sección y el extremo libre del prisma, ó bien será igual al momento de la resultante de dichas fuerzas.

Ahora bien, la resultante de la carga sobre una longitud  $l$  del prisma, es una fuerza  $pl$  aplicada en el punto medio de dicha longitud; por lo cual el momento  $m$ , en una sección que diste  $l$  del extremo libre, tendrá por expresión, prescindiendo del signo,

$$m = pl \times \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} pl^2$$

y es claro que el momento máximo, en valor absoluto, correspondiente á la sección peligrosa ó de empotramiento, será

$$M = \frac{1}{2} pL^2 = \frac{1}{2} PL,$$

y la ecuación de resistencia

$$ZK = \frac{1}{2} pL^2 = \frac{1}{2} PL$$

siendo  $pL = P$  la carga total uniformemente repartida.

**198. Carga uniformemente variable.**—El caso más frecuente es el que indica la figura 73, cuando la carga unitaria decrece uniformemente de  $p$  á 0, desde el extremo empotrado hasta el extremo libre. Entonces, como la resultante es

$$P = \frac{1}{2} pL,$$

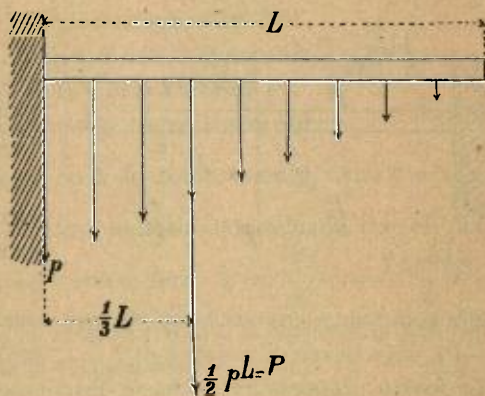
y el punto de aplicación dista de la sección de empotramiento  $\frac{1}{3} L$ , el momento máximo, en valor absoluto, será

$$M = \frac{1}{2} pL \times \frac{1}{3} L = \frac{1}{6} pL^2$$

La ecuación de resistencia es en este caso

$$ZK = \frac{1}{6} pL^2.$$

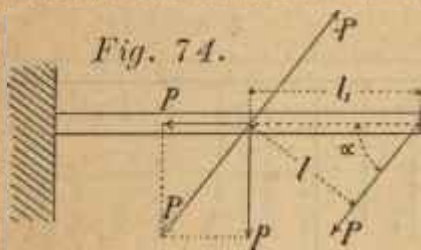
Fig. 73.





## FLEXIÓN COMPUESTA

**199. Carga única.**—El caso más general de flexión compuesta se verifica cuando una resultante exterior obra en una dirección cualquiera en el plano de simetría longitudinal del prisma.



Aplicando al centro de gravedad de la sección que se considere (figura 74), dos fuerzas directamente opuestas, iguales y paralelas á la fuerza exterior  $P$ , se advierte que dicha sección

resulta sometida á las acciones de una fuerza  $P$  y de un par  $(P, -P)$ , cuyo brazo de palanca es  $l = l_1 \text{ sen } \alpha$ .

La fuerza propiamente dicha se descompone en un esfuerzo de tracción ó de compresión  $p$  y en un esfuerzo cortante  $p'$ , siendo por lo general despreciables las tensiones y deformaciones que produce esta última fuerza, comparadas con las que engendran la otra y el par.

Prescindiendo, pues, en este caso del esfuerzo cortante, puede decirse que una sección cualquiera del prisma se halla sometida á la acción de un par de flexión y de una fuerza de tracción ó de compresión.

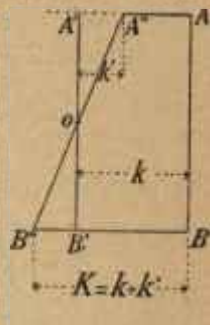
Hay que advertir, que en el caso actual estos dos efectos se suman, puesto que la tracción ó compresión que determina la componente  $p$  es del mismo sentido que la que resulta de la flexión.

Examinaremos dos casos, según que el perfil del prisma sea ó no simétrico con respecto al eje neutro ó de fibras invariables.



**200.** Consideremos primero el caso de una sección simétrica y sea AB el perfil de esta sección (figura 75). El efecto de la componente  $p$  (figura 74), que en el caso supuesto es una compresión, es el de transportar la sección AB á la posición A'B'; y el del par  $Pl$ , hacer girar dicha sección alrededor de la línea mediana  $o$ , conduciéndola de la posición A'B' á la A''B''. Se ve, pues, que el máximo efecto corresponde á la deformación total BB'', que será una tracción ó una compresión, según el sentido de la fuerza exterior P.

Fig. 75.



La tensión unitaria  $k$ , engendrada por el esfuerzo de tracción ó de compresión  $p$ , será  $k = \frac{P}{S}$ .

La tensión máxima unitaria determinada por el par, cuyo momento es  $Pl = Pl_1 \sin \alpha$ , será  $k' = \frac{Pl}{Z} = \frac{Pl_1 \sin \alpha}{Z}$ .

Por lo tanto, la tensión unitaria  $K$  soportada por las fibras más fatigadas de la sección será

$$K = \frac{p}{S} + \frac{Pl}{Z}, \text{ ó bien, } K = P \left( \frac{\cos \alpha}{S} + \frac{l_1 \sin \alpha}{Z} \right)$$

De una manera general, representando por  $P$  el esfuerzo de tracción ó de compresión y por  $M$  el momento, desarrollados en la sección empotrada, podremos establecer, como forma general de la ecuación de resistencia en la flexión compuesta,

$$K = \frac{P}{S} + \frac{M}{Z}$$

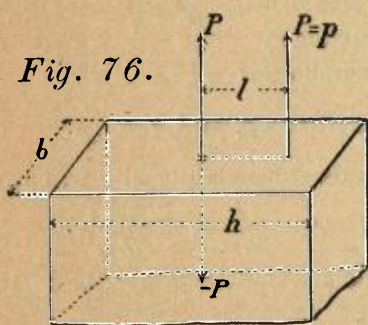
**201.** Para que en ningún punto de la sección se desarrollen esfuerzos de tracción, como es indispensable que ocurra en los prismas de fábrica, en los cuales se supone que la resistencia á

la tracción es nula, es necesario y suficiente que  $k > k'$ , ó lo que es igual que  $\frac{p}{S} > \frac{Pl}{Z}$ .

Así, en el caso particular y frecuente en las construcciones de que la fuerza exterior sea normal á la sección, en cuyo caso  $P = p$ , la condición anterior se reduce á

$$\frac{P}{S} > \frac{Pl}{Z}, \quad \text{ó bien,} \quad l < \frac{Z}{S}.$$

Considerando una sección rectangular (figura 76), tendremos



$$Z = \frac{1}{6}bh^2, \quad S = bh;$$

por lo tanto

$$l < \frac{bh^2}{6bh}, \quad \text{ó} \quad l < \frac{1}{6}h,$$

es decir, que para que una sección rectangular no tenga que resistir más que á esfuerzos de compresión, es

necesario y suficiente que el punto de aplicación de la fuerza normal que obra sobre ella diste de su centro de gravedad menos de  $\frac{1}{6}$  de su altura.

**202.** Supongamos ahora que se trate de una sección que no sea simétrica respecto del eje neutro ó de rotación. Pueden ocurrir los dos casos indicados en las figuras 77 y 78. En el primero se ve que la tensión máxima  $k_2$ , producida por el par de flexión, es del mismo sentido que la tensión  $k$ , originada por la fuerza propiamente dicha; por lo cual la máxima tensión  $K$  será la suma de dos tracciones ó dos compresiones, y tendremos

$$K = k + k_2.$$

En el segundo caso, la mayor deformación  $k_2$  producida por el par de flexión es de sentido contrario á la tracción ó compresión determinada por la fuerza propiamente dicha; pero como la deformación máxima  $AA''$  está constituida por la suma de  $k$  y la deformación menor  $k_1$  originada por el par, tendremos en este caso

$$K = k + k_1.$$

Pudiera suceder que  $BB''$  fuese mayor que  $AA''$ ; entonces tendríamos

$$K = k_2 - k.$$

**203. Carga uniformemente repartida.**—Examinemos el caso de un prisma sometido á la acción de una carga uniformemente repartida y oblicua al eje de aquél.

Supongamos (figura 79) el prisma empotrado por uno de sus extremos, y sea  $p$  la carga por unidad de longitud.

Descomponiendo cada una de las fuerzas  $p$  en dos, una  $p'$ , normal al prisma y otra  $p''$ , paralela al mismo, se ve desde luego que dicho

Fig. 77.

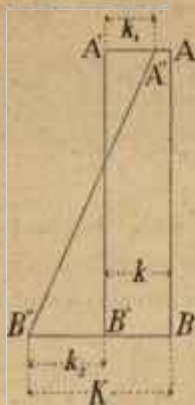


Fig. 78.

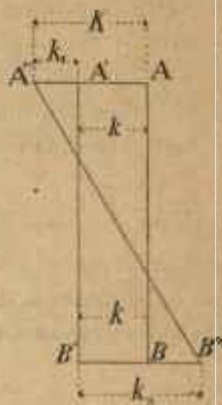
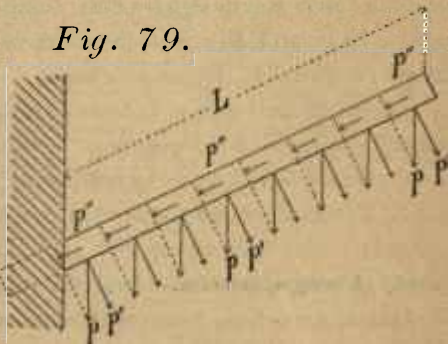


Fig. 79.





prisma se halla sometido, por una parte, á una carga de flexión uniformemente repartida de  $p'$  kilogramos por unidad de longitud, y por otra, á una de compresión ó tracción uniformemente creciente de 0 á  $p''L$ , desde el extremo libre á la sección de empotramiento.

Claro es que la sección peligrosa es la que corresponde á dicho empotramiento, y la tensión total máxima unitaria á que se halla sometida será, por lo tanto,

$$K = \frac{p''L}{Z} + \frac{p'L^2}{2Z} \quad \text{ó} \quad K = P \left( \frac{\cos \alpha}{S} + \frac{L \sin \alpha}{2Z} \right)$$

que es la ecuación de resistencia en el caso actual, siendo, según se ha demostrado

$$M = \frac{1}{2} p' L^2.$$

#### 204. Sólidos de igual resistencia á la flexión.—

Como el momento de flexión crece desde el extremo libre hasta la sección de empotramiento, que es además, como hemos visto, la sección peligrosa, es claro que todas las demás secciones intermedias sufrirán esfuerzos tanto más pequeños cuanto mayor sea su distancia al punto de empotramiento, resultando de aquí que todas ellas son desigualmente resistentes y que todas, excepto la calculada, que es, como sabemos, la que corresponde al extremo empotrado, lo son en exceso.

Trátase de determinar la forma apropiada de los sólidos que tengan la propiedad de que sean igualmente resistentes todas sus secciones, ó, lo que es lo mismo, que la máxima tensión unitaria  $K$ , desarrollada en todas ellas, sea la misma.

**205. Carga única.**—Sea  $P$  la carga que solicita el extremo libre de un prisma horizontal, empotrado por uno de sus extremos y cuya longitud sea  $L$ .

Prescindiendo del peso propio del prisma, en lo cual no hay

inconveniente en muchos casos, la ecuación de resistencia correspondiente á la sección peligrosa será, como sabemos,

$$KZ = PL.$$

La correspondiente á una sección cualquiera distante la cantidad  $l$  del extremo libre será, con la condición de que en ella se desenvuelva la misma tensión máxima  $K$ ,

$$KZ' = Pl.$$

Dividiendo miembro á miembro estas dos ecuaciones, tendremos

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{l}{L}$$

Esta relación permite determinar las dimensiones de una sección cualquiera en función de las dimensiones de la sección peligrosa, bajo la condición establecida de igual resistencia, ó, lo que es lo mismo, de que  $K$  sea constante en todas las secciones.

En efecto; supongamos que se trate de un sólido de sección rectangular.

En este caso como

$$Z' = \frac{1}{6} bh^2, \quad Z = \frac{1}{6} BH^2$$

resultará

$$\frac{bh^2}{BH^2} = \frac{l}{L};$$

y es claro, que conociendo  $l$ ,  $L$ ,  $B$  y  $H$  será fácil determinar  $bh^2$ , y por lo tanto  $b$  y  $h$ , si se establece entre estas dimensiones la relación que se estime conveniente.

**206.** Si suponemos, por ejemplo, que la altura de las seccio-



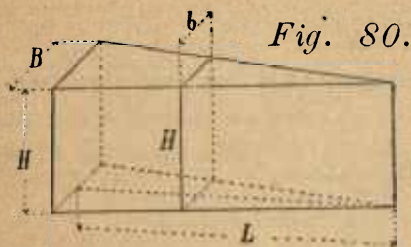
nes haya de ser constante, en cuyo caso  $h = H$ , tendremos entonces

$$\frac{b}{B} = \frac{l}{L};$$

lo que nos dice que las bases de las secciones son directamente proporcionales á las distancias al extremo libre, por lo cual todas

las secciones horizontales del sólido serán triángulos iguales entre sí.

El sólido de igual resistencia en el caso actual, tendrá la forma que indica la figura 80.



**207.** Si las bases de todas las secciones hubieran de ser iguales entre sí, en cuyo caso  $b = B$ , resultaría entonces

$$\frac{h^2}{H^2} = \frac{l}{L} \quad \text{ó bien} \quad \frac{h}{H} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{L}}.$$

En este caso las alturas de las secciones tienen que ser proporcionales á las raíces cuadradas de sus distancias al extremo libre, y claro es, que la sección recta causada por un plano vertical y paralelo al eje del prisma, daría un perfil parabólico.

La ecuación de esta parábola, presentada bajo la forma ordinaria, es, según se deduce de la condición establecida,

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{H^2}{4L}\right)l;$$

en la cual  $\frac{h}{2}$  es la ordenada y  $l$  la abscisa, tomando como ejes coordenados una horizontal y paralela al eje del prisma, y la



vertical que pasa por el extremo libre, según indica la figura 81.

**208.** Por último, si la relación entre las dimensiones de las secciones permanece constante, es decir, si se verifica que

$\frac{b}{B} = \frac{h}{H}$ , lo cual quiere decir que las secciones todas serán semejantes, tendremos

$$\frac{b}{B} = m; \quad \frac{h}{H} = m; \quad \frac{h^2}{H^2} = m^2$$

de donde

$$\frac{bh^2}{BH^2} = m^3 = \frac{l}{L}$$

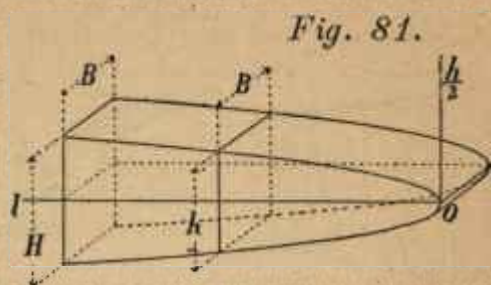
y también

$$m = \frac{b}{B} = \frac{h}{H} = \frac{\sqrt[3]{l}}{\sqrt[3]{L}}.$$

En este caso, el sólido presenta la forma piramidal que indica la figura 82, limitado por superficies parabólicas de 3.<sup>er</sup> grado.

**209. Carga uniformemente repartida.**—Siendo  $p$  la carga por unidad de longitud, es claro que para que dos secciones, la peligrosa que dista  $L$  del extremo libre y la que se considera, que dista  $l$  de dicho extremo, desenvuelvan la misma tensión máxima, será necesario que

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{pl^2}{pL^2}$$



puesto que para dichas secciones se verifica que

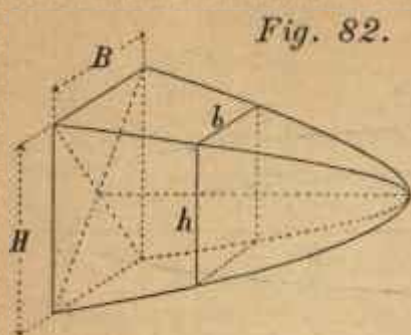


Fig. 82.

$$Z'K = \frac{1}{2} pl^3$$

$$ZK = \frac{1}{2} pL^3.$$

Si la sección del sólido fuera rectangular, tendríamos:

$$\frac{bh^3}{BH^3} = \frac{l^3}{L^3}.$$

Consideremos los diversos casos que pueden ocurrir.

**210.** 1.º—La base permanece constante, es decir,  $b = B$ . Entonces resultará

$$\frac{h}{H} = \frac{l}{L};$$

lo que nos dice que las alturas de las secciones deben ser pro-

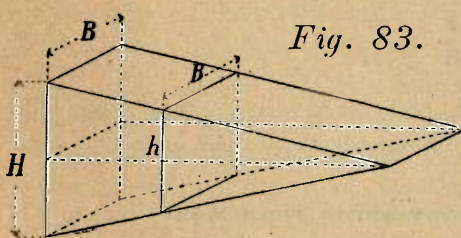


Fig. 83.

porcionales á sus distancias al extremo libre, resultando el sólido que indica la figura 83.

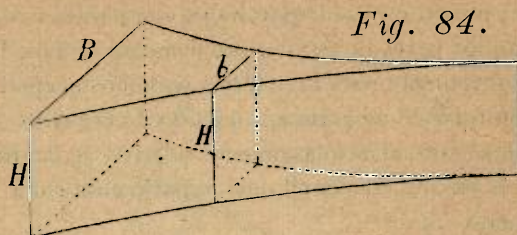
decir  $h = H$ . Entonces tendremos

**211.** 2.º — La altura permanece constante, es decir

$$\frac{b}{B} = \frac{l^2}{L^2} \text{ de donde } b = \frac{B}{L^2} l^2$$



En este caso, el sólido afecta la forma indicada por la figura 84, siendo las superficies laterales parabólicas, tangentes por el extremo libre, es decir, por su vértice.



**212.** 3.º—La relación entre las dimensiones es constante, es decir, que

$$\frac{b}{B} = \frac{h}{H} = m.$$

Entonces es claro que

$$\frac{bh^2}{BH^2} = m^2 = \frac{l^2}{L^2},$$

de donde

$$m = \frac{b}{B} = \frac{h}{H} = \sqrt[3]{\left(\frac{l}{L}\right)^2}$$

En este caso resultará una forma piramidal, más complicada que las anteriores, que no presenta interés en las aplicaciones.

Los volúmenes de estos tres sólidos, para la misma longitud y condiciones idénticas de carga, son como los números

$$\frac{3}{2}, \quad 1, \quad \frac{9}{7}.$$

#### MEDIDA DE LAS DEFORMACIONES

**213. Flecha de flexión.**—Cuando un prisma se halla sometido por esfuerzos exteriores de flexión, las deformaciones

originadas por los esfuerzos cortantes y las fuerzas longitudinales de tracción ó de compresión, son generalmente despreciables por su escasa importancia, comparadas con las que engendran los pares de flexión propiamente dichos. De modo que sin inconveniente para la práctica podemos aceptar que la deformación total de un prisma, sometido á cargas de flexión, se debe únicamente al desplazamiento relativo de las fibras que resulta de la flexión elemental que experimenta cada una de las secciones.

Cuando el prisma se halla empotrado por un extremo, la im-



portancia de la suma de los desplazamientos elementales se aprecia y se manifiesta por el desplazamiento total del extremo libre, cuya magnitud  $f$  recibe el nombre de *flecha de flexión* ó de curvatura del prisma (figura 85), y sirve, por decirlo así, de medida á la flexión total del mismo.

Vamos, pues, á ocuparnos ahora en la determinación de las flechas de flexión que presentan los prismas y los sólidos de igual resistencia, empotrados por un extremo, libres por el otro, y bajo el supuesto que tienen un plano longitudinal de simetría, perpendicular al plano de simetría del par de flexión.

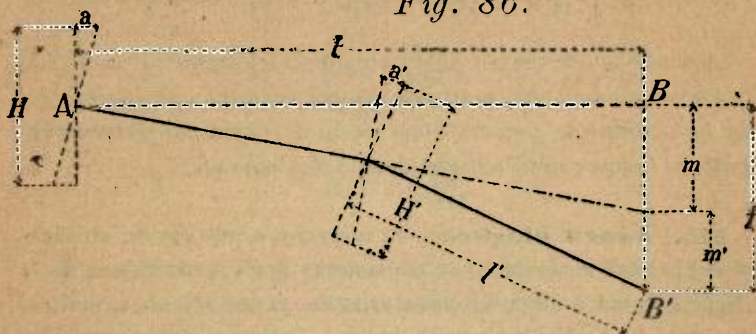
**214.** Para determinar la flecha total de un prisma, supongámoslo dividido en prismas elementales, iguales entre sí, y tomemos como unidad la altura común de los mismos.

Recordando que la deformación total tiene por expresión  $l = \frac{K}{E} L$ , como en este caso  $L = 1, l = a, a' \dots$  (fig. 86) y  $K$  toma



valores distintos que representaremos por  $K, K', \dots$  claro es que

*Fig. 86.*



las deformaciones de las fibras más alejadas del eje neutro, en las diversas secciones, tendrán por expresión;

$$a = \frac{K}{E}, \quad a' = \frac{K'}{E}, \quad \text{etc.}$$

Como la figura indica, á toda rotación,  $a$ , de una sección corresponde otra rotación igual del eje del prisma en la parte comprendida entre dicha sección y el extremo libre, y por tanto un desplazamiento  $m$  de dicho extremo. La suma de todas ellas constituye la flecha de flexión.

Tales desplazamientos están ligados á las deformaciones respectivas por las relaciones proporcionales siguientes:

$$\frac{m}{l} = \frac{2a}{H}; \quad \frac{m'}{l'} = \frac{2a'}{H'}; \quad \frac{m''}{l''} = \frac{2a''}{H''} \dots \text{etc.}$$

Si despejamos  $m, m', m'' \dots \text{etc.}$ , y sustituimos los valores de  $a, a', a'' \dots \text{etc.}$ , tendremos

$$m = \frac{2Kl}{EH}; \quad m' = \frac{2K'l'}{EH'}; \quad m'' = \frac{2K''l''}{EH''} \dots \text{etc.}$$



y como la flecha es la suma de todos estos desplazamientos será:

$$f = \frac{2}{E} \left[ \frac{Kl}{H} + \frac{K'l'}{H'} + \frac{K''l''}{H''} + \dots \text{etc.} \right] \quad (a)$$

Cuando sea necesario tener en cuenta el signo de la flecha, consideraremos *como positivas las que resulten por encima del eje horizontal del prisma antes de su deformación y como negativas las que resulten por debajo de dicho eje.*

**215: Línea elástica.**—Si tomamos como eje de abscisas el del prisma antes de su deformación y por eje de ordenadas la perpendicular á dicho eje levantada en la sección de empotramiento, y hallamos la ecuación de la curva, llamada *línea elástica*, que ofrece el eje del prisma después de haberse deformado, la ordenada  $y$  será precisamente la flecha del punto cuya abscisa es  $x$ :

Claro es que para los prismas cuyos extremos permanecen fijos después de la flexión, la flecha de mayor valor absoluto corresponderá al punto en que la tangente á la *elástica* sea horizontal.

Se demuestra en Mecánica racional que el momento de flexión tiene por expresión general

$$M = \frac{EI}{\rho}$$

siendo  $\rho$  el radio de curvatura de la línea elástica en el punto que se considere, é  $I$ , el momento de inercia de la sección, referido al eje neutro.

Recordando que la expresión de  $\rho$  es

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)}$$

y como por la pequeñez de las deformaciones cabe prescindir

del término  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  al lado de la unidad, tendremos con la aproximación necesaria para las aplicaciones;

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

y por tanto

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

Tal es la ecuación diferencial de 2.º orden de la línea elástica.

Integrada dos veces y determinadas las constantes arbitrarias por consideraciones fáciles de establecer en cada caso, se tendrá, despejando  $y$ , la ecuación de dicha línea en términos finitos; ó si se quiere, la expresión general de la flecha. Esta resultará en función de  $I$ ; pero si para comprobar quisiéramos escribirla en función de  $Z$ , basta reemplazar  $I$  por su igual  $Zv$ , siendo  $v$  la distancia al eje neutro de las fibras más fatigadas.

En efecto; sea

$$NS = \Delta x, \quad NO = \rho$$

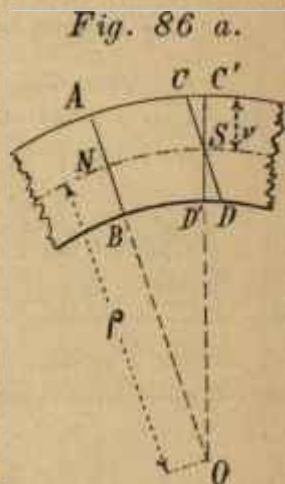
y  $K$  la tensión correspondiente á la deformación  $l = CC'$  (fig. 86 a).

Sabemos que  $K = \frac{El}{\Delta x}$ .

Pero de los triángulos semejantes,  $CC'S$  y  $NSO$ , se deduce

que  $\frac{l}{\Delta x} = \frac{v}{\rho}$ ; por tanto será

$$K = \frac{Ev}{\rho} \quad \text{y} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{K}{v}$$





y como tenemos  $M = \frac{EI}{\rho}$ , resultará finalmente  $M = \frac{I}{\nu} K = ZK$ , siendo por lo tanto  $I = Z\nu$ .

En las secciones simétricas,  $\nu = \frac{H}{2}$ , y entonces  $2I = ZH$ .

**216. Carga única.**—Consideremos el caso de un prisma de sección constante sometido en su extremo libre á una carga  $P$ .

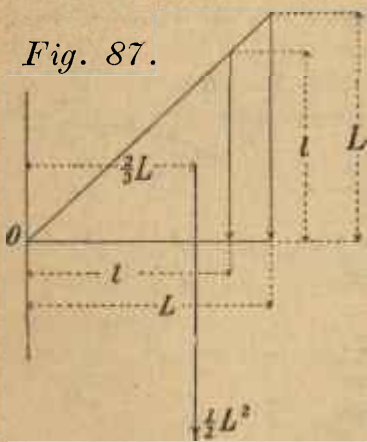
Las tensiones máximas unitarias tendrán por expresión

$$K = \frac{Pl}{Z} ; K' = \frac{Pl'}{Z} ; K'' = \frac{Pl''}{Z} \dots \text{etc.}$$

Sustituyendo en la fórmula general de la flecha, resultará

$$f = \frac{2P}{ZEH} (l^2 + l'^2 + l''^2 + \dots \text{etc.})$$

Si  $L$  es la longitud del prisma, como  $l, l', l'' \dots \text{etc.}$ , son la serie de valores sucesivos comprendidos entre 0 y  $L$ , claro es que  $l^2, l'^2, l''^2 \dots \text{etc.}$  podrán considerarse como otros tantos momentos de líneas que crecen de 0 á  $L$ , siendo cada una igual á su brazo de palanca, según manifiesta la figura 87.



Resultará, por tanto, que

$$l^2 + l'^2 + l''^2 + \dots = \frac{1}{2} L^2 \times \frac{2}{3} L = \frac{1}{3} L^3$$

Y sustituyendo en la fórmula anterior resultará, recordando que  $K = \frac{PL}{Z}$ .

$$f = \frac{2}{3} \frac{PL^3}{ZEH} = \frac{2}{3} \frac{KL^2}{EH} \quad (a)$$

**217.** Hallemos la ecuación de la elástica, tomando como origen de distancias el extremo empotrado. La expresión del momento de flexión, que es constantemente negativo, será

$$m = -P(L - x)$$

de donde

$$EI \frac{d^2\gamma}{dx^2} = -PL + Px \quad (1)$$

$$EI \left( -\frac{d\gamma}{dx} + C \right) = -PLx + \frac{1}{2} Px^2 \quad (2)$$

$$EI (\gamma + Cx + C') = -\frac{1}{2} PLx^2 + \frac{1}{6} Px^3 \quad (3)$$

Las constantes arbitrarias  $C$  y  $C'$  se determinan en este caso teniendo en cuenta que en el empotramiento la tangente á la línea elástica es horizontal y la flecha es nula; y así tendremos

• Para  $x = 0$ ,  $\frac{d\gamma}{dx} = 0$ ; de donde (ecuación (2))  $C = 0$ .

•  $x = 0$ ,  $\gamma = 0$ ; de donde (ecuación (3))  $C' = 0$ .

Despejando  $\gamma$  en la ecuación (3) y haciendo  $C = 0$ ,  $C' = 0$ , la ecuación de la elástica, y por tanto la expresión general de la flecha, será

$$\gamma = -\frac{P}{2EI} \cdot \frac{3Lx^2 - x^3}{3}$$

ó puesto que  $2I = ZH$

$$\gamma = -\frac{P}{ZEH} \cdot \frac{3Lx^2 - x^3}{3}$$



Haciendo  $x = L$  resulta

$$\gamma = f = -\frac{2}{3} \frac{PL^3}{ZEH},$$

expresión que, como debe suceder, sólo se diferencia en el signo de la que anteriormente habíamos obtenido, para el valor absoluto de  $f$ .

Con la misma facilidad se tratan los demás casos.

En el caso en que el prisma estuviera solicitado por varias fuerzas de flexión, la flecha total sería igual á la suma de las que cada una de aquellas fuera capaz de producir por sí sola.

**218. Carga uniformemente repartida.**—Las tensiones máximas sucesivas que se desarrollan en cada una de las secciones distantes  $l, l', l'' \dots$  etc., del extremo libre, estarán dadas por las expresiones siguientes, llamando  $p$  á la carga por unidad de longitud.

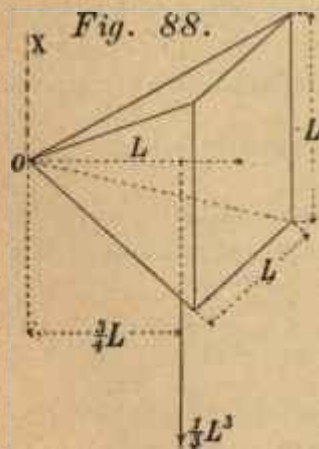
$$K = \frac{pl^3}{2Z}; \quad K' = \frac{pl'^3}{2Z}; \quad K'' = \frac{pl''^3}{2Z} \dots \text{etc.}$$

y substituyendo estos valores en la fórmula fundamental resultará

$$f = \frac{p}{ZEH} (l^3 + l'^3 + l''^3 + \dots \text{etc}).$$

Las cantidades  $l^3, l'^3, l''^3 \dots$  pueden considerarse como los momentos de los cuadrados materiales  $l^2; l'^2, l''^2$ , cuyos brazos de palanca sean iguales á sus lados respectivos.

Si consideramos (figura 88) una pirámide cuya base sea  $L^2$  y su altura  $L$ , y por el vértice trazamos el eje de momentos  $OX$  paralelo á la base, claro es que



llamando  $l$  al lado de una sección cualquiera,  $l$  será también su brazo de palanca y  $l^3$  el momento de dicha sección.

Pero como

$$l^3 + l'^3 + l''^3 + \dots = \Sigma l^3 = \frac{1}{3} L^3 \times \frac{3}{4} L = \frac{1}{4} L^4,$$

resultará

$$f = \frac{1}{4} \cdot \frac{pL^4}{ZEH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{KL^3}{EH}$$

ó haciendo  $pL = P$

$$f = \frac{1}{4} \frac{PL^3}{ZEH}$$

### 219. Flexión de los sólidos de igual resistencia.

—Sólo estudiaremos el caso en que la altura de las secciones es constante, por ser el único que puede tratarse por los métodos elementales.

Siendo constantes los valores de  $K$  y  $H$  para todas las secciones, la fórmula general de la flecha tomará la forma

$$f = \frac{2K}{EH} (l + l' + l'' + \dots \text{ etc.})$$

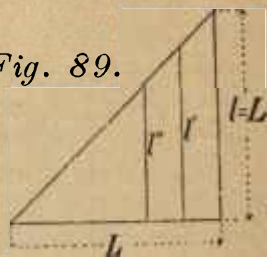
la cual se convierte en

$$f = \frac{KL^3}{EH},$$

Fig. 89.

puesto que, según se deduce de la figura 89,

$$l + l' + l'' + \dots = \frac{1}{2} L^2$$



Cuando la carga es única y obra en el extremo libre, la expresión de la flecha puede escribirse bajo la forma

$$f = \frac{PL^3}{ZEH}$$



siendo, como sabemos,  $K = \frac{PL}{Z}$  y  $Z$  el módulo de la sección empotrada.

Si la carga está uniformemente repartida, será

$$f = \frac{1}{2} \frac{pL^4}{ZEH} = \frac{1}{2} \frac{PL^3}{ZEH},$$

$$\text{toda vez que en este caso, } K = \frac{pL^2}{2Z} = \frac{Pl}{2Z}.$$

Téngase en cuenta que en las expresiones de la flecha que hemos obtenido, se ha prescindido del signo negativo que les corresponde, conforme al convenio establecido.

**220. Consecuencias del estudio que precede.**— En general, la expresión de la flecha de flexión, en valor absoluto, para los prismas empotrados por un extremo, puede escribirse bajo las siguientes formas:

$$f = \alpha \frac{KL^2}{EH} = \beta \frac{PL^3}{ZEH};$$

siendo  $\alpha$  y los coeficientes que conocemos, según que la carga sea única ó esté uniformemente repartida.

De la primera forma se deduce que, á igualdad de condiciones de carga, tensión máxima y naturaleza de los prismas empotrados por un extremo, las flechas de flexión son directamente proporcionales á los cuadrados de las longitudes é inversamente proporcionales á las alturas de las secciones.

Así, por ejemplo, doblando la longitud de un prisma y conservando sus primitivas condiciones de resistencia y la altura de su sección, la flecha resultará cuatro veces mayor; y si duplicando la longitud quisiéramos obtener la misma resistencia é igual deformación total, sería necesario cuadruplicar la altura.

**221.** La flexibilidad de un prisma, ó lo que es lo mismo, su elasticidad á la flexión, se mide por la relación entre su flecha

y su longitud, la cual tiene por expresión general

$$\frac{f}{L} = \alpha \frac{K}{E} \times \frac{L}{H}.$$

La relación inversa  $\frac{L}{J}$  da, por tanto, la medida de la rigidez de los prismas empotrados y sometidos á la flexión.

Como la flexibilidad de un prisma, según se ve, no es sólo proporcional á la relación  $\frac{K}{E}$ , sino que lo es al propio tiempo á la relación  $\frac{L}{H}$ , es natural que los prismas muy delgados, aunque sean anchos, se deformen tan fácilmente como todo el mundo sabe.

**222.** La segunda forma de la expresión general de la flecha nos dice que ésta depende esencialmente del producto  $ZH$ , para una carga y longitud determinadas.

Así por ejemplo, tratándose de un prisma de sección rectangular, sabemos que resiste más de canto que de plano (figura 90), y que en el primer caso la flecha es mayor que en el segundo.

La relación de las flechas es la siguiente:

Para el primer caso la flecha  $f$  es

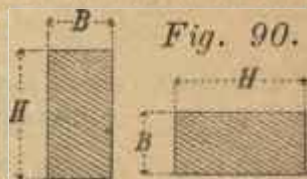
$$f = \beta \frac{PL^3}{E} \cdot \frac{1}{ZH}$$

Para el segundo, la flecha  $f'$  será

$$f' = \beta \frac{PL^3}{E} \cdot \frac{1}{Z'B},$$

de donde

$$\frac{f}{f'} = \frac{Z'B}{ZH}$$





Pero como  $Z$  y  $Z'$  tienen por expresión

$$Z = \frac{1}{6} BH^3, \quad Z' = \frac{1}{6} HB^3$$

resultará

$$\frac{f}{f'} = \left( \frac{B}{H} \right)^3$$

Como, por otra parte, el valor de  $Z$  es de la forma general

$$Z = mBH^3$$

resulta, asimismo, que las flechas de flexión, á igualdad de las demás condiciones, son proporcionales á los cubos de las longitudes é inversamente proporcionales á los cubos de las alturas de las secciones.

De las consideraciones que preceden se deduce toda la influencia que ejercen la longitud y altura de las secciones en las deformaciones totales de los prismas empotrados por un extremo; por consiguiente, como en las aplicaciones no pueden admitirse aquellas cuando exceden de ciertos límites, será necesario introducir en el cálculo de la resistencia, la condición de rigidez, cuya expresión general es  $\frac{L}{f} = c$ , siendo  $c$  un número cuya magnitud depende de las condiciones del caso de que se trate.

#### RESISTENCIA VIVA DE LOS PRISMAS SOMETIDOS Á ACCIONES DINÁMICAS DE FLEXIÓN.

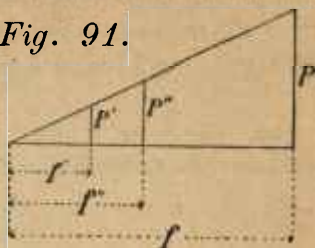
**223. Prismas empotrados por un extremo.**—Cuando la acción dinámica se ejerce en el extremo libre, es fácil determinar la resistencia viva del prisma.

En efecto; hemos visto que la flecha de flexión, á igualdad de condiciones, es proporcional á la carga; por lo tanto, si el



desplazamiento total  $f$  del extremo libre lo origina la acción dinámica de una fuerza que crece progresivamente de 0 á  $P$ , es claro que el trabajo total desarrollado por ella tendrá por representación gráfica el área de un triángulo rectángulo, cuyos catetos serán  $f$  y  $P$  (figura 91).

Fig. 91.



La expresión del trabajo molecular desarrollado por el prisma será, por lo tanto,

$$T_m = \frac{1}{2} P f.$$

Recordando que

$$f = \frac{2}{3} \frac{P L^3}{Z E H} = \frac{2}{3} \frac{K L^3}{E H}$$

y substituyendo, tendremos

$$T_m = \frac{1}{3} \frac{P K L^3}{E H} = \frac{1}{3} \frac{Z K^3 L}{E H}.$$

Si la sección del prisma fuera rectangular será  $Z = \frac{1}{6} B H^3$ , y resultará, por tanto,

$$T_m = \frac{1}{3} \frac{B H L}{6} \times \frac{K^3}{E} = \frac{1}{18} V \frac{K^3}{E}$$

siendo  $V = B H L$ , el volumen del prisma.

Si la fuerza  $Q$ , que origina la misma flecha supuesta  $f$ , fuera constante en todos los estados de deformación por que pasa el prisma, el trabajo de aquella sería  $Q f$ , y tendríamos entonces

$$T_m = Q f,$$

de donde

$$Q = \frac{1}{2} P;$$

lo que demuestra que, á semejanza de lo que sucedía en la tracción y compresión, la fuerza dinámica constante y capaz de producir una tensión determinada, es justamente la mitad de la carga estática necesaria para engendrar la misma tensión.

**224.** Recordando que la resistencia viva de un prisma á la tracción ó compresión era

$$T_m = \frac{1}{2} V \frac{K^2}{E}$$

y comparándola con la que corresponde al caso que nos ocupa, resulta que, á igualdad de tensión máxima, el trabajo molecular que un prisma desarrolla es nueve veces mayor á la tracción ó compresión que á la flexión: y también que, á igualdad de fuerza viva ó de trabajo molecular desarrollado, la tensión máxima es tres veces mayor en la flexión que en la tracción ó compresión.

