RESISTENCIA DE MATERIALES

Y

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES

RESISTENCIA DE MATERIALES

Y

ESTABILIDAD

DE LAS

CONSTRUCCIONES

LECCIONES DE CLASE

POR

D. JOSE DE ARCE,

INGENIERO AGRÓNOMO,
PROFESOR DE HIDRÁULICA APLICADA Y DE CONSTRUCCIÓN
EN EL INSTITUTO AGRÍCOLA DE ALFONSO XII
Y EXDIRECTOR DE LA ESCUELA GENERAL DE AGRICULTURA

TOMO II

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRAFICO DE IDAMOR MORENO
Blasco de Garay 9.
1898

ÍNDICE DEL TOMO SEGUNDO

Tercera parte.

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES.

Muros de altas chimeneas.

Muros de sostenimiento.

Teoría del empuje de las tierras.

CIMIENTOS

SOPORTES, PIES DERECHOS Y COLUMNAS

Piezas de madera.

ENTRAMADOS

Desgarramiento longitudinal.

Determinación del módulo de flexión Z en el caso general.

Resumen de las fórmulas de flexión.

NÚM. PÁGINAS.

Resistencia de las vigas.—Vigas de madera.

Entramados de hierro.

ARMADURAS.

Armaduras de madera.

Armaduras de hierro.

CIMBRAS DE MADERA

ERRATAS PRINCIPALES

PÁG.	LÍNEA	DICE	DEBE DECIR
14	penúltima	$d < \frac{1}{3} 6$	$d < \frac{1}{3} b$
60	2	$Qx =$	$Q_x =$
72	7	ABFC	ABEC
72	8	AF	AE
74	12	$\frac{1}{2}$ BN (H + H″)	$\frac{1}{2}$ BC′ (H + H″)
75	8	sup ABC $= \frac{1}{2}$ BN ×	sup ABC $= \frac{1}{2}$ BC′ × ....
75	10	BN =	BC′ =
85	15	$\frac{2(Q'' + p_1) - p_2}{\delta' H_2}$	$\frac{2(Q'' + p_1) - p_2}{\delta' H^2}$
89	12	$\varphi^1\delta$ y δ'	φ, δ y δ'
95	9	EbH	E = bH
95	10	$E' \big(b - (m + n)\big)$ H	$E' = \big(b - (m + n)\big)$ H
107	6	$\sqrt{0{,}0442\ H + 0{,}42}$	$\sqrt{0{,}0432\ H + 0{,}42}$
186	12	$\frac{DC}{AC} = \frac{a'}{a''}$	$\frac{AC}{DC} = \frac{a'}{a''}$
197	17	figura 54.	figura 64.
223	1	de los cuales	de las cuales
227	7	C″O″ = R	CO″ = R
236	6	en los que	en las que
236	7	$x = + \frac{6}{2}$	$x = + \frac{b}{2}$
236	8	$x = - \frac{6}{2}$	$x = - \frac{b}{2}$

261	8	número **345**	número **346**
279	8	Para B 13,2	Para B = 13,2
279	9	» B 13,1	» B = 13,1
290	9	= 518,88	= 518,98
331	última	$= \frac{e}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r\right)$	$= \frac{e}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$
363	16	OA_1BC_1N	OA_1BC_1H
369	2	$\frac{1}{2}(h \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)$	$\frac{1}{2}(h \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha)$
393	3	$T = T' = \frac{1}{2} L$	$T = T' = \frac{1}{2} P$
396	2	$M' - = \left(\frac{1}{2} PL + Q \frac{l^2 l'}{L^2}\right)$	$M' = -\left(\frac{1}{12} PL + Q \frac{l^2 l'}{L^2}\right)$
396	5	$+ \frac{3}{2} Q \frac{l^3 l'^3}{L^3}$	$+ \frac{2}{3} Q \frac{l^3 l'^3}{L^3}$
451	2	$= \sqrt{81}$	$= \sqrt{18}$
500	última	$\omega' = b^{e'}$	$\omega' = be'$
517	9	$24(P + ZQ)fE$	$24(P + 2Q)fE$
540	1	$7 \times 8 \times 1$	$7 \times 9 \times 1$
571	15	acción recta	sección recta
589	12	$\delta = 0{,}006$ kg.	$\delta = 0{,}0006$ kg.
599	5	Bilbao	Barcelona
680	5	**1, 2, 3,** $\frac{1}{2}$ **1**	**1, 2, 3,** $\frac{1}{2}$ **4**
718	26	$\frac{1}{8} \times 186 \times 223{,}3 =$	$\frac{1}{8} \times 186 \times 223{,}5 =$
720	17	$290 \times 40 \times 0{,}86441$	$290 \times 40 \times 0{,}89441$
754	2	$d = 4{,}47$ centímetros	$d = 4{,}57$ centímetros

CORRÍJASE

En la página 365, línea 2.ª, donde dice: el área $\omega_1 = OA_1BC_1H$, léase el área $\omega_1 = OA_1BC_1H$, por 9.