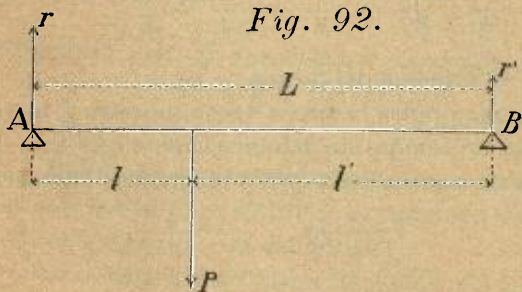
La resistencia viva de un sólido de igual resistencia, cuya altura sea constante es, como es fácil deducir,

$$T_m = \frac{1}{6} V \frac{K^2}{E}$$

#### FLEXIÓN DE LOS PRISMAS APOYADOS POR SUS EXTREMOS

**225. Reacciones en los apoyos.**—Determinemos ante

*Fig. 92.*



todo las reacciones que se desarrollan en los puntos de apoyo cuando el prisma se halla sometido á una sola carga intermedia.

Tomando como ejes de momentos (fig. 92) las rectas proyectadas en A y



en B, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Con respecto al eje A...} & \begin{cases} \text{Momento de } P = Pl \\ \text{de } r' = r'L \end{cases} \\ \text{Con respecto al eje B...} & \begin{cases} \text{Momento de } P = Pl' \\ \text{de } r = rL \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las condiciones de equilibrio serán

$$rL = Pl' \quad \text{ó} \quad r'L = Pl \quad \text{y} \quad r + r' = P,$$

de donde resulta

$$r = \frac{Pl'}{L} \quad \text{y} \quad r' = \frac{Pl}{L}$$

**226. Diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos de flexión.**—Para toda sección comprendida entre

A y O (figura 93), el esfuerzo cortante es igual á  $r$ ; porque si

aplicamos en

ella dos fuerzas

iguales y para-

lelas á  $r$  y con-

trarias entre sí,

la sección re-

sultará sometida

al par de flexión,

cuyo momento es  $rx$ ,

y á un esfuerzo

cortante  $r$ . Po-

demos, pues,

representar di-

cho esfuerzo por la ordenada constante de la recta  $aa'$  paralela

al eje del prisma y distante la cantidad  $r$ , para toda sección

comprendida entre el extremo A y el punto O, donde la carga

está aplicada.

Si consideramos esta última sección, veremos que resulta

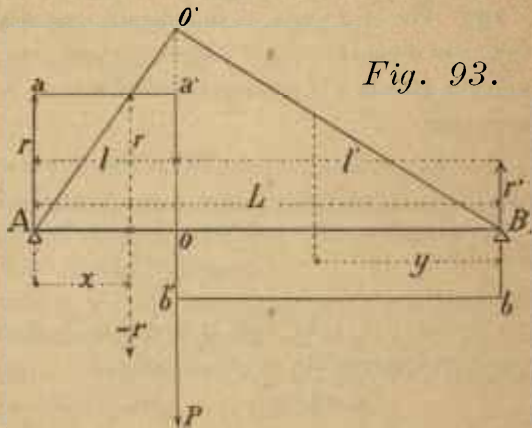


Fig. 93.

sometida á un par de flexión, cuyo momento es  $rl$ , y á dos esfuerzos cortantes, uno  $P$  y otro  $r$ , desiguales y de sentido contrario, cuya resultante será  $-(P - r) = -r'$ . Por esto, el esfuerzo cortante sufre un cambio brusco en la sección considerada, pasando súbitamente del valor  $r$  al valor  $-r'$ .

Si en cualquier sección comprendida entre  $O$  y  $B$  aplicáramos dos fuerzas iguales á  $r$  y otras dos iguales á  $P$ , paralelas á estas y contrarias entre sí, por consideraciones análogas demostraríamos que el esfuerzo cortante es constantemente igual á  $-r'$ ; de suerte que en esta región dicho esfuerzo quedará representado por la ordenada de la recta  $b'b$ , paralela al eje del prisma, situada al lado contrario que la  $aa'$  y distante de dicho eje la cantidad  $r'$ .

La línea quebrada  $aa'b'b$ , por la cual se determina gráficamente el esfuerzo cortante en una sección cualquiera, recibe el nombre de *diagrama de esfuerzos cortantes*.

**227.** Por otra parte, si suponemos empotrado el prisma bajo la acción de las fuerzas  $P$  y  $r'$ , el momento de flexión  $m$ , en una sección situada á la distancia  $x$  del extremo  $A$  será en magnitud y en signo

$$m = rx;$$

pero como antes hemos encontrado que  $r = \frac{Pl'}{L}$ , será también

$$m = P \frac{l'x}{L}$$

Vemos, por tanto, que el momento de flexión es positivo, y crece uniformemente desde  $A$  hasta  $O$ .

$$\text{Cuando } x = 0, \quad m_0 = 0$$

$$\text{» } x = l, \quad M = P \frac{ll'}{L} = rl.$$

Conviene observar que siendo  $m$  función de  $x$ ,  $m = rx$ , el esfuerzo cortante es la derivada de  $f(x)$ , de suerte que podemos también establecer que  $r = f'(x) = \frac{dm}{dx}$ .



Si desde el punto A trazamos la recta AO', de manera que  $OO' = rl$ , dicha recta constituirá el *diagrama de momentos de flexión* para la parte AO del prisma; puesto que la ordenada de cualquiera de sus puntos representará el valor del momento de flexión en la sección correspondiente.

Del propio modo veríamos que el momento en una sección cualquiera situada á la distancia  $y = L - x$ , siendo en este caso  $\frac{1}{2}L$  y  $L$  los límites de  $x$ , tiene por expresión  $r'y$ ; momento que también crece uniformemente de B á O, por ser proporcional á  $y$ , desde el valor 0, en B, hasta el valor  $r'l'$ , en O.

Ahora bien, como  $rl = r'l'$ , dicho momento máximo se confundirá con el del caso anterior; por lo cual el diagrama de momentos se completará, uniendo el punto O' con el B por una recta, y así quedará todo él representado por la línea AO'B.

Correspondiendo el momento máximo al punto de aplicación de la carga, en él estará la sección peligrosa; y por tanto, la ecuación de resistencia será

$$ZK = \frac{Pl'}{L}$$

**228. Observación.**—Para calcular el momento de flexión en una sección cualquiera, y esto se aplica á todos los casos, lo mismo da considerar las fuerzas exteriores que quedan á su izquierda como las que quedan á su derecha.

En efecto; si para la sección situada entre O y B, definida por su distancia  $y$  al extremo B, ó por la  $x$  al extremo A, siendo  $x + y = L$ , consideramos las fuerzas que quedan á su izquierda, que son en este caso,  $+r$  y  $-P$ , tendremos

$$m = r(L - y) - P(l' - y) = rL - Pl' + (P - r)y;$$

pero como

$$rL - Pl' = 0 \quad \text{y} \quad P - r = r'$$

resultará,

$$m = r'y;$$

es decir, lo mismo que si hubiéramos considerado la única fuerza  $+r'$ , que en este caso queda á la derecha de la sección propuesta.

**229. Carga aplicada en el punto medio.**—La fórmula general del momento máximo, en el punto de aplicación de la carga, demuestra claramente que su valor depende de la posición particular de la carga  $P$ .

Pero como cualquiera que sea esta posición se verifica siempre que  $l + l' = \text{constante}$ , el producto  $ll'$  será un máximo cuando sus factores sean iguales entre sí, es decir cuando  $l = l' = \frac{1}{2}L$ , ó lo que es lo mismo, cuando la carga ocupe el punto medio del prisma, situación la más desfavorable.

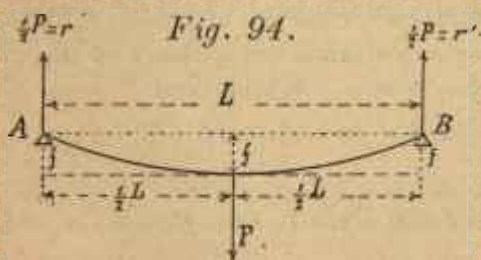
En este caso particular las reacciones serán,  $r = r' = \frac{1}{2}P$ . El momento máximo de flexión es

$$M = \frac{1}{4} PL$$

y por tanto la ecuación de resistencia será

$$ZK = \frac{1}{4} PL$$

**230.** Recordando que en los prismas empotrados la flecha es proporcional al cubo del brazo de palanca de la fuerza, podemos, en su virtud,



afirmar que cuando la carga no esté aplicada en el punto medio, el punto de máxima flecha no será ciertamente el de la

sección peligrosa, porque para ello sería necesario que  $rl^3 = r'l'^3$



(figura 94) lo cual no es posible más que en el caso particular en que la carga equidiste de los extremos.

**231.** Consideremos este caso solamente.

La flecha máxima, en valor absoluto, corresponderá al punto medio, y como por razón de simetría la tangente á la línea elástica será en tal punto horizontal, aquella se calculará sencillamente suponiendo el prisma empotrado bajo la acción de las fuerzas  $-P$  y  $+\frac{1}{2}P$  (figura 94).

Si en la fórmula general de la flecha, para prismas empotrados por un extremo y sometidos por el otro á una carga  $P$ , sustituimos en vez de  $P$  y  $L$ ;  $\frac{1}{2}P$  y  $\frac{1}{2}L$ , respectivamente, y recordamos que  $K = \frac{1}{4} \frac{PL}{Z}$ , resultará;

$$f = \frac{1}{24} \frac{PL^3}{ZEH} = \frac{1}{6} \frac{KL^2}{EH}$$

**232.** Hallemos la ecuación de la elástica á fin de comprobar la expresión que hemos obtenido para  $f$ .

El momento de flexión es constantemente positivo; pero sus expresiones para cada mitad del prisma, son distintas.

$$\text{Para la mitad de la izquierda es... } m_1 = \frac{1}{2} Px$$

$$\text{Para la otra mitad... } m_2 = \frac{1}{2} P(L - x)$$

Como estas expresiones no caben en una forma única, la elástica se compondrá de dos arcos simétricos, cuyas ecuaciones dependerán, la primera de  $m_1$  y la segunda de  $m_2$ . Tales arcos se acuerdan tangencialmente para  $x = \frac{1}{2}L$ , y en este punto donde la flecha alcanza su mayor valor absoluto, podemos afirmar que la tangente será horizontal.

Basta, por tanto, obtener la ecuación de cualquiera de las ramas de que la elástica se compone en este caso.

Para la de la izquierda, por ejemplo, tendremos:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} Px \quad (1)$$

$$EI \left( \frac{dy}{dx} + C \right) = \frac{1}{4} Px^2 \quad (2)$$

$$EI (y + Cx + C') = \frac{1}{12} Px^3 \quad (3)$$

Pero evidentemente, para  $x = \frac{1}{2} L$ , es  $\frac{dy}{dx} = 0$ ; luego de la ecuación (2) obtendremos que

$$EI C = \frac{1}{16} PL^2$$

Además, para  $x = 0$ , corresponde  $y = 0$ ; y así la ecuación (3) nos dice que  $C' = 0$ .

Por tanto, la ecuación de la rama izquierda de la línea elástica será

$$y = -\frac{1}{48} \frac{P}{EI} (3L^2x - 4x^3)$$

ó, teniendo en cuenta que  $2L = ZH$ ;

$$y = -\frac{1}{24} \frac{P}{ZEH} (3L^2x - 4x^3)$$

y haciendo  $x = \frac{1}{2} L$  resultará

$$y = f = -\frac{1}{24} \frac{PL^3}{ZEH},$$

expresión que, como debía suceder, sólo se diferencia en el signo de la que antes habíamos obtenido.



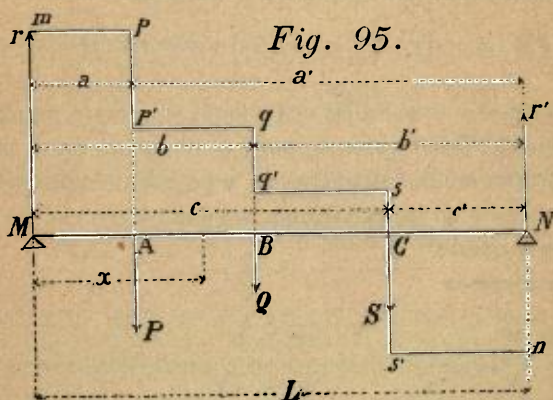
**233. Cargas simultaneas.**—Consideremos el caso de varias cargas  $P, Q, S$  ..... etc.

Las reacciones en los apoyos se obtendrán por medio de las siguientes ecuaciones de equilibrio (figura 95).

$$r L = Pa' + Qb' + Sc' + \dots \text{ etc.},$$

$$r' L = Pa + Qb + Sc + \dots \text{ etc.},$$

$$r + r' = P + Q + S + \dots \text{ etc.}$$



Conocidas  $r$  y  $r'$ , el trazado del diagrama de esfuerzos cortantes es fácil de ejecutar inmediatamente.

Desde  $M$  hasta  $A$ , está representado por la paralela  $mp$ , al eje del prisma, distante la cantidad  $r$ . De  $A$  á  $B$ , por la  $p'q$ ; de  $B$  á  $C$ , por la  $q's$  y finalmente, si no hay más fuerzas que las  $P, Q, S$ , por la  $s'n$ , pasando súbitamente del valor  $r$ , á los  $r - P$ ,  $r - (P + Q)$ , y  $r - (P + Q + S) = -r'$ . De suerte que el diagrama total estará representado por la línea quebrada  $mp p' q' s' s' n$ .

**234.** En cada uno de los cuatro tramos en que el prisma queda dividido por los puntos de aplicación de las tres fuerzas que hemos supuesto, el esfuerzo cortante tiene valor distinto; por

consiguiente á cada tramo corresponderá también distinta expresión para el momento de flexión.

En efecto; por razonamientos análogos á los empleados anteriormente en otros casos, encontraremos que el momento general de flexión tiene las expresiones siguientes:

$$\text{De M á A, } m_1 = rx \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{De A á B, } m_2 = (r - P)x + Pa \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{De B á C, } m_3 = [r - (P + Q)]x + Pa + Qb \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{De C á N, } m_4 = [r - (P + Q + S)]x + Pa + Qb + Sc \dots\dots (4)$$

Si hacemos  $x = a$ , en las ecuaciones primera y segunda, obtendremos el mismo valor  $m_p$  para el momento en el punto A.

Del propio modo hallaremos  $m_q$  y  $m_s$  para los puntos B y C haciendo  $x = b$  en las ecuaciones segunda y tercera y  $x = c$  en la tercera y cuarta.

Así tendremos

$$\text{En M } \dots\dots\dots m_o = 0$$

$$\text{« A } \dots\dots\dots m_p = ra$$

$$\text{« B } \dots\dots\dots m_q = (r - P)b + Pa$$

$$\text{« C } \dots\dots\dots m_s = [r - (P + Q)]c + Pa + Qb$$

$$\text{« N } \dots\dots\dots m_L = 0$$

Como las ecuaciones que dan los momentos en los diversos tramos son de primer grado, el diagrama total se compondrá de un contorno poligonal que pasa por los puntos de apoyo y cuya construcción es inmediata, una vez calculados  $m_p$ ,  $m_q$ ,  $m_s$ .

El trazado de dicho diagrama se simplifica por virtud de las consideraciones siguientes.

**235. Teorema.**—*El diagrama completo de momentos de flexión, para cualquier número de cargas, se obtiene haciendo*



la suma de los momentos correspondientes á los diagramas de cada una de ellas.

Consideremos el segundo tramo, por ejemplo, para el cual el momento tiene por expresión

$$m_2 = rx - P(x - a).$$

De la primera condición de equilibrio se deduce que

$$r = \frac{Pa'}{L} + \frac{Qb'}{L} + \frac{Sc'}{L} + \dots$$

Por lo tanto tendremos

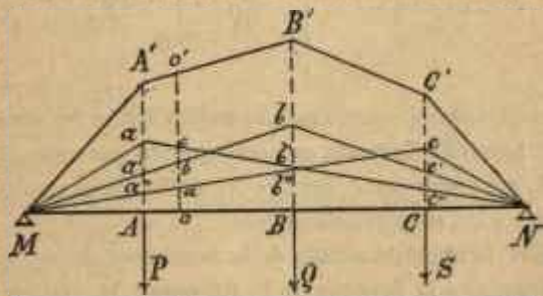
$$m_2 = \frac{Pa'x}{L} - P(x - a) + \frac{Qb'x}{L} + \frac{Sc'x}{L} + \dots$$

pero como  $a' = L - a$ , y  $L - x = x'$ , será

$$m_2 = \frac{Pax'}{L} + \frac{Qb'x}{L} + \frac{Sc'x}{L} + \dots$$

Todos los términos del segundo miembro tienen la forma  $\frac{Pl'x}{L}$ ; por consiguiente, representarán los momentos de flexión en la sección que dista  $x$  del origen, producidos por las diversas cargas  $P, Q, S, \dots$ , lo cual demuestra el teorema.

Fig. 96.



De suerte que el momento  $oo'$  (figura 96) es igual á la suma

$oa + ob + oc$ , de los momentos que determinan los diagramas parciales de cada una de las cargas  $P$ ,  $Q$  y  $S$ .

Según esto, el diagrama completo se construirá trazando primero los diagramas parciales  $MaN$ ,  $MbN$ ,  $McN$ , y luego las rectas

$$AA' = Aa + Aa' + Aa'',$$

$$BB' = Bb + Bb' + Bb'',$$

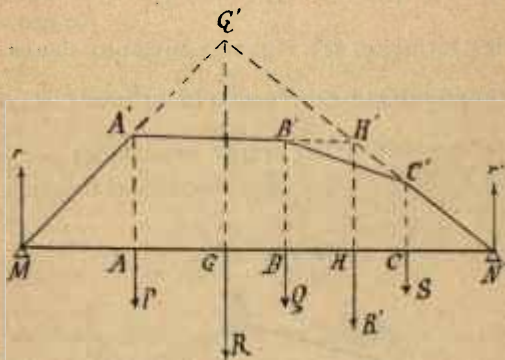
$$CC' = Cc + Cc' + Cc'';$$

y la línea  $MA'B'C'N$  constituirá el diagrama general, deducido, como se ha dicho, de los diagramas parciales.

**236.** Otro procedimiento puede seguirse para construir el diagrama general.

Sea  $MG'N$  (figura 97) el diagrama correspondiente á la re-

*Fig. 97.*



sultante  $R$  de todas las fuerzas. Las partes  $MA'$  y  $NC'$  pertenecerán desde luego al diagrama general; puesto que entre los puntos  $M$  y  $A$ , así como entre los  $C$  y  $N$ , dicho diagrama sólo depende de  $r$  y de  $r'$  respectivamente.

Sea  $HH'$  la línea de acción de la resultante  $R'$  de todas las fuerzas situadas á la derecha de  $P$ . El punto  $H'$ , en que dicha resultante, prolongada si es necesario, corta á  $NG'$ , pertenecerá



al diagrama de  $P$  y  $R'$  que es  $MA'H'N$ . La parte  $A'B'$  pertenece seguramente al diagrama general; porque de  $M$  á  $B$ , los momentos de flexión no dependen más que de las fuerzas  $r$  y  $P$ .

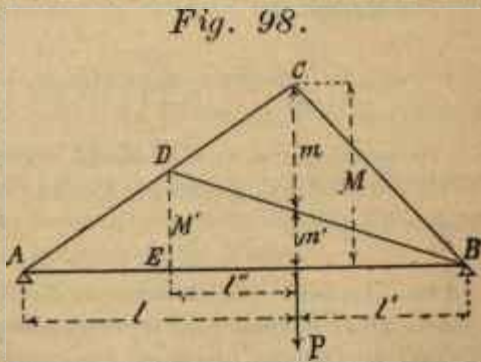
Finalmente, como á la derecha de  $Q$  no hay en el caso supuesto más fuerza que  $S$ , y los puntos  $B'$  y  $C'$ , situados sobre las líneas de acción de dichas fuerzas, corresponden al diagrama general, es claro que la recta  $B'C'$  que los une, pertenecerá á dicho diagrama, el cual resultará, en consecuencia, representado por la línea  $MA'B'C'N$ .

Como se ve, para aplicar este procedimiento, sólo se necesita determinar las resultantes necesarias y calcular el momento de flexión de la resultante de todas las cargas.

Conviene también demostrar los siguientes principios relativos á los diagramas de momentos de flexión.

**237. TEOREMA.**—*Toda porción de diagrama de momentos, comprendida entre dos puntos, representa, con relación á la recta que los une, el diagrama de momentos de la parte de prisma que aquellos determinan, como si dicha parte descansara sobre los referidos puntos y se hallara sometida á la fuerza ó carga correspondiente á la misma.*

Bastará demostrar este teorema respecto de toda porción, comprendida entre un punto y uno de los extremos del diagrama original por una sola carga  $P$  (fig. 98); porque la misma demostración se haría fácilmente extensiva á toda otra porción determinada por el primer punto y otro cualquiera de un diagrama más complejo.



Sea ACB el diagrama general correspondiente á la carga P, y BCD la parte que se considera de dicho diagrama.

Con arreglo á las notaciones establecidas en la figura, trátase de demostrar que  $m$  es el momento correspondiente á la carga P aplicada sobre la porción de prisma BE.

Tenemos

$$m = M - m'$$

y además, por la semejanza de los triángulos que han resultado

$$\frac{m'}{M'} = \frac{l'}{l' + l''} ; \quad \frac{M'}{M} = \frac{l - l''}{l} .$$

Sabemos por otra parte que

$$M = \frac{ll'}{l + l'} P .$$

Eliminando  $m'$ ,  $M'$  y  $M$  entre estas cuatro ecuaciones, tendremos

$$M' = M \frac{l - l''}{l} = \frac{Pl'(l - l'')}{l + l'}$$

$$m' = \frac{Pl'(l - l'')}{l + l'} \times \frac{l'}{l' + l''} = \frac{Pl'^2(l - l'')}{(l + l')(l' + l'')} .$$

Por lo tanto

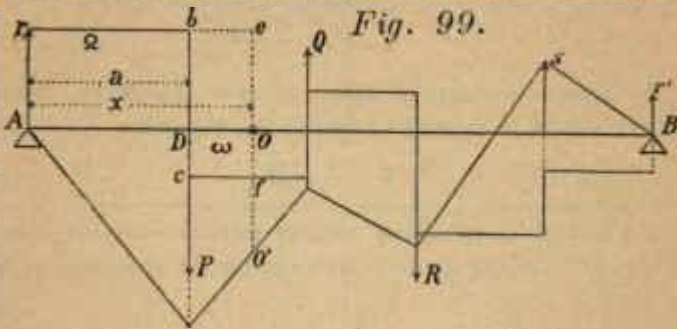
$$m = \frac{ll'}{l + l'} P - \frac{Pl'^2(l - l'')}{(l + l')(l' + l'')} = \frac{l'l''}{l' + l''} P .$$

De suerte que  $m$  es el momento correspondiente á la carga P, obrando sobre el prisma BE apoyado en B y en E, como queríamos demostrar.

**238. TEOREMA.**—*El momento de flexión, en un punto cualquiera de un prisma, está representado por el área del diagrama del esfuerzo cortante, comprendido entre dicho punto y uno de los extremos del prisma.*



Consideremos (figura 99) la sección situada en el punto  $o$ . El momento de flexión estará representado, como sabemos, por la ordenada  $OO'$ .



Dicho momento tiene por expresión

$$M = rx - P(x - a).$$

Pero  $rx$  no es otra cosa que el área del rectángulo  $AreO$ ; y  $P(x - a)$  es asimismo el área del rectángulo  $befc$ ; puesto que  $bc = P$ , y  $x - a = be$ ; luego dicho momento será igual á

$$OO' = M = AreO - befc = ArbD - DcfO = \Omega - \omega,$$

como queríamos demostrar.

**239.** De esta propiedad se deducen las siguientes consecuencias:

1.<sup>a</sup> El momento de flexión alcanza un valor máximo ó mínimo, en todos aquellos puntos del prisma en que el diagrama del esfuerzo cortante corta al eje de aquél.

2.<sup>a</sup> El momento de flexión es nulo, en todos aquellos puntos en que la suma de las áreas del diagrama del esfuerzo cortante es igual de uno y otro lado del eje del prisma.

**240. Carga uniformemente repartida en todo el prisma.**—Sea  $p$  la carga por unidad de longitud. La carga total será  $pL = P$ .

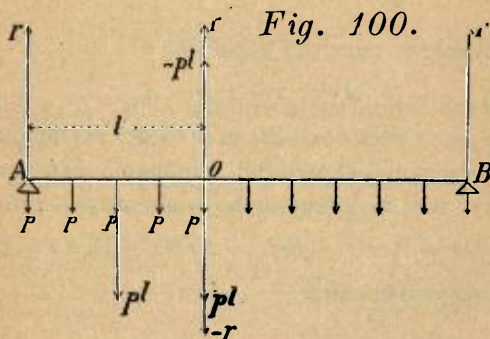
Es evidente que en este caso las reacciones desenvueltas por los apoyos serán iguales entre sí, y tendrá cada una por valor la mitad de la carga total, es decir, que tendremos

$$r = r' = \frac{1}{2} pL = \frac{1}{2} P.$$

El esfuerzo cortante  $T$  en una sección cualquiera, distante del extremo  $A$  la cantidad  $l$ , tendrá por expresión

$$T = r - pl.$$

En efecto; si en dicha sección introducimos las fuerzas  $r, -r, pl, -pl$  (figura 100), las condiciones generales perma-



necerán las mismas, pero la sección  $O$  se hallará sometida á la acción de los pares  $(r, -r)$  y  $(pl, -pl)$ , y á los esfuerzos cortantes  $r, -pl$ , de donde resulta que dicho esfuerzo, en la sección  $O$ , será  $T = r - pl$ , como habíamos establecido; que también podrá escribirse bajo la forma

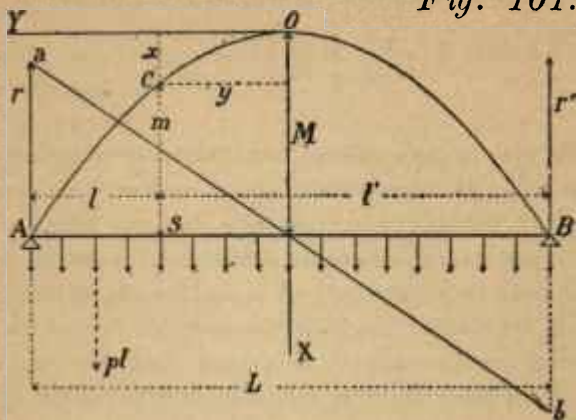
$$T = p \left( \frac{L}{2} - l \right) = \frac{P}{L} \left( \frac{L}{2} - l \right),$$

ecuación de una recta que corta al eje del prisma en su punto medio; puesto que, para  $l = \frac{1}{2} L$ , resulta  $T = 0$ .



De suerte que el diagrama del esfuerzo cortante será la recta  $ab$  (figura 101).

Fig. 101.



**241.** El momento de flexión en la sección  $S$ , situada á la distancia  $l$  del extremo  $A$  del prisma, es evidentemente igual á la diferencia de los momentos correspondientes á la reacción  $r$  y á la resultante  $pl$  de las fuerzas que obran de  $A$  á  $S$ .

Pero como

$$\text{Momento de } r = rl$$

$$\text{de } pl = pl \frac{l}{2},$$

es claro que dicho momento de flexión será

$$m = rl - pl \frac{l}{2} = \frac{P}{2} l - pl \frac{l}{2} = \frac{pL}{2} l - pl \frac{l}{2},$$

ó bien

$$m = \frac{pl}{2} (L - l) = \frac{1}{2} pll' = \frac{1}{2} \frac{P}{L} ll'.$$

Como la suma de las variables  $l$  y  $l'$  es constante é igual á  $L$ , el momento máximo de flexión corresponderá al caso  $l = l' = \frac{1}{2} L$ , es decir, que dicho momento máximo corresponderá á la

sección situada en el punto medio del prisma, donde, como antes hemos visto, el esfuerzo cortante es nulo.

El momento máximo de flexión será, por lo tanto,

$$M = \frac{1}{8} PL = \frac{1}{8} pL^2.$$

Comparando estos valores con los que se obtuvieron en el caso de una sola carga, resulta que el momento de flexión en una sección cualquiera, correspondiente á una carga uniformemente repartida, es justamente la mitad del momento originado por la misma carga, aplicada en la sección que se considere.

De la expresión general del momento de flexión se deduce que es nulo en los extremos del prisma y máximo en el punto medio. Por consiguiente, su diagrama será una línea que pasará por los extremos del prisma, y cuya ordenada máxima corresponde á la sección mediana.

Tomando por ejes coordenados las perpendiculares OX y OY, tendremos para un punto cualquiera C

$$x = M - m = \frac{1}{8} pL^2 - \frac{1}{2} pll', \text{ ó bien}$$

$$x = \frac{1}{8} pL^2 - \frac{p}{2} \left( \frac{L}{2} - y \right) \left( \frac{L}{2} + y \right),$$

ó efectuando ó reduciendo

$$x = \frac{1}{2} py^2,$$

ecuación de una parábola referida á su vértice.

**242.** Determinemos la flecha máxima, por medio de la ecuación de la elástica.

El momento de flexión es constantemente positivo, y llamando  $x$  á la abscisa general, tomando como origen el extremo iz-



quiero, su expresión será

$$m = \frac{1}{2} pLx - \frac{1}{2} px^2,$$

aplicable á todo el prisma; es decir, entre los límites 0 y L de  $x$ .  
Tendremos pues

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} pLx - \frac{1}{2} px^2 \quad (1)$$

$$EI \left( \frac{dy}{dx} + C \right) = \frac{1}{4} pLx^2 - \frac{1}{6} px^3 \quad (2)$$

$$EI (y + Cx + C') = \frac{1}{12} pLx^3 - \frac{1}{24} px^4 \quad (3)$$

Por razón de simetría, la tangente á la elástica en su punto medio será horizontal, y tendremos

Para  $x = \frac{1}{2} L$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $EIC = \frac{1}{24} pL^3$  [ecuación (2)]

,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $C' = 0$  [ecuación (3)]

La ecuación de la elástica será, por tanto,

$$y = -\frac{p}{24 EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

ó puesto que,  $2I = ZH$ , será también

$$y = -\frac{p}{12 ZEH} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

Haciendo  $x = \frac{1}{2} L$ , la expresión de la flecha de mayor valor absoluto será

$$f = -\frac{5}{192} \frac{pL^4}{ZEH}$$

El mismo resultado, prescindiendo del signo, encontraríamos observando que  $f = f_1 - f_2$ , siendo  $f_1$  la flecha del extre-

mo izquierdo engendrada por la carga  $\frac{1}{2} pL$ , y  $f_2$  la que engendraría en el mismo punto la fuerza  $r$ , suponiendo el prisma empotrado en su punto medio por las fuerzas

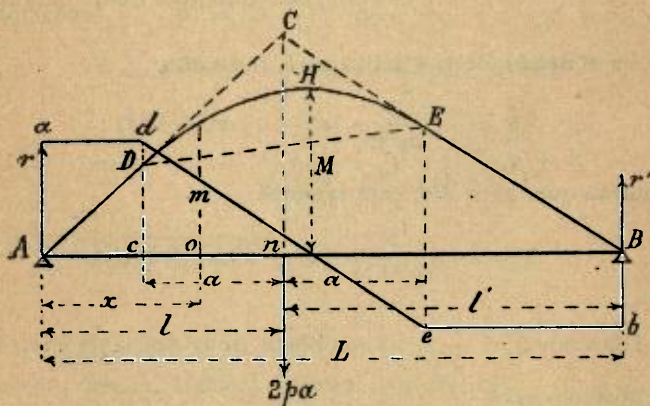
$$-\frac{1}{2} pL \quad \text{y} \quad +r' = \frac{1}{2} pL$$

que quedan á su derecha, y calculando  $f_1$  y  $f_2$  por las expresiones conocidas.

Vemos, según esto, que la flecha, en el caso que nos ocupa, es cerca de vez y media menor que cuando toda la carga obra en el punto medio del prisma.

**243. Carga uniformemente repartida en una parte del prisma.**—Supongamos un prisma de longitud  $L$ , apoyado por sus dos extremos y sometido á una carga uniforme-

*Fig. 102.*



mente repartida de  $p$  kilogramos por unidad de longitud en una porción  $2a$  de dicho prisma (figura 102).

Con arreglo á los teoremas que preceden, si se traza el diagrama ACB correspondiente á la resultante  $2pa$ , las porciones



AD y EB de dicho diagrama pertenecerán al verdadero diagrama de momentos que se busca; y por último, si se calculan los momentos correspondientes á la carga uniformemente repartida sobre la parte  $2a$  del prisma, como si dicha parte se encontrase apoyada por sus extremos, y dichos momentos se determinan gráficamente á contar de los puntos correspondientes de la recta DE, resultará el diagrama completo de momentos ADHEB, que corresponde al caso supuesto.

Determinemos ahora por medio del cálculo el momento máximo.

Desde luego la condición de equilibrio exige, llamando  $r$  á la reacción en A, que

$$rL = 2pal'$$

de donde

$$r = \frac{2pal'}{L}.$$

Siendo  $l$  y  $l'$  las distancias del punto medio de la porción cargada  $2a$  á los extremos A y B, claro es que el momento correspondiente á una sección cualquiera situada á la distancia  $x$  del apoyo A, será:

$$m = rx - p \times co \times \frac{1}{2} co = rx - \frac{p}{2} (co)^2;$$

pero como

$$co = cn - on = a - (l - x) = x + a - l$$

tendremos

$$m = rx - \frac{p}{2} (x + a - l)^2.$$

Además, como  $l' = L - l$ , podremos escribir:

$$r = \frac{2pa(L-l)}{L} = 2pa - \frac{2pal}{L}.$$

Sustituyendo resultará

$$m = 2pax - \frac{2pal}{L} x - \frac{p}{2} (x + a - l)^2$$

ó bien

$$m = \frac{p}{2} x (2a + 2l - 4 \frac{l}{L} a - x) - \frac{p}{2} (a - l)^2.$$

Para que  $m$  sea un máximo, es necesario y suficiente que lo sea el producto de factores variables

$$x (2a + 2l - 4 \frac{l}{L} a - x),$$

y como en este producto se verifica que la suma de sus factores es constante é igual á  $2a + 2l - 4 \frac{l}{L} a$ , es claro que la condición para que se verifique el máximo será la igualdad entre dichos factores

$$x = 2a + 2l - 4 \frac{l}{L} a - x,$$

de donde

$$x = a + l - 2 \frac{l}{L} a.$$

Esta expresión determina la sección del prisma en la cual el momento de flexión alcanza su valor máximo. Dicho valor lo determinaremos sustituyendo en la expresión de  $m$  en lugar de  $x$  el valor que acabamos de encontrar.

Resultará por lo tanto:

$$M = \frac{p}{2} \left( a + l - 2 \frac{l}{L} a \right)^2 - \frac{p}{2} (a - l)^2$$

ó efectuando y reduciendo

$$M = 2pal \frac{L(L-l) - a(L-l)}{L^2}$$



y finalmente

$$M = 2 \frac{pal}{L^2} (L - l) (L - a).$$

**244.** Respecto del diagrama de esfuerzos cortantes, queda fácilmente determinado por la línea *adeb*.

La expresión general del esfuerzo cortante es

$$T = r - p(a + x - l)$$

y como para

$$\begin{aligned} x &= l - a, & T &= r \\ \text{»} \quad x &= l + a, & T &= r - 2pa = -r' \\ \text{»} \quad x &= a + l - 2 \frac{al}{L}; & T &= 0, \end{aligned}$$

se ve que donde el esfuerzo cortante es nulo el momento de flexión es máximo.

**245. Cargas móviles ó de posición variable.**—Hasta aquí hemos considerado que las cargas permanecían fijas ocupando siempre, por lo tanto, su posición primitiva.

Tratemos ahora el caso en que aquéllas cambien progresivamente de posición, como sucede con los vehículos de todo género.

**246. Carga única.**—Supongamos que una carga de magnitud constante *P* se mueve á lo largo de un prisma apoyado por sus dos extremos, recorriéndolo en toda su longitud.

Ya hemos visto que para una posición cualquiera *o* de la carga (figura 103), el momento máximo corresponde á la sección en que aquélla está aplicada, y tiene por expresión

$$m = \frac{P}{L} ll'$$

Para otra posición distinta *o'* de la misma carga, el momen-

to correspondiente á la sección anterior  $o$ , será

$$m' = \frac{P}{L} ll''.$$

Ahora bien

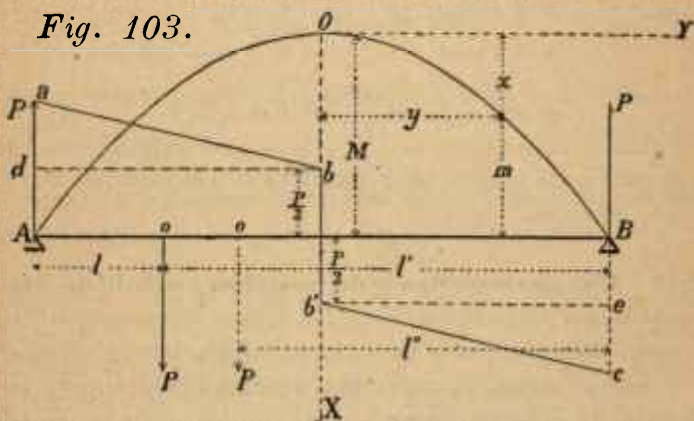
$$ll'' < ll';$$

por tanto

$$m > m'$$

Luego resulta de aquí, que para una sección cualquiera el

*Fig. 103.*



momento alcanza su valor máximo cuando la carga pasa por ella.

Por consiguiente, estos momentos son los únicos que nos interesa considerar.

Observando además que el momento

$$m = \frac{P}{L} ll'$$

alcanza su valor máximo cuando  $l = l' = \frac{L}{2}$ , en cuyo caso

$M = \frac{PL}{4}$ , resulta que, en cuanto á los efectos de la flexión, una



carga que recorre la longitud total de un prisma produce el mismo máximo efecto que una carga doble  $2P$ , uniformemente repartida.

Para determinar la curva de momentos, consideremos el punto  $(xy)$ , y tendremos

$$x = M - m;$$

pero como

$$M = \frac{PL}{4} \quad \text{y} \quad m = \frac{P}{L} \left( \frac{L}{2} + y \right) \left( \frac{L}{2} - y \right),$$

la ecuación de dicha curva será

$$x = \frac{PL}{4} - \frac{P}{L} \left( \frac{L}{2} + y \right) \left( \frac{L}{2} - y \right),$$

de donde

$$y^2 = \frac{L}{P} x$$

ecuación de una parábola referida á su vértice.

**247.** En cuanto al esfuerzo cortante que obra sobre la sección  $o$ , donde se supone aplicada la carga móvil  $P$ , será igual á la reacción desarrollada entonces por el apoyo  $A$ , y se deducirá de la condición de equilibrio

$$rL = Pl';$$

de donde

$$r = T = \frac{Pl'}{L}.$$

Tendremos asimismo

$$T = \frac{P(L-l)}{L} = \frac{P}{L} \left( \frac{L}{2} - l \right) + \frac{P}{2}.$$

Bajo esta última forma se ve inmediatamente que

$$\begin{aligned} \text{cuando } l &= 0 \quad \dots T = P \\ \text{» } l &= \frac{L}{2} \quad \dots T = \frac{P}{2}, \end{aligned}$$

lo que nos dice que en el extremo A el esfuerzo cortante es  $P$ , y que en el punto medio dicho esfuerzo vale la mitad, ó sea  $\frac{P}{2}$ .

Además, como las variaciones de  $T$  son proporcionales á las de  $l$ , claro es que dicho esfuerzo variará uniformemente de  $P$  á  $\frac{1}{2}P$  para la mitad del prisma, á contar del extremo A.