RESISTENCIA DE MATERIALES

Y

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES.

TERCERA PARTE

ESTABILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES

1. **Preliminares.**—Se dice que una construcción cualquiera es resistente y estable, cuando sometida á las fuerzas exteriores de mayor intensidad que pueden solicitarla, no se originan en ella deformaciones inadmisibles ni movimientos parciales ó de conjunto, capaces de provocar su ruina ó destrucción.

Pero no basta que bajo el punto de vista mecánico, las construcciones ofrezcan el grado de estabilidad que se juzgue conveniente. Es necesario, además, que los agentes exteriores no alteren las propiedades de los materiales, disminuyendo su resistencia primitiva en un plazo relativamente corto; y por tal motivo hay que atender de manera preferente á la bondad de aquellos, sometiéndolos en ciertos casos á determinadas preparaciones y ensayos cuyo estudio no corresponde á este lugar.

Asimismo, para no experimentar graves decepciones en la práctica, al realizar una obra cualquiera por bien estudiada que esté, es indispensable ajustarse estrictamente en su ejecución á los principios y reglas que se establecen en el *Arte de construir;* pues la experiencia confirma que la escasa duración y aun la ruina de algunas construcciones reconocen por causa la inobservancia de aquellos principios.

2. Como las fuerzas de rozamiento que se desarrollan en las superficies de contacto de los diversos elementos de una construcción favorecen su estabilidad, oponiéndose á los movimientos que tienden á producir en ciertos casos las fuerzas exteriores, insértase á continuación un cuadro que contiene los valores del coeficiente de rozamiento por resbalamiento f, y los correspondientes del ángulo de rozamiento φ, relativos á algunos de los materiales más frecuentemente usados en las construcciones ordinarias.

Si F es la fuerza de rozamiento y P la presión normal, ya sabemos por Mecánica racional que

$$F = Pf$$

y que

$$f = \frac{F}{P} = \operatorname{tg}\varphi.$$

VALORES DEL COEFICIENTE DE FROTAMIENTO f Y ÁNGULO DE ROZAMIENTO φ PARA ALGUNOS MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN.

MATERIALES	VALORES DE	
	f	φ
Arenisca lisa sobre otra igual en seco.	0,71	35° 22′
Caliza abujardada sobre otra igual, en seco............................	0,78	38°

MATERIALES	VALORES DE f	VALORES DE φ
Granito bien labrado sobre otro abujardado	0,66	33° 30'
Ladrillo sobre piedra	0,65	33°
Caliza pulimentada sobre otra igual	0,58	30° 10'
Piedras sobre mortero fresco	0,50	27°
Piedras sobre mortero fraguado	0,75	35°
Piedras sobre mortero endurecido	1,00	45°
Cimientos sobre arcilla seca	0,51	27° 5'
Cimientos sobre arcilla húmeda y recubierta de grava gruesa	0,40	21° 50'
Cimientos sobre arcilla húmeda y reblandecida	0,34	18° 50'
Madera sobre madera sin lubrificar	0,34 0.48	18° 50' 25° 40'
Idem íd. untada con jabón seco	0,16 0 25	9° 10' 14° 10'
Idem íd. lubrificada con agua	0,25 0,28	14° 10' 15° 40'
Madera sobre piedra	0,40	21° 50'
Madera sobre hierro, en seco	0,38 0,62	20° 50' 31° 50'
Madera de encina sobre hierro, con jabón seco	0,21	12°
Madera de encina sobre hierro, con agua	0,26	14° 40'
Fundición sobre encina, en seco	0,49	26° 10'
Idem íd. con jabón seco	0,19	10° 50'
Idem íd. con agua	0,22	12° 30'
Hierro forjado sobre hierro forjado en seco	0,44	23° 50'
Hierro forjado sobre fundición en seco	0,18	10°
Fundición sobre fundición en seco	0,16	9° 10'
Bronce sobre bronce en seco	0,20	11° 20'
Bronce sobre hierro forjado en seco	0,17	9° 40'
Bronce sobre fundición en seco	0,22	12° 30'

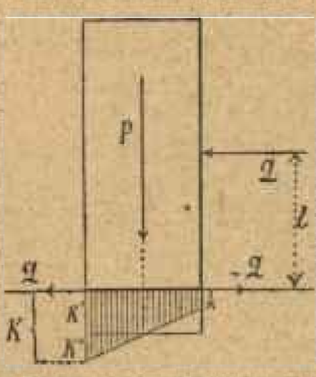
Las obras de cuyas condiciones de estabilidad y resistencia hemos de ocuparnos son: *muros; bóvedas; soportes, pies derechos y columnas; entramadas horizontales; armaduras y cimbras.*

MUROS

4. Los muros son obras de fábrica ó de tierra, que satisfacen objetos muy diversos; y los clasificaremos para nuestro estudio en *muros ordinarios* ó *de edificación, de altas chimeneas, de sostenimiento* y *de contención.*

5. **Condiciones generales de estabilidad y resistencia de los muros.**—Consideremos una zona de muro, cuya longitud sea igual á la unidad, y supongamos el caso más sencillo de que la sección ó perfil sea un rectángulo, planos y verticales los paramentos y que las fuerzas que lo soliciten se reduzcan á su propio peso y á un empuje horizontal.

Fig. 1.ª



Llamemos P y Q á dichas fuerzas (figura 1.ª) y limitemos por ahora nuestras consideraciones á la base, por ser la sección peligrosa y por tanto á la que de ordinario hay que referirse en los cálculos de resistencia y estabilidad.

Si en el centro de gravedad de la base introducimos las fuerzas Q y —Q, el muro resultará sometido á un esfuerzo de compresión P, á un par de flexión Q, —Q cuyo momento es Ql y á un esfuerzo cortante Q.

Representando por K' la tensión unitaria producida por la fuerza de compresión P y por K'' la que engendra el par de flexión, la compresión máxima en una de las aristas de la base será, como sabemos,

$$K = K' + K''$$

La tensión unitaria en la otra arista será

$$k = K' - K'',$$

la cual podrá ser positiva, nula ó negativa, en cuyo último caso se desenvolverá en aquella un esfuerzo de tracción por unidad igual á $K'' - K'$.

6. Las propiedades de los materiales que se emplean para la construcción de los muros, y en especial las que ofrecen los morteros, con los que se unen aquellos, y cuya resistencia á la compresión es mucho mayor que á la tracción, hacen que, tanto en los muros como en las demás obras de fábrica, cuando se construyen en seco ó se emplean morteros ordinarios, no pueda admitirse que se desenvuelvan esfuerzos de extensión, para que satisfagan á una de las condiciones más importantes de su perfecta estabilidad.

En cambio, ya veremos que en el caso de unir los materiales con morteros hidráulicos, no importa que se desarrollen esfuerzos de tracción en algunas regiones, siempre que no pasen de determinados límites de seguridad.

Por otra parte, se comprende fácilmente que tales pudieran ser los valores particulares de P y de Q, que hicieran girar toda la obra alrededor de la arista exterior; que se originara el aplastamiento ó la ruptura de los materiales por compresión ó tracción excesivas, ó bien que el muro resbalara á lo largo de la base bajo la influencia preponderante del empuje horizontal Q.

7. Como cuanto acabamos de decir es por completo aplicable á cualquier sección distinta de la base, se deduce que, las condiciones de estabilidad y resistencia á que debe satisfacer un muro en general, respecto de cualquiera de sus secciones horizontales, según se prescinda ó no de la influencia de los morteros, son las siguientes:

1.er CASO.—*Cuando se prescinde de la influencia de los morteros.*—(Muros en seco, ídem con mortero ordinario ó de arcilla).

1.º Extensión teórica nula, y como consecuencia imposibilidad de la rotación del macizo.

2.º Imposibilidad del deslizamiento transversal.

3.º Resistencia á la compresión máxima originada por los efectos simultáneos de la compresión propiamente dicha y de la flexión.

2.º CASO. *Cuando se tiene en cuenta la influencia de los morteros.*—(Morteros hidráulicos).

1.º Imposibilidad de la rotación.

2.º Resistencia al esfuerzo cortante y, como consecuencia, imposibilidad del deslizamiento transversal.

3.º Resistencia á las compresiones y extensiones máximas unitarias originadas por los efectos simultáneos de la compresión propiamente dicha y de la flexión.

8. Representemos, para una sección horizontal cualquiera, por P la suma de todas las fuerzas verticales de compresión, por Q la resultante de todas las fuerzas horizontales de flexión y por l la distancia entre el punto de aplicación de esta última y la sección que se considere.