En dicho punto medio, el diagrama de esfuerzos cortantes sufre un rápido descenso, pasando del valor  $\frac{P}{2}$  á  $-\frac{P}{2}$ . En efecto; situada la carga móvil en el punto medio, las reacciones son respectivamente iguales á  $\frac{P}{2}$ ; por lo tanto, la sección mediana se hallará sometida al par de flexión  $\left(\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right)$  y á un esfuerzo cortante igual á  $\frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$ , lo que demues-

tra nuestro aserto. Desde ese punto en adelante, el valor absoluto del esfuerzo cortante crece uniformemente hasta el extremo B, en que alcanza el valor  $-P$ . Por consiguiente, el diagrama de que se trata estará representado por la línea quebrada  $abb'c$ .

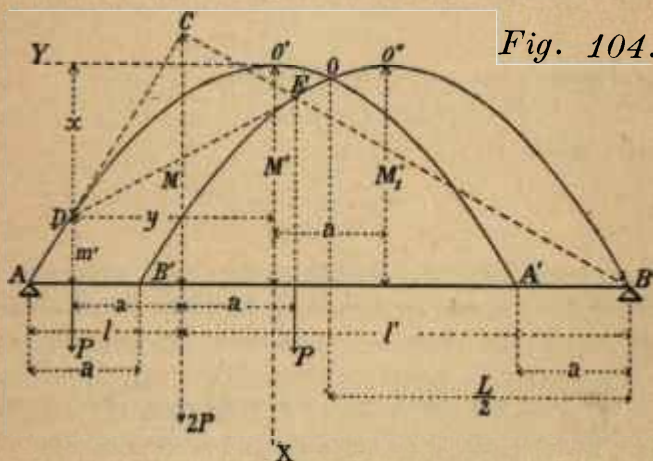
Observando que el diagrama  $dabb'ce$  corresponde á una carga  $P$ , uniformemente repartida, y que el diagrama  $Adbb'eB$  corresponde á una carga  $P$ , aplicada en el punto medio, y además que el diagrama total es la suma de los que quedan indicados, resulta que, en cuanto á los efectos máximos del esfuerzo cortante, una carga  $P$  móvil que recorre toda la longitud de un prisma, equivale á dos cargas fijas iguales á  $P$ , una aplicada en el punto medio y la otra uniformemente repartida sobre todo el prisma.

**248. Observación.** — Cuando una carga móvil recorre toda la longitud de un prisma, sometido además á cargas determinadas, los efectos originados por la carga móvil se suman sencillamente á los que corresponden á las cargas fijas.



Así, por ejemplo, cuando una carga se traslada á lo largo de un prisma, sometido á la vez á una carga uniformemente repartida, el diagrama completo de momentos de flexión será una parábola, en la que cualquiera de sus ordenadas será igual á la suma de las correspondientes de las parábolas que respectivamente constituyen los diagramas de la carga móvil y de la carga fija uniformemente repartida.

**249. Cargas móviles equidistantes.** — Supongamos que una carga móvil se halle dividida en un cierto número de partes aplicadas á otros tantos puntos, cuyas distancias mutuas permanezcan invariables, y consideremos el caso más sencillo



de una carga  $2P$ , dividida en dos mitades, de tal modo enlazadas que su distancia  $2a$  sea constante, cualquiera que sea la posición de la carga total  $2P$ .

Sean  $l$  y  $l'$  las distancias á los apoyos, de la resultante en una posición cualquiera, y sea  $M$  el momento máximo de flexión en la sección donde aquella está aplicada. Si dicha resultante la sustituyémos por sus componentes, es claro que el diagrama de momentos, para la posición particular que se considera, será la línea  $ADEB$ .

Observemos, además, que se verifican las relaciones siguientes:

$$\frac{m'}{M} = \frac{l-a}{l} \quad , \quad M = \frac{2Pl l'}{L} \quad ,$$

siendo, como la figura 104 manifiesta,  $m'$  y  $M$  los momentos correspondientes á la primera carga  $P$  y á la resultante  $2P$ , en los respectivos puntos de aplicación.

De dichas relaciones se deduce

$$m' = \frac{2Pl'(l-a)}{L}$$

Este momento alcanza su valor máximo por la condición

$$l' = l - a$$

ó bien, cuando

$$L - l = l - a \quad ,$$

es decir, cuando

$$l = \frac{1}{2} (L + a)$$

Sustituyendo este valor particular de  $l$  en la expresión de  $m'$  resultará que el momento máximo  $M'$  de la primera carga será

$$M' = \frac{2P}{L} (l-a)^2 = \frac{2P}{L} \left( \frac{1}{2} (L+a) - a \right)^2 = \frac{2P}{L} \left( \frac{L-a}{2} \right)^2$$

Determinemos ahora la curva de los momentos correspondientes á las posiciones de la primera carga, refiriéndola á los ejes  $O'X$ ,  $O'Y$ .

Tendremos para un punto cualquiera  $(x, y)$ :

$$x = M' - m' = \frac{2P}{L} \left( \frac{L-a}{2} \right)^2 - \frac{2Pl'(l-a)}{L}$$

ó bien

$$x = \frac{2P}{L} \left[ \left( \frac{L-a}{2} \right)^2 - (L-l)(l-a) \right]$$



Pero observando que

$$l = \frac{1}{2} (L + a) - y,$$

puesto que

$$l - a + y = \frac{1}{2} L - \frac{1}{2} a,$$

tendremos, sustituyendo en la ecuación anterior,

$$x = \frac{2P}{L} \left[ \left( \frac{L-a}{2} \right)^2 - \left( L - \frac{1}{2} (L+a) + y \right) \left( \frac{1}{2} (L+a) - y - a \right) \right]$$

ó bien

$$x = \frac{2P}{L} \left[ \left( \frac{L-a}{2} \right)^2 - \left( \left( \frac{L-a}{2} \right)^2 - y^2 \right) \right] = \frac{2P}{L} y^2$$

de donde

$$y^2 = \frac{L}{2P} x,$$

ecuación de una parábola ordinaria, referida á su vértice O'.

El diagrama de los momentos máximos correspondientes á las posiciones de la primera carga, estará, por tanto, representado por la parábola AO'A'.

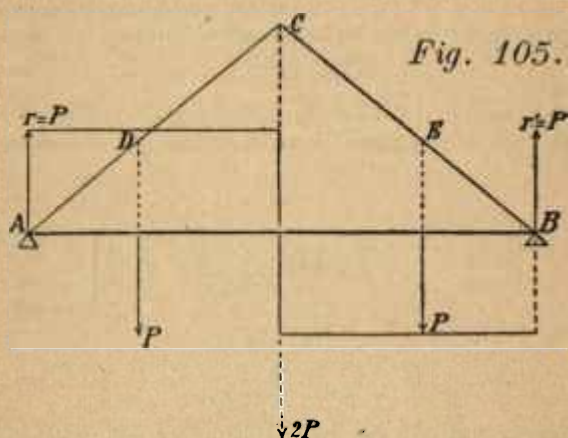
Ahora bien, como á cada una de las posiciones de la primera carga corresponde, aunque en momento distinto, otra simétrica de la segunda, es evidente que el diagrama de los momentos correspondientes á la segunda carga será la parábola BO''B'.

Resulta, por tanto, que el diagrama de los momentos máximos correspondientes á las dos cargas móviles, equidistantes é iguales que hemos considerado, tiene por representación la línea A O'O O''B.

**250. Cargas simétricas.**—Consideremos, por último, el caso de dos cargas iguales que recorren en sentidos contrarios

la longitud total de un prisma, de tal manera, que sus posiciones, en cualquier momento dado, sean simétricas.

Claro es entonces que la resultante pasará siempre por el punto medio del prisma, y por tal motivo los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos de flexión serán los indicados en la figura 105; considerando que las reacciones en los apoyos



son constantemente iguales a  $P$ , y que por pasar siempre la resultante por el punto medio del prisma, el diagrama de los momentos máximos de flexión será igual al diagrama de momentos de una carga fija, igual a  $2P$ , aplicada en dicho punto.

Resulta, pues, que el efecto producido por las cargas que recorren el prisma en las condiciones indicadas, es equivalente al producido por la suma de aquéllas, aplicadas al punto medio.



## FLEXIÓN COMPLEJA.

## FLEXIÓN COMPLEJA DE LOS PRISMAS EMPOTRADOS.

**251. Nociones preliminares.**—Ya hemos dicho que un prisma está sometido á una flexión compleja cuando la dirección de las fuerzas que lo solicitan es tal, que la curvatura de aquél cambia de sentido, pasando de cóncava á convexa ó viceversa.

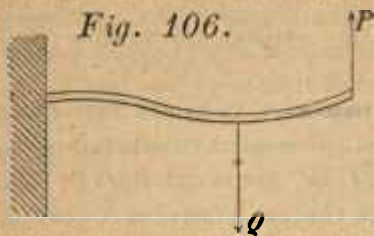
Los puntos en que la curvatura cambia se denominan *puntos de inflexión* ó de flexión nula del prisma; y es evidente que no sufriendo las fibras en tales puntos ni compresiones ni tracciones, las secciones inmediatas y situadas á cada lado de ellos, estarán sometidas á momentos de flexión de signo contrario; porque es claro que las fibras comprimidas de un lado, corresponden á las dilatadas ó extendidas del otro, y recíprocamente.

**252.** Resulta de aquí, como consecuencia importante para la práctica de las construcciones, que los perfiles en simple T de fundición, son inconvenientes cuando han de trabajar á flexión compleja; porque siendo su resistencia á la compresión mayor que á la extensión, es claro que pudiendo resistir dicho perfil á la compresión máxima que se originase á uno de los lados de un punto de inflexión, no sucedería lo mismo respecto de la sección situada del lado opuesto, en la cual la extensión sería el esfuerzo desarrollado preponderante.

**253.** Puede decirse, en general, que habrá flexión compleja cuando el prisma esté solicitado por más de tres fuerzas, alternativamente de direcciones contrarias; ó bien cuando, á contar de un punto de empotramiento real ó ficticio, obren sobre una parte cualquiera del prisma, por lo menos, dos fuerzas de direcciones contrarias, pudiendo ser estas últimas, ó fuerzas propia-

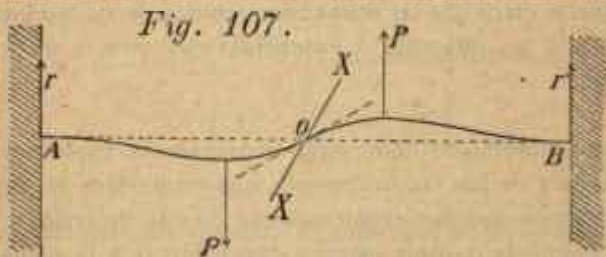
mente dichas, ó reacciones desarrolladas por apoyos ó puntos fijos. (Véase figura 106).

Consideremos el caso sencillo de un prisma empotrado por sus dos extremos y solicitado por dos fuerzas verticales iguales entre sí, de direcciones contrarias y simétricamente situadas respecto del punto medio.



En este caso el prisma experimentará las dos cur-

vaturas indicadas en la figura 107; y es claro que la sección intermedia  $O$  no experimentará flexión alguna, correspondiendo por lo tanto á un punto de inflexión de la curva  $AOB$  que forme el eje de aquel.



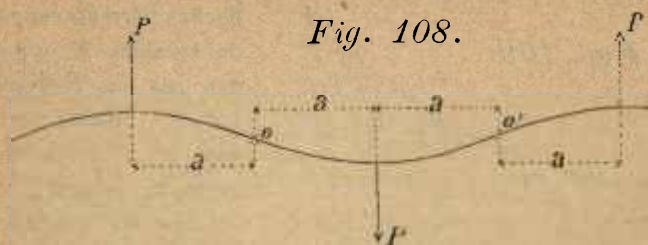
Si por dicho punto cortáramos el prisma por un plano  $X$ , convenientemente inclinado, teóricamente subsistirían las condiciones de equilibrio por el mutuo apoyo que se prestarían las dos porciones en que queda dividido por el plano.

Si considerásemos un prisma de longitud indefinida, solicitado por fuerzas equidistantes y alternativamente contrarias, es claro que á causa de la simetría, todos los puntos situados á igual distancia de los de aplicación de cada dos fuerzas consecutivas, no experimentarán flexión alguna, siendo por lo tanto puntos de inflexión (figura 108).

En el caso particular en que un prisma horizontal empotra-



do por sus dos extremos, estuviera solicitado por una sola carga vertical aplicada en su punto medio, dicho prisma, según lo



que acabamos de ver, no experimentaría flexión alguna en los cuartos de su longitud á contar de las secciones de empotramiento.

Aun cuando las consideraciones expuestas en los ejemplos precedentes pudieran servir de punto de partida para hacer un estudio más completo de la flexión compleja, es preferible aplicar otro método más científico conocido con el nombre de método de las áreas de momentos, cuyos principios fundamentales vamos á exponer sucintamente.

**254. Definiciones.**—Se da el nombre de *área de momentos* entre dos puntos de un prisma sometido á flexión, al área comprendida entre el eje de abscisas, las ordenadas extremas y el diagrama de momentos de flexión entre dichos puntos.

Cuando sea necesario tener en cuenta el signo de dichas áreas, consideraremos como *positivas* las que queden por encima del eje del prisma, y como *negativas* las que queden por debajo de dicho eje.

Se llama *línea elástica*, según sabemos ya, la curva que presenta el eje, primitivamente rectilíneo del prisma, después que se ha deformado por efecto de la flexión.

**255. TEOREMA I.º**—*El área de momentos entre dos puntos representa la inclinación mutua de las tangentes trazadas por dichos puntos á la línea elástica.*

Sea (figura 109) AB una parte del prisma sometido á la fle-

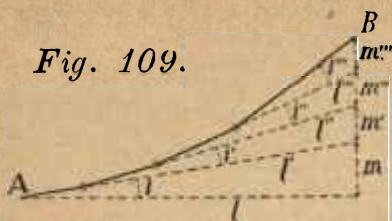


Fig. 109.

xió n, y  $m, m', m'' \dots$  las flechas correspondientes del extremo B, originadas por las rotaciones  $i, i', i'' \dots$  de las porciones  $l, l', l'' \dots$  de dicha parte del prisma.

Como las deformaciones parciales  $m, m', m'' \dots$  son sumamente pequeñas, podemos establecer:

$$\operatorname{tg} i = \frac{m}{l} \quad ; \quad \operatorname{tg} i' = \frac{m'}{l'} \quad ; \quad \operatorname{tg} i'' = \frac{m''}{l''} \quad \dots \dots \text{etc.}$$

Ahora bien; recordando que al tratar de la flexión simple se obtuvieron los resultados siguientes (pág. 175);

$$m = \frac{2Kl}{EH} \quad ; \quad m' = \frac{2K'l'}{EH'} \quad ; \quad m'' = \frac{2K''l''}{EH''} \quad ; \quad \dots \dots \text{etc.}$$

y como por la pequeñez de los ángulos pueden tomarse los arcos correspondientes de radio 1 en lugar de sus tangentes trigonométricas, tendremos

$$i = \frac{2K}{EH} \quad ; \quad i' = \frac{2K'}{EH'} \quad ; \quad i'' = \frac{2K''}{EH''} \quad ; \quad \dots \dots \text{etc.}$$

y sumando ordenadamente,

$$\Sigma (i) = I = \frac{2}{E} \Sigma \left( \frac{K}{H} \right),$$

representando I el ángulo de las tangentes á la elástica trazadas por los puntos A y B.

Consideremos ahora un prisma propiamente dicho, de sección constante. En este caso, claro es que

$$I = \frac{2}{EH} \Sigma (K);$$



pero siendo, como sabemos,

$$K = \frac{M}{Z} ; K' = \frac{M'}{Z'} ; K'' = \frac{M''}{Z''} \dots \dots \text{etc.}$$

resultará

$$\Sigma(K) = \frac{1}{Z} \Sigma(M)$$

y, por último,

$$I = \frac{2}{ZEH} \Sigma(M)$$

Ahora bien;  $\Sigma(M)$  representa precisamente el área del diagrama de momentos, de suerte que representándola por  $X$  y designando por  $\varepsilon$  la constante  $\frac{2}{ZEH}$  tendremos

$$I = \varepsilon X,$$

lo que nos dice que el área de momentos  $X$  es directamente proporcional al ángulo  $I$  de las tangentes extremas á la línea elástica, que es lo que nos proponíamos demostrar.

**256. TEOREMA 2.º**—*El momento del área de momentos entre dos puntos, con relación á uno de ellos, representa la distancia vertical de este punto del eje á la tangente trazada por el otro á la línea elástica.*

También pudiera decirse que dicho momento es proporcional al valor de la flecha vertical del primer punto con relación á la dirección del empotramiento real ó ficticio del segundo.

En efecto; esta flecha es la suma de los desplazamientos análogos á  $m$ , de donde (figura 110)

$$f = \Sigma(il) = \frac{2}{ZEH} \Sigma(Ml)$$

Pero  $\Sigma(Ml)$  representa la suma de momentos con relación al punto B (figura 111) de todos los elementos superficiales del

área  $X$ ; y como la suma de momentos es igual al momento de la suma, tendremos

$$\Sigma(MI) = XY;$$

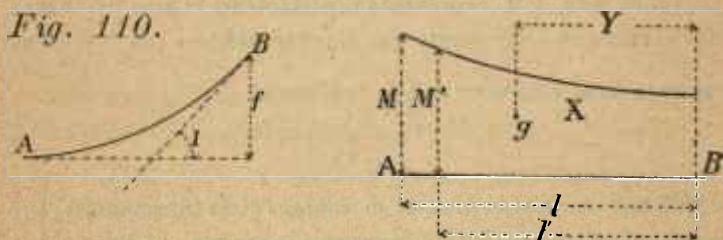
por consiguiente llamando, como antes,  $\epsilon$  á la constante  $\frac{2}{ZEH}$  resultará

$$f = \epsilon XY,$$

que es lo que queríamos demostrar.

En el caso en que la tangente en el punto A fuera horizontal,

*Fig. 111.*



claro es que entonces  $f$  representaría la flecha real del punto B con relación al punto A, ó, si se quiere, el desnivel entre ambos (figura 110).

PRISMAS EMPOTRADOS POR UN EXTREMO Y APOYADOS POR EL OTRO

**257. Carga única.**—Sea AB un prisma empotrado horizontalmente en A, apoyado en B y sometido á la carga P en el punto C (figura 112).

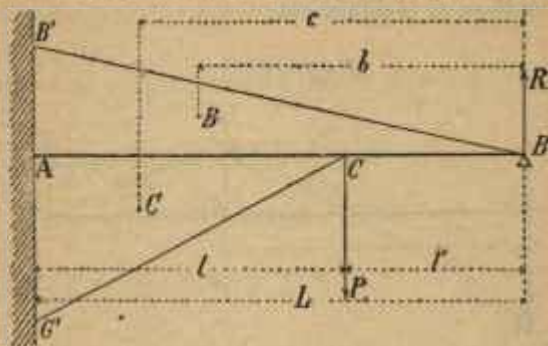
En el apoyo B se desenvuelve una reacción R, que luego determinaremos.

Las fuerzas R y P determinan en A momentos AB' y AC', de signos contrarios; de suerte que los diagramas de momentos de dichas fuerzas serán las rectas BB' y CC'; y las áreas de mo-



mentos correspondientes serán las superficies triangulares  $BAB'$  y  $CAC'$ , positiva la primera y negativa la segunda.

*Fig. 112.*



Llamemos  $B$  y  $C$  á dichas áreas de momentos,  $b$  y  $c$  á sus brazos de palanca con relación al punto  $B$ .

Suponiendo indeterminadas  $P$  y  $R$ , la expresión general de la flecha en  $B$ , será, según el 2.º de los teoremas establecidos,

$$f = \varepsilon (Bb - Cc);$$

pero como por hipótesis el punto de apoyo  $B$  está al mismo nivel que el punto  $A$  de empotramiento, la flecha en  $B$  será nula; de donde resulta

$$Bb = Cc.$$

Tenemos por otra parte

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} RL^2 & C &= \frac{1}{2} Pl^2 \\ b &= \frac{2}{3} L & c &= l' + \frac{2}{3} l \end{aligned}$$

Sustituyendo resultará

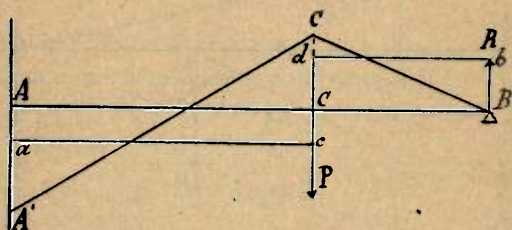
$$\frac{1}{3} RL^3 = \frac{1}{2} Pl^2 \frac{3l' + 2l}{3},$$

de donde

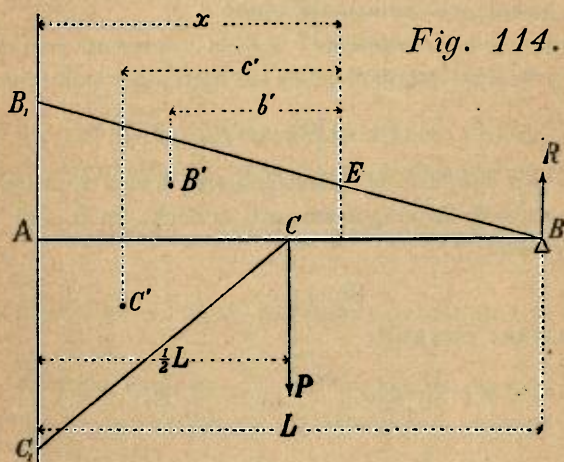
$$R = \frac{1}{2} P \frac{l^2 (3l' + 2l)}{L^3}$$

Los diagramas de momentos de flexión y de esfuerzos cortantes se indican en la figura 113.

*Fig. 113.*



Si la carga estuviera en el punto medio, (figura 114) sería



entonces  $l = l' = \frac{1}{2} L$ , y por tanto

$$R = \frac{1}{2} P \frac{\frac{1}{4} L^2 \left( \frac{3}{2} L + L \right)}{L^3} = \frac{5}{16} P$$



**258.** La expresión del momento de flexión es distinta, según la parte que se considere del prisma, á la izquierda ó á la derecha de la carga P.

Suponiendo ésta en el punto medio, tendremos:

A la izquierda de P, para valores de  $x$  entre 0 y  $\frac{1}{2} L$

$$m_1 = R(L - x) - P\left(\frac{1}{2} L - x\right) = (P - R)x - \left(\frac{1}{2} P - R\right) L.$$

A la derecha de P, para valores de  $x$  entre  $\frac{1}{2} L$  y  $L$

$$m_2 = R(L - x)$$

y puesto que  $R = \frac{5}{16} P$ , tendremos

$$m_1 = \frac{11}{16} Px - \frac{3}{16} PL. \quad (1)$$

$$m_2 = \frac{5}{16} PL - \frac{5}{16} Px. \quad (2)$$

Si en las ecuaciones (1) ó (2) hacemos  $x = \frac{1}{2} L$ , resultará el momento máximo intermedio, en el punto de aplicación de la carga, que llamaremos M, y será

$$M = \frac{5}{32} PL.$$

Si en la ecuación (1) hacemos  $x = 0$ , el valor  $M_0$  que resulte para  $m_1$  será el del momento en la sección empotrada, que es

$$M_0 = -\frac{3}{16} PL$$

y, como vemos, es negativo.

Pero en el punto de aplicación de la carga hemos visto que el momento es positivo; luego entre A y C habrá seguramente un punto de inflexión, definido por la condición  $m_1 = 0$ .

Así tendremos

$$\frac{11}{16} Px - \frac{3}{16} PL = 0,$$

de donde

$$x = \frac{3}{11} L.$$

**259.** La expresión general del esfuerzo cortante la obtendremos, para cada porción del prisma, por la derivada de la función de  $x$  que represente el momento respectivo.

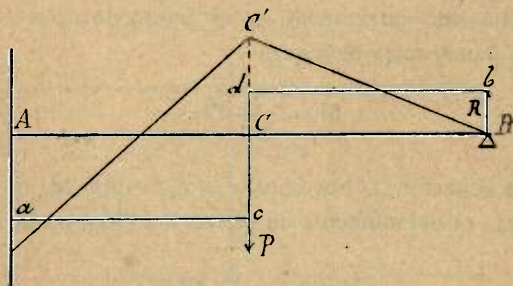
Así resulta:

$$\text{De A á C} \quad T_1 = \frac{11}{16} P$$

$$\text{De C á B} \quad T_2 = -\frac{5}{16} P$$

Los diagramas de momentos de flexión y de esfuerzos cortantes se indican en la figura 115.

*Fig. 115.*



**260.** Para determinar la flecha en un punto cualquiera, conviene tomar como origen el extremo empotrado; donde sabemos que la tangente á la línea elástica es horizontal.

Dos procedimientos podemos seguir para el cálculo de la flecha: 1.º mediante la expresión  $f = \epsilon XY$ , y todo queda redu-



cido al cálculo del momento del área X con relación al punto cuya flecha se quiere conocer; y 2.º, hallando las ecuaciones de la elástica, y dando, en la que corresponda, á  $x$  el valor de la abscisa que define el punto de que se trate.

Si sólo quisiéramos calcular la flecha máxima en valor absoluto, como en tal punto la tangente á la elástica es horizontal, haríamos  $X = 0$ , ó bien  $\frac{dy}{dx} = 0$ . De cualquier modo se hallará el valor particular de  $x$ , que define el punto de máxima flecha en valor absoluto, y sustituido este valor en la expresión de  $f = \epsilon XY$ , ó en la ecuación de la elástica, quedará resuelto el problema.

**261. PRIMER PROCEDIMIENTO.**—Sean  $B'$  y  $C'$  las áreas de momentos entre el origen A y el punto cuya abscisa es  $x$ ;  $b'$ ,  $c'$ , sus brazos de palanca con relación á este punto (figura 114). Tendremos:

$$f = \epsilon (B'b' - C'c').$$

Se deduce con toda facilidad que

$$B'b' = \frac{1}{6} R x^3 (3L - x)$$

ó teniendo en cuenta que  $R = \frac{5}{16} P$ ,

$$B'b' = \frac{5}{96} P x^3 (3L - x)$$

Como suponemos que C es el punto medio del prisma, hallaremos también con toda facilidad,

$$C'c' = \frac{1}{48} PL^2 (6x - L);$$

y por tanto tendremos para cualquier punto del tramo CB

$$f = \frac{\epsilon P}{96} \left[ 5x^3 (3L - x) - 2L^2 (6x - L) \right]$$

ó bien

$$f = \frac{\varepsilon P}{96} \left( -5x^3 + 15Lx^2 - 12L^2x + 2L^3 \right)$$

De modo análogo se encontraría la expresión general de la flecha para el tramo AC.

En el punto de aplicación de la carga, es decir, para  $x = \frac{1}{2}L$ , la flecha vale

$$f_c = -\frac{7}{768} \varepsilon PL^3$$

**262.** 2.º PROCEDIMIENTO.—Las ecuaciones de la elástica son:

Para el tramo AC:

$$(I) \begin{cases} EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{11}{16} Px - \frac{3}{16} PL & (1) \\ EI \left( \frac{dy}{dx} + C_1 \right) = \frac{11}{32} Px^2 - \frac{3}{16} PLx & (2) \\ EI (y + C_1x + C'_1) = \frac{11}{96} Px^3 - \frac{3}{32} PLx^2 & (3) \end{cases}$$

Para el tramo CB:

$$(II) \begin{cases} EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5}{16} PL - \frac{5}{16} Px & (1) \\ EI \left( \frac{dy}{dx} + C_2 \right) = \frac{5}{16} PLx - \frac{5}{32} Px^2 & (2) \\ EI (y + C_2x + C'_2) = \frac{5}{32} PLx^2 - \frac{5}{96} Px^3 & (3) \end{cases}$$

Los límites de  $x$  son: para las ecuaciones del grupo (I), 0 y  $\frac{1}{2}L$ , y para las del grupo (II),  $\frac{1}{2}L$  y  $L$ .

Claro es que para el valor común á las dos ramas de elástica,  $x = \frac{1}{2}L$ , los resultados de ambos grupos serán idénti-



cos. Además, como la tangente á la elástica en el empotramiento es horizontal y la flecha es nula para  $x = 0$  y  $x = L$ ; por estas circunstancias la determinación de las constantes arbitrarias es fácil, en el caso que nos ocupa.

Si para distinguir la procedencia de  $\frac{dy}{dx}$ , afectamos este coeficiente diferencial del correspondiente subíndice, según el grupo á que pertenezca, tendremos:

En el grupo (I)

Ecuación (2). Para  $x = 0$ ,  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 0$ ; de donde  $C_1 = 0$

» (3). »  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; »  $C_1' = 0$

En el grupo (II)

Ecuación (3). Para  $x = L$ ,  $y = 0$ ; de donde  $C_2' = \frac{5PL^3}{48EI} - C_2L$

En ambos grupos

Ecuaciones (2).

Para  $x = \frac{1}{2}L$ ,  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2$ ; de donde  $C_2 = \frac{PL^2}{8EI}$

Por lo tanto resultará para  $C_2'$ .....  $C_2' = -\frac{PL^3}{48EI}$

Las ecuaciones de la elástica serán, por tanto, las siguientes:

Para el tramo AC:

$$y = \frac{P}{96EI} (11x^3 - 9Lx^2) \dots \dots \dots (a)$$

Para el tramo CB:

$$y = \frac{P}{96EI} (-5x^3 + 15Lx^2 - 12L^2x + 2L^3) \dots \dots (b)$$

Si se observa que  $\frac{1}{EI} = \frac{2}{ZEH} = \epsilon$ , se verá que esta última expresión de  $y$ , y la que antes encontramos para  $f$ , son idénti-

cas, como debe ser; pues ambas expresan el valor general de la flecha en el tramo CB.

Si en cualquiera de las ecuaciones (a) ó (b) hacemos  $x = \frac{1}{2} L$ , encontraremos para  $y$  el valor hallado anteriormente, y que se designó por  $f$ , como es fácil comprobar.

**263.** Para saber cual es el punto en que la flecha alcanza su valor máximo en valor absoluto, bastará observar que en dicho punto la tangente á la línea elástica es horizontal, y por tanto  $I = 0$ .

Recordando que  $I = \varepsilon X$ , y que  $X = B' - C'$ ; como  $\varepsilon > 0$ , deberá resultar  $X = 0$ , de donde  $B' = C'$ .

Por tanto, como

$$B' = \frac{1}{2} [RL + R(L - x)] x = \frac{5}{32} Px(2L - x)$$

$$y \quad C' = \frac{1}{8} PL^2$$

tendremos

$$\frac{5}{32} Px(2L - x) = \frac{1}{8} PL^2$$

de donde

$$x^2 - 2Lx + \frac{4}{5} L^2 = 0$$

$$y \quad x = \left(1 - \frac{1}{5} \sqrt{5}\right) L.$$

**264.** Si sustituímos este valor de  $x$  en la expresión de la flecha correspondiente al tramo BC, resultará

$$f = -\frac{1}{240} \sqrt{5} \varepsilon PL^3,$$

ó con poco error]

$$f = -0,01 \varepsilon PL^3$$

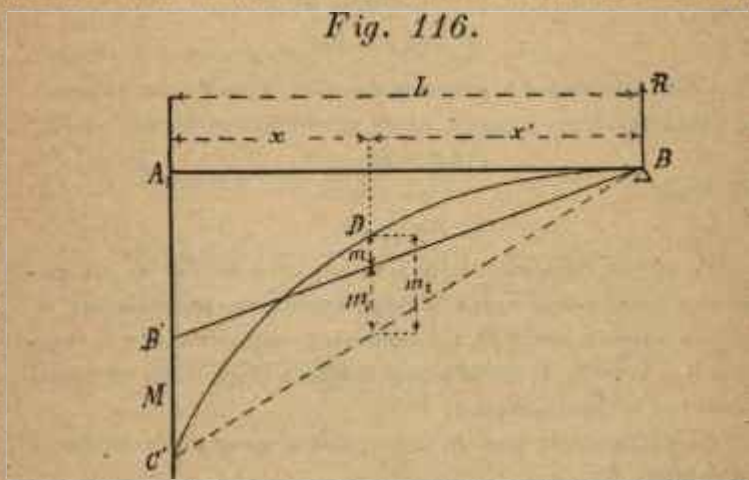


Al mismo resultado se llega acudiendo á las ecuaciones de la elástica del tramo BC.

**265.** Comparando los valores que acabamos de encontrar con los relativos á los prismas apoyados por sus extremos, cargados de igual manera, resulta que el momento máximo en valor absoluto del prisma empotrado es los  $\frac{3}{4}$  del momento máximo del no empotrado, y la flecha del primero la mitad próximamente de la del segundo.

**266. Carga uniformemente repartida.**—Supongamos un prisma horizontal, empotrado por un extremo, apoyado por el otro y cargado de un peso uniformemente repartido, de  $p$  kilogramos por unidad de longitud (figura 116.)

Fig. 116.



Sea  $R$  la reacción del apoyo, y sean, la curva  $BDC'$  y la recta  $BB'$ , los diagramas de los momentos de flexión correspondientes á la carga uniformemente repartida y á la reacción, respectivamente, y trazados á un mismo lado del eje.

La diferencia  $AB' - AC'$  representa el momento negativo  $M$ , que ahora determinaremos, en el punto de empotramiento.

Hemos demostrado que toda porción de un diagrama de momentos entre dos puntos, representa con relación á la recta que los une, el diagrama de momentos de la porción correspondiente del prisma, bajo la hipótesis de que estuviera apoyado en dichos puntos y soportara la carga correspondiente; por lo tanto, la curva  $BDC'$  representa con relación á la recta  $BC'$  el diagrama de momentos del prisma apoyado en A y B.

Representemos por  $A$  el área de momentos de este diagrama y por  $a$  la distancia de su centro de gravedad á la vertical trazada por el apoyo B. Sean asimismo  $B$  y  $b$  el área de momentos y su brazo de palanca, con relación al mismo punto, del diagrama  $BB'C'$ .

**267.** Suponiendo  $R$  indeterminada, la flecha en el punto B será

$$f = (Aa - Bb).$$

Como los puntos A y B están de nivel, dicha flecha será nula; por lo tanto

$$\varepsilon (Aa - Bb) = 0,$$

de donde

$$Aa = Bb.$$

En efecto; llamemos  $A_1$  al área negativa  $AC'DB$  de los momentos correspondientes á la carga uniformemente repartida;  $B_1$  al área positiva  $AB'B$ , de los momentos originados por la reacción  $R$ ; y sean  $a_1$ ,  $b_1$  los brazos de palanca respectivos de dichas áreas con respecto al punto B.

Es evidente que por ser la expresión general de la flecha en el punto B,

$$f = \varepsilon (B_1 b_1 - A_1 a_1),$$

y estar de nivel los extremos del prisma, se verificará que  $f = 0$ , lo que exige como condición necesaria que

$$A_1 a_1 = B_1 b_1.$$



Ahora bien; llamando  $\Omega$  al área del triángulo  $AC'B$  y teniendo las letras  $A$ ,  $B$ ,  $a$  y  $b$  las mismas representaciones que antes, tendremos

$$\Omega = A_1 + A$$

$$\Omega = B_1 + B.$$

Si representamos por  $X$  el brazo de palanca de  $\Omega$ , tendremos también;

$$\Omega X = A_1 a_1 + Aa$$

$$\Omega X = B_1 b_1 + Bb$$

de donde

$$B_1 b_1 - A_1 a_1 = Aa - Bb$$

y por tanto

$$f = \varepsilon(Aa - Bb) = 0$$

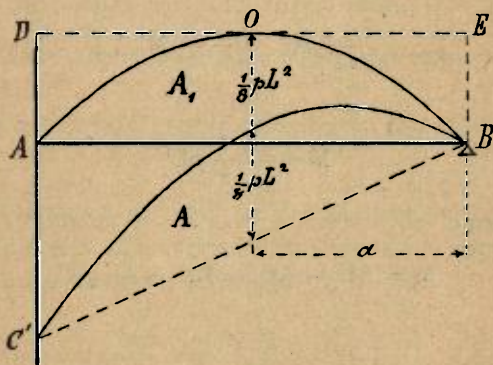
y

$$Aa = Bb,$$

como habíamos indicado.

**268.** Siendo una parábola, como sabemos, la curva  $BC'$  (figu-

*Fig. 117.*



ra 117), si construyéramos la parábola  $A_1$ , correspondiente al

diagrama de momentos del prisma, suponiéndole apoyado por sus extremos, es claro que esta parábola tendría su vértice en el punto medio del arco AOB, y su eje cortaría al prisma en su punto medio. Como los arcos de parábola BC' y AB representan el mismo diagrama, claro es que los segmentos parabólicos A y A<sub>1</sub> serán equivalentes. Pero sabemos que el segmento A<sub>1</sub> es igual á las  $\frac{2}{3}$  del rectángulo ABED, el cual tiene por área  $\frac{1}{8} pL^3$ , luego.

$$A = \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} pL^3 = \frac{1}{12} pL^3.$$

Además es evidente que

$$a = \frac{1}{2} L,$$

y como desde luego se ve que

$$B = -\frac{1}{2} ML, \quad b = \frac{1}{2} L \quad (\text{fig. 116}),$$

tendremos

$$\frac{1}{24} pL^4 = -\frac{1}{3} ML^3,$$

de donde

$$M = -\frac{1}{8} pL^3.$$

Pero como

$$M = AB' - AC' = RL - \frac{1}{2} pL^2,$$

resultará;

$$-\frac{1}{8} pL^3 = RL - \frac{1}{2} pL^2,$$



de donde

$$R = \frac{3}{8} pL.$$

**269.** Para un punto cualquiera, situado á la distancia  $x$  del extremo A y á la  $x'$  del extremo B, el momento de flexión  $m$  será (figura 116)

$$m = Rx' - \frac{1}{2} px'^2,$$

y sustituyendo en vez de  $R$  su valor,

$$m = \frac{1}{2} px' \left( \frac{3}{4} L - x' \right).$$

**270.** En el punto de inflexión se verifica que  $m = 0$ , luego

$$\frac{3}{4} L - x' = 0,$$

de donde

$$x' = \frac{3}{4} L \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{4} L,$$

lo que nos dice que el punto del prisma en que la flexión es nula se halla á los  $\frac{3}{4}$  de la longitud, á contar del extremo apoyado,

ó al  $\frac{1}{4}$  de la misma, á contar del extremo empotrado.

**271.** Para hallar el punto en que el momento positivo de flexión es máximo, observaremos que basta encontrar el valor de  $x'$  que haga máxima á la función

$$f(x') = x' \left( \frac{3}{4} L - x' \right),$$

y como la suma de los dos factores que la constituyen es cons-

tante é igual á  $\frac{3}{4}L$ , será necesario que dichos factores sean iguales; de modo que la condición del máximo será en este caso,

$$x' = \frac{3}{4}L - x',$$

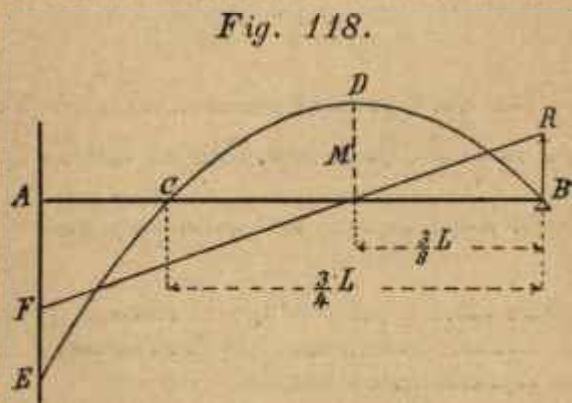
de donde

$$x' = \frac{3}{8}L;$$

y el momento positivo de mayor valor absoluto será

$$M' = \frac{9}{128} pL^2.$$

**272.** Como el diagrama de momentos es una parábola, y de ella se han determinado, por las consideraciones que anteceden, los tres puntos B, C y D (figura 118), su trazado no puede ofrecer ninguna dificultad, siendo D el vértice de la curva.