Llamando Ω al área de dicha sección y, como de costumbre, Z al módulo de flexión de la misma, los valores de K′ y K″ serán, como sabemos, los siguientes:

$$K' = \frac{P}{\Omega}$$

$$K'' = \frac{Ql}{Z}$$

Si representamos por f el coeficiente de frotamiento, es decir, la fuerza paralela á la sección considerada que produciría el deslizamiento si la carga normal fuera igual á la unidad, tendremos que la expresión de la resistencia al resbalamiento será igual á $f \times P$; por lo tanto, para que sea imposible que el muro se deslice ó resbale á lo largo de la sección horizontal que se considere, será necesario que quede satisfecha la condición

$$Q < fP$$

ó bien

$$cQ = fP$$

siendo c un coeficiente llamado de estabilidad, mayor que la unidad

De la condición anterior se deduce $\frac{Q}{P} < f$, y como $\frac{Q}{P} = \text{tg}\,\alpha$, siendo α el ángulo que forma la resultante de las presiones con la normal á la junta, y $f = \text{tg}\,\varphi$, siendo φ el ángulo de frotamiento, es claro que dicha condición se verificará siempre que el ángulo α resulte menor que el correspondiente á la tangente trigonométrica representada por el valor de f; es decir, menor que el ángulo de frotamiento φ.

El coeficiente de frotamiento f no es otra cosa que la relación de la fuerza tangencial de rozamiento á la presión normal, y sus valores, así como los correspondientes del ángulo φ, se consignaron en el cuadro del número 2.

9. Si por el momento prescindimos de la influencia de los morteros y representamos por K la tensión unitaria que como límite puede aceptarse de una manera permanente, en relación con los materiales empleados, las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad y resistencia serán las siguientes:

1.º .... $K' \geqq K''$

2.º .... $Q < fP$

3.º .... $K \geqq K' + K''$

10. Como en la mayoría de los casos y salvo muy contadas excepciones, la segunda condición se verifica si la primera y tercera quedan satisfechas, consideraremos solamente por ahora las condiciones relativas á la imposibilidad del giro del macizo alrededor de la arista exterior de su base y á la imposibilidad de la rotura por aplastamiento.

Dichas condiciones toman la siguiente forma:

$$(a) \quad \ldots\ldots \quad \frac{P}{\Omega} \geqq \frac{Ql}{Z}$$

$$(b) \quad \ldots\ldots \quad K \geqq \frac{P}{\Omega} + \frac{Ql}{Z}$$

11. Como P y K dependen respectivamente de la densidad y coeficiente de ruptura de los materiales con que se construya el muro, á continuación se consignan los valores medios correspondientes á aquellos datos, respecto de algunos materiales importantes.

MATERIALES	Peso del metro cúbico — *Kilogramos*	Coeficiente de fractura por centímetro cuadrado por compresión — *Kilogramos.*
Pórfido	2870	2472
Basalto	2950	1995
Piedra silícea de S. Miguel (Cuba)	2470	1160
Mármol rojo de Flandes	2720	790
Idem blanco de Italia	2720	686
Idem íd. de Brabante	2700	654
Caliza dura conchifera	2650	630
Granito de Berrocal (Madrid)	2681	489
Mármol rojo de Rentería (Guipúzcoa)	3016	399
Mármol dorado de Cabra (Córdoba)	2972	377
Granito de Guadarrama	2500	350
Mármol blanco de Macael (Almería)	3016	344
Caliza de Alhama (Aragón)	2620	344
Caliza arcillosa de Baides	2591	329

MATERIALES	Peso del metro cúbico. — *Kilogramos.*	Coeficiente de fractura por centímetro cuadrado por compresión. — *Kilogramos.*
Caliza blanca de Colmenar de Oreja.	2599	319
Caliza de Patones (Madrid).........	2500	310
Caliza de Tamajón (Guadalajara)...	»	280
Arenisca blanca de Petrel..........	2300	276
Traquita de San Miguel (Filipinas)..	2400	266
Caliza magnesiana de Tafalla.......	2588	262
Arenisca blanca de Monóvar........	2204	242
Caliza de la Atalaya (Madrid).......	2140	218
Caliza de Ponce (Puerto Rico)......	2100	170
Arenisca blanca de Novelda........	2300	135
Caliza arcillosa de Lamiquíz.......	2281	134
Mármol de la isla de Pinos (Cuba)...	2600	128
Brecha de Bará (Tarragona).......	2009	117
Caliza blanca de Arcos..........	2093	101
Caliza blanca de Fons.............	2280	78
Piedra arcillosa del Morro (Habana)	2420	66
Caliza blanca de Segovia...........	1896	64
Piedra arcillosa de Vedao (Habana) calidad superior..................	2110	62
Caliza amarillenta de Uclés.........	1847	57
Caliza amarillenta de Luna.........	1907	55
Piedra arcillosa de la Osa (Habana).	2080	42
Idem íd. de la Cueva (Habana)......	1600	37
Idem íd. de Vinelo (Habana)........	2200	26
Ladrillo fino prensado.............	2070	93
Idem del Puente de Segovia........	»	60
Idem fino de Vaciamadrid..........	»	47
Idem reccocho, bueno...............	1720	45
Idem pardo.......................	»	33
Mortero de cemento................	1700 á 1800	144
Idem de cal hidráulica..............		74
Idem de cal grasa..................		19
Hormigón.........................	1700 á 2200	60 á 120
Mampostería de piedra caliza.......	2225	45 á 56
Fábrica de ladrillo.................	1630 á 1870	30 á 40