**273.** Para calcular la flecha podemos seguir los mismos procedimientos que hemos seguido en los números **261** y **262**.

La expresión general del momento de flexión, es, como sa-



bemos,

$$m = \frac{3}{8} pLx' - \frac{1}{2} px'^2$$

ó en función de  $x$ , puesto que  $x' = L - x$ ;

$$m = -\frac{1}{2} px^2 + \frac{5}{8} pLx - \frac{1}{8} pL^2.$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la línea elástica serán:

$$EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = -\frac{1}{2} px^2 + \frac{5}{8} pLx - \frac{1}{8} pL^2 \quad (1)$$

$$EI \left( \frac{dy}{dx} + C \right) = -\frac{1}{6} px^3 + \frac{5}{16} pLx^2 - \frac{1}{8} pL^2 x \quad (2)$$

$$EI (y + Cx + C') = -\frac{1}{24} px^4 + \frac{5}{48} pLx^3 - \frac{1}{16} pL^2 x^2 \quad (3)$$

Como para  $x = 0$ , corresponde evidentemente  $\frac{dy}{dx} = 0$  (ecuación 2), y además  $y = 0$  (ecuación 3); puesto que en el punto A la tangente á la elástica es horizontal y la flecha nula, las constantes arbitrarias  $C$  y  $C'$  serán iguales á 0; por lo tanto la expresión general de la flecha será

$$f = -\frac{1}{48} \frac{p}{EI} (2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2 x^2)$$

ó también, y recordando que  $2I = ZH$  y que  $\frac{2}{ZEH} = \epsilon$ ,

$$f = -\frac{1}{48} \epsilon p (2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2 x^2).$$

**274.** La flecha máxima en valor absoluto corresponderá al

punto en que el valor de  $x$  haga máxima á la función

$$f(x) = 2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2.$$

La primera derivada igualada á cero, da la ecuación

$$8x^3 - 15Lx^2 + 6L^2x = 0.$$

Una de sus raíces es  $x = 0$ , que no corresponde á la cuestión; por lo tanto, dividiendo por  $x$ , la ecuación que hay que resolver es

$$8x^2 - 15Lx + 6L^2 = 0,$$

de donde

$$x = \frac{(15 - \sqrt{33})L}{16} = 0,58 L, \text{ próximamente.}$$

La otra raíz se desecha; porque, desde luego, ha de ser

$$x \begin{matrix} > 0 \\ < L \end{matrix}$$

Sustituyendo este valor de  $x$  en la expresión de  $f$ , se obtiene para valor aproximado de la flecha máxima en valor absoluto,

$$f = -\frac{1}{184} \epsilon p L^4.$$

**275.** A este mismo resultado se llega aplicando el procedimiento de las áreas de momentos.

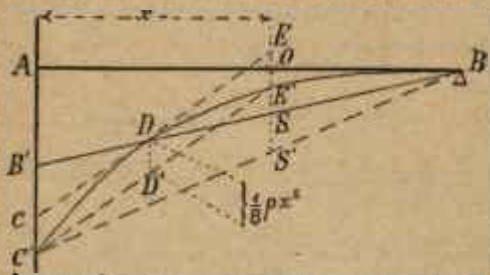
En efecto; llamando  $\Omega_1$  á la superficie AC'S'O (figura 119);  $X_1$  á su brazo de palanca con relación al punto O;  $A'_1$  á la superficie negativa AC'DE'O;  $A'$  á la C'DE'S';  $B'_1$  á la AB'SO, que es positiva;  $B'$  á la B'C'S'S; y  $a'_1, a', b'_1, b'$  á los brazos de palanca correspondientes á las superficies  $A'_1, A', B'_1, B'$ , tendre-



mos que, para un punto cualquiera del prisma, tal como el O, la expresión general de la flecha es

$$f = \varepsilon (B_1'b_1' - A_1'a_1')$$

Fig. 119.



y además, con arreglo á las notaciones establecidas,

$$\Omega_1 = A_1' + A' = B_1' + B'$$

$$\Omega_1 X_1 = A_1'a_1' + A'a' = B_1'b_1' + B'b'$$

de donde

$$B_1' - A_1' = A' - B'$$

$$B_1'b_1' - A_1'a_1' = A'a' - B'b'$$

y por tanto

$$f = \varepsilon (A'a' - B'b') \quad (a)$$

Siendo  $AE = x$ ,  $EB = x'$  y por tanto,  $x' = L - x$  (figura 119), la expresión general de la flecha la obtendremos calculando los momentos  $A'a'$  y  $B'b'$  en función de  $x$ , y reemplazando sus valores en la expresión (a).

**276.** Representando por  $m_1$  y  $m_2$  los momentos en el punto cuya abscisa es  $x$ , correspondientes á los dos diagramas representados en la figura 116, y prescindiendo del signo de  $M$ , ten-

dremos, observando que  $m_2 = E'S'$  y  $m_1 = SS'$  (figuras 116 y 119);

$$A'a' = \frac{I}{2} m_2 x \cdot \frac{I}{3} x + \frac{2}{3} x \cdot \frac{I}{8} px^3 \cdot \frac{I}{2} x = \frac{I}{6} m_2 x^3 + \frac{I}{24} px^4$$

$$B'b' = \frac{I}{2} Mx \cdot \frac{2}{3} x + \frac{I}{2} m_1 x \cdot \frac{I}{3} x = \frac{I}{3} Mx^2 + \frac{I}{6} m_1 x^3$$

Ahora bien, tenemos

$$m_1 = \frac{Mx'}{L}, \quad m_2 = \frac{I}{2} pxx', \quad M = \frac{I}{8} pL^2, \quad x' = L - x$$

Sustituyendo resultará

$$A'a' = \frac{I}{12} px^3x' + \frac{I}{24} px^4 = \frac{I}{12} pLx^3 - \frac{I}{24} px^4$$

$$B'b' = \frac{I}{24} pL^2x^2 + \frac{I}{48} pLx^2x' = \frac{3}{48} pL^2x^2 - \frac{I}{48} pLx^3$$

Por último, reemplazando estos valores en la expresión general de la flecha (fórmula a) resultará

$$f = -\frac{I}{48} \epsilon p (2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2),$$

resultado idéntico al que habíamos antes encontrado.

Observando que en el punto de empotramiento la tangente á la línea elástica es horizontal, y que lo propio sucede en el punto de dicha línea en que la flecha es máxima en valor absoluto, y recordando que el ángulo de dichas tangentes tiene por expresión

$$I = \epsilon X,$$

siendo  $X = B_1' - A_1'$  y también  $X = A' - B'$ , como hemos visto anteriormente, es claro que dicho punto de flecha máxima estará definido por la condición  $X = 0$ , ó por  $A' = B'$ .

Los valores de  $A'$  y  $B'$ , como es fácil deducir, tienen por ex-



presión

$$A' = \frac{1}{12} p x^2 (x + 3x')$$

$$B' = \frac{1}{16} p L (L + x') x$$

Igualando estas expresiones y substituyendo en vez de  $x'$ ,  $L - x$ , resulta la ecuación siguiente:

$$8x^2 - 15Lx + 6L^2 = 0,$$

es decir, la misma que anteriormente habíamos obtenido. Por consiguiente, ahora, como antes, encontraremos que el punto de flecha máxima, en valor absoluto, dista del extremo empotrado la cantidad muy aproximada  $x = 0,58L$ ; y que dicha flecha máxima tiene por valor, también aproximado,

$$f = -\frac{1}{184} p L^4$$

**277.** Los resultados obtenidos manifiestan que cuando la carga está uniformemente repartida, la resistencia del prisma empotrado por un extremo y apoyado por el otro, es la misma que la del prisma no empotrado, y que la rigidez del primero es cerca de vez y media mayor que la del segundo.

La ecuación de resistencia en el caso que acabamos de considerar es

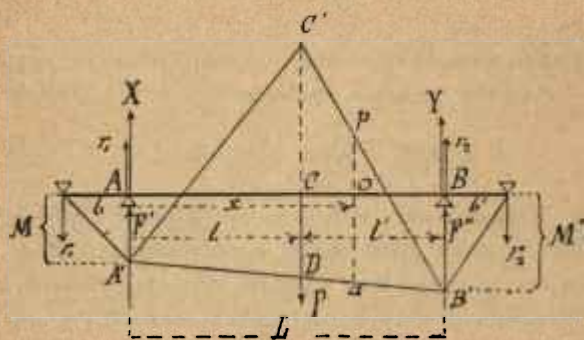
$$ZK = \frac{1}{8} p L^2.$$

**278. Prismas empotrados por sus dos extremos.—Carga única.**—Sabemos que un empotramiento equivale á dos apoyos consecutivos que desarrollan reacciones de sentido contrario.

Sean  $r_1$ ,  $r_2$  las fuerzas capaces de reemplazar á los empotramientos.

En los apoyos A y B (figura 120) se desenvolverán las reacciones totales  $F'$  y  $F''$ ; de suerte que el prisma estará en equilibrio bajo la acción simultánea de las fuerzas  $r_1$ ,  $F'$ ,  $P$ ,  $F''$ ,  $r_2$ .

*Fig. 120.*



Si descomponemos  $F'$  y  $F''$  en dos fuerzas, de las cuales una sea igual a  $r_1$  ó a  $r_2$ , según el extremo que se considere; llamando X é Y á las otras, tendremos

$$F' = X + r_1$$

$$F'' = Y + r_2$$

X, Y, serán los esfuerzos cortantes desarrollados respectivamente á la derecha de A y á la izquierda de B;  $r_1$ ,  $r_2$  serán, á su vez, los que se desarrollan al lado opuesto de tales puntos, y  $X + r_1$ ,  $Y + r_2$ , las reacciones totales desarrolladas en los mismos.

**279.** Puesto que los pares de empotramiento  $(r_1, -r_1)$   $(r_2, -r_2)$  dan una suma algebraica nula, las condiciones de equilibrio del prisma serán, tomando los momentos con relación al punto B:

$$1.^a \quad X + Y = P$$

$$2.^a \quad -r_1(b+L) + r_1L - Pl' + r_2b' + XL = 0;$$



y observando que en valor absoluto,  $b r_1 = M$ ,  $b' r_2 = M'$ , llamando  $M$  al momento en el empotramiento de la izquierda y  $M'$  al de la derecha, y prescindiendo por ahora de la cualidad negativa de estos momentos, tendremos

$$XL - Pl' - M + M' = 0$$

de donde

$$X = \frac{Pl' - (M' - M)}{L}$$

$$Y = \frac{Pl + (M' - M)}{L}$$

Pero  $\frac{Pl'}{L}$  y  $\frac{Pl}{L}$  no son otra cosa que las reacciones  $R$  y  $R'$  que se desarrollarían en  $A$  y en  $B$ , si la viga estuviera sencillamente apoyada en tales puntos; por lo tanto, resultará

$$X = R - \frac{M' - M}{L}$$

$$Y = R' + \frac{M' - M}{L}$$

**280.** La expresión general del momento de flexión para un punto  $O$  del tramo  $CB$ , definido por su distancia  $x$  al punto  $A$ , es

$$m_2 = -M + Xx - P(x - l)$$

Reemplazando el valor de  $X$ , resulta

$$m_2 = -M + \frac{Pl'x}{L} - \frac{(M' - M)x}{L} - P(x - l),$$

ó en función de  $R$ ,

$$m_2 = Rx - P(x - l) - \left( M + \frac{(M' - M)x}{L} \right)$$

Observando que, como hemos dicho,  $R$  es la reacción que se desarrollaría en  $A$  si el prisma estuviera apoyado en  $A$  y en  $B$ ,

y que  $Rx - P(x - l)$  es el momento de flexión que en tal supuesto se desenvolvería en O, y que vamos á llamar  $m'$ , tendremos

$$m_s = m' - \left( M + \frac{(M' - M)x}{L} \right)$$

**281.** Suponiendo, como indica la figura 120, que en valor absoluto  $M' > M$ , es muy fácil demostrar que la magnitud  $Oa$  tiene precisamente por expresión

$$Oa = M + \frac{(M' - M)x}{L};$$

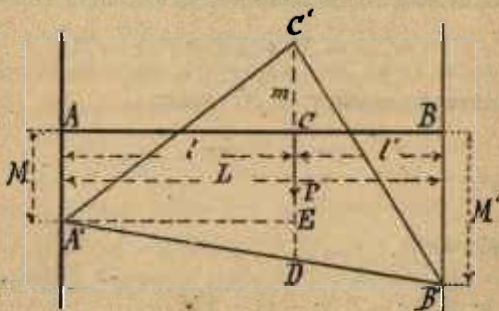
y como, por otra parte, la de  $ap$  es

$$ap = Rx - P(x - l) = m',$$

resulta que el momento  $Op$  de flexión, para un punto cualquiera del prisma, es igual en magnitud y en signo á la diferencia entre los momentos que representan los diagramas  $A'C'B'$  y  $AA'B'B$ , tomando como minuyendo el del primero y como sustraendo el del segundo.

Como el diagrama triangular  $A'C'B'$  representa, con rela-

*Fig. 121.*



ción á la recta  $A'B'$ , el de momentos de flexión del prisma, supuesto apoyado en A y en B, la cuestión queda reducida al tra-

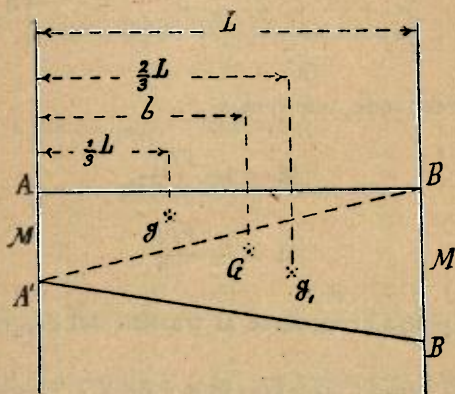


zudo del otro diagrama, el cual depende del conocimiento de los momentos  $M$  y  $M'$  en los empotramientos.

**282.** Si llamamos  $B$  al área del diagrama  $AA'B'B$  (figura 121),  $A$  á la del  $A'C'B'$ ,  $b$  al brazo de palanca de la primera y  $a$  al de la segunda, con relación ambos al punto  $A$ , es muy fácil deducir (véanse las figuras 122 y 123) que

$$Bb = \frac{1}{6} L^2 (M + 2M') \quad \text{y} \quad Aa = \frac{1}{6} Pl' (L + l);$$

*Fig. 122.*



pero como los puntos  $A$  y  $B$  están de nivel y en ambos la tangente á la elástica es horizontal, deberá verificarse, como sabemos, que  $Bb = Aa$ , y por tanto que

$$L^2 (M + 2M') = Pl' (L + l) \quad (1).$$

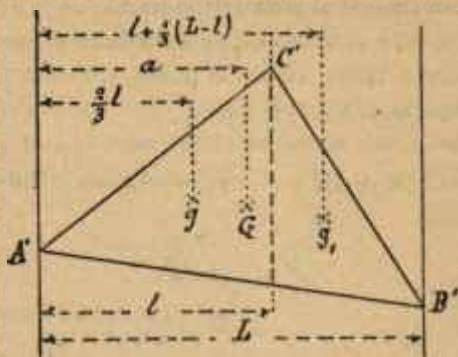
Del propio modo, si tomáramos los momentos de las áreas  $A$  y  $B$  con relación al punto  $B$ , hallaríamos que

$$L^2 (M' + 2M) = Pl' (L + l') \quad (2).$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) con respecto á  $M$  y  $M'$ ,

y poniendo de manifiesto la cualidad negativa que á estos mo-

*Fig. 123.*



mentos corresponde, tendremos,

$$M = - \frac{Pl l'^2}{L^2}$$

$$M' = - \frac{Pl'^2 l}{L^2}$$

con lo cual podrá procederse al trazado del diagrama AA'B'B,

**283.** Por último las expresiones de X é Y en función de P, puesto que en valor absoluto  $M' - M = \frac{Pl l'}{L^2} (l - l')$ , serán:

$$X = P \frac{l'^3 + 3 l l'^2}{L^3};$$

$$Y = P \frac{l^3 + 3 l^2 l'}{L^3};$$

expresiones cuya suma es P, como habíamos indicado al principio y es fácil comprobar.

**284.** Como las magnitudes de  $r_1$  y  $r_2$  dependen de las que



tengan los brazos de palanca  $b$  y  $b'$ , es decir de la longitud de las partes empotradas, se comprende todo el interés que debe haber en que tales partes sean bastante largas para que aquellas fuerzas, y como consecuencia las  $F' = X + r_1$  y  $F'' = Y + r_2$ , no alcancen valores tales que puedan ocasionar la rotura de la fábrica.

**285.** Para calcular el momento  $CC' = m$  (fig. 121) en el punto de aplicación de la carga, observaremos que  $m = DC' - DC$ .

Desde luego

$$DC' = \frac{Pl'l'}{L}.$$

En cuanto á  $DC$ , vemos que vale

$$DC = M + ED;$$

pero como, según es fácil demostrar,

$$ED = \frac{(M' - M)l}{L},$$

resultará

$$DC = M + \frac{(M' - M)l}{L} = \frac{Ml' + M'l}{L},$$

y substituyendo en vez de  $M$  y  $M'$  sus valores absolutos, será

$$DC = \frac{Pl'l'(l'^2 + l^2)}{L^3}$$

de donde

$$m = \frac{Pl'l'}{L} - \frac{Pl'l'(l'^2 + l^2)}{L^3}$$

ó bien

$$m = 2 \frac{Pl'l'^2}{L^3}.$$

Conocidos los tres momentos máximos en valor absoluto, así como los esfuerzos cortantes extremos  $X$ ,  $Y$ , no hay dificultad

en construir los diagramas correspondientes, como se indica en la figura.

**286.** Veamos ahora á qué distancia  $l$  debe encontrarse la carga  $P$  para que en el empotramiento de la izquierda, por ejemplo, se desarrolle el mayor momento de flexión en valor absoluto.

Prescindiendo, pues, del signo, como

$$M = \frac{Pl'^2}{L^2} = \frac{Pl(L-l)^2}{L^2}$$

el máximo de  $M$  corresponderá al máximo de la función

$$f(l) = l^3 - 2Ll^2 + L^2l,$$

siendo  $l$  la variable independiente.

Las condiciones del máximo son  $f'(l) = 0$ ,  $f''(l) < 0$ .

Ahora bien

$$f'(l) = 3l^2 - 4Ll + L^2$$

$$f''(l) = 6l - 4L.$$

Igualando á 0 la primera derivada, resulta

$$l = \frac{2L \pm L}{3} \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} l_1 = L \\ l_2 = \frac{1}{3}L \end{array} \right.$$

Como según esto

$$f''(L) = 2L > 0$$

$$f''\left(\frac{L}{3}\right) = -2L < 0$$

el valor de  $l$  que corresponde al máximo de  $M$  es  $l_2 = \frac{1}{3}L$ ; de suerte que en el empotramiento, el momento es máximo en valor absoluto, cuando la carga  $P$  dista de él el tercio de la lon-



gitud del prisma, ó más propiamente, el tercio de la luz salvada por el prisma empotrado.

En tal caso, como es fácil deducir, los tres momentos  $M$ ,  $M'$  y  $m$  toman los siguientes valores particulares:

$$M = -\frac{4}{27} PL;$$

$$M' = -\frac{2}{27} PL;$$

$$m = +\frac{8}{81} PL.$$

**287.** El momento  $m$  en el punto de aplicación de la carga, es máximo cuando  $l = l'$ , es decir, cuando aquella ocupa el punto medio del prisma.

Entonces los tres momentos adquieren los siguientes valores:

$$M = M' = -\frac{1}{8} PL$$

$$m = +\frac{1}{8} PL,$$

es decir, que en este caso particular los tres momentos son iguales en valor absoluto.

**288.** Hemos visto que la expresión general del momento de flexión en el tramo CB, es decir, para un punto cualquiera situado á la derecha de la carga  $P$ , es

$$m_2 = \frac{Pl'x}{L} - P(x-l) - \left( M + \frac{(M' - M)x}{L} \right)$$

La expresión general del momento de flexión en el tramo AC, que llamaremos  $m_1$ , es decir, para todo punto del prisma situado á la izquierda de  $P$ , es la siguiente, como es fácil deducir:

$$m_1 = \frac{Pl'x}{L} - \left( M + \frac{(M' - M)x}{L} \right)$$

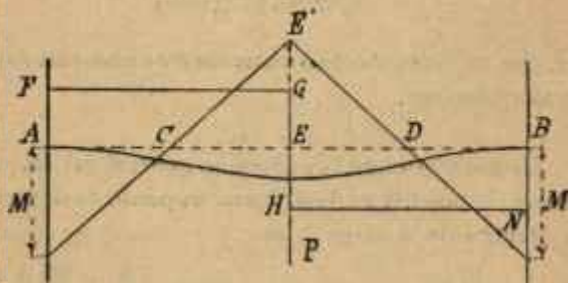
Por tanto, si sustituimos en las expresiones precedentes, en lugar de  $M$  y  $M'$  su valor común absoluto  $\frac{1}{8} PL$ , tendremos, para el caso particular en que la carga esté en el punto medio del prisma,

$$m_1 = -\frac{1}{8} PL + \frac{1}{2} Px$$

$$m_2 = +\frac{3}{8} PL - \frac{1}{2} Px$$

289. La primera expresión se anula para  $x = \frac{1}{4} L$ , y la segunda también se anula para  $x = \frac{3}{4} L$ , lo que prueba que hay dos puntos de inflexión en el prisma, situados á los cuartos de su longitud, á contar de los empotramientos más próximos.

Fig. 124.



Para  $x = 0$ , en la primera y  $x = L$ , en la segunda, se obtiene el valor común

$$M = M' = -\frac{1}{8} PL.$$

Finalmente para  $x = \frac{1}{2} L$ , en ambas expresiones, resulta



también el valor común

$$m = \frac{1}{8} PL;$$

valores que concuerdan con los que ya habíamos encontrado.

Los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos de flexión, así como la forma general de la línea elástica se indican en la figura 124.

**290.** La flecha máxima en valor absoluto, en el caso de que la carga ocupe el punto medio, según puede deducirse fácilmente, es

$$f = - \frac{1}{192} \epsilon PL^3.$$

**291.** De lo expuesto se deduce que la resistencia, lo mismo que la rigidez de un prisma empotrado por sus extremos y cargado en su punto medio, es cuatro veces mayor que la resistencia y rigidez del mismo prisma colocado sobre dos apoyos extremos; pero es necesario advertir que en la práctica es difícil lograr que los empotramientos sean perfectos, como supone el estudio precedente.

**292. Carga uniformemente repartida.**—Suponiendo el prisma empotrado horizontalmente, claro es que los momentos en los puntos de empotramiento serán iguales entre sí.

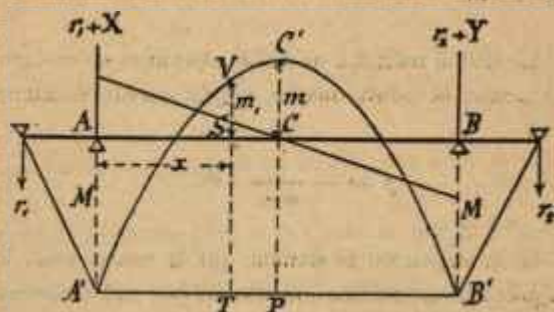
Siguiendo un procedimiento análogo al expuesto en el caso de que la carga fuera única, veremos que los esfuerzos cortantes en los empotramientos son  $X = Y = \frac{1}{2} pL$ .

Como los empotramientos se encuentran en condiciones simétricas, los momentos que en ellos se desarrollen serán iguales entre sí, serán negativos y su valor absoluto lo representaremos por  $M$ .

Si una vez calculado el valor  $M$ , tomáramos  $AA' = BB' = M$  y trazáramos la parábola  $A'C'B'$  (figura 125), de manera que

fuese  $PC' = \frac{1}{8} pL^2$ , de cuya suerte tendríamos así que dicha curva, con relación á la recta  $A'B'$ , representaría el diagrama de momentos de flexión, bajo el supuesto de que el prisma estuvie-

*Fig. 125.*



ra apoyado en A y B, veremos que el momento de flexión en un punto cualquiera de abscisa  $x$  está definido por la diferencia entre las ordenadas del diagrama parabólico  $A'C'B'$  y el rectangular  $AA'B'B$ ; puesto que la expresión general de dicho momento es

$$m_1 = \frac{1}{2} pLx - \frac{1}{2} px^2 - M \quad (1)$$

y  $\frac{1}{2} pLx - \frac{1}{2} px^2$ , no es otra cosa que el valor de la ordenada TV de dicho diagrama parabólico, así como  $M = TS$  es la ordenada del diagrama rectangular.

**293.** El trazado de ambos diagramas depende del conocimiento de los puntos  $A'$ ,  $B'$ , ó lo que es lo mismo, del valor de  $M$ .

Si representamos por  $A$  el área del diagrama parabólico, por  $B$  la del rectangular y por  $a$  y  $b$  los brazos de palanca de dichas áreas con relación á cualquiera de los extremos empotrados del



prisma, es claro que será  $a = b$  y además  $A = B$  por suponer al mismo nivel los puntos de empotramiento, donde las tangentes á la línea elástica son horizontales, bajo el supuesto de que tales empotramientos sean perfectos.

Ahora bien; el área  $A$  del segmento parabólico  $A'C'B'$  tiene por expresión  $\frac{2}{3} A'B' \times PC'$ ; y como  $A'B' = L$  y  $PC' = \frac{1}{8} pL^2$ , será

$$A = \frac{2}{3} L \times \frac{1}{8} pL^2 = \frac{1}{12} pL^3;$$

y puesto que el área  $B$  del rectángulo  $AA'B'B$  vale

$$B = ML$$

tendremos  $ML = \frac{1}{12} pL^3$ , de donde  $M = \frac{1}{12} pL^2$ ; y poniendo en evidencia la cualidad negativa de este momento, será

$$M = - \frac{1}{12} pL^2.$$

**294.** En cuanto al momento máximo correspondiente al punto medio, tenemos

$$m = PC' - PC = \frac{1}{8} pL^2 - M$$

ó bien

$$m = \frac{1}{24} pL^2.$$

**295.** Si en la expresión (1) substituímos el valor absoluto de  $M$  que acabamos de encontrar, la expresión general del momento de flexión  $m_1$  en un punto cualquiera del prisma, definido por su distancia  $x$  al extremo  $A$ , será

$$m_1 = - \frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{2} pLx - \frac{1}{12} pL^2 \quad (2)$$

**296.** Si en esta expresión hacemos  $x = 0$ , ó  $x = L$ , hallaremos, como antes, el valor de  $M = -\frac{1}{12} pL^2$ . Para  $x = \frac{1}{2} L$ , resultará el valor de  $m = \frac{1}{24} pL^2$ .

Igualando á 0 la expresión (2) y suprimiendo el factor común  $\frac{1}{2} p$  tendremos la ecuación

$$x^2 - Lx + \frac{1}{6} L^2 = 0$$

de donde

$$x = \frac{1}{6} L (3 \pm \sqrt{3})$$

y separando los dos valores de  $x$ , que llamaremos  $x_1, x_2$ , tendremos

$$x_1 = \frac{1}{6} L (3 - \sqrt{3}), \quad x_2 = \frac{1}{6} L (3 + \sqrt{3});$$

que son las expresiones de las distancias al extremo A, de los puntos del prisma en que la flexión es nula, y nos dice, como es fácil comprobar, que los puntos de inflexión se hallan muy próximamente á los quintos de la longitud del prisma, á contar del empotramiento más próximo.

**297.** La expresión general de la flecha, y por tanto la flecha máxima en valor absoluto, es fácil de hallar.

En efecto; las ecuaciones de la elástica son:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{2} pLx - \frac{1}{12} pL^2 \quad (1)$$

$$EI \left( \frac{dy}{dx} + C \right) = -\frac{1}{6} px^3 + \frac{1}{4} pLx^2 - \frac{1}{12} pL^2 x \quad (2)$$

$$EI (y + Cx + C') = -\frac{1}{24} px^4 + \frac{1}{12} pLx^3 - \frac{1}{24} pL^2 x^2 \quad (3)$$



Como para  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  [ecuación (2)] y además,  $y = 0$  [ecuación (3)], las constantes arbitrarias  $C$  y  $C'$  serán nulas, por lo tanto la ecuación general de la elástica será

$$y = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{24} p x^4 + \frac{1}{12} p L x^3 - \frac{1}{24} p L^2 x^2 \right)$$

ó bien

$$y = -\frac{p}{EI} \left( \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{12} L x^3 + \frac{1}{24} L^2 x^2 \right) \quad (a)$$

Aun cuando, por razón de simetría, puede afirmarse que la flecha máxima en valor absoluto corresponde al punto medio del prisma, es fácil demostrarlo, por la condición del máximo de la función de  $x$  que figura dentro del paréntesis de la expresión (a).

Haciendo, pues,  $x = \frac{1}{2} L$ , en dicha expresión, se encontrará

$$f = -\frac{1}{384} \varepsilon p L^4.$$

**298.** Si quisiéramos comprobar este resultado, aplicando el procedimiento de las áreas de momentos, procederíamos del modo siguiente.

Sean:  $A' = \frac{1}{2} A$ ,  $B' = \frac{1}{2} B$ , las áreas de momentos que hay que considerar y  $a'$ ,  $b'$ , sus brazos de palanca con relación al punto medio del prisma, donde queremos calcular la flecha.

La expresión de esta será

$$f = \varepsilon (A'a' - B'b')$$

Como tenemos

$$\begin{aligned} A &= B = ML \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} A = A' = \frac{1}{24} p L^3 \\ \frac{1}{2} B = B' = \frac{1}{24} p L^3 \end{array} \right\} \\ M &= \frac{1}{12} p L^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} A = A' = \frac{1}{24} p L^3 \\ \frac{1}{2} B = B' = \frac{1}{24} p L^3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

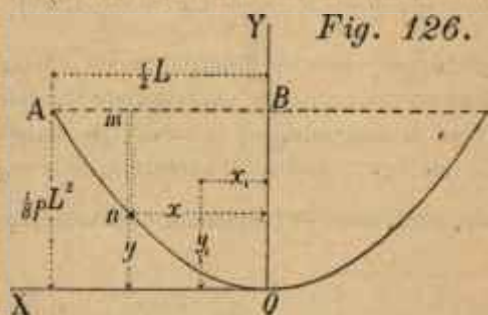
sólo nos resta calcular  $a'$ .

Recordaremos para esto, que las coordenadas del centro de gravedad de una superficie cualquiera, tienen por expresión

$$x_i = \frac{\iint x dx dy}{S}, \quad y_i = \frac{\iint y dx dy}{S},$$

siendo  $S$  el área de la superficie que se considera.

La superficie de que ahora se trata es el segmento parabólico ABO (figura 126).



La ecuación de la parábola es  $y = \frac{1}{2} p x^2$ .

El área de dicho segmento es  $S = \frac{1}{24} p L^3$ .

La integral doble  $\iint x dx dy$ , que es la única que nos interesa, toma en este caso la siguiente forma:

$$\int_0^{1/2 L} x dx \int_{1/2 p x^2}^{1/2 p L^2} dy = \int_0^{1/2 L} x dx \left[ \frac{1}{8} p L^2 - \frac{1}{2} p x^2 \right]$$

ó bien

$$\frac{1}{8} p L^2 \int_0^{1/2 L} x dx - \frac{1}{2} p \int_0^{1/2 L} x^3 dx = \frac{1}{128} p L^3.$$



Por lo tanto resultará

$$x_1 = a' = \frac{\frac{1}{128} pL^4}{\frac{1}{24} pL^3} = \frac{3}{16} L.$$

Sustituyendo los valores de  $A'$ ,  $B'$ ,  $a'$ ,  $b'$ , en la expresión de  $f'$  tendremos por último:

$$f = -\varepsilon \left( \frac{1}{24} pL^3 \times \frac{1}{4} L - \frac{1}{24} pL^3 \times \frac{3}{16} L \right)$$

ó bien

$$f = -\frac{1}{384} \varepsilon pL^4,$$

valor idéntico al que habíamos encontrado anteriormente.

**299.** Resulta del estudio que precede, que la resistencia de un prisma empotrado por sus extremos y sometido á una carga uniformemente repartida, es vez y media mayor y su deformación cinco veces menor que las correspondientes de un prisma igual apoyado en sus dos extremos de nivel.

Y en efecto; para el prisma apoyado la flecha tenía por expresión  $f' = -\frac{5}{192} \frac{pL^4}{ZEH}$ ; y como  $\varepsilon = \frac{2}{ZEH}$ , y la flecha del prisma empotrado puede, por tanto, escribirse bajo la forma  $f = -\frac{1}{192} \frac{pL^4}{ZEH}$ , se ve que  $f = \frac{1}{5} f'$ , como habíamos indicado.

## FLEXIÓN DE LOS PRISMAS APOYADOS EN MÁS DE DOS PUNTOS

### TEOREMAS FUNDAMENTALES

#### *Teorema de los tres momentos*

**300. Caso en que los apoyos están al mismo nivel.**—El teorema de los tres momentos es una relación muy notable que se verifica entre los momentos en tres apoyos cualesquiera, pero consecutivos, de un prisma cuyos tramos son solidarios, y las áreas de momentos correspondientes á dichos tramos, considerándolos como si fueran independientes, ó, lo que es lo mismo, como si el prisma se cortara por los puntos de apoyo.

Dicha relación es como sigue.

**301.** *Si  $M, M', M''$  son los valores absolutos de los momentos en tres apoyos consecutivos de un prisma, de tramos solidarios;  $l, l'$  las longitudes de dichos tramos;  $A, B$  las áreas de momentos correspondientes á tales tramos, supuestos independientes;  $a, b$ , los brazos de palanca de dichas áreas, con relación á los apoyos extremos, de los tres que se consideran, se verifica entre dichas cantidades la relación siguiente;*

$$Ml + 2M'(l + l') + M''l' = 6\left(\frac{a}{l}A + \frac{b}{l'}B\right)$$

Supongamos que el diagrama de momentos de flexión sea el  $A'mB'nC'$  (figura 127). El diagrama  $A'mB'$  cuya área es  $A$ , representa con relación á la recta  $A'B'$ , como sabemos, el de momentos del tramo  $AB$ , bajo la hipótesis de que estuviera apoyado en  $A$  y  $B$ .

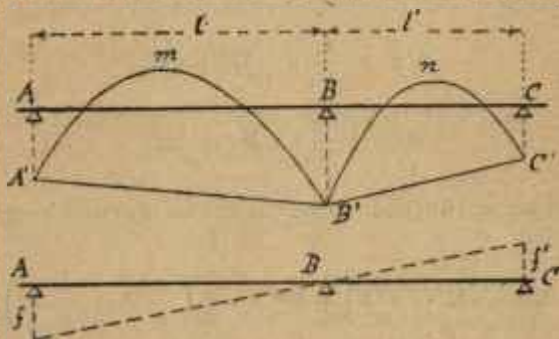


Lo mismo puede decirse acerca del diagrama  $B'nC'$ , cuya área la representamos por  $B$ , respecto á la recta  $B'C'$ .

Los diagramas  $AA' B'B$  y  $BB' C'C$ , dependen únicamente de los valores particulares de los momentos  $M = AA'$ ,  $M' = BB'$ ,  $M'' = CC'$  en los tres apoyos consecutivos  $A, B, C$ ; y es claro que el momento de flexión en cualquier punto del prisma vendrá dado en magnitud y en signo por la diferencia de las ordenadas correspondientes de dichos diagramas, tomando como minuyendo la del primero y como sustrayendo la del segundo.

Sean  $A'$  y  $B'$  las áreas de los diagramas  $AA' B'B$  y  $BB' C'C$

*Fig. 127.*



$a', b'$ , sus brazos de palanca, con relación al apoyo  $A$  para la primera y con relación al apoyo  $B$  para la segunda.

Las áreas de momentos efectivas sobre los dos tramos que se consideran serán;  $A - A'$ , para el  $AB$  y  $B - B'$ , para el  $BC$ .

Por consiguiente, representando por  $f$  y  $f'$  las distancias verticales, en valor absoluto, de los apoyos extremos á la tangente, á la línea elástica en el apoyo intermedio, tendremos

$$f = \varepsilon (A'a' - Aa) \quad f' = \varepsilon (Bb - B'b')$$

y además

$$\frac{f}{f'} = \frac{l}{l'};$$

de donde

$$\frac{l}{l'} = \frac{A'a' - Aa}{Bb - B'b'};$$

y también

$$(A'a' - Aa)l' = (Bb - B'b')l \quad (a)$$

Pero los momentos  $A'a'$ ,  $B'b'$  tienen los siguientes valores:

$$A'a' = \frac{1}{2} M l \times \frac{1}{3} l + \frac{1}{2} M' l \times \frac{2}{3} l$$

$$B'b' = \frac{1}{2} M'' l' \times \frac{1}{3} l' + \frac{1}{2} M' l' \times \frac{2}{3} l'$$

ó bien

$$A'a' = \frac{1}{6} l^2 (M + 2M')$$

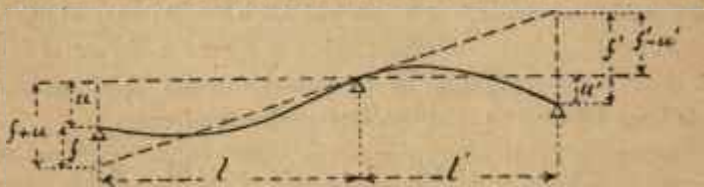
$$B'b' = \frac{1}{6} l'^2 (M'' + 2M');$$

por lo tanto sustituyendo estos valores en la ecuación (a) resulta el teorema

$$Ml + 2M'(l + l') + M''l' = 6 \left( \frac{a}{l} A + \frac{b}{l'} B \right)$$

como queríamos demostrar.

*Fig. 128.*



**302. Caso en que los apoyos no están al mismo nivel.**—Sean (figura 128)  $u, u'$ , las diferencias de nivel entre



los apoyos extremos y el intermedio. Es claro que tendremos

$$\frac{f+u}{f'-u'} = \frac{l}{l'}$$

y en virtud de las relaciones anteriores

$$f + u = \varepsilon (A'a' - Aa) + u$$

$$f' - u' = \varepsilon (Bb - B'b') - u'$$

de donde

$$\frac{\varepsilon (A'a' - Aa) + u}{\varepsilon (Bb - B'b') - u'} = \frac{l}{l'}$$

y también

$$[(A'a' - Aa)\varepsilon + u] l' = [(Bb - B'b')\varepsilon - u'] l$$

dividiendo por  $ll'\varepsilon$  resultará

$$\frac{A'a'}{l} - \frac{a}{l} A + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{u}{l} = \frac{b}{l'} B - \frac{B'b'}{l'} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{u'}{l'}$$

ó bien

$$\frac{A'a'}{l} + \frac{B'b'}{l'} = \frac{a}{l} A + \frac{b}{l'} B - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{u}{l} + \frac{u'}{l'} \right)$$

Sustituyendo en vez de  $A'a'$  y  $B'b'$  sus expresiones, tendremos finalmente

$$Ml + 2M'(l+l') + M''l' = 6 \left[ \frac{a}{l} A + \frac{b}{l'} B - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{u}{l} + \frac{u'}{l'} \right) \right],$$

que es la relación que corresponde al caso que acabamos de considerar.