12. Es necesario advertir que en toda obra de fábrica conviene que la presión máxima unitaria no exceda del límite de seguridad que se señale; el cual, según la naturaleza de los materiales y la importancia de la construcción, varía entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{6}$ de la carga ó coeficiente de fractura que para cada uno de ellos queda consignado, pudiendo tomar de $\frac{1}{6}$ á $\frac{1}{8}$ para las piedras no heladizas, compactas y homogéneas.

El coeficiente de seguridad ó de trabajo á la compresión para los ladrillos y morteros, puede fijarse en $\frac{1}{10}$ á $\frac{1}{15}$ del coeficiente de fractura.

En el caso de que las fábricas trabajen por extensión, el coeficiente de trabajo á este género de esfuerzo se formará tomando $\frac{1}{10}$ del de fractura por extensión, el cual, á su vez, puede fijarse aproximadamente en $\frac{1}{10}$ á $\frac{1}{15}$ del correspondiente de fractura á la compresión.

Para los morteros convendrá tomar $\frac{1}{20}$ del coeficiente de fractura por extensión, el cual, asimismo, y á falta de datos exactos, puede fijarse en $\frac{1}{8}$ á $\frac{1}{10}$ del correspondiente á la compresión.

13. Como término medio, pueden tomarse los valores que se indican en el siguiente cuadro, para coeficientes de seguridad á la extensión y á la compresión, aplicables á las piedras, morteros y fábricas.

CUADRO DE COEFICIENTES MEDIOS DE SEGURIDAD PARA ALGUNOS MATERIALES PÉTREOS.

MATERIALES	COEFICIENTE DE SEGURIDAD. á la extensión. Kilog. por cm^2.	COEFICIENTE DE SEGURIDAD. á la compresión. Kilog. por cm^2.
Piedras silíceas	5	50
Id. calizas y areniscas duras	3	30
Id. calizas y areniscas blandas	1	10
Ladrillo santo	0,8	8
Id. recocho	0,5	5
Id. portero	0,3	3
Mortero ordinario	0,2 á 0,5	2 á 5
Mortero hidráulico	0,9	9
Id. muy hidráulico	1,5	15
Id. de cemento	2	20
Id. de cal de Zumaya	1	10
Fábrica de sillería	»	30 á 40
Id. de hormigón con mortero ordinario	0,2 á 0,5	5
Id. de hormigón con mortero de cemento	1 á 1,5	10 á 15
Id. de ladrillo con mortero ordinario.	0,2 á 0,5	5 á 6
Id. íd. con íd. de cemento.	1 á 1,5	10 á 15

Para calcular la tensión máxima unitaria que se desarrolla en una junta cualquiera, por compresión ó por extensión, tenemos que resolver el problema de que vamos á ocuparnos.

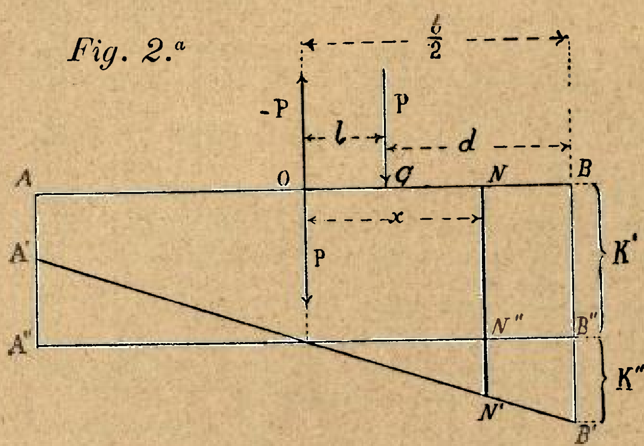
14. Repartición de las presiones en la sección recta de un macizo.—El problema que tenemos que resolver es el siguiente:

Conociendo la forma y dimensiones de la sección de un macizo de fábrica, así como el valor y el punto de aplicación de la resultante de las presiones normales que obran sobre ella, determinar la tensión unitaria en un punto cualquiera de dicha sección.

Consideraremos solamente el caso más sencillo, y para nosotros de más frecuente aplicación, que es aquel en que la sección recta sea un rectángulo y la resultante pase por uno de los ejes de simetría del mismo.

Sea A B (figura 2.ª) una junta rectangular, cuya longitud la

Fig. 2.ª



representaremos por b y cuya anchura sea igual á la unidad, siendo P la fuerza normal que la solicita, aplicada en el punto C.

Si en el centro de gravedad O introducimos las fuerzas P y — P, la junta se hallará sometida á una fuerza de compresión P y al momento de flexión Pl.

Sea A″ B″ el diagrama de compresiones unitarias producidas por la fuerza P y A′B′ el de las tensiones totales originadas por la acción simultánea de la compresión y de la flexión. A′B′, respecto de A″B″, representará el diagrama de tensiones unitarias debidas únicamente á la flexión del par.

Si tomamos un punto N, definido por su distancia x al punto medio O de la junta, y llamamos R á la presión unitaria total en dicho punto, tendremos

$$R = NN'' + N''N'$$

Llamando K′ á la tensión unitaria debida á la compresión y K″ á la tensión unitaria máxima producida por la flexión, y observando que el valor de N′ N′ en función de K″ es

$$N'N'' = \frac{2K''x}{b},$$

podremos escribir

$$R = K' + \frac{2K''x}{b} \text{ (a)}.$$

Por otra parte, sabemos que

$$K' = \frac{P}{b} \quad \text{y} \quad K'' = \frac{M}{Z} = \frac{6Pl}{b^2},$$

por lo tanto, sustituyendo tendremos:

$$R = \frac{P}{b} + \frac{12Plx}{b^3}$$

ó bien

$$R = \frac{P}{b}\left(1 + \frac{12lx}{b^2}\right)$$

15. Si llamamos d á la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza P y la arista más próxima, puesto que $l = \frac{b}{2} - d$, tendremos también

$$R = \frac{P}{b}\left(1 + \frac{12\left(\frac{b}{2} - d\right)x}{b^2}\right) \ldots (a).$$

Consideremos ahora los tres casos que pueden ocurrir, según que la distancia d sea mayor, igual ó menor que $\frac{1}{3}$ b.

(a) Esta expresión es general; porque para un punto cualquiera situado á la izquierda de O, donde los efectos de la compresión y de la flexión no se suman, sino que se restan, el valor de x sería negativo, pues hemos tomado dicho punto O como origen de distancias; y sentido positivo el que indica la situación del punto C de aplicación de la fuerza P.

16. Si $d > \frac{1}{3} b$, como indica la figura 2.ª, toda la sección resultará comprimida; la fórmula (a) dará siempre valores positivos para R, cualquiera que sea el valor de x, comprendido entre $+\frac{b}{2}$ y $-\frac{b}{2}$; y tendremos:

Para $x = +\frac{b}{2}$ . . . $R = \frac{2P}{b}\left(2 - \frac{3d}{b}\right)$ Presión máxima en B.

» $x = 0$ . . . . $R = \frac{P}{b}$ . . . . íd. media en O.

» $x = -\frac{b}{2}$ . . . . $R = \frac{2P}{b}\left(\frac{3d}{b} - 1\right)$ íd. mínima en A.

17. Si $d = \frac{1}{3} b$, el trapecio se reduce á un triángulo y la fórmula general se convierte en

$$R = \frac{P}{b}\left(1 + \frac{2x}{b}\right) \quad \ldots\ldots (b)$$

Como en el caso anterior, la aplicación de la fórmula general no conduce á valores negativos para R, cualquiera que sea el valor de x, comprendido entre $+\frac{b}{2}$ y $-\frac{b}{2}$.

En este caso tendremos:

Para $x = +\frac{b}{2}$ . . . $R = \frac{2P}{b}$ . . . Presión máxima en B.

» $x = 0$ . . . . . $R = \frac{P}{b}$ . . . Id. media en O.

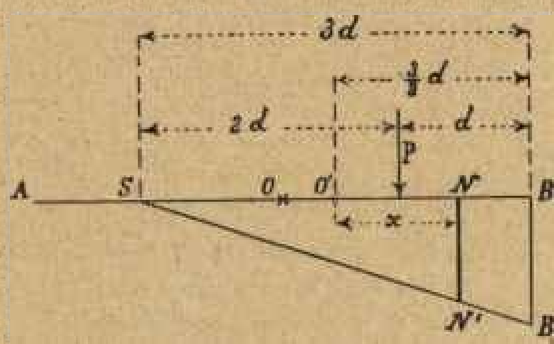
» $x = -\frac{b}{2}$ . . . $R = 0$ . . . . Id. mínima en A.