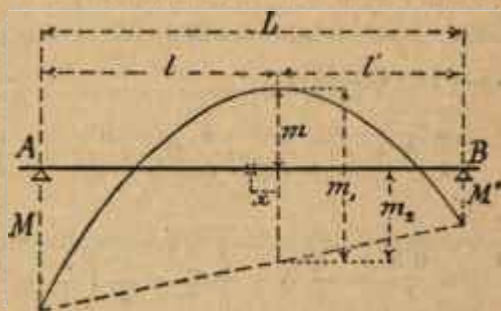
**303. Teoremas relativos al momento intermedio.**—Entre los momentos correspondientes á dos apoyos consecutivos existe por lo común un momento máximo intermedio, cuya situación y cuyo valor se determinan por medio de los teoremas siguientes, en el caso de que las cargas estén uniformemente repartidas.

**304. TEOREMA I.**—*La distancia entre el punto medio de un tramo á la ordenada que representa el momento máximo intermedio, es igual á la diferencia de los momentos en los apoyos, dividida por la carga total que actúa sobre el tramo que se considera.*

Sea  $m$  un momento intermedio cualquiera, cuya abscisa con relación al punto medio del tramo sea  $x$  (figura 129).

Ya hemos visto anteriormente que dicho momento puede considerarse como la diferencia de los momentos  $m_1$ ,  $m_2$ , co-

*Fig. 129.*



respondientes al punto que se considera, debidos á la acción de la carga y á las reacciones en los apoyos; de manera que tendremos

$$m = m_1 - m_2.$$

Ahora bien, conforme á lo que queda establecido, sabemos que

$$m_1 = \frac{1}{2} p l l' = \frac{1}{2} p \left( \frac{1}{2} L + x \right) \left( \frac{1}{2} L - x \right) =$$

$$\frac{1}{2} p \left( \frac{1}{4} L^2 - x^2 \right),$$



$$m_2 = \frac{I}{L} (M' + M'l) = \frac{M(\frac{1}{2}L - x)}{L} + \frac{M'(\frac{1}{2}L + x)}{L} =$$

$$\frac{M + M'}{2} - \frac{x}{L} (M - M').$$

Por lo tanto,

$$m = \left( \frac{M - M'}{L} - \frac{px}{2} \right) x + \frac{pL^2}{8} - \frac{M + M'}{2} \quad (1)$$

Es claro que este momento será un máximo cuando lo sea el primer término de la expresión (1), único que depende de la variable  $x$ ; pero como dicho primer término es un producto de dos factores, cuya suma resulta constante con sólo multiplicar el segundo factor por  $\frac{1}{2}p$ , es evidente que la condición del máximo será

$$\frac{M - M'}{L} - \frac{px}{2} = \frac{px}{2}$$

de donde

$$x = \frac{M - M'}{pL} \quad (2)$$

como queríamos demostrar.

**305. TEOREMA II.**—*Suponiendo el tramo empotrado en el punto en que el momento intermedio es máximo, éste es igual á la diferencia entre el momento originado por la carga aplicada sobre una de las porciones de dicho tramo y el momento en el apoyo correspondiente.*

En efecto; eliminemos, por ejemplo,  $M'$  entre las ecuaciones (1) y (2), y sustituyamos luego en vez de  $x$  su valor en función de  $L$  y de  $l$ .

De la segunda se deduce

$$M' = M - pLx.$$

Sustituyendo en la primera, tendremos

$$m = \frac{1}{2} p \left[ x(x + L) + \frac{1}{4} L^2 \right] - M$$

y sustituyendo en vez de  $x$  su valor  $l - \frac{1}{2} L$ , resultará finalmente

$$m = \frac{1}{2} p l^2 - M,$$

según queríamos demostrar.

Como  $l = \frac{1}{2} L + x$ , esta fórmula puede escribirse del siguiente modo:

$$m = \frac{1}{2} p \left( \frac{1}{2} L + x \right)^2 - M,$$

y análogamente encontraríamos

$$m = \frac{1}{2} p \left( \frac{1}{2} L - x \right)^2 - M'.$$

**306.** Si uno cualquiera de los momentos en los apoyos fuese nulo, por ejemplo el  $M'$ , los valores de  $x$  y de  $m$  se reducirían á los siguientes :

$$x = \frac{M}{pL}$$

$$m = \frac{p}{2} \left( \frac{L}{2} - x \right)^2$$

No hay para qué decir que la abscisa  $x$  ha de contarse desde el punto medio del tramo hacia el apoyo en el cual el momento es nulo.

### **307. Teoremas relativos al esfuerzo cortante.—**

La determinación de los diagramas de esfuerzos cortantes, necesaria en la teoría de la flexión de cierto género de vigas, se consigue por medio de los siguientes teoremas.



308. TEOREMA I.—*La inclinación sobre la horizontal de la tangente al diagrama de momentos, en un punto cualquiera, representa el esfuerzo cortante en dicho punto.*

Sea AB (figura 130) el diagrama de momentos de flexión y A'B' el de esfuerzos cortantes, considerados desde un punto en que el momento de flexión sea nulo.

Hemos visto en su lugar oportuno que en este caso un momento cualquiera M está representado por el área correspondiente S del

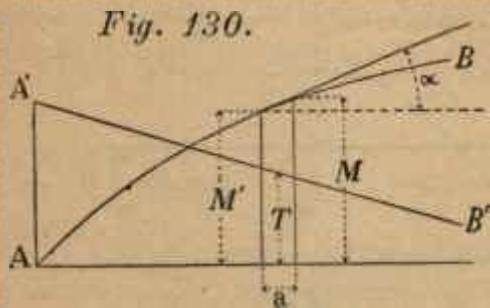


diagrama de esfuerzos cortantes.

Si M' es un momento de flexión muy próximo al primero y S' el área correspondiente que lo

representa, y llamamos  $a$  la distancia entre las ordenadas M y M' y T el esfuerzo cortante medio, tendremos

$$M - M' = S - S' = aT.$$

Pero

$$M - M' = a \operatorname{tg} \alpha$$

luego

$$T = \operatorname{tg} \alpha$$

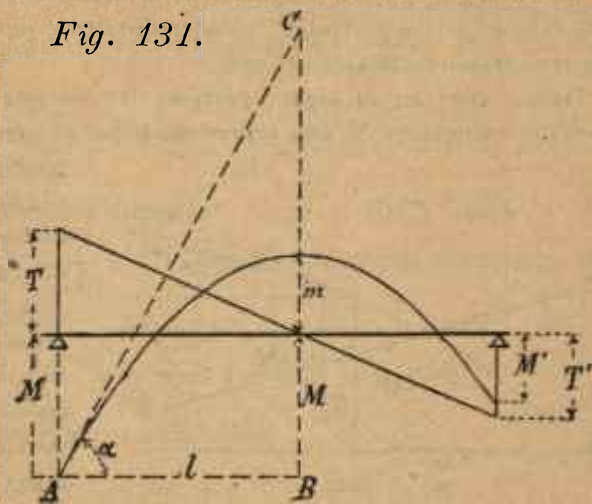
como queríamos demostrar.

309. TEOREMA II.—*El esfuerzo cortante sobre uno de los lados de un apoyo es igual á la carga que actúa en la porción de tramo comprendida entre el apoyo y el punto en que el momento intermedio del lado que se considera es máximo.*

Según el teorema anterior tenemos  $T = \operatorname{tg} \alpha$  (figura 131).

Además, como el diagrama de momentos de flexión es una parábola, y en esta curva la subtangente es doble de la abscisa

*Fig. 131.*



del punto de contacto, tendremos en el triángulo rectángulo ABC:

$$BC = 2(M + m)$$

$$AB = l$$

$$2(M + m) = l \operatorname{tg} \alpha$$

de donde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(M + m)}{l}$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{2(M + m)}{l}$$

Ahora bien; como hemos visto que

$$m = \frac{1}{2} p l^2 - M,$$



de donde

$$M + m = \frac{pl^2}{2},$$

resultará finalmente

$$T = pl,$$

lo cual demuestra el teorema.

**310.** De los teoremas que preceden, haremos uso al estudiar algunos casos particulares de la resistencia á la flexión de vigas colocadas sobre tres y cuatro apoyos.

#### PRISMAS COLOCADOS SOBRE TRES APOYOS.

**311. Carga uniformemente repartida.**—Descansando los extremos del prisma libremente en los correspondientes apoyos, los momentos en dichos puntos son nulos. Designando por  $M$  el momento en el apoyo intermedio, el teorema de los tres momentos se reduce á

$$M(l + l') = 3 \left( \frac{a}{l} A + \frac{b}{l'} B \right).$$

Ahora bien; recordando que  $A$  y  $B$  representan respectivamente las áreas de los diagramas parabólicos correspondientes á la carga uniformemente repartida que obra sobre cada uno de los tramos, considerados independientemente; y que  $a$  y  $b$  son los brazos de palanca de dichas áreas con relación á los apoyos extremos, es claro que

$$A = \frac{1}{12} pl^2; \quad a = \frac{1}{2} l$$

$$B = \frac{1}{12} pl'^2; \quad b = \frac{1}{2} l';$$

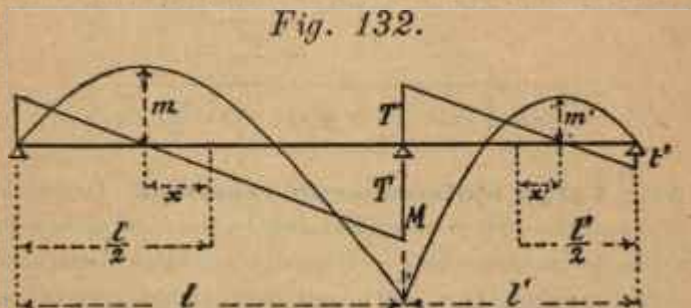
y sustituyendo tendremos

$$M(l + l') = 3 \left( \frac{\frac{1}{2}l}{l} \times \frac{1}{12} p l^3 + \frac{\frac{1}{2}l'}{l'} \times \frac{1}{12} p l'^3 \right) = \frac{1}{8} p (l^3 + l'^3)$$

y poniendo en evidencia la cualidad negativa que corresponde al momento  $M$ , tendremos

$$M = - \frac{1}{8} p \frac{l^3 + l'^3}{l + l'}$$

**312.** Todos los demás datos necesarios para construir los



diagramas se deducen fácilmente de los teoremas generales que preceden.

Así resulta (figura 132):

Para las abscisas de los momentos máximos intermedios

$$x = \frac{M}{pl}$$

$$x' = \frac{M}{pl'}$$

Para los valores de dichos momentos

$$m = \frac{1}{2} p \left( \frac{1}{2} l - x \right)^2$$

$$m' = \frac{1}{2} p \left( \frac{1}{2} l' - x' \right)^2$$



**313.** Para los esfuerzos cortantes ó reacciones en los apoyos extremos

$$t = p \left( \frac{1}{2} l - x \right).$$

$$t' = p \left( \frac{1}{2} l' - x' \right)$$

Y finalmente, para los esfuerzos cortantes que se engendran á uno y otro lado del apoyo intermedio,

$$T = p \left( \frac{1}{2} l + x \right)$$

$$T' = p \left( \frac{1}{2} l' + x' \right),$$

de donde se deduce, que la reacción en dicho apoyo será

$$R = T + T'.$$

**314.** Suponiendo constante la cantidad  $l + l'$ , es decir cuando no varía la distancia de los apoyos extremos, el valor del momento en el apoyo intermedio es tanto mayor cuanto mayor sea la diferencia entre  $l$  y  $l'$ , y alcanza su valor mínimo, como fácilmente se desprende, en el caso en que  $l = l'$ ; de donde resulta que el caso más favorable de la flexión de una viga de dos tramos es aquel en que estos sean iguales entre sí.

**315.** Conviene también observar que á medida que disminuye la longitud de uno de los tramos, decrece la reacción del apoyo extremo correspondiente, la cual podrá llegar á ser nula ó negativa, y como este último caso no puede admitirse en la práctica, porque entonces dicho apoyo sería completamente inútil, es necesario determinar la longitud mínima del tramo que corresponde cuando sea nula la reacción del apoyo extremo.

Para esto, en la expresión de  $t'$

$$t' = p \left( \frac{1}{2} l' - x' \right)$$

hagamos  $t' = 0$ , y resultará

$$x' = \frac{1}{2} l'$$

de donde

$$\frac{1}{2} l' = \frac{M}{pl'}$$

y

$$M = \frac{pl'^2}{2}$$

Pero como hemos visto que

$$M = \frac{1}{8} p \frac{l^3 + l'^3}{l + l'},$$

resultará

$$\frac{pl'^2}{2} = \frac{1}{8} p \frac{l^3 + l'^3}{l + l'}$$

Hagamos  $l + l' = L$  y tendremos

$$4l'^2 = \frac{(L - l')^3 + l'^3}{L},$$

ó bien

$$l'^2 + 3Ll' - L^2 = 0,$$

de donde

$$l' = \frac{1}{2} L (\sqrt{13} - 3) = 0,3 L,$$

próximamente.



**316. Caso particular en que sean iguales ambos tramos.**—Las fórmulas que corresponden á este caso se deducen desde luego de las generales que anteceden; y considerando que los dos tramos de que ahora se trata son idénticos, es claro que cada uno de ellos viene á constituir un prisma empotrado horizontalmente por un extremo y apoyado por el otro, por lo cual las fórmulas que ahora estableceremos pudieran también obtenerse considerándolos en el caso que acabamos de indicar.

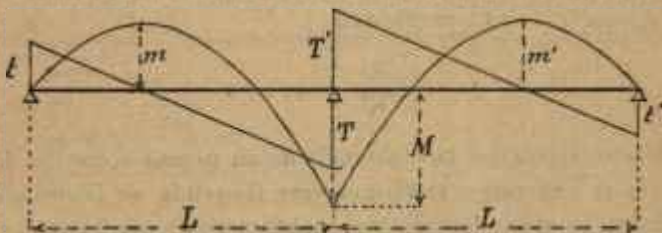
**317.** De todos modos, y haciendo  $l = l' = L$ , resultan fácilmente las siguientes fórmulas:

$$M = -\frac{1}{8} pL^2; \quad x = \frac{1}{8} L; \quad m' = m = \frac{9}{128} pL^2;$$

$$t = t' = \frac{3}{8} pL; \quad T = \frac{5}{8} pL; \quad R = 2T = \frac{5}{4} pL.$$

**318.** Los diagramas que corresponden á este caso son los representados en la figura 133.

*Fig. 133.*



**319.** En cuanto á la flecha, y considerando cada uno de los tramos como un prisma empotrado por un extremo y apoyado por el otro, ya vimos oportunamente que tenía por expresión

muy aproximada en valor absoluto

$$f = \frac{1}{184} \varepsilon p L^4.$$

**320.** Para adquirir noción completa de la importancia que pueden tener los apoyos intermedios, veamos cuál es la relación de tensiones máximas que se desarrollan en una viga de longitud  $L$ , apoyada por sus dos extremos solamente, y en uno de sus tramos de longitud  $L'$ , cuando se agrega un apoyo intermedio, siendo  $L' = \frac{1}{2} L$ .

En ambos casos, dichas tensiones se calcularán por las fórmulas

$$KZ = \frac{1}{8} p L^2$$

$$K'Z = \frac{1}{8} p L'^2$$

de donde

$$\frac{K}{K'} = \left( \frac{L}{L'} \right)^2.$$

Es claro que como el apoyo ocupa la parte media de la viga, puesto que  $L = 2 L'$ , tendremos

$$\frac{K}{K'} = 4;$$

de donde resulta que la resistencia de un prisma sometido á la flexión de una carga uniformemente repartida, se cuadruplica mediante un apoyo intermedio, equidistante de sus extremos, y situado al mismo nivel que éstos.

**321. Carga móvil.**—Consideremos el caso de una carga  $P$  que se mueve sobre una viga de dos tramos iguales, recorriéndola en toda su longitud.



Como los dos tramos se encuentran en condiciones idénticas, de tal manera que los fenómenos que se verifican en uno de ellos se reproducen exactamente en el otro, será suficiente estudiar los efectos que la carga origina al recorrer uno solo de los tramos, por ejemplo, el primero.

**322.** Aplicando el teorema de los tres momentos, el valor absoluto del momento  $M$  en el apoyo central se determinará por la expresión

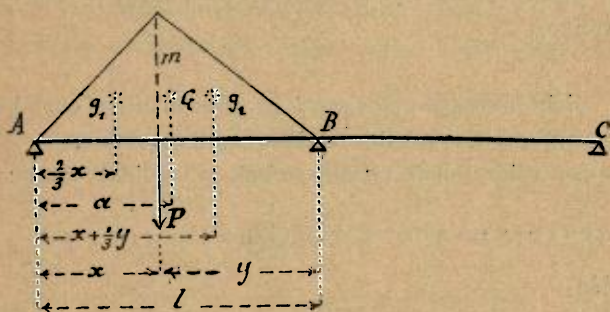
$$2Ml = 3 \left( \frac{a}{l} A + \frac{b}{l} B \right)$$

Pero como suponiendo la carga en el primer tramo, se verifica que  $B = 0$ , dicha expresión se reduce en este caso á

$$2Ml = 3 \frac{Aa}{l}$$

El valor de  $Aa$  (figura 134) se halla fácilmente tomando con

*Fig. 134.*



relación al punto A los momentos de las áreas triangulares

$\frac{1}{2} mx$  y  $\frac{1}{2} my$ , en que se descompone el área A por medio de

la ordenada  $m$ , que vale  $m = \frac{Pxy}{l}$ , puesto que representa el

momento de flexión que la carga  $P$  engendra en el punto en que está aplicada, suponiendo el tramo  $AB$  apoyado en  $A$  y en  $B$ .

Así tendremos

$$Aa = \frac{1}{2} m x \frac{2}{3} x + \frac{1}{2} my \left( x + \frac{1}{3} y \right)$$

Sustituyendo el valor de  $m$  y observando que  $x + y = l$ , resultará también

$$Aa = \frac{Pxy(2x+y)}{6}$$

Pero como

$$M = \frac{3Bb}{2l^2}$$

tendremos por último

$$M = \frac{1}{4} \cdot \frac{Pxy(2x+y)}{l^2}$$

expresión general del valor absoluto del momento en el apoyo central, cualquiera que sea la posición de la carga  $P$  sobre uno de los tramos.

**323.** Dicho momento alcanzará su valor máximo cuando suceda lo propio á la expresión variable  $xy(2x+y)$ .

Esta expresión puede escribirse bajo la siguiente forma:

$$xy(2x+y) = x(l-x)(l+x) = x(l^2 - x^2)$$

ó también

$$xy(2x+y) = (x^2)^{\frac{1}{2}} (l^2 - x^2)$$

Ahora bien; para que el producto de dos potencias sea un máximo, sabemos que es necesario y suficiente que las bases estén en la misma relación que los exponentes; por lo tanto la condición del máximo será



$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{l^2 - x^2}{1}$$

de donde

$$x = \frac{l\sqrt{3}}{3} = 0,577 l, \text{ próximamente.}$$

El momento máximo toma entonces el siguiente valor absoluto:

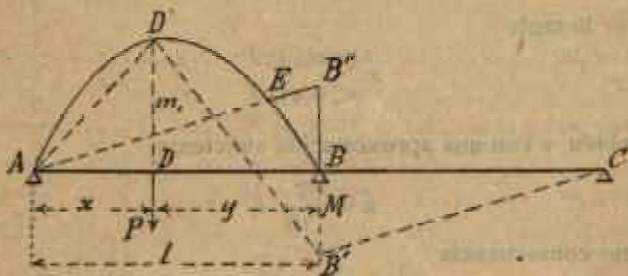
$$M = \frac{Pl}{6\sqrt{3}}$$

ó poniendo de manifiesto la cualidad negativa de dicho momento

$$M = -\frac{1}{18} Pl\sqrt{3}$$

**324.** El valor que acabamos de encontrar determina el diagrama de los mayores momentos, correspondientes á los diferentes puntos del tramo BC (figura 135), y dicho diagrama ten-

*Fig. 135.*



drá por representación aquella recta B'C, cuya ordenada BB' tenga el valor de M que hemos encontrado.

325. El momento  $m_1$  en el punto de aplicación de la carga, tiene por expresión, como fácilmente se conoce,

$$m_1 = \frac{P}{l} xy - \frac{x}{l} M.$$

Sustituyendo en vez de  $M$  su expresión general, antes deducida, resultará

$$m_1 = \frac{P}{4l^3} [x^4 - 5l^2x^2 + 4l^3x].$$

326. El valor particular de  $x$  que determina el máximo de  $m_1$  lo calcularemos por el procedimiento ordinario.

Tenemos

$$f(x) = x^4 - 5l^2x^2 + 4l^3x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 10l^2x + 4l^3$$

$$f''(x) = 12x^2 - 10l^2$$

Las condiciones del máximo son, como se sabe,

$$f'(x) = 0$$

$$f''(x) < 0.$$

Ahora bien,

$$\text{Para } x = 0,433l \dots f'(x) = -0,005l < 0$$

$$x = 0,432l \dots f'(x) = +0,002l > 0.$$

Por lo tanto

$$x > 0,432l \\ x < 0,433l,$$

ó también, y con una aproximación suficiente,

$$x = \frac{7}{16} l;$$

y como consecuencia

$$m = 0,21 Pl;$$

de donde resulta que el máximo de  $m_1$  viene á ser doble del momento máximo en el apoyo central.



**327.** Para trazar el diagrama de momentos sobre el tramo AC que la carga recorre, bastará, por lo tanto, determinar los valores correspondientes de  $M$  y  $m_1$  para las posiciones diversas de la carga, tan próximas como se juzgue necesario. Para cada posición de la carga resultará un diagrama semejante al AD'B' y es claro que la curva que resulte de unir por una línea continua los vértices análogos al D', representará el diagrama de que se trata.

La combinación de los diagramas obtenidos da por resultado sobre cada tramo un diagrama final, semejante al AD'EB''B, el cual á su vez podrá fácilmente combinarse con el de otra carga cualquiera; por ejemplo, con el de un peso uniformemente repartido, que suele ser el caso más frecuente.

**328.** Si suponemos  $P = 1, l = 1$ , obtendremos, para la construcción del diagrama AD'EB, los resultados siguientes:

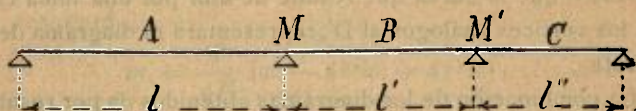
|                         |                     |                |
|-------------------------|---------------------|----------------|
| $x = \frac{1}{8}$ ..... | $M = 0,0307$ .....  | $m_1 = 0,1055$ |
| $x = \frac{2}{8}$ ..... | $M = 0,0586$ .....  | $m_1 = 0,1728$ |
| $x = \frac{3}{8}$ ..... | $M = 0,0805$ .....  | $m_1 = 0,2042$ |
| $x = \frac{4}{8}$ ..... | $M = 0,09375$ ..... | $m_1 = 0,2031$ |
| $x = \frac{5}{8}$ ..... | $M = 0,0952$ .....  | $m_1 = 0,1748$ |
| $x = \frac{6}{8}$ ..... | $M = 0,082$ .....   | $m_1 = 0,126$  |
| $x = \frac{7}{8}$ ..... | $M = 0,0512$ .....  | $m_1 = 0,0645$ |

**329. Prismas colocados sobre cuatro apoyos.—**

Sean  $M, M'$  los valores absolutos de los momentos en los apoyos intermedios (figura 136) siendo nulos los correspondientes á los

extremos;  $A, B, C$ , las áreas de momentos sobre cada uno de los tres tramos consecutivos;  $a, b, c$ , los brazos de palanca de dichas áreas á la derecha de los apoyos, y  $a', b', c'$ , los brazos de palan-

*Fig. 136.*



ca de las mismas á la izquierda de aquellos. El teorema de los tres momentos nos da, comenzando por los tramos extremos, las siguientes ecuaciones:

$$2M(l + l') + M'l' = 6 \left( \frac{a}{l} A + \frac{b'}{l'} B \right)$$

$$2M'(l'' + l') + Ml' = 6 \left( \frac{c'}{l''} C + \frac{b}{l'} B \right).$$

Para el caso en que la carga total esté uniformemente repartida tenemos además

$$\frac{a}{l} = \frac{b'}{l'} = \frac{c'}{l''} = \frac{b}{l'} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, los segundos miembros de aquellas ecuaciones se reducen á  $3(A + B)$ , y  $3(B + C)$  respectivamente.

En cada caso particular se determinarán por eliminación los valores de  $M$  y  $M'$ , y en cuanto á los demás datos se deducirán de las fórmulas generales.

Consideremos los diferentes casos en que hay tramos iguales.

**330. 1.º CASO.—Los tres tramos iguales.**—Desde luego tenemos

$$l = l' = l''$$

$$A = B = C$$

$$M = M'.$$



Representando, de una manera general, por  $M$  los momentos correspondientes á los apoyos intermedios y por  $L$  la longitud de los tramos, resulta

$$5ML = 6A;$$

pero como

$$A = \frac{2}{3} L \times \frac{1}{8} pL^2 = \frac{1}{12} pL^3,$$

tendremos

$$5ML = \frac{6}{12} pL^3,$$

de donde

$$M = \frac{1}{10} pL^2.$$

y si  $M$  hubiera de representar dicho momento en magnitud y en signo sería entonces

$$M = - \frac{1}{10} pL^2.$$

**331.** Si llamamos  $m'$  al momento máximo intermedio correspondiente á cualquiera de los tramos extremos y  $m''$  al del tramo central, siendo  $x'$ ,  $x''$ , las abscisas referidas á los centros respectivos ó puntos medios del tramo á que cada una corresponda, tendremos

$$x' = \frac{M}{pL},$$

puesto que los momentos en los extremos son nulos por hipótesis, y sabemos que dicha abscisa tiene por expresión, según el primer teorema general,  $x' = \frac{M - M'}{pL}$ .

Pero como, según acabamos de encontrar, el valor absoluto de  $M$  es

$$M = \frac{1}{10} pL^2$$

resultará

$$x' = \frac{1}{10} L.$$

Por el segundo teorema general tenemos

$$m' = \frac{p(\frac{1}{2}L - x')^2}{2},$$

ó bien, sustituyendo, el valor de  $x'$  que acabamos de encontrar,

$$m' = \frac{2}{25} pL^2.$$

Ahora bien; como el sistema es simétrico respecto del centro del tramo intermedio, es claro que

$$x'' = 0$$

y además

$$m'' = \frac{1}{2} p \left( \frac{1}{2} L - x'' \right)^2 - M = \frac{1}{40} pL^2;$$

puesto que el tramo intermedio puede considerarse como empotrado por sus dos extremos y sometido á una carga uniformemente repartida (número 294), siendo ahora  $M = \frac{1}{10} pL^2$ .

**332.** Para calcular los esfuerzos cortantes ó reacciones en los apoyos extremos, recordaremos que según uno de los teoremas que preceden, dicho esfuerzo es igual á la carga de la porción de tramo comprendida entre el apoyo y el punto en que el momento intermedio del tramo que se considera es máximo.

Ahora bien, dicha porción es en este caso  $\frac{1}{2} L - x'$ , y como la carga por unidad de longitud es  $p$ , como de ordinario, tendremos

$$t = p \left( \frac{1}{2} L - x' \right)$$



y substituyendo en vez de  $x'$ ,  $\frac{1}{10} L$ , resultará

$$t = \frac{2}{5} pL.$$

**333.** La reacción de los apoyos centrales, ó lo que es lo mismo, la parte que sustentan de la carga total, estará, como desde luego se comprende, constituida por la suma de los valores  $t'$  y  $t''$  del esfuerzo cortante á los lados de dichos apoyos.

El primero  $t'$ , correspondiente, por ejemplo, al tramo extremo, tendrá por expresión

$$t' = p \left( \frac{1}{2} L + x' \right) = \frac{3}{5} pL.$$

El segundo,  $t''$ , correspondiente al tramo central, será

$$t'' = \frac{1}{2} pL.$$

Por lo tanto

$$R = t' + t'' = \frac{11}{10} pL.$$

**334.** Claro es que la suma de las reacciones en los cuatro apoyos debe ser igual á la carga total uniformemente repartida,  $3pL$ .

En efecto:

$$\text{Reacción en el 1.º apoyo} \dots\dots\dots \frac{2}{5} pL = \frac{4}{10} pL$$

$$\text{Id.} \quad 2.º \text{ id.} \dots\dots\dots = \frac{11}{10} pL$$

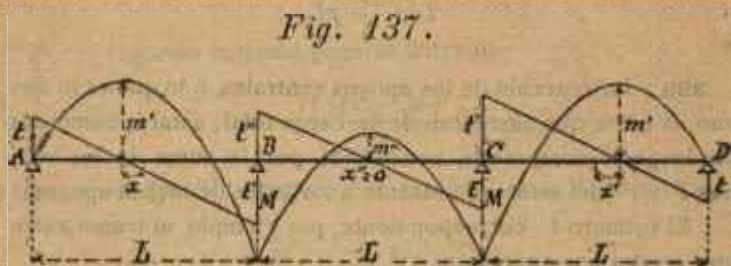
$$\text{Id.} \quad 3.º \text{ id.} \dots\dots\dots = \frac{11}{10} pL$$

$$\text{Id.} \quad 4.º \text{ id.} \dots\dots\dots \frac{2}{5} pL = \frac{4}{10} pL$$

$$\text{Suma de reacciones en los cuatro apoyos} \dots\dots \frac{30}{10} pL,$$

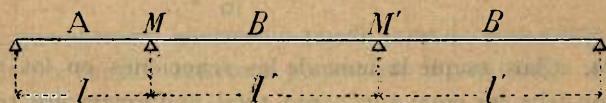
ó bien  $3pL$ , como habíamos indicado.

335. Los diagramas correspondientes al caso que acabamos de considerar se ponen de manifiesto en la figura 137.



336. 2.<sup>o</sup> CASO.—**Cuando son iguales dos tramos consecutivos** (figura 138).—En este caso, si representamos por  $l$  la longitud del primer tramo y por  $l'$  la del segundo y la del tercero; por  $M$  el momento de flexión engendrado en el pri-

*Fig. 138.*



mero de los apoyos intermedios y por  $M'$  el engendrado en el segundo de dichos apoyos, tendremos:

$$B = C; \quad a = \frac{1}{2} l;$$

$$b = c;$$

$$l' = l''; \quad b = \frac{1}{2} l';$$

y así las fórmulas generales se reducen a las siguientes:

$$2M(l + l') + M'l' = 3(A + B).$$

$$(4M' + M)l' = 6B.$$



Supuesta la carga uniformemente repartida, tenemos

$$A = \frac{1}{12} p l^3$$

$$B = \frac{1}{12} p l'^3;$$

por consiguiente, sustituyendo resultará

$$8M(l + l') + 4M'l' = p(l^3 + l'^3).$$

$$Ml' + 4M'l' = \frac{1}{2} p l'^3;$$

de donde

$$M = \frac{1}{2} p \frac{2l^3 + l'^3}{8l + 7l'}$$

$$M' = \frac{1}{4} p \frac{4ll'^2 + 3l'^3 - l^3}{8l + 7l'}$$

Los momentos en los apoyos intermedios son siempre negativos, del mismo modo que lo eran en los puntos de empotramiento, y á los cuales equivalen aquellos, aunque no siempre de una manera perfecta; así es que si  $M$  y  $M'$  hubieran de representar dichos momentos en magnitud y en signo, sería entonces

$$M = - \frac{1}{2} p \frac{2l^3 + l'^3}{8l + 7l'}$$

$$M' = - \frac{1}{4} p \frac{4ll'^2 + 3l'^3 - l^3}{8l + 7l'}$$

**337.** En cuanto los valores absolutos de  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , se calcularían por las fórmulas

$$x' = \frac{M}{pl}$$

$$x'' = \frac{M - M'}{pl'}$$

$$x''' = \frac{M}{pl'};$$

y respecto á los momentos máximos intermedios no puede haber dificultad en su determinación, en cuyo caso, y hechos tales cálculos, será fácil el trazado del diagrama de momentos de flexión.

**338. 3.<sup>er</sup> C.ASO.—Cuando solamente son iguales los tramos extremos.**—Desde luego los momentos en los apoyos intermedios serán iguales entre sí, por tanto

$$M = M',$$

y las fórmulas generales se reducirán á la única siguiente:

$$M(2l + 3l') = 3(A + B).$$

Para una carga uniformemente repartida, en cuyo caso A y B tienen los valores indicados anteriormente, resultará

$$M(2l + 3l') = \frac{1}{4} p (l^3 + l'^3),$$

de donde

$$M = \frac{1}{4} p \frac{l^3 + l'^3}{2l + 3l'}.$$

**339.** El cálculo de las abscisas de los puntos en que los momentos intermedios alcanzan su valor máximo, contadas desde el centro del tramo correspondiente, así como la determinación de dichos momentos máximos intermedios, y como consecuencia, la construcción del diagrama de momentos, no ofrece particularidad alguna digna de notarse.

**340.** Otro tanto pudiera decirse, lo mismo en el caso actual que en el anterior, respecto del cálculo de los esfuerzos cortantes en los apoyos, necesario para el trazado del diagrama de dichos esfuerzos.

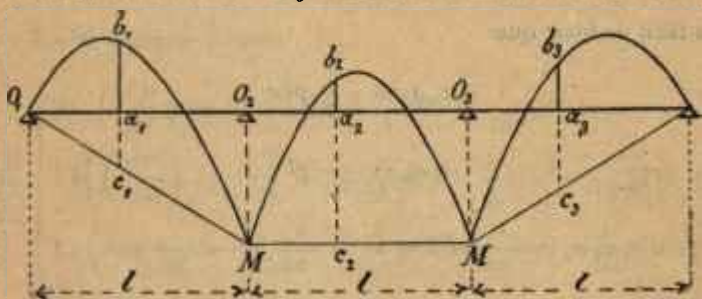
**341. Estudio de la línea elástica cuando los tres tramos son iguales.**—Consideremos, por vía de ejercicio,



el caso más fácil, cuando los tres tramos de un prisma, apoyado en cuatro puntos de nivel, son iguales, y tratemos de hallar las ecuaciones de la elástica en cada tramo.

Tomemos como origen, para cada rama de elástica, el extremo izquierdo del tramo correspondiente (figura 138 a).

*Fig. 138 a.*



Si  $a_1$  es un punto cualquiera del primer tramo, su distancia al origen  $O_1$  será  $x = O_1 a_1$ . El momento de flexión será

$$m_1 = a_1 b_1 = c_1 b_1 - c_1 a_1.$$

Para otro punto cualquiera  $a_2$  del segundo tramo, definido por su distancia  $x$  al origen respectivo  $O_2$ , será  $x = O_2 a_2$  y el momento de flexión

$$m_2 = c_2 b_2 - c_2 a_2.$$

Finalmente, para un punto cualquiera del tercer tramo será

$$x = O_3 a_3 \quad \text{y} \quad m_3 = c_3 b_3 - c_3 a_3.$$

Las cantidades  $c_1 b_1$ ,  $c_2 b_2$ ,  $c_3 b_3$ , representan los momentos de flexión engendrados en  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  bajo el supuesto de que cada tramo se apoyara por sus extremos respectivos.

Si la carga unitaria  $p$  es la misma en los tres tramos, como estos tienen la misma longitud  $l$ , claro es que para un mismo

valor de  $x$ , aquellas cantidades tendrán por expresión común,

$$c_1 b_1 = c_2 b_2 = c_3 b_3 = \frac{1}{2} plx - \frac{1}{2} px^2.$$

Por otra parte, recordando que

$$O_2 M = O_3 M = \frac{1}{10} pl^3,$$

es fácil deducir que

$$c_1 a_1 = \frac{1}{10} plx;$$

$$c_2 a_2 = \frac{1}{10} pl^2;$$

$$c_3 a_3 = \frac{1}{10} pl(l-x) = \frac{1}{10} pl^2 - \frac{1}{10} plx.$$

Por consiguiente, las expresiones generales de los momentos de flexión en cada uno de los tramos serán:

$$1.^{\text{er}} \text{ tramo} \dots m_1 = -\frac{1}{2} px^2 + \frac{2}{5} plx$$

$$2.^{\circ} \text{ fd.} \dots m_2 = -\frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{2} plx - \frac{1}{10} pl^2$$

$$3.^{\circ} \text{ fd.} \dots m_3 = -\frac{1}{2} px^2 + \frac{3}{5} plx - \frac{1}{10} pl^2$$

Si en la expresión de  $m_1$  hacemos  $x=l$  y en la de  $m_2$ ,  $x=0$ , hallaremos el valor común

$$M = -\frac{1}{10} pl^2.$$

El mismo valor se hallará haciendo  $x=l$  en la expresión de  $m_2$  y  $x=0$  en la de  $m_3$ .

Las ecuaciones de la elástica serán, por tanto, las siguientes:



En el primer tramo:

$$(I) \begin{cases} EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_1 = -\frac{I}{2} px^2 + \frac{2}{5} plx & (1) \\ EI \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_1 + C_1 \right] = -\frac{I}{6} px^3 + \frac{I}{5} plx^2 & (2) \\ EI (y_1 + C_1 x + C'_1) = -\frac{I}{24} px^4 + \frac{I}{15} plx^3 & (3) \end{cases}$$

En el segundo tramo:

$$(II) \begin{cases} EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_2 = -\frac{I}{2} px^2 + \frac{I}{2} plx - \frac{I}{10} pl^2 & (1) \\ EI \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_2 + C_2 \right] = -\frac{I}{6} px^3 + \frac{I}{4} plx^2 - \frac{I}{10} pl^2 x & (2) \\ EI (y_2 + C_2 x + C'_2) = -\frac{I}{24} px^4 + \frac{I}{12} plx^3 - \frac{I}{20} pl^2 x^2 & (3) \end{cases}$$

En el tercer tramo:

$$(III) \begin{cases} EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_3 = -\frac{I}{2} px^2 + \frac{3}{5} plx - \frac{I}{10} pl^2 & (1) \\ EI \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_3 + C_3 \right] = -\frac{I}{6} px^3 + \frac{3}{10} plx^2 - \frac{I}{10} pl^2 x & (2) \\ EI (y_3 + C_3 x + C'_3) = -\frac{I}{24} px^4 + \frac{I}{10} plx^3 - \frac{I}{20} pl^2 x^2 & (3) \end{cases}$$

Hay, pues, tres ramas de elástica, que se acuerdan tangencialmente en los apoyos intermedios; y como el sistema es simétrico respecto de la vertical que pasa por el punto medio del tramo central, podemos afirmar que en este tramo la tangente á la elástica trazada por su punto medio será horizontal.

Si además tenemos en cuenta que en los cuatro apoyos la flecha es nula, podemos establecer mayor número de condiciones que las que se necesitan para determinar las seis constantes arbitrarias que entran en las ecuaciones precedentes.

Las que más rápidamente conducen á este resultado son las siguientes:

Para determinar  $C_1, C_2, C_3$ .

En la ecuación (3) del grupo I ;  $x = l, \quad y_1 = 0$   
 »        »        (3)        »        II ;  $x = l, \quad y_2 = 0$   
 »        »        (3)        »        III;  $x = l, \quad y_3 = 0$

Para determinar  $C_1', C_2', C_3'$ .

En la ecuación (3) del grupo I ;  $x = 0, \quad y_1 = 0$   
 »        »        (3)        »        II ;  $x = 0, \quad y_2 = 0$   
 »        »        (3)        »        III;  $x = 0, \quad y_3 = 0$

Estas tres últimas condiciones nos dicen que las constantes  $C_1', C_2', C_3'$  son nulas.

De las tres primeras se deduce con toda facilidad que

$$C_1 = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{40} pl^3$$

$$C_2 = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{120} pl^3$$

$$C_3 = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{120} pl^3$$

A estos mismos resultados se llega, pero con mayor trabajo, mediante las siguientes condiciones, como es fácil comprobar:

$$\left. \begin{array}{l} [(2) \text{ (I)}] \dots x = l \\ [(2) \text{ (II)}] \dots x = 0 \end{array} \right\} \dots \left( \frac{dy}{dx} \right)_1 = \left( \frac{dy}{dx} \right)_2$$

$$[(2) \text{ (II)}] \dots x = \frac{1}{2} l \dots \left( \frac{dy}{dx} \right)_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} [(2) \text{ (II)}] \dots x = l \\ [(2) \text{ (III)}] \dots x = 0 \end{array} \right\} \dots \left( \frac{dy}{dx} \right)_2 = \left( \frac{dy}{dx} \right)_3$$

Así pues, las ecuaciones de la elástica serán las que siguen:

Primer tramo:

$$y_1 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{24} px^4 + \frac{1}{15} plx^3 - \frac{1}{40} pl^3x \right) \dots \dots \dots (a)$$



Segundo tramo:

$$v_2 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{24} p x^4 + \frac{1}{12} p l x^3 - \frac{1}{20} p l x^2 + \frac{1}{120} p l^3 x \right) \quad (b)$$

La ecuación de la elástica del tercer tramo no nos interesa, porque aunque de forma distinta que la ecuación (a) es á ella equivalente, dada la simetría de las ramas respectivas.

Las ecuaciones (a) y (b) podemos escribirlas bajo la siguiente forma:

$$y_1 = -\frac{1}{120} \cdot \frac{p}{EI} (5x^4 - 8lx^3 + 3l^3x) \dots\dots\dots (a')$$

$$y_2 = -\frac{1}{120} \cdot \frac{p}{EI} (5x^4 - 10lx^3 + 6lx^2 - l^3x) \dots \quad (b')$$

Para determinar el punto del primer tramo en que la flecha es máxima en valor absoluto, hallaremos el valor de  $x$  que hace máxima á la función

$$f(x) = 5x^4 - 8lx^3 + 3l^3x$$

La derivada primera igualada á cero

$$f'(x) = 20x^3 - 24lx^2 + 3l^3 = 0,$$

en una ecuación de tercer grado que tiene sus tres raíces reales, una negativa y dos positivas, como es fácil poner en evidencia aplicando el teorema de Rolle.

La negativa no corresponde á la cuestión; y de las positivas una está comprendida entre cero y  $+0,8l$  y la otra lo está entre  $+1$  y  $+\infty$ ; pero como el valor que buscamos tiene que ser necesariamente menor que  $l$ , de las dos raíces positivas hay que elegir la menor, que es la que cumple con las condiciones que exige la índole del problema.

Un valor de dicha raíz, aproximado en menos de una unidad del tercer orden decimal, es

$$x = 0,446 l.$$

Sustituído en la ecuación (a') resulta como valor aproximado

de la flecha máxima, en valor absoluto, y en el primer tramo

$$f_1 = -\frac{1}{145} \varepsilon p l^4$$

En cuanto al segundo tramo, si en la ecuación (*b'*) hacemos  $x = \frac{l}{2}$  resultará

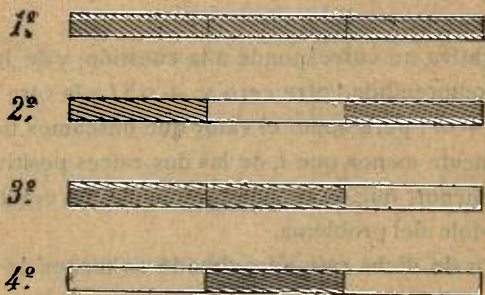
$$f_2 = -\frac{1}{1920} \varepsilon p l^4$$

No hay para que recordar que  $\varepsilon = \frac{2}{ZEH}$ .

**342. Observación.**—Ocurre algunas veces que una viga apoyada en más de dos puntos, se halla sometida á una carga unitaria  $p$ , uniformemente repartida en toda su longitud y á una sobrecarga  $p'$  por unidad, aplicada de todos los modos posibles sobre los tramos de aquélla.

Supongamos una viga de tres tramos iguales, y consideremos, por ejemplo, el tercero de los cuatro casos más importantes, que resulta de las diversas combinaciones posibles de las sobrecargas, como indica la figura 139.

*Fig. 139.*



**343.** Cualquiera que sea el número de apoyos, es fácil determinar las combinaciones posibles de las sobrecargas; pero la



construcción de los diagramas de momentos se simplifica mucho por el uso de las plantillas parabólicas, fundado en que la forma de la parábola de momentos de flexión, sobre un tramo cualquiera, no depende más que de la carga uniformemente repartida que actúa sobre él.

Cualquiera que sea la magnitud de la carga sobre uno de los tramos, con tal que se halle uniformemente repartida, sabemos que el diagrama de momentos es una parábola.

Considerando el tramo intermedio, llamando  $M$ ,  $M'$  á los momentos en los apoyos intermedios, contados, como de costumbre, de izquierda á derecha,  $l$  á la longitud de los tramos, y siendo, según queda establecido,  $p + p'$  la carga total unitaria, uniformemente repartida sobre el tramo central, el diagrama correspondiente de momentos será una parábola cuyas ordenadas extremas negativas, con relación al eje de la viga, sean  $M$  y  $M'$  y cuya ordenada máxima positiva, sea el valor del momento máximo intermedio, definido por la expresión

$$m' = \frac{1}{2} (p + p') \left( \frac{1}{2} L + x' \right)^2 - M_1$$

y en la que, como sabemos,

$$x' = \frac{M - M'}{(p + p') L}.$$

Refiriendo la parábola á su vértice, su ecuación será de la forma

$$x^2 = ay;$$

pero como al valor particular de  $x$ ,

$$x = \frac{1}{2} L + x',$$

corresponde el de

$$y = M + m' = \frac{1}{2} (p + p') \left( \frac{1}{2} L + x' \right)^2,$$

resultará

$$a = \frac{2}{p + p'},$$

y por lo tanto, la ecuación de dicha parábola toma la forma

$$x^2 = \frac{2}{p + p'} y,$$

lo cual demuestra la verdad de la proposición.

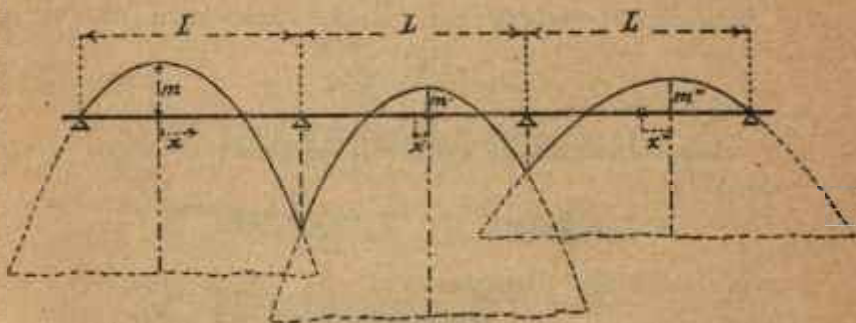
**344.** Resulta de aquí que para los tramos en que la carga por unidad de longitud sea  $p$ , la parábola de momentos será

$$x^2 = \frac{2}{p} y;$$

y para aquellos en que, además de la carga  $p$ , soporten la sobrecarga  $p'$ , será

$$x^2 = \frac{2}{p + p'} y.$$

*Fig. 140.*



**345.** Construídas estas parábolas con la extensión conveniente y recortadas en cartulina, por ejemplo, las plantillas de ambas, teniendo cuidado de señalar sobre ellas el eje de la curva, sólo se necesita calcular por las fórmulas conocidas,  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$  para determinar en el dibujo los ejes de las parábolas, y los momen-



tos máximos intermedios  $m, m', m''$ , con lo que se fijarán los vértices.

Pudiera también calcularse, en su lugar, los momentos  $M, M'$  en los apoyos intermedios.

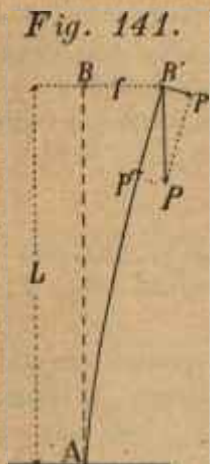
De cualquier modo, colocada la plantilla correspondiente de modo que su eje coincida con el del dibujo, el vértice de la primera con el extremo de la ordenada que corresponda  $m, m', m''$ , ó que el contorno pase por los extremos de  $M$  y  $M'$  ó de uno de ellos y el apoyo correspondiente, se obtendrá fácilmente el diagrama por un trazado continuo para cada tramo, como indica la figura 140.

#### FLEXIÓN DE LOS PRISMAS CARGADOS EN LA DIRECCIÓN DE SUS FIBRAS

**346.** Consideremos los cuatro casos que nos ofrecen los pies derechos y columnas, que en último término se reducen á prismas verticales sometidos de ordinario á una sola carga: 1.º, cuando el prisma está aislado, ó tiene libre un extremo superior y empotrado el inferior; 2.º, cuando está articulado por sus dos extremidades, ó en otros términos, cuando tiene sus dos bases redondeadas; 3.º, cuando está articulado por un extremo y empotrado por el otro, ó como también suele decirse, cuando tiene una base redondeada y la otra plana, y 4.º cuando está empotrado por ambos extremos, ó lo que es lo mismo, cuando sus dos bases son planas.

**347. I.º CASO. — Prisma aislado, bajo una sola carga.**— Si un prisma, de sección recta, relativamente pequeña á su longitud, recibe la acción de una fuerza de compresión paralela á sus fibras y aplicada á un extremo de su eje, ó lo que es lo mismo, aplicada exactamente en el centro de gravedad de la sección, el único efecto de la fuerza se reduce, como sabemos, á determinar un cierto acortamiento, siempre

que rigurosamente se conserve dicho paralelismo y que el punto de aplicación de la carga coincida exactamente con el centro de gravedad de la sección recta; pero en el momento en que alguna de estas condiciones no quede satisfecha, y esto es seguro en la práctica, el prisma se encorva ó se dobla bajo la acción de los esfuerzos de flexión que se desarrollan entonces, si alcanzan valores convenientes.



En efecto; supongamos un prisma, en un principio vertical, empotrado por su extremo inferior, libre por el superior y sometido á una carga  $P$ , constantemente vertical (figura 141).

Si por cualquier causa el eje se desvía tomando la posición  $AB'$ , aun cuando tal desviación sea muy pequeña, la fuerza  $P$  origina dos componentes,  $p$  y  $p'$ , la primera normal, y paralela la segunda á dicho eje, en su nueva posición.

Ahora bien; como en definitiva la fuerza  $p$  es una fuerza exterior de flexión, cuyo momento, con respecto á la sección de empotramiento es  $pL$ , originará una flecha ó desplazamiento del extremo libre, igual, como sabemos, á

$$f = \frac{2}{3} \cdot \frac{pL^3}{ZEI}.$$

Si la desviación  $BB'$  fuera menor que la flecha capaz de ser engendrada por la componente  $p$ , claro es que las primitivas condiciones de equilibrio dejarían de subsistir, y el prisma se encorvaría bajo la acción de aquella componente, del mismo modo que ocurría en los casos que oportunamente hemos estudiado.

Si por ser muy pequeña la desviación del eje, pudiera admi-



tirse que la componente  $p'$ , prolongada, pasa por la sección de empotramiento, es claro que su momento sería nulo, y entonces tendríamos

$$Pf = pL$$

de donde

$$P = \frac{pL}{f},$$

y sustituyendo el valor de  $f$  que antes recordamos, resultará

$$P = \frac{3}{2} \cdot \frac{ZEH}{L^2};$$

fórmula por la cual puede calcularse aproximadamente el valor de la fuerza capaz de producir la flexión del prisma.

348. Con más rigor, y no despreciando como antes la curvatura del eje, puede procederse del modo siguiente:

Sea AB el eje del prisma, vertical en un principio, y AB' la posición que toma después de una pequeña desviación (fig. 142).

Al ocuparnos en el estudio de los prismas empotrados por un extremo y libres por el otro, vimos que la expresión general de la flecha era

$$f = \frac{2}{EH} (KL + K'L' + \dots);$$

pero como la flexión depende de los momentos de las fuerzas exteriores, con relación á los centros de gravedad de las secciones del prisma, es claro que las tensiones sucesivas que en el caso actual origina la flexión, se calcularán por las relaciones

$$KZ = Pf; \quad K'Z = Pf'; \quad \dots \text{etc.}$$

Por lo tanto resultará

$$f = \frac{2P}{ZEH} (fL + f''L' + \dots) = \frac{2P}{ZEH} \Sigma (fL)$$

La cantidad  $\Sigma (fL)$  no representa otra cosa que la suma de los momentos de las cantidades  $f, f', f'' \dots$  etc., con relación al eje proyectado en  $B'$ ; por consiguiente podremos reemplazarla por el momento de la resultante  $f + f' + f'' + \dots$ , es decir, por el producto de multiplicar la superficie  $AB'A'$ , por el brazo de palanca  $v$  de su centro de gravedad.



**349.** Dada la pequeña curvatura del eje del prisma, puede considerarse que dicho eje se confunde con un arco de parábola ordinaria cuya ecuación será

$$x^2 = 2py$$

y como las coordenadas extremas son  $x = L$ ;  $y = f$ , tendremos

$$2p = \frac{L^2}{f};$$

y aquella ecuación tomará la forma

$$x^2 = \frac{L^2}{f} y.$$

Llamando  $x_1$  á la abscisa del centro de gravedad de la superficie parabólica que consideramos, tendremos

$$v = L - x_1.$$



Ahora bien, la expresión general de  $x_1$ , es, como sabemos,

$$x_1 = \frac{\iint_S x dx dy}{S}$$

la cual se convierte en el caso particular que nos ocupa en

$$x_1 = \frac{\int_0^L x dx \int_f^f dy}{S};$$

pero como

$$y = \frac{f}{L^2} x^2$$

$$S = \frac{2}{3} fL$$

tendremos

$$x_1 = \frac{\int_0^L x dx \int_{\frac{f}{L^2} x^2}^f dy}{\frac{2}{3} fL} = \frac{\int_0^L x dx \left( f - \frac{f}{L^2} x^2 \right)}{\frac{2}{3} fL} =$$

$$\frac{f \int_0^L x dx - \frac{f}{L^2} \int_0^L x^3 dx}{\frac{2}{3} fL}$$

ó finalmente

$$x_1 = \frac{3}{8} L$$

Tenemos, pues, según acabamos de ver

$$\text{Sup. } AB'A' = S = \frac{2}{3} fL$$

$$v = L - \frac{3}{8} L = \frac{5}{8} L,$$

y por lo tanto, la expresión de  $f$  se reduce á

$$f = \frac{2P}{ZEH} \cdot \frac{5}{12} fL^2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{PL^2}{ZEH} f;$$

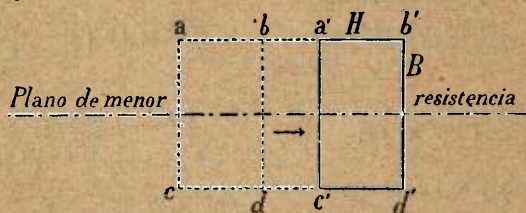
de donde

$$P = \frac{6}{5} \cdot \frac{ZEH}{L^2},$$

que es el valor más exacto de la carga, capaz de producir la flexión del prisma.

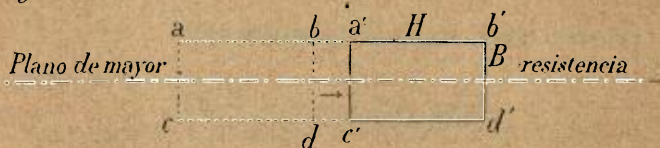
**350.** Si este estuviera completamente libre, es evidente que se desviaría paralelamente al plano de menor resistencia (figura 143), y entonces  $Z$  sería el menor módulo de flexión de la sec-

*Fig. 143.*



ción del prisma, y  $H$  sería la menor dimensión de dicha sección si fuese rectangular; pero cuando, como acontece de ordinario, el prisma queda sujeto á desviarse paralelamente á un plano de mayor resistencia, entonces (figura 144),  $Z$  representa el mayor

*Fig. 144.*



módulo de flexión de su sección recta, y  $H$  la mayor de sus dimensiones.



**351. 2.º CASO. Prisma articulado por sus dos extremos.**—Este caso, más frecuente que el anterior en las aplicaciones ordinarias, se trata con la exactitud suficiente para las necesidades de la práctica, admitiendo que, sujetos los extremos á permanecer en la primitiva dirección del eje, sus mitades se hallan en condiciones análogas á las del caso anterior.

En tal supuesto, basta reemplazar en la expresión de P, antes hallada,  $\frac{1}{2}L$  en vez de L, y tendremos

$$P = \frac{24}{5} \cdot \frac{ZEH}{L^2},$$

lo que nos dice que la carga que un prisma articulado por sus dos extremos puede soportar, es cuatro veces mayor que la que podría resistir en las condiciones del caso que antecede.

**352. 3.º CASO. Prisma articulado por un extremo y empotrado por el otro.**—En tales condiciones puede admitirse que los tercios extremos del prisma se hallan en análogas condiciones á las del primer caso, por lo cual, bastará en la fórmula allí establecida sustituir  $\frac{1}{3}L$  en vez de L, y resultará, para la carga capaz de originar la flexión:

$$P = \frac{54}{5} \cdot \frac{ZEH}{L^2} = 10,8 \frac{ZEH}{L^2}$$

**353.** Un valor más exacto de P, determinado por un procedimiento más riguroso de cálculo y cuya exposición saldría fuera de los límites que nos hemos impuesto, es

$$P = 9,87 \frac{ZEH}{L^2}$$

**354. 4.º CASO. Prisma empotrado por ambos extremos.**—Como en los casos anteriores, demuestra la expe-

riencia que los cuartos extremos del prisma se comportan como prismas aislados por un extremo y empotrados por el otro, y es claro que bajo este supuesto la expresión de  $P$ , correspondiente al caso actual, se obtendrá reemplazando en la del primer caso  $\frac{1}{4} L$  en lugar de  $L$ . Así resulta

$$P = \frac{96}{5} \cdot \frac{ZEH}{L^2};$$

siendo un valor más exacto el siguiente:

$$P = 19,74 \frac{ZEH}{L^2}.$$

**355.** En resumen, los valores de  $P$ , que con la necesaria exactitud en las aplicaciones pueden emplearse, son los siguientes:

$$1.^{\text{er}} \text{ caso} \dots\dots P = 1,234 \frac{ZEH}{L^2}$$

$$2.^{\circ} \text{ íd.} \dots\dots P = 4,935 \frac{ZEH}{L^2}$$

$$3.^{\circ} \text{ íd.} \dots\dots P = 9,87 \frac{ZEH}{L^2}$$

$$4.^{\circ} \text{ íd.} \dots\dots P = 19,74 \frac{ZEH}{L^2}$$

**356. Observaciones.**—Siendo la expresión general de  $P$  de la forma

$$P = m \frac{ZEH}{L^2}$$

y refiriéndonos á una sección llena y de forma regular, podrá escribirse del modo siguiente:

$$P = cE \left( \frac{S}{L} \right)^2,$$



representando  $c$  un cierto coeficiente numérico, y  $S$  el área de la sección.

En efecto, si para fijar las ideas suponemos que esta sea rectangular, en cuyo caso

$$Z = \frac{1}{6} BH^2$$

$$S = BH,$$

tendremos

$$P = \frac{1}{6} m \left( \frac{H}{B} \right) E \left( \frac{S}{L} \right)^2;$$

y resultará entonces

$$c = \frac{1}{6} m \frac{H}{B};$$

lo que nos dice que el coeficiente  $c$  depende del caso en que se halle el prisma y de la relación que se establezca entre las dimensiones de su sección recta.

Bajo esta última forma se ve que la carga que origina la flexión está en razón directa del cuadrado de la sección, y en razón inversa del cuadrado de la longitud; de donde resulta que dicha carga no varía si la relación entre dichos cuadrados permanece constante, lo que exige que lo sea la relación  $\frac{S}{L}$ .

**357.** La indeterminación de la flecha, bajo la acción de la carga límite que origina la flexión en los casos que hemos considerado, prueba la independencia que hay entre ambas y nos induce á establecer que bajo la acción de dicha carga el prisma se encuentra en un estado de equilibrio indiferente, permaneciendo con la desviación que se le dé.

Pero partiendo de esto, es indudable que el menor aumento de la referida carga debe destruir tal estado de equilibrio y producir la deformación total y ruptura del prisma.

Es necesario, por tanto, admitir como principio práctico de

construcción, que toda carga capaz de originar la flexión de un prisma, en cualquiera de los cuatro casos que hemos estudiado, es suficiente asimismo para determinar su ruptura; de donde resulta que para proceder con seguridad al calcular la carga de que se trata, es necesario tomar una fracción de los resultados que dan las fórmulas establecidas, los cuales deben considerarse como límites de ruptura y en modo alguno como límites de cargas permanentes.

**358.** Como á sección constante, la carga que origina la flexión varía en razón inversa del cuadrado de la longitud del prisma, se comprende desde luego que cuando dicha longitud sea menor que un cierto límite, la carga necesaria para provocar la flexión determine una tensión mayor que la que pueda admitirse como límite de las cargas permanentes, y aun á veces mayor que la necesaria para la ruptura del prisma por simple compresión; lo que demuestra que la resistencia de tales prismas debe calcularse á la compresión ordinaria por la fórmula

$$P = KS,$$

y á la flexión posible, por la general establecida

$$P = m \frac{ZEH}{L^2}$$

ó bien

$$P = cE \left( \frac{S}{L} \right)^2.$$

**359.** Es claro que para conocer si la ruptura será originada por la compresión ó por la flexión, bastará calcular  $KS$ , representando  $K$  el coeficiente de ruptura á la compresión, y

$cE \left( \frac{S}{L} \right)^2$ ; y se verificará lo primero, si

$$KS < cE \left( \frac{S}{L} \right)^2$$



y lo segundo, si

$$KS > cE \left( \frac{S}{L} \right)$$

**360.** Si la sección fuera, por ejemplo, circular, observando que

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$Z = \frac{1}{32} \pi d^3$$

$$H = d$$

tendríamos

$$KS \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{m}{2\pi} E \left( \frac{S}{L} \right)^2,$$

ó bien

$$K \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{m}{8} E \frac{d^2}{L^2};$$

de donde

$$\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \sqrt{\frac{m}{8}} \times \sqrt{\frac{E}{K}}.$$

**361.** Ahora bien; como los valores de  $m$ , para los cuatro casos considerados, son

$$1.^{\text{er}} \text{ caso} \dots\dots m = 1,234$$

$$2.^{\text{o}} \text{ íd.} \dots\dots m = 4,935$$

$$3.^{\text{o}} \text{ íd.} \dots\dots m = 9,87$$

$$4.^{\text{o}} \text{ íd.} \dots\dots m = 19,74$$

las fórmulas que determinan el origen de la ruptura del prisma serán las siguientes:

$$\text{Para el 1.º caso} \dots \frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{matrix} 0,3927 \\ 9,7854 \end{matrix} \sqrt{\frac{E}{K}}$$

$$\text{Id. 2.º íd.} \dots \frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{matrix} 9,7854 \\ 1,1107 \end{matrix} \sqrt{\frac{E}{K}}$$

$$\text{Id. 3.º íd.} \dots \frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{matrix} 1,1107 \\ 1,5708 \end{matrix} \sqrt{\frac{E}{K}}$$

$$\text{Id. 4.º íd.} \dots \frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{matrix} 1,5708 \\ \end{matrix} \sqrt{\frac{E}{K}}$$

**362.** Aceptando para K los siguientes valores:

Para la madera.....K = 500 kg. por cent.<sup>2</sup>

Id. fundición.....K = 6000 íd. íd.

Id. hierro.....K = 3000 íd. íd.

obtendremos los resultados siguientes:

| Casos.         | Madera.                                               | Fundición.                                            | Hierro.                                               |
|----------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1.º caso. .... | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 5,5$  | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 5,0$  | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 10,1$ |
| 2.º íd. ....   | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 11,1$ | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 10,1$ | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 20,2$ |
| 3.º íd. ....   | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 15,7$ | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 14,3$ | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 28,6$ |
| 4.º íd. ....   | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 22,2$ | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 20,5$ | $\frac{L}{d} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 40,5$ |

**363.** Es necesario tener muy en cuenta que estos resultados son de carácter puramente especulativo; por lo cual, en la práctica el procedimiento racional consiste en tomar, como ya se ha



dicho, una fracción de la carga capaz de originar la flexión del prisma y la misma fracción de la carga límite de elasticidad á la compresión de la materia que haya de emplearse.

### 364. Influencia del peso propio de los prismas verticales en la flexión de los mismos.

—Se comprende desde luego que un prisma empotrado por el extremo inferior y libre por el superior, pueda doblarse bajo la acción de su propio peso, que al fin no constituye otra cosa que una carga uniformemente repartida, la cual podrá alcanzar un valor tal que determine la flexión de aquél.

Sea  $p$  la carga por unidad, es decir el peso del prisma por unidad de longitud. La componente  $p'$  (figura 145) puede considerarse constante, en cuyo caso aquél resultará sometido á una carga de flexión  $p'$  por unidad de longitud.

La expresión de la flecha en tales circunstancias es, como sabemos,

$$f = \frac{1}{4} \frac{p' L^3}{Z E H}.$$

Por otra parte podemos establecer la relación

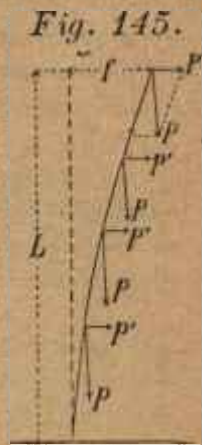
$$\frac{p'}{p} = \frac{f}{L}.$$

Resulta de la primera ecuación

$$\frac{p'}{f} = 4 \frac{Z E H}{L^3}$$

y de la segunda

$$\frac{p'}{f} = \frac{p}{L};$$



por lo tanto tendremos

$$p = 4 \frac{ZEH}{L^3};$$

expresión del peso por unidad de longitud del prisma, capaz de producir la flexión del mismo.

Ahora bien; llamando  $S$  á su sección recta y  $\delta$  á la densidad de la materia que lo constituya, resultará

$$\delta S = 4 \frac{ZEH}{L^3}.$$

Si la sección fuera circular, por ejemplo, tendríamos

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$Z = \frac{1}{32} \pi d^3$$

$$H = d;$$

y por tanto

$$\delta = \frac{1}{2} E \frac{d^2}{L^3},$$

de donde

$$L = \sqrt[3]{\frac{Ed^2}{2\delta}};$$

por cuya fórmula se determinaría la altura límite de un apoyo circular que empezará á encorvarse bajo la acción de su propio peso.



## FLEXIÓN DE LOS ARCOS.

**365. Preliminares.**—Entenderemos por *arco*, en resistencia de materiales, toda viga naturalmente curva, convexa hacia arriba y cuyos extremos están invariablemente unidos á los apoyos correspondientes.

La teoría elemental, de cuya exposición vamos á ocuparnos, supone que el arco es de sección constante y que los extremos están articulados, como con frecuencia sucede, teniendo en cuenta que semejante disposición es la más racional entre las que pudieran adoptarse.

Considerando una pieza curva, empotrada por un extremo, libre por el otro y sometida á cargas conocidas de flexión, es fácil, como pronto hemos de ver, determinar el desplazamiento total del extremo libre, y mejor aún las componentes horizontales y verticales de dicho desplazamiento, que resultan de las tensiones perfectamente definidas que se desarrollan en cada una de las secciones.

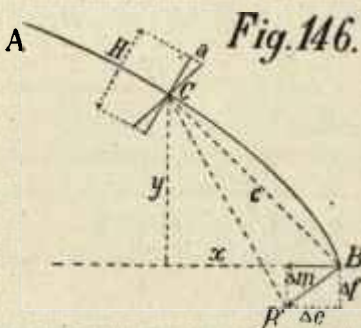
Por otra parte, y á semejanza de lo que se dijo respecto de las vigas de eje rectilíneo, podremos considerar como si estuvieran libres los extremos del arco, con tal de reemplazar los apoyos por las reacciones que desenvuelven.

De tal suerte, no es dudoso que podremos hacer aplicación de las fórmulas encontradas, para determinar los desplazamientos de los extremos de un arco en función de las reacciones desconocidas que se desarrollan en los puntos de apoyo. No hay para qué decir que tales desplazamientos son esencialmente relativos y han de referirse, por lo tanto, á un sistema de ejes móviles trazados por el vértice del arco, toda vez que en realidad el vértice es el que desciende ó sube bajo la acción de las cargas que el arco soporta, mientras que los extremos conser-

van una fijeza absoluta, suponiendo, como suponemos, á los apoyos fijos é indeformables.

Además, como cualquiera que sea la deformación total del arco, permanecen fijos sus extremos, según acabamos de decir, resulta la condición particular de que sus desplazamientos horizontales relativos son nulos: y es claro que tal condición habrá de introducirse en las fórmulas conocidas de que se haga uso. Ya veremos que procediendo de esta suerte se llegan á determinar fácilmente las componentes desconocidas de las reacciones.

**366. Fórmulas de los desplazamientos.**—Supongamos una viga curva empotrada en A (figura 146) y sometida en



sus diferentes puntos á tensiones conocidas K, K', K'' ..... etc. Ya sabemos que á estas tensiones corresponden giros de las secciones de la viga, ó como en otra ocasión se dijo, rotaciones elementales de las mismas alrededor del eje neutro; que á su vez determinan otras rota-

ciones iguales de las cuerdas de los respectivos arcos, ó lo que es lo mismo, de las rectas trazadas desde los centros de gravedad de las secciones al extremo libre del arco.

**367.** Consideremos un elemento cualquiera cuya longitud sea igual á la unidad. Sea  $a$  la deformación de las fibras más lejanas al eje neutro de la sección C.

Recordando que oportunamente establecimos (pág. 133)

$$l = \frac{PL}{ES} = \frac{K}{E} L,$$



como en el caso actual

$$\begin{aligned} l &= 1 \\ L &= a, \end{aligned}$$

resultará

$$a = \frac{K}{E}$$

A esta deformación corresponde desde luego un desplazamiento  $BB' = \Delta m$  del extremo libre del arco, y es claro que por la semejanza de los triángulos  $Ca$  y  $CBB'$ , tendremos

$$\frac{\Delta m}{a} = \frac{2c}{H},$$

siendo  $c$  la cuerda del arco  $BC$  y  $H$  la altura de la sección que se considera.

De estas últimas relaciones resulta

$$\frac{\Delta m}{c} = \frac{2K}{EH}.$$

Sea  $\Delta e$  la componente horizontal del desplazamiento  $\Delta m$ , y  $\Delta f$  la componente vertical del mismo.

Es indudable que, dada la pequeñez de tales desplazamientos, no habrá inconveniente en considerar que  $\Delta m$  es perpendicular á la cuerda  $c$ ; por lo cual, y llamando  $x, y$ , á las coordenadas del centro de gravedad de la sección que se considera, podremos establecer

$$\frac{\Delta e}{y} = \frac{\Delta f}{x} = \frac{\Delta m}{c};$$

de donde

$$\Delta e = \frac{2K}{EH} y$$

$$\Delta f = \frac{2K}{EH} x$$

Ahora bien, como las proyecciones del desplazamiento total del extremo libre son iguales respectivamente á la suma de las proyecciones de los desplazamientos elementales de dicho extremo, es claro que las componentes del total desplazamiento serán;

$$e = \frac{2}{E} \left( \frac{Ky}{H} + \frac{K'y'}{H'} + \frac{K''y''}{H''} + \dots \text{etc.} \right)$$

$$f = \frac{2}{E} \left( \frac{Kx}{H} + \frac{K'x'}{H'} + \frac{K''x''}{H''} + \dots \text{etc.} \right);$$

designando  $x, x', x'' \dots y, y', y'' \dots$  las coordenadas de los centros de gravedad de las secciones sucesivas del arco, y  $H, H', H'' \dots$  las alturas de dichas secciones.

**368. Fórmulas de la resistencia.**—Las fórmulas que preceden se aplican á la resistencia de los arcos con sólo expresar las tensiones  $K, K', K'' \dots$  en función de las reacciones desconocidas que se desenvuelven en los apoyos, ó mejor, de sus componentes horizontales y verticales.

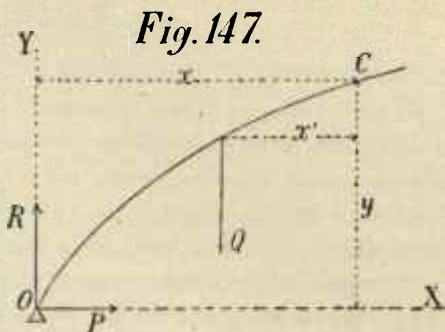
Es de notar que las reacciones verticales que los apoyos engendran son siempre fáciles de calcular, porque en definitiva no son otra cosa que las cargas efectivas que soportan, y cuya determinación estriba solamente en el conocimiento de la carga total del arco, incluso su propio peso, de la luz ó distancia horizontal entre los apoyos, de la línea de acción de la resultante de dicha carga y, por lo tanto, de sus distancias á los extremos del arco, disponiendo además de la condición de que la suma de dichas reacciones verticales ha de ser igual á la carga total.

No sucede lo propio respecto de las componentes horizontales de las reacciones en los apoyos. Sólo puede afirmarse á priori que son iguales y de contrario sentido, y su intensidad determina lo que se llama el empuje horizontal del arco.

Resulta, en último término, que la incógnita de la cuestión es el empuje horizontal, y es claro que para determinarlo bastará utilizar la primera ecuación, haciendo en ella  $e = 0$ .



**369.** Establecido esto y representando por  $P$  dicho empuje horizontal (figura 147), por  $Q$  la carga que actúa en la parte del arco comprendida entre uno de sus extremos y la sección  $C$  que se considera, por  $R$  la carga en el apoyo correspondiente, y por  $y, x', x$ , las distancias ó brazos de



palanca, de las fuerzas  $P, Q, R$ , con relación al punto  $C$ , el momento de flexión en dicho punto será:

$$M = KZ = Rx - Qx' - Py;$$

que es la fórmula principal de la resistencia de los arcos.

**370.** Se comprende desde luego que, como caso especial de la flexión compleja, el momento de flexión será una cantidad variable que cambiará de signo si para un punto intermedio cualquiera del arco se anula; pudiendo por tanto pasar por uno ó varios valores máximos ó mínimos, que son los que preferentemente importa conocer.

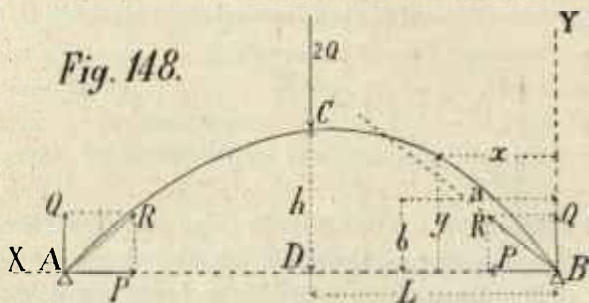
**371** Si las fuerzas exteriores que solicitan un arco las imagináramos descompuestas, cada una de ellas, en dos, perpendiculares entre sí, y de las cuales una fuera paralela á la tangente al arco en el punto que se considerase, y cuya suma representaremos por  $T$ , es claro que la sección correspondiente á aquel punto, no sólo habría de resistir al momento de flexión correspondiente, sino á la compresión determinada por dicha suma  $T$ . De aquí que la tensión máxima que se desarrolla en la sección

deba calcularse, á semejanza de los prismas sometidos á cargas oblicuas, por la fórmula conocida

$$K = \frac{T}{S} + \frac{M}{Z}.$$

Es necesario, por lo tanto, limitar la tensión de un arco de tal modo que, supuesto rectilíneo, no pueda encorvarse bajo la compresión que soporte; porque de otra suerte pudiera alcanzar un valor excesivo la deformación total, en detrimento de su estabilidad.

**372. Arco cargado de un peso en su punto medio.**  
Consideremos, primero, el caso de un arco cualquiera.



**373. CASO GENERAL.**—Sea AB el arco (figura 148).

$2L$ , la luz del mismo.

$h$ , su altura

$2Q$ , la carga en el punto medio.

Desde luego las reacciones verticales en los apoyos serán iguales y directamente opuestas á las componentes paralelas á  $2Q$  que pasan por los puntos A y B, es decir á la mitad  $Q$  de la carga.

Llamando P á la reacción horizontal desconocida, y considerando el arco empotrado por su vértice bajo la acción de la carga y de las reacciones originadas en el apoyo A, la tensión



máxima en el punto  $x, y$ , quedará definida, observando que en este caso  $x' = 0$ , por la relación

$$KZ = Qx - Py.$$

Para otro punto, la tensión máxima  $K'$ , lo estará por la ecuación

$$K'Z = Qx' - Py'$$

y así de los demás puntos del semiarco CB.

Por lo tanto, sustituyendo los valores de  $K, K' \dots$  etc., deducidos de las relaciones anteriores, en la expresión general de  $e$ , tendremos

$$e = \frac{2}{ZEH} [(Qx - Py) y + (Qx' - Py') y' + \dots \text{etc.}]$$

ó bien, y recordando que la cantidad  $\frac{2}{ZEH}$  la hemos representado por ,

$$e = \varepsilon [Q(xy + x'y' + \dots) - P(y^2 + y'^2 + \dots)]$$

ó finalmente

$$e = \varepsilon [Q\Sigma(xy) - P\Sigma(y^2)].$$

Haciendo lo propio en la expresión de  $f$ , resultará:

$$f = \varepsilon [Q(x^2 + x'^2 + \dots) - P(xy + x'y' + \dots)]$$

ó bien

$$f = \varepsilon [Q\Sigma(x^2) - P\Sigma(xy)].$$

Bajo la hipótesis de que los apoyos sean absolutamente fijos, será  $e = 0$ ; por lo tanto

$$Q\Sigma(xy) = P\Sigma(y^2),$$

de donde

$$P = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(y^2)} Q.$$

$\Sigma(xy)$  no representa otra cosa que la suma de los momentos, con relación á la recta BY, de los elementos superficiales del semisegmento BCD; por tanto, llamando A al área BCD y  $a$  á la distancia de su centro de gravedad á dicha recta, tendremos

$$\Sigma(xy) = Aa.$$

La cantidad  $\Sigma(y^2)$ , que puede escribirse bajo la forma  $2\Sigma(y \times \frac{1}{2}y)$ , se ve también que representa el duplo del momento del área A, respecto del eje AB; así es que, llamando  $b$  á la distancia de su centro de gravedad á dicho eje, tendremos

$$\Sigma(y^2) = 2Ab.$$

Por lo tanto

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{a}{b} Q.$$

**374.** Vemos, según esto, que la determinación del empuje horizontal P, depende del conocimiento de las coordenadas del centro de gravedad del semisegmento del arco, problema fácil de resolver en todos los casos en que se conozca la forma de la curva, bien por los procedimientos ordinarios de la mecánica racional ó por los especiales y suficientemente exactos de la estática gráfica.