18. Por último, si $d < \frac{1}{3}$ 6, aplicando la fórmula general, encontraríamos para ciertos valores de x valores negativos de R, que serían las extensiones unitarias desarrolladas en la región correspondiente; y es claro que para $x = -\frac{b}{2}$ obtendríamos la tensión unitaria máxima por extensión en la arista más lejana al punto de aplicación de la fuerza P.

19. Pero en el caso de tratarse de macizos construídos en seco ó con mortero ordinario, no es posible, sobre todo en las juntas efectivas, admitir la existencia de esfuerzos de extensión, y por tanto, no cabe aceptar para R valores negativos.

Para resolver el problema en este caso, se admite que en la región de la junta, cuya longitud es igual á $3\,d =$ BS (figura 3.ª), la ley de repartición de las presiones es la misma del caso que

Fig. 3.ª



precede, y que en el resto SA de dicha junta no se desenvuelve esfuerzo alguno de compresión ni de extensión, pudiendo por tanto prescindirse de ella en el cálculo de R.

Por consiguiente, la fórmula aplicable al caso de que $d < \frac{1}{3}\,b$ la deduciremos, reemplazando en la general, $\frac{3}{2}\,d$ en vez de $\frac{b}{2}$, $3\,d$ en lugar de b, y tomando como orígen de distancias el punto medio O′ de la región SB en que hay presiones.

Así resultará

$$R = \frac{P}{3d}\left(1 + \frac{12\left(\frac{3d}{2} - d\right)x}{9d^2}\right)$$

ó simplificando

$$R = \frac{P}{3d}\left(1 + \frac{2x}{3d}\right) \ldots\ldots (c)$$

20. De suerte que, para la región SB $= 3d$ en que hay presiones y siendo O′ el origen actual de las distancias, tendremos:

Para $x = +\frac{3}{2}d \ldots R = \frac{2P}{3d} \ldots\ldots$ Presión máxima en B

» $x = 0 \ldots\ldots\ldots R = \frac{P}{3d} \ldots\ldots$ Id. media en O′

» $x = -\frac{3}{2}d \ldots R = 0 \ldots\ldots\ldots$ Id. mínima en S

Desde S hasta A, es decir, en toda la región SA, se admite que la presión es nula.

21. Como en las aplicaciones lo que interesa conocer es la presión máxima en una junta rectangular (cuando se prescinde de la influencia de los morteros), las fórmulas que para ello habremos de emplear son las siguientes:

(A)..... $R = \frac{2P}{b}\left(2 - \frac{3d}{b}\right)$ cuando $d \geqq \frac{1}{3}b$

(B)..... $R = \frac{2P}{3d} \ldots\ldots$ cuando $d < \frac{1}{3}b$

22. Finalmente, si $d < \frac{1}{3}b$ y se tiene en cuenta la influencia de los morteros, entonces la compresión y extensión máximas se calcularán por las fórmulas

$$(\mathrm{C})\ldots\quad \mathrm{R}=\frac{2\mathrm{P}}{b}\left(2-\frac{3d}{b}\right)\ldots \text{ compresión máxima en B.}$$

$$(\mathrm{D})\ldots\quad \mathrm{R}=\frac{2\mathrm{P}}{b}\left(\frac{3d}{b}-1\right)\ldots \text{ extensión máxima en A.}$$

23. La expresión general de R, fórmula (a), de la cual acabamos de deducir las fórmulas que anteceden, es de un uso muy frecuente; expresa la ley de variación de las presiones en una sección cualquiera de un macizo rectangular y es conocida también con el nombre de *ley del trapecio*.

24. Muros de recinto.—Los muros aislados que no tienen más objeto que aislar ó circunscribir una extensión cualquiera, reciben el nombre de *muros de recinto* ó *cercas*, y sólo tienen que resistir á su propio peso y á la acción del viento.

Considerando, como siempre, una zona de longitud igual á la unidad, claro es que dado el material que ha de emplearse y la altura que el muro debe tener, con arreglo á las necesidades de cada caso; su peso, lo mismo que su resistencia al empuje horizontal, dependerá únicamente del espesor que tenga. Esta cantidad constituye, por tanto, la incógnita de la cuestión, para satisfacer las condiciones de estabilidad, en el supuesto de que aquella dimensión sea constante, ó lo que es lo mismo, que el perfil del muro sea rectangular.

La presión máxima del viento suele ser, en nuestros climas, de unos 50 kilogramos por metro cuadrado, pudiendo llegar á 100 y 130 ([a]) kilogramos, cuyos valores corresponden á una tempestad violenta y á un enérgico huracán.

Si V es la velocidad del viento, dicha presión tiene por valor muy aproximado $0{,}113\mathrm{V}^2$.

(a) En algunos ciclones la presión puede pasar de 200 kilogramos por metro cuadrado.