De modo que, en último término, lo que importa conocer es:

1.º El empuje horizontal, por la relación

$$P = \frac{a}{b} \times \frac{Q}{2}.$$

2.º Los momentos máximos y mínimos, discutiendo la expresión general

$$KZ = Qx - Py.$$

3.º La flecha, es decir, el desplazamiento vertical del vértice, por la expresión

$$f = \varepsilon [Q\Sigma(x^2) - P\Sigma(xy)].$$



Recordando que

$$\Sigma(xy) = Aa$$

y observando que

$$\Sigma(x^2) = \frac{1}{2} L^2 \times \frac{2}{3} L = \frac{1}{3} L^3,$$

la fórmula anterior se transforma en la siguiente:

$$f = \epsilon \left[ \frac{1}{3} QL^3 - PAa \right].$$

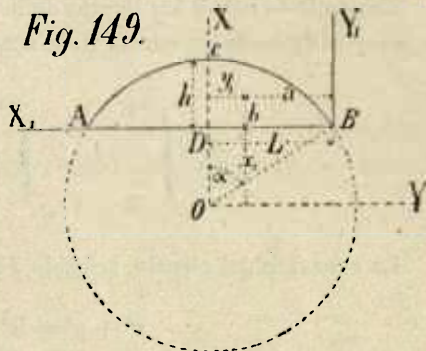
**375. Arco circular.**—Sea  $R$  el radio,  $2L$  la luz,  $h$  la altura. Determinemos ante todo las coordenadas del centro de gravedad del segmento BCD (figura 149).

Refiriendo el círculo á que el arco corresponde á los ejes  $OX_1, OY_1$ , tenemos desde luego

$$\begin{aligned} a &= L - y_1 \\ b &= x_1 - (R - h). \end{aligned}$$

La cuestión queda por tanto reducida al cálculo de las coordenadas  $x_1, y_1$  de dicho centro de gravedad, por las fórmulas establecidas en mecánica racional

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy} \\ y_1 &= \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy} \end{aligned}$$



La integral que figura en los denominadores, no representa otra cosa que el área del semisegmento, fácil de obtener directamente por la diferencia entre la del sector  $OCB = \frac{1}{2} R^2 \alpha$  y la del triángulo  $ODB = \frac{1}{2} L(R - h)$ .

Por lo tanto, el área del semisegmento será:

$$BCD = A = \frac{1}{2} [R^2 \alpha - L(R - h)].$$

Calculemos ahora el numerador de  $x_1$ .

Siendo  $R - h$ , y  $R$  los límites de la integral con relación á  $x$ , la integral definida de que se trata será:

$$\int_{R-h}^R x dx \int_0^y dy.$$

La ecuación del círculo, referido á los ejes  $OX$ ,  $OY$  es

$$x^2 + y^2 = R^2$$

de donde

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

por lo tanto

$$\int_{R-h}^R x dx \int_0^y dy = \int_{R-h}^R x dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy =$$

$$\int_{R-h}^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \int_{R-h}^R x (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$



La cantidad subintegral es una diferencial binomia, á la cual podemos aplicar la siguiente fórmula de reducción:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1}}{b(m+1+np)} - \frac{a(m-n+1)}{b(m+1+np)} \int x^{m-n} (a + bx^n)^p dx.$$

En este caso tenemos

$$\left. \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 2 \\ p = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = R^2 \\ b = -1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m - n + 1 = 0 \\ m + 1 + np = 3; \end{array} \right.$$

por lo tanto, sustituyendo en la fórmula general y observando que el coeficiente de la integral del segundo miembro se anula, resultará

$$\int x(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

y entre los límites indicados

$$\int_{R-h}^R x(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} [R^2 - (R-h)^2]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2Rh - h^2)^{\frac{3}{2}}.$$

**376.** A este resultado puede llegarse con más brevedad, procediendo en la integración del modo siguiente.

Ante todo, es claro que

$$\int_{R-h}^R x dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = \int_0^L dy \int_{R-h}^{\sqrt{R^2 - y^2}} x dx.$$

La primera integral doble es la que acabamos de tratar. Tratemos ahora la segunda y resultará:

$$\begin{aligned} \int_0^L dy \int_{R-h}^{\sqrt{R^2-y^2}} x dx &= \int_0^L dy \left[ \frac{1}{2} (R^2 - y^2) - \frac{1}{2} (R-h)^2 \right] = \\ \frac{1}{2} \int_0^L \left[ (R^2 - (R-h)^2) - y^2 \right] dy &= \frac{1}{2} (R^2 - (R-h)^2) \int_0^L dy - \\ \frac{1}{2} \int_0^L y^2 dy &= \frac{1}{2} (R^2 - (R-h)^2) L - \frac{1}{6} L^3. \end{aligned}$$

Ahora bien, en el triángulo rectángulo OBD vemos que

$$L^2 = R^2 - (R-H)^2,$$

por lo tanto, tendremos finalmente;

$$\begin{aligned} \int_{R-h}^R x dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy &= \int_0^L dy \int_{R-h}^{\sqrt{R^2-y^2}} x dx = \frac{1}{3} L^3 = \\ &= \frac{1}{3} (2Rh - h^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

como antes habíamos encontrado.

Por consiguiente el valor de  $x_1$  será

$$x_1 = \frac{2}{3} \times \frac{(2Rh - h^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 x - L(R-h)}.$$

**377.** La integral definida del numerador de  $y_1$  es



$$\int_{R-h}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \int_{R-h}^R dx \times \frac{1}{2} (R^2 - x^2) =$$

$$\frac{1}{2} R^2 \int_{R-h}^R dx - \frac{1}{2} \int_{R-h}^R x^2 dx = \frac{1}{2} R^2 h -$$

$$\frac{1}{6} [R^3 - (R-h)^3] = \frac{1}{6} (3Rh^2 - h^3),$$

ó finalmente

$$\int_{R-h}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \frac{1}{6} h^2 (3R - h);$$

por consiguiente

$$y_1 = \frac{1}{3} \times \frac{h^2 (3R - h)}{R^2 x - L(R - h)}.$$

**378.** Observando además que

$$h = R (1 - \cos \alpha)$$

$$R - h = R \cos \alpha$$

$$L = R \sin \alpha$$

las fórmulas obtenidas toman las siguientes formas:

$$x_1 = \frac{4}{3} \times \frac{\sin^2 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} R$$

$$y_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} R$$

**379.** Sustituyendo estos valores en las expresiones de  $a$  y  $b$ , tendremos

$$a = \left[ \sin \alpha - \frac{2}{3} \times \frac{2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right] R$$

$$b = \left[ \frac{4}{3} \times \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} - \cos \alpha \right] R.$$

Como es cómodo expresar  $a$  en función de  $L$ , y  $b$  en función de  $h$ , y se tiene

$$R = \frac{L}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{h}{1 - \cos \alpha},$$

resultará por último

$$a = \left[ \operatorname{sen} \alpha - \frac{2}{3} \times \frac{2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} \right] \frac{L}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$b = \left[ \frac{4}{3} \times \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} - \cos \alpha \right] \frac{h}{1 - \cos \alpha},$$

**380.** Calculadas las coordenadas  $a$ ,  $b$ , del centro de gravedad del semisegmento, por las fórmulas que preceden; la determinación del empuje horizontal, la de los máximos y mínimos del momento general de flexión y la flecha del arco, no presentaría dificultad alguna en un caso concreto cualquiera.

**381.** En efecto; supongamos que el arco fuera de  $120^\circ$ , en cuyo caso

$$\alpha = 60^\circ = \frac{1}{3} \pi$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} = 1,732$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tendríamos entonces

$$a = 0,608 L$$

$$b = 0,411 h;$$



y por tanto

$$P = \frac{304}{411} \times \frac{L}{h} Q.$$

**382.** El momento de flexión, para un punto cualquiera, será:

$$KZ = M = Q \left( x - \frac{304}{411} \times \frac{L}{h} y \right),$$

el cual es nulo por la condición

$$x = \frac{304}{411} \times \frac{L}{h} y.$$

Observando que

$$\frac{P}{Q} = \frac{304}{411} \times \frac{L}{h}$$

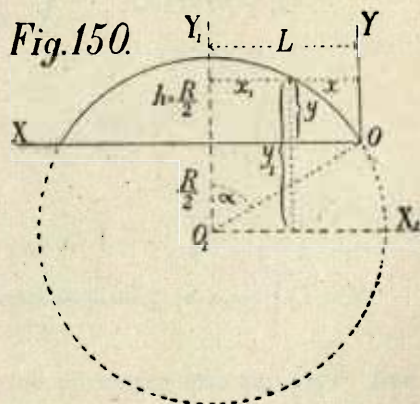
es claro que la condición anterior se reduce á

$$\frac{P}{Q} = \frac{x}{y},$$

lo que nos dice que el punto del arco en el cual el momento de flexión es nulo, es aquel en que la resultante de las reacciones  $P$  y  $Q$  encuentra á dicho arco.

**383.** Para determinar las abscisas de los puntos del arco en que el momento de flexión es mínimo, nulo ó máximo, procederemos del modo siguiente.

Sean  $OX$ ,  $OY$  los ejes coordenados á que esté referido el arco; y  $O_1X_1$ ,  $O_1Y_1$ , otros ejes



paralelos á los primeros, trazados por el centro. Desde luego, conviene referir el arco á estos últimos ejes, porque tomando la ecuación del círculo la forma más sencilla posible, se simplificará seguramente el cálculo y la discusión de  $M$ .

Tenemos para un punto cualquiera las siguientes relaciones:

$$x = L - x_1$$

$$y = y_1 - h$$

Llamando  $m$  al coeficiente  $\frac{304}{411} = 0,739$ , la expresión general de  $M$  será;

$$M = Q \left( x - m \frac{L}{h} y \right);$$

por lo tanto,

$$M = Q \left[ (m + 1) L - x_1 - m \frac{L}{h} y_1 \right];$$

pero como

$$y_1 = \sqrt{R^2 - x_1^2} = \sqrt{\frac{L^2}{\text{sen}^2 \alpha} - x_1^2}$$

y

$$\frac{L}{h} = \text{tg} \alpha,$$

tendremos

$$M = Q \left[ (m + 1) L - x_1 - m \text{tg} \alpha \sqrt{\frac{L^2}{\text{sen}^2 \alpha} - x_1^2} \right]$$

**384.** Para que esta expresión sea un mínimo ó un máximo, es necesario y suficiente que lo sea la cantidad interior al paréntesis.



De suerte que

$$f(x_1) = -x_1 - m \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{L^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - x_1^2} + (m+1)L$$

$$f'(x_1) = -1 + m \operatorname{tg} \alpha \frac{x_1}{\sqrt{\frac{L^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - x_1^2}}$$

$$f''(x_1) = m \operatorname{tg} \alpha \frac{L^2 \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{(L^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha x_1^2)^3}}$$

Ahora bien, como las condiciones del mínimo son:

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 0 \\ f''(x_1) &> 0 \end{aligned}$$

tendremos para la primera

$$\sqrt{\frac{L^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - x_1^2} = m \operatorname{tg} \alpha x_1;$$

y elevando al cuadrado y reduciendo,

$$x_1^2 (1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{L^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha};$$

de donde

$$x_1 = \frac{L}{\operatorname{sen} \alpha} \times \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

385. Recordando que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ m^2 &= 0,547 \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= 3 \end{aligned}$$

resultará:

$$x_1 = \frac{2L}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \times 0,547}}$$

y finalmente

$$x_1 = 0,71 L.$$

y

$$x = 0,29 L.$$

**386.** El valor particular de  $M$  será el siguiente

$$M = QL \left( 1,739 - 0,71 - 1,28 \sqrt{\frac{4}{3} - 0,504} \right)$$

ó bien

$$M = -0,1358 QL.$$

**387.** La abscisa del punto en que  $M = 0$ , se determinará por la condición ya establecida

$$x = m \frac{L}{h} y,$$

ó lo que es lo mismo

$$L - x_1 = m \frac{L}{h} (y_1 - h),$$

que se reduce á

$$L(1 + m) = m \frac{L}{h} y_1 + x_1.$$

Eliminando  $y_1$ , resulta

$$x_1 + m \frac{L}{h} \sqrt{\frac{L^2}{\text{sen}^2 \alpha} - x_1^2} = L(1 + m),$$

ó bien

$$x_1 + m \text{tg} \alpha \sqrt{\frac{L^2}{\text{sen}^2 \alpha} - x_1^2} = L(m + 1).$$

Para que desaparezca el radical elevemos al cuadrado la ecuación bajo la siguiente forma:

$$(m + 1)L - x_1 = m \text{tg} \alpha \sqrt{\frac{L^2}{\text{sen}^2 \alpha} - x_1^2}$$



y resultará, ordenando, reduciendo y pasando todos los términos á un solo miembro,

$$(1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) x_1^2 - 2(m + 1) L x_1 + \left[ (m + 1)^2 L^2 - m^2 \frac{L^2}{\cos^2 \alpha} \right] = 0$$

de donde

$$x_1 = \frac{(m + 1) \pm \sqrt{(m + 1)^2 - (1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \left( (m + 1)^2 - \frac{m^2}{\cos^2 \alpha} \right)}}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} L.$$

Ahora bien, tenemos

$$\begin{aligned} m + 1 &= 1,739 \\ (m + 1)^2 &= 3,025 \\ 1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \alpha &= 2,641 \\ \frac{m^2}{\cos^2 \alpha} &= 2,188; \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x_1 = \frac{1,739 \pm 0,902}{2,641} L$$

y separando los dos valores que resultan para  $x_1$ , tendremos;

$$\begin{aligned} x_1 &= L \\ x_1 &= 0,3169 L \end{aligned}$$

los cuales corresponden á los siguientes de  $x$ :

$$\begin{aligned} \text{Para } x_1 &= L \dots\dots\dots x = 0 \\ \text{, } x_1 &= 0,3169 L \dots\dots\dots x = 0,683 L; \end{aligned}$$

de donde resulta que hay dos puntos en el semiarco, en los cuales el momento de flexión es nulo, á saber: el extremo del apoyo y aquel que dista de dicho apoyo en sentido horizontal 0,683 L.

**388.** El momento, pues, crece negativamente desde 0, en el apoyo, hasta el punto cuya abscisa es  $x = 0,29L$ , en que alcan-

za su valor mínimo. De aquí en adelante continúa creciendo, y como se anula para  $x = 0,683L$ , y las mismas variaciones presenta el momento de flexión para la otra mitad del arco, pero contadas las distancias al correspondiente extremo, y por tanto en sentido inverso, claro es que por esto y por la igualdad de los valores de  $M$  en magnitud y en signo para los puntos simétricamente situados respecto del diámetro vertical, debe corresponder un valor máximo de dicho momento para el punto medio del arco, es decir, para  $x = L$  ó  $x_1 = 0$ .

Dicho máximo es el siguiente:

$$M = Q \left[ (m+1)L - m \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{L^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha}} \right] = QL \left[ (m+1) - \frac{m}{\cos \alpha} \right],$$

cuyo valor numérico resulta

$$M = 0,26 QL.$$

**389.** Respecto á la deformación total del arco, ya hemos visto que la expresión general de la flecha es

$$f = \varepsilon \left( \frac{1}{3} QL^3 - PAa \right).$$

En el caso actual tenemos

$$P = \frac{304}{411} \times \frac{L}{h} Q = \frac{304}{411} \operatorname{tg} \alpha Q = \frac{304 \sqrt{3}}{411} Q,$$

ó finalmente

$$P = 1,281 Q.$$

Siendo  $A$  la diferencia entre el sector y el triángulo rectángulo que indica la figura, y como dichas áreas son:

$$\text{Sector} = \frac{1}{2} R^2 \alpha = \frac{1}{6} \pi R^2$$

$$\text{Triángulo} = \frac{1}{4} RL;$$



ó bien, teniendo en cuenta que

$$R^2 = \frac{4}{3} L^2$$

$$R = \frac{2}{\sqrt{3}} L$$

$$\text{Sector} = \frac{2}{9} \pi L^2$$

$$\text{Triángulo} = \frac{1}{2\sqrt{3}} L^2$$

tendremos

$$A = \left( \frac{2}{9} \pi - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) L^2$$

ó finalmente

$$A = 0,4091 L^2.$$

Pero hemos visto antes que

$$a = 0,608 L.$$

Así tendremos

$$PAa = 0,32 QL^3;$$

y por tanto resultará

$$f = \varepsilon QL^3 \left( \frac{1}{3} - 0,32 \right),$$

ó bien, con la aproximación suficiente,

$$f = \frac{1}{100} \varepsilon QL^3.$$

**390. Arco parabólico.**—Las coordenadas del centro de

gravedad del semisegmento del arco parabólico que ahora consideramos son:

$$a = \frac{5}{8} L$$

$$b = \frac{2}{5} h$$

de donde

$$P = \frac{a}{b} \times \frac{Q}{2} = \frac{25}{32} \times \frac{L}{h} Q.$$

La expresión general del momento de flexión, para un punto cualquiera  $xy$ , será, por lo tanto;

$$M = KZ = Q \left( x - \frac{25}{32} \times \frac{L}{h} y \right).$$

Dicho momento será nulo cuando se verifique la condición

$$x = \frac{25}{32} \times \frac{L}{h} y,$$

ó bien, cuando

$$\frac{P}{Q} = \frac{x}{y},$$

lo que nos dice que, á semejanza de lo que sucedía en el caso anterior, el punto del arco en que el momento de flexión es nulo, queda gráficamente determinado por la intersección del arco con la línea de acción de la resultante de las reacciones  $P$  y  $Q$ .

**391.** Para discutir la expresión de  $M$ , conviene referir la parábola á su vértice; entonces su ecuación será de la forma

$$y_1^2 = mx_1;$$

pero como se verifica que

$$\text{para } x_1 = h,$$

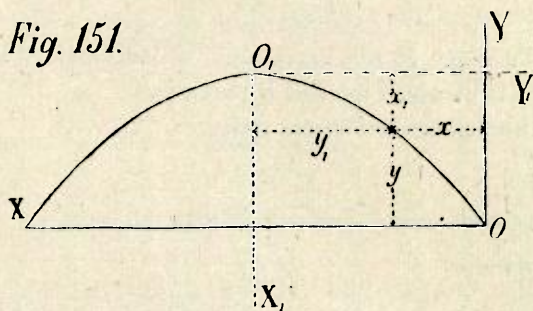
$$y_1 = L,$$



resultará

$$L^2 = mh,$$

Fig. 151.



de donde

$$m = \frac{L^2}{h};$$

y por tanto la ecuación será

$$y_1^2 = \frac{L^2}{h} x_1.$$

Las ecuaciones para pasar de los ejes  $X_1Y_1$  á los  $XY$  son, según se ve en la figura,

$$\begin{aligned} y_1 &= L - x \\ x_1 &= h - y; \end{aligned}$$

por tanto

$$(L - x)^2 = \frac{L^2}{h} (h - y),$$

de donde

$$y = \frac{h}{L} \left( 2x - \frac{x^2}{L} \right),$$

y sustituyendo este valor de  $y$  en la expresión de  $M$ , tendremos

$$M = Q \left( x - \frac{25}{32} \left( 2x - \frac{x^2}{L} \right) \right),$$

ó bien

$$M = \frac{Q}{32L} (25x^2 - 18Lx).$$

**392.** Para que  $M$  sea un mínimo, es necesario y suficiente que lo sea la cantidad interior al paréntesis.

Las condiciones del mismo son;

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ f''(x) &> 0. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} f(x) &= 25x^2 - 18Lx \\ f'(x) &= 50x - 18L \\ f''(x) &= 50. \end{aligned}$$

De la primera, que es en este caso

$$50x - 18L = 0,$$

resulta

$$x = \frac{9}{25} L,$$

y como la segunda se verifica desde luego, el mínimo de  $M$  será

$$M = \frac{Q}{32L} \left[ 25 \left( \frac{9L}{25} \right)^2 - 18 \left( \frac{9L}{25} \right) L \right],$$

y efectuando,

$$M = -\frac{81}{800} QL,$$

ó muy próximamente y en términos más sencillos,

$$M = -\frac{1}{10} QL.$$



**393.** El momento máximo, correspondiente al punto medio del arco, supone la condición  $x = L$ ; por tanto, su valor será

$$M = \frac{1}{32} \times \frac{Q}{L} (25 L^2 - 18 L^2),$$

ó bien

$$M = \frac{7}{32} QL.$$

**394.** La flecha la calcularemos por la fórmula general

$$f = \varepsilon \left( \frac{1}{2} QL^3 - PAa \right),$$

la cual se convierte en este caso, recordando que

$$P = \frac{25}{32} \times \frac{L}{h} Q$$

$$A = \frac{3}{2} Lh$$

$$a = \frac{5}{8} L,$$

en la siguiente:

$$f = \varepsilon \left( \frac{1}{3} QL^3 - \frac{25}{32} \times \frac{L}{h} \times \frac{2}{3} Lh \frac{5}{8} LQ \right),$$

y efectuando operaciones indicadas,

$$f = \frac{1}{128} \varepsilon QL^3.$$

**395. Arco cargado en un punto cualquiera.**—No siendo simétricas las deformaciones del arco en el caso que se considera, es claro que los desplazamientos relativos horizontales de sus extremos, con relación al punto en que actúa la carga, no serán nulos ciertamente; pero se comprende desde luego

que la suma de dichos desplazamientos será igual á cero, puesto que cualquiera que sea la deformación total del arco, aquellos serán forzosamente iguales y de signo contrario.

Podremos por tanto establecer como condición característica del caso que nos ocupa

$$e + e' = 0.$$

**396.** Es evidente, por otra parte, que las reacciones horizontales serán, como siempre, iguales entre sí, y de sentido contrario, y que las reacciones verticales serán distintas, siendo la mayor la correspondiente al apoyo más próximo al punto de aplicación de la carga.

Siendo  $2Q$  la carga, dichas reacciones las representaremos por  $P, R, R'$  (fig. 152).

**397.** Sea  $A_1$  el segmento de la izquierda,  $A_2$  el de la derecha, y  $a_1, b_1$  y  $a_2, b_2$  las coordenadas de sus centros de gravedad respecto de los ejes  $X_1 Y_1, X_2 Y_2$ .

Las expresiones de  $e$  y  $e'$  serán las siguientes:

$$e = [R \Sigma (x_1 y_1) - P \Sigma (y_1^2)] \varepsilon,$$

$$e' = [R' \Sigma (x_2 y_2) - P \Sigma (y_2^2)] \varepsilon.$$

Ahora bien, tenemos

$$\Sigma (x_1 y_1) = A_1 a_1$$

$$\Sigma (x_2 y_2) = A_2 a_2$$

$$\Sigma (y_1^2) = 2 A_1 b_1$$

$$\Sigma (y_2^2) = 2 A_2 b_2,$$

por lo tanto;

$$e = \varepsilon [R A_1 a_1 - 2 P A_1 b_1]$$

$$e' = \varepsilon [R' A_2 a_2 - 2 P A_2 b_2]$$

pero como, según establecimos antes,

$$e + e' = 0,$$



tendremos

$$2P(A_1 b_1 + A_2 b_2) = RA_1 a_1 + R'A_2 a_2.$$

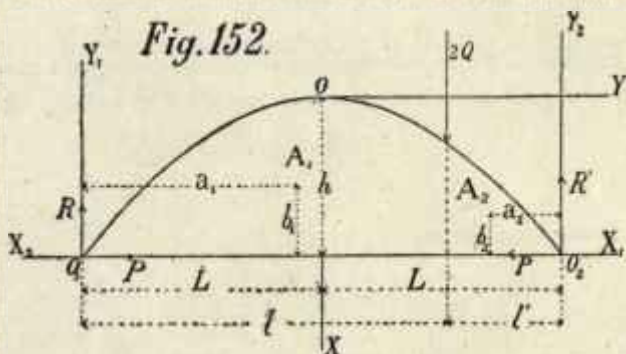
Representando por  $\eta$  la ordenada del centro de gravedad del segmento total  $A_1 + A_2$ , es claro que

$$A_1 b_1 + A_2 b_2 = (A_1 + A_2) \eta,$$

por consiguiente, la condición anterior toma la forma

$$2P(A_1 + A_2) \eta = RA_1 a_1 + R'A_2 a_2.$$

**398.** El conocimiento de  $P$  exige el de las reacciones verticales; pero estas se calculan fácilmente tomando los momentos



de  $2Q$ ,  $R$  y  $R'$ , con relación á las verticales trazadas por los extremos del arco. Así resulta

$$R \times 2L = 2Q \times l'$$

$$R' \times 2L = 2Q \times l,$$

de donde

$$R = \frac{l'}{L} Q$$

$$R' = \frac{l}{L} Q.$$

Sustituyendo tendremos

$$2P (A_1 + A_2) \eta = \frac{Q}{L} (A_1 a_1 l' + A_2 a_2 l),$$

de donde

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1 a_1 l' + A_2 a_2 l}{2L (A_1 + A_2) \eta}.$$

**399.** Si se tratara, por ejemplo, de un arco parabólico, la relación que precede la calcularíamos del modo siguiente:

La ecuación de la parábola referida á su vértice es

$$y^2 = \frac{L^2}{h} x.$$

Las fórmulas de transformación de coordenadas para el segmento  $A_1$  por ejemplo, son, con relación á los ejes  $O_1 X_1$ ,  $O_1 Y_1$ .

$$\begin{aligned} x &= h - y_1 \\ y &= x_1 - L \end{aligned}$$

por lo tanto, tendremos;

$$(x_1 - L)^2 = \frac{L^2}{h} (h - y_1),$$

de donde

$$y_1 = 2 \frac{h}{L} x_1 - \frac{h}{L^2} x_1^2.$$

El momento  $A_1 a_1$  tiene por expresión

$$A_1 a_1 = \iint x_1 dx_1 dy_1,$$

y entre los límites correspondientes al segmento de que se trata

$$A_1 a_1 = \int_0^l x_1 dx_1 \int_0^{2 \frac{h}{L} x_1 - \frac{h}{L^2} x_1^2} dy_1$$



Efectuando el cálculo resultará

$$A_1 a_1 = \int_0^l x_1 dx_1 \left( 2 \frac{h}{L} x_1 - \frac{h}{L^2} x_1^2 \right) = 2 \frac{h}{L} \int_0^l x_1^2 dx_1 - \frac{h}{L^2} \int_0^l x_1^3 dx_1 = \frac{2}{3} \times \frac{h}{L} l^3 - \frac{1}{4} \times \frac{h}{L^2} l^4.$$

ó finalmente

$$A_1 a_1 = \frac{h}{L} l \left( \frac{2}{3} l^2 - \frac{1}{4} \times \frac{l^3}{L} \right)$$

Del mismo modo encontraríamos, refiriendo el segmento  $A_2$  á los ejes  $O_2 X_2$ ,  $O_2 Y_2$ ,

$$A_2 a_2 = \frac{h}{L} l' \left( \frac{2}{3} l'^2 - \frac{1}{4} \times \frac{l'^3}{L} \right).$$

Por otra parte

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{4}{3} hL \\ \eta &= \frac{2}{5} h \end{aligned} \right\} (A_1 + A_2) \eta = \frac{8}{15} h^2 L.$$

Por lo tanto, sustituyendo en la expresión general de  $\frac{P}{Q}$ , tendremos

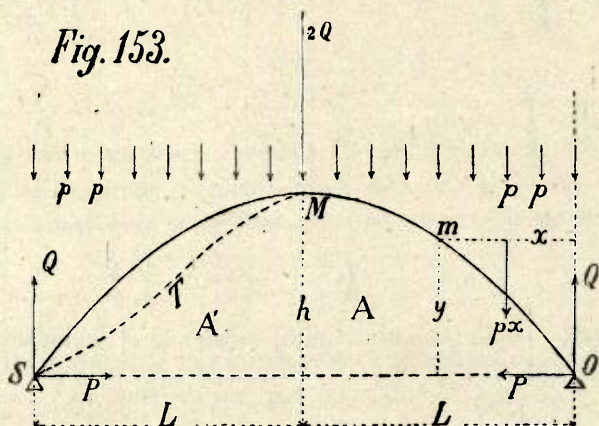
$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{h}{L} l l' \left( \frac{2}{3} (l^2 + l'^2) - \frac{1}{4} \times \frac{l^3 + l'^3}{L} \right)}{\frac{16}{15} h^2 L^2}$$

ó finalmente

$$\frac{P}{Q} = \frac{15}{16} \times \frac{l l'}{h L^2} \left[ \frac{2}{3} (l^2 + l'^2) - \frac{1}{4} \times \frac{l^3 + l'^3}{L} \right].$$

**400. Carga uniformemente repartida en proyección horizontal.**—Sea  $2L$  la luz del arco,  $p$  la carga por unidad de proyección horizontal del mismo, y  $2Q$  la carga total. (fig. 153).

*Fig. 153.*



Desde luego tenemos

$$Q = pL$$

$$R = R' = Q$$

El momento de flexión en un punto cualquiera  $m$  será

$$M = KZ = Qx - px \frac{x}{2} - Py;$$

ó substituyendo en lugar de  $p$  su valor en función de  $Q$ ,

$$KZ = Qx - \frac{1}{2} \times \frac{Q}{L} x^2 - Py.$$

Observando que, por virtud de la simetría de las deformaciones de los semiarcos, el desplazamiento relativo horizontal de cada uno de los extremos es nulo, y recordando que la fórmula general de dicho desplazamiento es

$$e = \frac{2}{EH} (Ky + K'y' + K''y'' + \dots \text{etc.});$$



si sustituimos en vez de  $K$ ,  $K'$ , etc. sus valores correspondientes deducidos de la expresión general del momento de flexión, tendremos

$$e = \frac{2}{ZEH} \left[ Q\Sigma(xy) - \frac{1}{2} \times \frac{Q}{L} \Sigma(x^2y) - P\Sigma(y^2) \right] = 0$$

de donde

$$P\Sigma(y^2) = Q\Sigma(xy) - \frac{1}{2} \times \frac{Q}{L} \Sigma(x^2y).$$

Llamando  $A$  al semisegmento  $OMN$ ;  $a_x$  y  $b$  á las coordenadas de su centro de gravedad, podremos establecer:

$$\Sigma(y^2) = 2Ab$$

$$\Sigma(xy) = Aa.$$

La tercera suma puede escribirse del modo siguiente:

$$\frac{1}{2} \times \frac{Q}{L} \Sigma(x^2y) = \frac{1}{2} Q\Sigma \left[ x \left( \frac{x}{L} y \right) \right]$$

y bajo esta forma se ve inmediatamente que representa la suma de los momentos de las ordenadas especiales  $\frac{x}{L} y$ , fáciles de deducir; puesto que son las reducidas de  $y$  en la relación correspondiente  $\frac{x}{L}$ .

Dichas ordenadas reducidas determinan una curva, tal como la STM; y es claro, que llamando  $A'$  al arco limitado por ella, el eje de abscisas y las ordenadas extremas, y  $a'$  á la abscisa de su centro de gravedad, tendremos

$$\Sigma \left[ x \left( \frac{x}{L} y \right) \right] = A'a'.$$

Por otra parte

$$A' = \Sigma x \frac{y}{L} = \frac{1}{L} \Sigma(xy);$$

de donde resulta

$$A' = \frac{I}{L} Aa.$$

Por tanto, tendremos

$$\frac{I}{2} \times \frac{Q}{L} \Sigma (x^2 y) = \frac{I}{2} \times \frac{Q}{L} Aaa',$$

y substituyendo en la fórmula general, resultará

$$2PAb = AaQ - \frac{I}{2} \times \frac{Q}{L} Aaa';$$

de donde

$$\frac{P}{Q} = \frac{I}{2} \times \frac{a}{b} \left( 1 - \frac{I}{2} \times \frac{a'}{L} \right).$$

**401.** Supongamos que se trate de un arco parabólico.

La ecuación de la parábola referida á los ejes trazados por un extremo del arco paralelamente á los ejes principales, sabemos que es:

$$y = 2 \frac{h}{L} x - \frac{h}{L^2} x^2.$$

La ecuación de la curva STM se obtendrá, substituyendo en esta última ecuación en vez de  $y$  su valor en función de  $y_1$ , siendo

$$y_1 = \frac{x}{L} y, \text{ de donde } y = \frac{L}{x} y_1.$$

Por tanto resultará

$$y_1 = 2 \frac{h}{L^2} x^2 - \frac{h}{L^3} x^3.$$

La abscisa  $a'$  del centro de gravedad del semisegmento  $A'$ , tiene por expresión



$$a' = \frac{\int_0^L x dx \int_0^{2\frac{h}{L^2}x^2 - \frac{h}{L^3}x^3} dy_1}{\int_0^L dx \int_0^{2\frac{h}{L^2}x^2 - \frac{h}{L^3}x^3} dy_1}$$

Efectuando la integración indicada en el numerador resultará

$$\begin{aligned} \int_0^L x dx \int_0^{2\frac{h}{L^2}x^2 - \frac{h}{L^3}x^3} dy_1 &= \int_0^L x dx \left( 2\frac{h}{L^2}x^2 - \frac{h}{L^3}x^3 \right) = \\ &= 2\frac{h}{L^2} \int_0^L x^3 dx - \frac{h}{L^3} \int_0^L x^4 dx = \frac{3}{10} hL^2. \end{aligned}$$

El denominador representa el área  $A'$ , y tendremos

$$\begin{aligned} A' &= \int_0^L dx \int_0^{2\frac{h}{L^2}x^2 - \frac{h}{L^3}x^3} dy_1 = \int_0^L dx \left( 2\frac{h}{L^2}x^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{h}{L^3}x^3 \right) = 2\frac{h}{L^2} \int_0^L x^2 dx - \frac{h}{L^3} \int_0^L x^3 dx = \frac{5}{12} hL. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a' = \frac{\frac{3}{10} hL^2}{\frac{5}{12} hL} = \frac{18}{25} L.$$

Tenemos además, como sabemos,

$$a = \frac{5}{8} L,$$

$$b = \frac{2}{5} h,$$

por consiguiente, sustituyendo en la expresión de  $\frac{P}{Q}$  los valores encontrados para  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ , resultará,

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \times \frac{L}{h}.$$

Multiplicando miembro á miembro las ecuaciones

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{L}{h} Q$$

$$y = 2 \frac{h}{L} x - \frac{h}{L^2} x^2,$$

resulta

$$Py = Qx - \frac{1}{2} \frac{Q}{L} x^2,$$

y así se ve que la expresión general de  $M$  es constantemente nula, es decir, que para cualquier punto del arco el momento de flexión es nulo, estando por consecuencia sometido aquél únicamente á esfuerzos de compresión, por cuyo motivo puede considerarse el arco en este caso como si fuese una cadena de puente colgante, rígida é invertida.

La compresión en el vértice es evidentemente igual á  $P$ , y la reacción total en los apoyos será, como desde luego se deduce:

$$T = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

ó bien

$$T = Q \sqrt{1 + \left(\frac{L}{2h}\right)^2}$$



**402. Caso en que la carga está uniformemente repartida sobre el arco.**—Sea  $q$  la carga por unidad de arco;  $s$  una parte del mismo, contada desde uno de los apoyos;  $x, y$  las coordenadas del extremo de dicha parte;  $x'$  la distancia de este extremo á la vertical trazada por el punto medio del arco  $s$ , y  $Q = qs$  la carga que obra sobre el semiarco  $S$ .

El momento de flexión en el punto  $x, y$ , será (figura 154):

$$M = Rx - qsx' - Py.$$

Ahora bien

$$qs = \frac{s}{S} Q$$

$$R = Q,$$

por lo tanto

$$M = KZ = Qx - Q \frac{s}{S} x' - Py.$$

Como el desplazamiento relativo horizontal es nulo, sustituyendo en la expresión general de  $e$  los valores de  $K$  deducidos de la fórmula que precede, tendremos:

$$\frac{2}{ZEH} \left[ Q \Sigma(xy) - Q \frac{s}{S} \Sigma(x'y) - P \Sigma(y^2) \right] = 0,$$

de donde

$$P \Sigma(y^2) = Q \left[ \Sigma(xy) - \Sigma \left( \frac{s}{S} \times \frac{x'}{x} y \right) x \right].$$

Aceptando las mismas notaciones que en el caso anterior tendremos también

$$\Sigma(y^2) = 2Ab$$

$$\Sigma(xy) = Aa$$

$$\Sigma \left[ \left( \frac{s}{S} \times \frac{x'}{x} y \right) x \right] = A'a',$$

siendo  $\frac{s}{S} \times \frac{x'}{x}$  y las ordenadas especiales de la curva correspondiente al área  $A'$ , según se indica en la figura.



La relación que antecede toma, por tanto, la siguiente forma:

$$2Pab = Q (Aa - A'a'),$$

de donde

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} - \frac{A'}{A} \times \frac{a'}{b} \right).$$

Las ordenadas de la curva MNV son las reducidas de las del arco en la relación correspondiente  $\frac{s}{S} \times \frac{x'}{x}$ .

La ecuación de dicha curva pudiera obtenerse sustituyendo en la correspondiente del arco, en vez de  $y$  su valor en función de  $y_1$  que es

$$y = \frac{S}{s} \times \frac{x}{x'} y_1;$$

pero  $s$  y  $x'$  son evidentemente funciones de  $x$ , de suerte que sería necesario reemplazar sus valores generales en función de la variable independiente  $x$ .

Llamando  $x''$  á la abscisa del arco  $\frac{s}{2}$ , es claro que

$$x' = x - x''.$$



El valor de  $s$  es

$$s = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

El de  $\frac{s}{2}$  es

$$\frac{s}{2} = \int dx'' \sqrt{1 + \left(\frac{dy''}{dx''}\right)^2},$$

por tanto, para determinar el valor de  $x'$  en función de  $x$  sería necesario resolver la segunda de las últimas ecuaciones que acabamos de establecer.

**403.** Por las dificultades de este cálculo y por lo complejo de la forma con que en general resulta el valor de  $s$ , el procedimiento de cálculo analítico seguido en el caso anterior presenta en éste inconvenientes de importancia que lo hacen de difícil ó imposible aplicación.

Por este motivo, para las necesidades de la práctica bastará determinar gráficamente los valores de  $s$  y de  $x'$  con lo cual, y determinando entonces los correspondientes de  $y_1$ , será fácil fijar los puntos necesarios de la curva M N V, y calcular por consecuencia el área  $A'$  con los planímetros, y determinar por último el centro de gravedad del área  $A'$ , bien por los medios que proporciona la Estática gráfica ó ya recortando dicha área en cartulina ó cartón de pasta homogénea y espesor uniforme y hallando el punto de encuentro de las verticales correspondientes á dos puntos de suspensión convenientemente elegidos.

## TORSIÓN.

**404. Preliminares.**—Si consideramos un prisma empujado por uno de sus extremos y sometido por el otro á la

acción de un par exterior cuyo plano sea perpendicular al eje de aquél, el prisma se deformará, girando todas sus secciones rectas alrededor de dicho eje la cantidad necesaria para que las tensiones moleculares desarrolladas equilibren al par exterior.

Todas las fibras longitudinales del prisma adquieren una forma helicoidal; y es claro que admitiendo que las tensiones que aquellas desenvuelven sean proporcionales á las deformaciones que experimentan, resultará como consecuencia que dichas tensiones serán asimismo directamente proporcionales á las distancias de las fibras al eje de rotación.

**405.** Claro es también que la suma de las tensiones desarrolladas en la totalidad de una sección recta cualquiera del prisma proviene exclusivamente del desplazamiento relativo de sus moléculas, originado por la rotación elemental que le corresponde, respecto de sus secciones inmediatas.

Ahora bien; para que se verifique dicha rotación elemental es necesario y suficiente que la sección se halle sometida á un par situado en su plano. Por lo tanto podremos decir, que una sección recta de un prisma experimenta una torsión elemental, cuando se encuentra solicitada por un par situado en el plano de dicha sección.

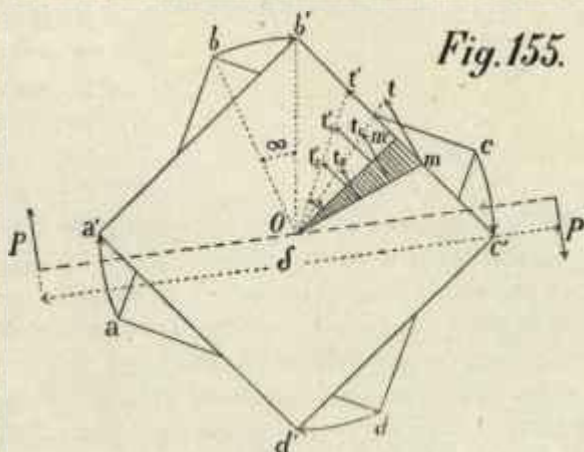
Se comprende desde luego que la acción del par no será otra, como acabamos de decir, que determinar una rotación de aquella alrededor de uno de sus puntos, el cual será su centro de simetría ó de figura, cuando, como acontece de ordinario, sea regular la sección recta del prisma.

**406.** En realidad la torsión no es más que un caso particular de la acción cortante; pues así como en ésta los desplazamientos de las moléculas se deben á un movimiento de traslación, común á todas ellas, en la torsión resultan del movimiento de rotación alrededor de un punto de la sección, y cuyo movimiento se efectúa en su plano, como en el caso anterior. De aquí



que pueda decirse que la torsión no es más que una acción cortante circular.

**407. Ecuación de equilibrio en la torsión elemental.**— Sean (fig. 155)  $abcd$ ,  $a'b'c'd'$ , dos secciones inmediatas en



la posición que toman por virtud de la rotación elemental  $\alpha$  de una de ellas alrededor del centro  $o$ , y originada por el par  $P, -P$ , cuyo brazo de palanca es  $\delta$ .

Sea  $omn$  un sector elemental cualquiera. Las tensiones desarrolladas por cada uno de sus elementos son, como sabemos, proporcionales á sus respectivos desplazamientos; por tanto, lo serán también á sus distancias al centro de rotación  $o$ .

Según esto, si para dar expresión más gráfica al razonamiento, trazamos, perpendicularmente al plano de la sección y por cada elemento del sector, rectas de longitud proporcional á las tensiones  $t, t_1, t_2, \dots, t', t'_1, t'_2, \dots$  etc.; es claro que su conjunto ocupará el volumen de una pirámide, tal como la  $omn$  (fig. 156); y por consiguiente la suma de las tensiones desarrolladas por las moléculas de un sector elemental podremos representarla por el volumen de la pirámide indicada y que llamaremos  $v$ .





**409. Relación entre el módulo de torsión y el de flexión.**—Entre estos módulos existe una relación muy sencilla y de gran utilidad que ahora demostraremos; es á saber:

*El módulo de torsión de una figura regular es igual al duplo de su menor módulo de flexión.*

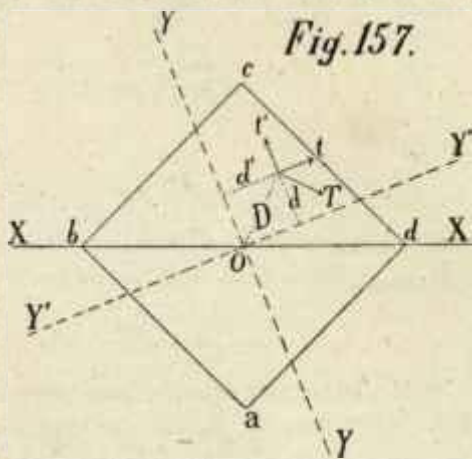
En efecto: sea *abcd* (fig. 157) una figura regular cualquiera, un cuadrado por ejemplo, y consideremos las flexiones elementales alrededor de los ejes rectangulares *Y, Y'*; y la torsión elemental alrededor del centro *o*.

Sean *t, t'* las tensiones desarrolladas en dichas flexiones por una fibra, y *T* la correspondiente á la torsión.

Si *d, d'* y *D* son las distancias respectivas de la fibra que se considera á los ejes neutros y al centro *o*, podremos desde luego establecer la relación siguiente:

$$d^2 + d'^2 = D^2.$$

Considerando que en la torsión y flexiones elementales, á que imaginamos sometida la sección propuesta, los ángulos descritos alrededor de los ejes *Y, Y'* y del centro *o*, sean los mismos, es evidente que para toda fibra situada sobre uno cualquiera de los ejes neutros, la tensión que desarrolla será la misma para la flexión que para la torsión; y por tanto las tensiones *t, t', T* serán proporcionales á sus distancias á los ejes ó centros respectivos.



Por lo tanto podremos establecer

$$\frac{t}{d} = \frac{t'}{d'} = \frac{T}{D},$$

ó bien, teniendo en cuenta que una fracción no se altera cuando se multiplican sus dos términos por una misma cantidad, tendremos;

$$\frac{dt}{d^3} = \frac{d't'}{d'^3} = \frac{DT}{D^3},$$

de donde

$$\frac{dt + d't'}{d^3 + d'^3} = \frac{DT}{D^3};$$

y finalmente

$$dt + d't' = DT.$$

Verificándose esta relación para todas las fibras, resultará

$$\Sigma(dt) + \Sigma(d't') = \Sigma(DT).$$

Las sumas del primer miembro no representan otra cosa que los momentos de flexión de la sección considerada, respecto de los ejes Y, Y'. La tercera suma representa el momento de torsión de aquella. Considerando que la figura de que se trata es regular, es claro que

$$\Sigma(dt) = \Sigma(d't') = KZ$$

y como

$$\Sigma(DT) = K_0 Z_0$$

tendremos

$$K_0 Z_0 = 2KZ.$$

En esta fórmula K representa el coeficiente de resistencia á la flexión de la fibra más lejana de cualquiera de los ejes Y ó Y', y  $K_0$  el coeficiente de resistencia á la torsión de la misma



fibra; pero como este último coeficiente debe referirse á la fibra más lejana del centro de rotación, para que  $Z_0$  represente el módulo de torsión, tal como lo hemos definido, es claro que bastará elegir aquellos ejes respecto de los cuales se verifique que  $K = K_0$ ; y en el caso actual, se ve desde luego que son las diagonales del cuadrado.

Por lo tanto, refiriendo el módulo de flexión al eje X, tendríamos

$$2KZ = KZ_0$$

de donde

$$Z_0 = 2Z,$$

como queríamos demostrar; puesto que Z, como puede fácilmente comprobarse, es el menor módulo de flexión de la sección cuadrada.

#### MÓDULOS DE TORSIÓN DE LOS PERFILES Ó SECCIONES USUALES.

**410. Sección circular llena.**—Hemos visto oportunamente que el módulo de flexión del círculo macizo era

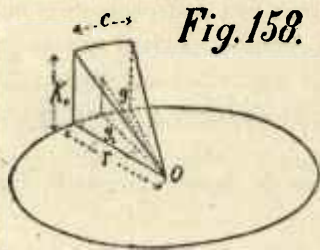
$$Z = \frac{1}{4} \pi r^3 = \frac{1}{32} \pi d^3,$$

y por tanto el módulo de torsión será

$$Z_0 = 2Z = \frac{1}{2} \pi r^3 = \frac{1}{16} \pi d^3.$$

No hay para qué decir que en la sección circular, el módulo de flexión es constante, cualquiera que sea el eje neutro á que se refiera.

**411.** El valor de  $Z_0$  puede obtenerse directamente como sigue.

**Fig. 158.**

Sea  $v$  (fig. 158) el volumen de la pirámide que representa la suma de las tensiones desarrolladas por un sector circular elemental; y  $x = og$ , la proyección, sobre el plano de la sección, de la recta  $og$  que une el vértice  $o$  con el centro de gravedad de dicha pirámide.

Tendremos

$$v = \frac{1}{3} c K_0 r,$$

$$x = \frac{3}{4} r,$$

y como expresión del momento de la pirámide elemental

$$vx = \frac{1}{4} c K_0 r^2.$$

Efectuando la suma de términos análogos para todos los sectores, resultará

$$K_0 Z_0 = VX = \Sigma(vx) = \frac{1}{4} K_0 r^2 \Sigma(c);$$

pero

$$\Sigma(c) = 2\pi r,$$

por lo tanto

$$K_0 Z_0 = \frac{1}{2} \pi r^3 K_0;$$

de donde

$$Z_0 = \frac{1}{2} \pi r^3 = \frac{1}{16} \pi d^3,$$

como habíamos establecido.

**412. Círculo hueco ó corona circular.**—Llamando  $D$



y  $d$  á los diámetros exterior é interior, sabemos que el módulo de flexión en este caso es

$$Z = \frac{1}{32} \pi \frac{D^4 - d^4}{D},$$

por lo tanto, según la propiedad demostrada, el módulo correspondiente de torsión será

$$Z_0 = \frac{1}{16} \pi \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

413. En efecto; operando directamente y siguiendo un procedimiento análogo al que empleamos en la flexión, tendremos

$$V_1 X_1 = \frac{1}{2} \pi R^3 K_0$$

$$v x = \frac{1}{2} \pi r^3 k_0$$

de donde

$$VX = \frac{1}{2} \pi (R^3 K_0 - r^3 k_0).$$

Es evidente, por otra parte, que

$$\frac{k_0}{K_0} = \frac{r}{R},$$

por tanto

$$K_0 Z_0 = VX = \frac{1}{2} \pi \left( R^3 K_0 - \frac{r^3 K_0}{R} \right),$$

ó bien

$$K_0 Z_0 = \frac{1}{2} \pi \frac{R^4 - r^4}{R} K_0,$$

de donde

$$Z_0 = \frac{1}{2} \pi \frac{R^4 - r^4}{R} = \frac{1}{16} \pi \frac{D^4 - d^4}{D},$$

según habíamos indicado.

414. Cuando el espesor  $e$  del cilindro hueco sea relativamente pequeño respecto del diámetro medio  $\delta$ , puede obtenerse una fórmula aproximada de  $Z_0$ , que conviene conocer por lo sencillo de su forma.

Tenemos desde luego las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} D + d &= 2\delta, & D &= \delta + e, \\ D - d &= 2e, & d &= \delta - e, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{[(\delta + e)^2]^2 - [(\delta - e)^2]^2}{\delta + e},$$

expresión que se reduce á

$$\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{8(\delta^2 + e^2)\delta e}{\delta + e},$$

y despreciando los sumandos,  $e^2$  en el numerador y  $e$  en el denominador, resultará

$$\frac{D^4 - d^4}{D} = 8\delta^2 e,$$

de donde

$$Z_0 = \frac{1}{2} \pi \delta^3 e.$$

**415. Sección cuadrada llena.** — Correspondiendo la menor resistencia de la sección cuadrada al caso en que se tome como eje neutro una de sus diagonales, es claro que su menor módulo de flexión corresponderá á la condición que acabamos de indicar.

Determinemos, pues, el módulo de flexión respecto de una diagonal del cuadrado.

Sea  $ABB'C = V$  (figura 159), el volumen dilatado, por ejemplo, que mide la suma de las tensiones desarrolladas á uno de los lados de la diagonal ó eje neutro  $AC$ , y  $K$  la tensión de la fibra más lejana á dicho eje.



El volumen de que se trata se compone de la suma de las pirámides iguales que indica la figura; y el de una de estas pirámides es

$$v = \frac{1}{12} B^3 K,$$

por lo tanto

$$V = \frac{1}{6} B^3 K.$$

El brazo de palanca X es indudablemente los  $\frac{3}{4}$  de  $Og_1$ , siendo  $g_1$  el centro de gravedad de la base común OBB'; pero como  $Og_1 = \frac{2}{3} OB$ , con muy poco error, atendiendo á la pequeñez relativa de BB', tendremos

$$X = \frac{1}{4} B\sqrt{2},$$

por consiguiente,

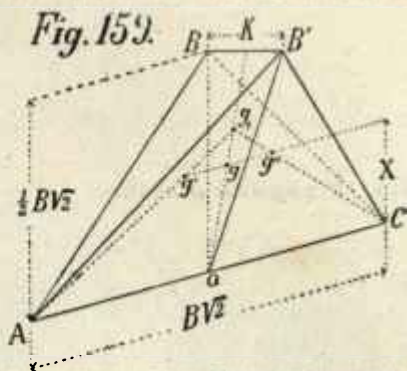
$$VX = \frac{1}{24} \sqrt{2} B^3 K.$$

Tendremos por tanto

$$ZK = 2 VX = \frac{1}{6\sqrt{2}} B^3 K,$$

de donde

$$Z = \frac{1}{6\sqrt{2}} B^3,$$

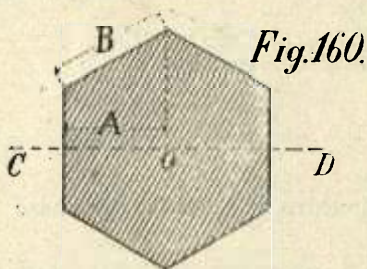


y

$$Z_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}} B^3,$$

que es el módulo de torsión de la sección cuadrada llena.

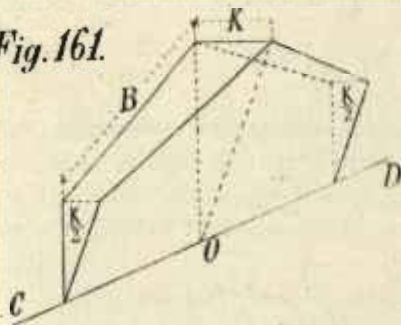
**416. Exágono macizo.**—La menor resistencia, y por lo tanto el menor módulo de flexión del exágono regular, corresponde al eje neutro CD, que divide en dos partes iguales á dos lados opuestos.



Calculemos dicho menor módulo.

Sea B el lado del exágono, V el volumen que representa la suma de las tensiones desarrolladas á cualquiera de los lados del eje neutro y X su brazo de palanca, respecto del referido eje.

*Fig. 161.*



Dicho volumen, según se ve en la figura 161, se compone de dos pirámides truncadas, iguales y simétricas respecto del plano diametral perpendicular al eje neutro.

Imaginemos una de las pirámides truncadas, proyectada en el plano del exágono, como asimismo la pirámide total á que corresponde, figura 162, y rebatamos las bases de la primera sobre dicho plano, como indica dicha figura.



Tenemos desde luego

$$ae = K, \quad fb = \frac{1}{2} K,$$

$$ao = B, \quad bd = \frac{1}{2} B,$$

$$oe = B\sqrt{3}, \quad dc = \frac{1}{2} B\sqrt{3}.$$

Representando por  $P$  el volumen de la pirámide total proyectada en  $oac$ , por  $p$  el de la deficiente  $bdc$ , y por  $\frac{1}{2}V$  el de la truncada  $aobd$ , tendremos

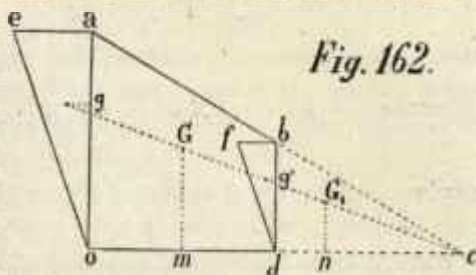


Fig. 162.

$$P = \frac{1}{6} \sqrt{3} KB^2,$$

$$p = \frac{1}{48} \sqrt{3} KB^2,$$

$$\frac{1}{2}V = \frac{7}{48} \sqrt{3} KB^2.$$

Los brazos de palanca de los dos primeros volúmenes son, con respecto al eje neutro  $oe$ :

$$Gm = \frac{3}{4} og = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} oa = \frac{1}{2} B,$$

$$Gn = \frac{3}{4} dg' = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} db = \frac{1}{4} B,$$

por lo tanto, llamando  $X$  al brazo de palanca del volumen  $\frac{1}{2}V$ ,

$$\text{resultará} \quad \frac{1}{2} VX = \frac{1}{12} \sqrt{3} KB^2 - \frac{1}{192} \sqrt{3} KB^2;$$

ó bien 
$$\frac{1}{2} VX = \frac{5}{64} \sqrt{3} KB^3.$$

Como la pirámide truncada adyacente que completa el volumen de que se trata, está respecto del eje neutro en igualdad de condiciones que la que hemos considerado, el brazo de palanca será el mismo para ambas y para su suma: y por tanto podremos establecer

$$VX = \frac{5}{32} \sqrt{3} B^3 K;$$

y finalmente 
$$KZ = 2VX = \frac{5}{16} \sqrt{3} B^3 K,$$

de donde 
$$Z = \frac{5}{16} \sqrt{3} B^3;$$

y por consiguiente el módulo de torsión será

$$Z_0 = \frac{5}{8} \sqrt{3} B^3,$$

como nos proponíamos encontrar.

**417.** Observando que entre la apotema A y el lado B del exágono se verifica la relación

$$A^2 + \frac{1}{4} B^2 = B^2,$$

de donde 
$$B = \frac{2}{\sqrt{3}} A$$

y 
$$B^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} A^3;$$

sustituyendo en la expresión de  $Z_0$ , resultará la forma más sencilla posible del módulo de torsión, á saber:

$$Z_0 = \frac{5}{3} A^3.$$

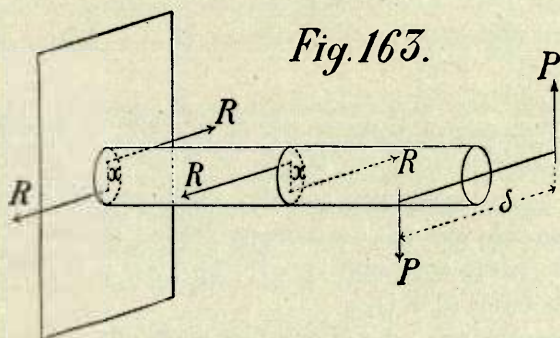


**418. Torsión de los prismas empotrados por un extremo.**—En general, la torsión de un prisma puede ser de dos clases: 1.<sup>a</sup> Torsión simple ú ordinaria, y 2.<sup>a</sup> Torsión compuesta. En la primera la deformación total se debe exclusivamente á la torsión elemental que experimenta cada una de las secciones del prisma: en la segunda aquella deformación resulta de acciones simultáneas de torsión y de flexión.

**419. Torsión ordinaria.**—Un prisma experimenta una torsión simple cuando se halla sometido por sus dos extremos á la acción de dos pares que se equilibran, y cuyos planos son perpendiculares al eje del mismo.

Cuando el prisma está empotrado por un extremo la suma de las reacciones que se desenvuelven en la sección de empotramiento se reduce á un par equivalente al par exterior, tomado con signo contrario (fig. 163).

Lo mismo puede decirse respecto de toda sección recta in-

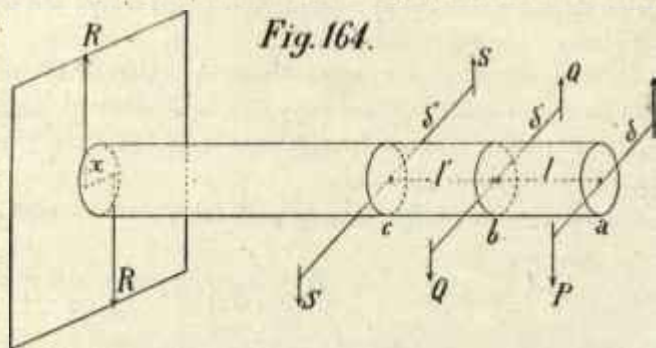


termedia; porque es claro que imaginando cortado el prisma por el plano de aquélla, el equilibrio exige que la suma de las tensiones desarrolladas constituyan un sistema equivalente al sistema de fuerzas exteriores tomadas con signos contrarios, y como este es un par, aquella suma constituirá necesariamente otro par de sentido contrario al par exterior, siendo iguales los momentos de ambos; es decir que tendremos  $P\delta = Rx$ .

De aquí resulta, que en la torsión simple ú ordinaria el momento de torsión es constante para todas las secciones del prisma intermedias á los planos de los pares exteriores; por lo que, y representando por  $P\delta$  el momento del par exterior, la ecuación general de equilibrio, en el caso de que se trata, será:

$$K_0 Z_0 = P\delta.$$

**420.** Supongamos que el prisma esté solicitado por varios pares exteriores del mismo sentido (fig. 164), cuyos momentos sean  $P\delta$ ,  $Q\delta'$ ,  $S\delta''$ , etc.; y situados á las distancias  $o$ ,  $l$ ,  $l + l'$ , etc., del extremo libre.



*Fig. 164.*

Para toda sección comprendida entre  $a$  y  $b$ , el momento de torsión será  $P\delta$ , pero ya en la sección  $b$  en que actúa el par  $Q$ , —  $Q$ , y lo mismo en las siguientes, comprendidas entre  $b$  y  $c$ , dicho momento será igual al momento del par resultante de componer los pares anteriores  $P$ , —  $P$  y  $Q$ , —  $Q$ ; y cuyo momento será de la forma  $(P + Q)y$ .

De manera que en general, el momento de torsión en una sección cualquiera, cuando actúan sobre el prisma varios pares exteriores del mismo sentido, se obtendrá hallando el momento del par resultante de todos los pares exteriores comprendidos entre dicha sección y el extremo libre.

La fórmula del caso anterior puede por tanto hacerse extensiva al caso actual, con la condición de considerar que  $P\delta$  representa el momento del par resultante á que nos hemos referido.



421. Pudiera finalmente suceder que sobre el prisma actuara un esfuerzo total de torsión  $P\delta$ , uniformemente repartido en toda su longitud. Siendo entonces el esfuerzo de torsión por unidad igual á  $P\frac{\delta}{L}$ , es claro que para una sección distante la cantidad  $l$  del extremo libre, el momento de torsión sería  $P\delta\frac{l}{L}$ ; y por tanto la ecuación de equilibrio correspondiente será

$$K_0 Z_0 = P\delta \frac{l}{L}.$$

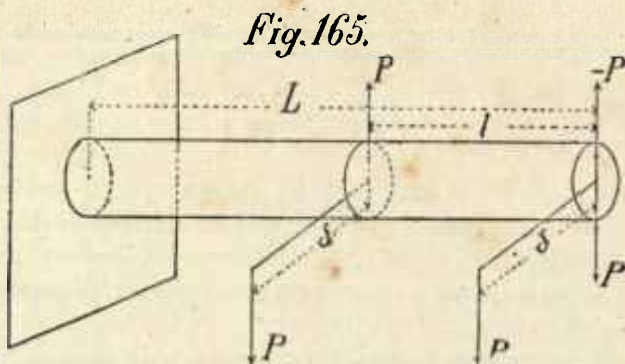
Este momento alcanza su valor máximo por la condición  $l=L$ ; de donde resulta que la sección de empotramiento es la sección peligrosa; y á ella hay que referirse en el cálculo de las dimensiones del prisma cuando haya de ser de sección constante.

422. La determinación de las formas de igual resistencia, no ofrece tanta utilidad como en la flexión; pero por lo demás su estudio se haría sin dificultad alguna de una manera análoga á como se hizo cuando se trató esta cuestión en otro lugar.

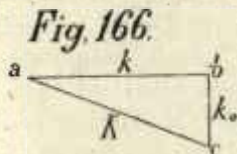
423. **Torsión compuesta.**—Un prisma empotrado por un extremo experimenta una torsión compuesta, cuando se halla sometido por su extremo libre á la acción de una sola fuerza ó de una resultante de varias de ellas, dirigida de cualquier modo en el plano perpendicular al eje del prisma; pero con la condición de que no pase por dicho eje.

424. Sea  $P$  (fig. 165), la fuerza situada en el plano de la sección extrema y libre del prisma. Introduciendo en el centro de gravedad de dicha sección dos fuerzas directamente opuestas, iguales y paralelas á la fuerza  $P$ , se ve que el prisma resulta sometido á un par de torsión cuyo momento es  $P\delta$  y á un esfuerzo de flexión  $P$ , y es claro que trasladando dicho par paralelamente á sí mismo al plano de una sección cualquiera, ésta resulta so-

metida á la acción del referido par; teniendo por tanto que resistir no sólo á su momento de torsión sino al de flexión  $P/l$  y á la acción cortante  $P$  originada por la flexión. El esfuerzo cortante puede despreciarse sin inconveniente por su escasa importancia, y considerar, por lo tanto, que dicha sección se halla solamente sometida á los momentos indicados.



**425.** Supongamos ahora que sea  $ab$  (fig. 166) la deformación longitudinal, producida por la flexión en la fibra más lejana del centro de la sección que se considera, y que  $bc$  sea la deformación transversal de dicha fibra, engendrada por la torsión. La resultante de tales deformaciones simultáneas será  $ac$ , y es claro que admitiendo que las dos primeras son perpendiculares entre sí, tendremos la relación



$$\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2.$$

Siendo las tensiones proporcionales á las deformaciones, llamando  $k$  á la tensión originada por la flexión y  $k_0$  á la producida por la torsión, y representando por  $K$  la tensión resultante, tendremos asimismo

$$K^2 = k^2 + k_0^2.$$

Si además consideramos las relaciones

$$Zk = Pl,$$

$$Z_0 k_0 = P\delta,$$



de las cuales se deduce

$$k = \frac{Pl}{Z},$$

$$k_0 = \frac{P\delta}{Z_0},$$

resultará

$$K^2 = \left(\frac{Pl}{Z}\right)^2 + \left(\frac{P\delta}{Z_0}\right)^2;$$

pero como según hemos demostrado,

$$Z = \frac{1}{2} Z_0,$$

resultará por último

$$KZ_0 = P\sqrt{4l^2 + \delta^2},$$

que es la ecuación general de equilibrio, correspondiente al caso que acabamos de considerar.

**426.** Esta expresión general del momento de torsión demuestra que, correspondiendo su valor máximo á la condición  $l = L$ , la sección peligrosa es la de empotramiento, la cual se calculará por la relación

$$KZ_0 = P\sqrt{4L^2 + \delta^2}.$$

**427.** Cuando el prisma se encuentra apoyado por sus extremos y la torsión compuesta se ejerce á las distancias  $l$  y  $l'$  de ellos, la sección peligrosa es entonces aquella en que obra el par de torsión, y es claro que para calcularla bastará considerar (figura 169), que debe resistir al momento de torsión  $P\delta$  y al momento máximo de flexión  $P\frac{ll'}{L}$ , por lo cual, y procediendo como antes, resultará la siguiente ecuación de equilibrio:

$$KZ_0 = P\sqrt{4\left(\frac{ll'}{L}\right) + \delta^2}.$$

**428.** Conviene notar que el coeficiente  $K$  que entra en las fórmulas que preceden, ha de referirse á la mayor de las deformaciones que experimenta el prisma; pero no hay inconveniente en admitir que  $K$  representa siempre el coeficiente de resistencia á la torsión.

**429.** El cálculo de los árboles que han de resistir á la torsión compuesta suele hacerse del modo siguiente. Una vez determinado el diámetro  $d$ , de la sección capaz de resistir á la torsión simple, se procede á calcular el diámetro exterior del estuche cilíndrico que hay que aumentar para que resulte el árbol con la magnitud conveniente, bajo la condición de que por sí sólo pueda dicho estuche resistir el esfuerzo de flexión. Dicho diámetro exterior  $D$  se calculará mediante la relación conocida

$$KZ - Pl = \frac{1}{32} \pi \frac{D^4 - d^4}{D} K,$$

de la cual se deduce

$$\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{32}{\pi} \times \frac{Pl}{K},$$

ó con la aproximación que se considera suficiente

$$D^3 - d^3 = \frac{32}{\pi} \times \frac{Pl}{K},$$

de donde

$$D = \sqrt[3]{d^3 + \frac{32}{\pi} \times \frac{Pl}{K}}.$$

#### MEDIDA DE LAS DEFORMACIONES.

**430.** La deformación total de un prisma, empotrado por un extremo y sometido á esfuerzos de torsión, se aprecia por el ángulo que describe un radio cualquiera de la sección del extremo libre.



**431. Definiciones.**—Se da el nombre de *ángulo de torsión* al ángulo que mide la rotación efectuada por la sección recta del prisma, situada á la unidad de distancia de la sección de empotramiento. Se denomina *desplazamiento angular* el arco descrito por un punto de aquella sección y situado asimismo á la unidad de distancia del eje del prisma. Finalmente, se llama *ángulo total de torsión* el ángulo que mide la rotación efectuada por la sección del extremo libre respecto de la de empotramiento, y *desplazamiento angular total* de un punto invariablemente unido al prisma, el arco descrito por dicho punto.

**432.** Consideremos primero la sección situada á la unidad de distancia del extremo empotrado.

Como la experimentación demuestra que, dentro de los límites de las deformaciones elásticas, la tensión  $K_0$ , desarrollada por una de las fibras más lejanas al eje del prisma, es proporcional:

- 1.º Al arco  $a$ , descrito por dicha fibra.
- 2.º A un cierto coeficiente  $G$  de elasticidad trasversal, podremos establecer que

$$K_0 = aG = \frac{P\delta}{Z_0}.$$

Si  $A$  es el desplazamiento angular, tendremos

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{r}.$$

De la primera de estas relaciones se deduce

$$a = \frac{P\delta}{GZ_0},$$

y sustituyendo en la segunda resultará

$$A = \frac{P\delta}{Z_0 Gr},$$

ó en función del diámetro de la sección, si fuera circular

$$A = \frac{2P\delta}{Z_0 G d}$$

**433.** Observando que el desplazamiento angular de un punto es directamente proporcional á sus distancias á la sección de empotramiento y al eje del prisma, la expresión de dicho desplazamiento, para un punto situado á la distancia  $l$  del eje, y á la  $L$  del extremo empotrado, será

$$A' = \frac{P\delta L l}{Z_0 G r}$$

y es claro que el desplazamiento angular que corresponde al extremo del brazo de palanca  $\delta$  de la fuerza exterior  $P$  será

$$A' = \frac{P\delta^2 L}{Z_0 G d}.$$

**434.** Llamando  $\alpha$  al valor en grados del ángulo de torsión tendremos

$$A = 2\pi \frac{\alpha}{360},$$

de donde

$$\alpha = \frac{360}{\pi} \times \frac{A}{2} = \frac{360}{\pi} \times \frac{P\delta}{Z_0 G d}.$$

Por último, el ángulo total de torsión de un prisma de longitud  $L$  será

$$\alpha = \frac{360}{\pi} \times \frac{P\delta L}{Z_0 G d}.$$

**435** En todas las relaciones que acabamos de establecer,  $r$  representa la distancia al eje del prisma de las fibras más fatigadas de la sección que se considera, y  $d$  el duplo de dicha distancia.

**436.** Numerosos experimentos han demostrado que el valor del coeficiente  $G$ , de elasticidad trasversal, es por término medio igual á los  $\frac{2}{5}$  del coeficiente  $E$  de elasticidad longitudinal que oportunamente hemos definido.

Los valores de  $G$  para algunos materiales de uso frecuente son los que siguen:



| MATERIALES           | Valores de G.    |
|----------------------|------------------|
| Madera.....          | $4 \times 10^4$  |
| Fundición.....       | $4 \times 10^5$  |
| Hierro. ....         | $8 \times 10^5$  |
| Acero ordinario..... | $8 \times 10^5$  |
| Acero templado.....  | $12 \times 10^5$ |

RESISTENCIA VIVA DE LOS PRISMAS SOMETIDOS Á ACCIONES  
DINÁMICAS DE TORSIÓN.

**437.** La resistencia viva, desarrollada por un prisma empujado por un extremo y sometido por el otro á la acción dinámica de un esfuerzo de torsión, se determina por las consideraciones siguientes.

Hemos visto que el valor del arco  $A$  que un punto describe cuando se halla situado á la distancia  $L$  del plano de empotramiento y á una distancia  $\varrho$  del eje del prisma, tiene por expresión:

$$A = \frac{2P\varrho^2L}{Z_0 G d};$$

pero como tenemos

$$K_e = \frac{P\varrho}{Z_0},$$

sustituyendo resultará

$$A = \frac{2K_e \varrho L}{G d}.$$

Ahora bien; como dentro de los límites de las deformaciones elásticas, los desplazamientos angulares son proporcionales á las cargas, el trabajo desarrollado por una fuerza de torsión aplicada al punto que consideramos y que crezca progresivamente de 0 á  $P$ , produciendo el desplazamiento angular total  $A$ , será

$$T_m = \frac{1}{2} PA$$

y reemplazando el valor de  $A$ , antes establecido

$$T_m = \frac{P\delta K_0 L}{Gd} = Z_0 \frac{K_0^2}{G} \times \frac{L}{d}.$$

Si la sección fuera cuadrada tendríamos:

$$T_m = \frac{1}{6} V \frac{K^2}{G};$$

y si fuese circular

$$T_m = \frac{1}{4} V \frac{K^2}{G};$$

representando  $V$  el volumen del prisma.

Si ahora comparásemos los trabajos moleculares que, bajo igualdad de tensión máxima, desarrolla un prisma por torsión y por flexión, veríamos que el correspondiente á la torsión es 15 veces mayor que á la flexión.

#### TORSIÓN DE LOS PRISMAS EMPOTRADOS POR SUS EXTREMOS.

**438.** Si un prisma empotrado por sus extremos recibe la acción de un par de torsión, cuyo brazo de palanca sea  $\delta$ , obrando en una sección cualquiera, el efecto del par consistirá sin duda en hacer girar dicha sección una cierta cantidad angular alrededor del eje del prisma; resultando de aquí que en realidad puede considerarse éste dividido en dos partes,  $l$  y  $l'$ ; y á las cuales corresponde el mismo ángulo total de torsión.

**439.** Por otra parte, sabemos que el momento de torsión de un prisma es proporcional al ángulo total de torsión del mismo, y por consecuencia, á igualdad de condiciones, inversamente proporcional á su longitud. De modo que si representamos (figura 167), por  $X$  é  $Y$  los momentos de torsión correspondientes á las porciones  $l$  y  $l'$  del prisma, podremos establecer

$$Xl = Yl';$$

y como además es evidente que la suma de dichos momentos es



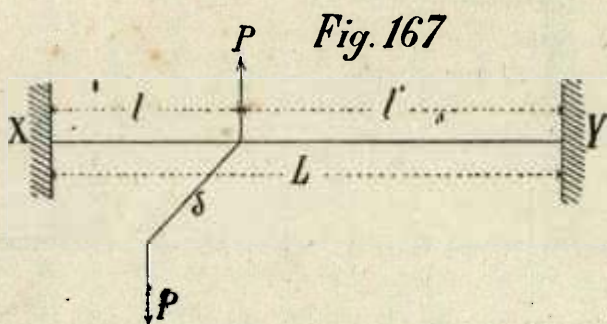
igual al momento del par exterior, tendremos también la relación

$$X + Y = P\delta,$$

de donde se deduce 
$$X = \frac{l'}{L} P\delta,$$

$$Y = \frac{l}{L} P\delta.$$

Si  $l < l'$ , resultará  $X > Y$ , lo que nos dice que la parte menor es la que resiste á un momento mayor de torsión, constitu-



yendo por tanto la parte que pudiéramos llamar peligrosa; y es claro que para que el prisma total se considere bastante resistente será necesario y suficiente que lo sea la parte menor.

La sección del prisma se calculará por lo tanto, por medio de la ecuación

$$K_0 Z_0 = \frac{l'}{L} P\delta.$$

**440** En el caso particular de que el par exterior obrase en el punto medio del prisma, resultará

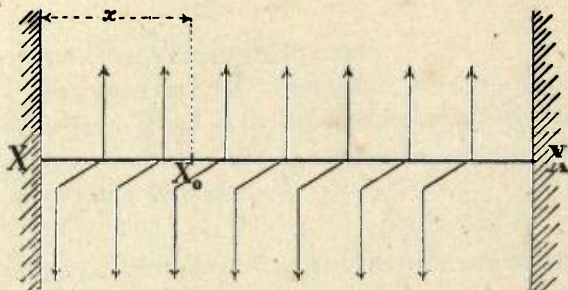
$$X = Y = \frac{1}{2} P\delta;$$

y entonces la condición de resistencia toma la forma

$$K_0 Z_0 = \frac{1}{2} P\delta.$$

441. Si el esfuerzo total de torsión  $P\delta$  estuviese uniformemente repartido en toda la longitud del prisma, el momento de torsión sería el mismo en las dos secciones de empotramiento, por virtud de la simetría del sistema; y por tanto su valor sería igual á la mitad del momento exterior.

*Fig. 168.*



Considerando una sección á la distancia  $x$  del extremo más próximo (fig. 168), es claro que el momento de torsión  $X_0$  que le corresponde será la diferencia de los momentos de signos contrarios que la solicitan, á saber; el momento  $X$  en el extremo y el que determina el esfuerzo de torsión uniformemente repartido en la longitud  $x$ , es decir  $\frac{x}{L} P\delta$ ; por lo tanto tendremos

$$X_0 = X - \frac{x}{L} P\delta = \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) P\delta.$$

Como esta cantidad variable alcanza su valor máximo por la condición

$$x = 0$$

y se anula cuando

$$x = \frac{1}{2} L,$$

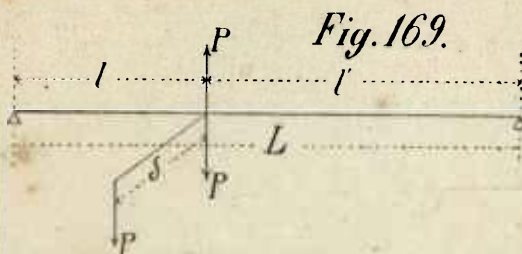
resulta que la sección mediana no experimenta torsión alguna;



mientras que las de empotramiento son las más fatigadas; por lo cual el prisma habrá de calcularse por la condición de resistencia

$$K_0 Z_0 = \frac{1}{2} P \delta.$$

442. Finalmente, si el prisma estuviese apoyado por sus extremos, pero fijados estos de manera que no pudiera girar alrededor de su eje, y dicho prisma se hallara sometido á la acción



de una fuerza exterior  $P$ , situada al extremo de un brazo de palanca  $\delta$ , entonces aquél habría de resistir al par de

torsión  $P\delta$  (fig. 169) y al de flexión correspondiente á la fuerza  $P$ .

De la condición de resistencia á la torsión que es, según hemos visto

$$K_0 Z_0 = \frac{l'}{L} P \delta,$$

y de la correspondiente á la flexión, que es, como se sabe,

$$K_1 Z = \frac{l''}{L} P,$$

resulta

$$K_0 = \frac{P \delta l'}{Z_0 L},$$

$$K_1 = \frac{P l''}{Z L}.$$

Estas tensiones pueden considerarse perpendiculares entre sí; por consiguiente, llamando  $K$  á la tensión resultante de las tensiones máximas, originadas simultáneamente por la torsión y

por la flexión, claro es que la tensión máxima unitaria, desarrollada en el prisma, será

$$K = \sqrt{K_0^2 + K_1^2},$$

ó bien

$$K = \frac{Pl'}{L} \sqrt{\frac{\delta^2}{Z_0^2} + \frac{l^2}{Z^2}} \quad (a).$$

**443.** Si la sección fuera circular, en cuyo caso

$$Z_0 = \frac{1}{2} Z,$$

la expresión anterior toma la forma siguiente:

$$K = \frac{Pl'}{Z_0 L} \sqrt{\delta^2 + 4l^2},$$

y por tanto, la condición de resistencia por la cual se calcularía la sección del prisma, será

$$KZ_0 = \frac{Pl'}{L} \sqrt{\delta^2 + 4l^2}.$$

**444.** Si la sección tuviera la forma de cualquiera de los polígonos regulares que de ordinario se emplean, la fórmula correspondiente se obtendría sustituyendo en la ecuación (a) los valores particulares de  $Z_0$  y  $Z$ , los cuales nos son ya conocidos para los casos de más frecuente aplicación.

FIN DEL TOMO PRIMERO.