25. Considerando la base del muro, las condiciones generales de estabilidad y resistencia, excepción hecha de la segunda, de la cual puede prescindirse en este caso, toman las siguientes formas, siendo h la altura del mismo.

$$(1) \ldots\ldots \frac{P}{\Omega} = \frac{Qh}{2Z}$$

$$(2) \ldots\ldots\ K = \frac{P}{\Omega} + \frac{Qh}{2Z}$$

Si llamamos

δ' . . . al peso de la unidad de volumen de la fábrica empleada (centímetro cúbico)

e . . . al espesor constante del muro (en centímetros)

q . . . la fuerza del viento por unidad de superficie (kilogramos por centímetro cuadrado)

tendremos:

$$\Omega = e \quad ; \quad Z = \frac{1}{6} e^2 \quad ; \quad P = eh\delta' \quad ; \quad Q = hq$$

y sustituyendo estos valores en las fórmulas anteriores resultará:

$$\text{de la (1)} \ \ldots\ldots \quad e = \sqrt{3q} \cdot \sqrt{\frac{h}{\delta'}}$$

$$\text{de la (2)} \ \ldots\ldots \quad e = \sqrt{3q} \cdot \sqrt{\frac{h^2}{K - \delta' h}}$$

26. De estas fórmulas se empleará aquella que dé el mayor valor de e; de donde se deduce que se empleará la primera si

$$\frac{h}{\delta'} > \frac{h^2}{K - \delta' h}$$

y la segunda, cuando

$$\frac{h}{\delta'} < \frac{h^2}{K - \delta' h},$$

ó como fácilmente se deduce; emplearemos la primera ó la segunda de dichas fórmulas según que

$$h \lessgtr \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{\delta'} .$$

27. Muros ordinarios.—Los muros que se emplean en las edificaciones ordinarias se consideran estables cuando satisfacen á la condición de extensión nula; y por tanto su espesor puede calcularse por la primera de las fórmulas establecidas.

Teniendo en cuenta, sin embargo, que las condiciones de resistencia de los muros de edificación varían necesariamente según las circunstancias particulares de situación y de forma, expondremos las reglas prácticas de Rondelet, seguidas por la mayor parte de los constructores, y deducidas de una observación minuciosa y repetida y una larga experiencia en el arte de construir.

28. Reglas prácticas de Rondelet.—Respecto de los muros aislados, la regla que Rondelet aconseja procede principalmente de la observación de aquellos que desafiando la acción destructora del tiempo, á través de muchos siglos, todavía se conservan en las ruinas de la villa Adriana, en la campiña de Roma, cerca de Tívoli.

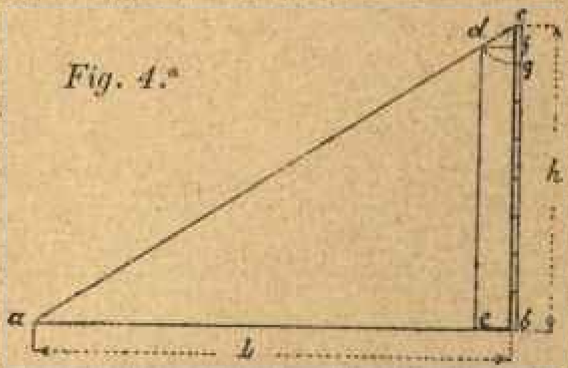
Distingue Rondelet tres grados de estabilidad, y establece que la *estabilidad máxima* corresponde á un espesor igual á $\frac{1}{8}$ de la altura, la *media* á $\frac{1}{10}$ de la misma y la *mínima* á $\frac{1}{12}$ de dicha altura; de donde resulta que el espesor debe calcularse en cada caso, según el grado de estabilidad que se quiere obtener, por las fórmulas

$$e = \frac{1}{8} h$$

$$e = \frac{1}{10} h$$

$$e = \frac{1}{12} h$$

29. Para los muros de recinto, da Rondelet la regla siguiente: Se construye un triángulo rectángulo *abc* (figura 4.ª) cuyo cateto horizontal $ab = \mathrm{L}$ sea la longitud del muro, y cuyo cateto



vertical $bc = h$ sea la altura del mismo. Este último se divide en n partes iguales, siendo n igual á 8, 10 ó 12 según el grado de estabilidad que se quiera obtener. Se toma sobre la hipotenusa la magnitud cd igual á una de dichas partes, y trazando la recta de paralela á la bc, la magnitud $eb = df = e$ representará el espesor correspondiente que se busca.

La expresión algebráica del espesor, gráficamente obtenido, como acaba de decirse, es fácil de deducir. En efecto, de la semejanza de los triángulos abc y dfc resulta;

$$\frac{\mathrm{L}}{e} = \frac{ac}{cd};$$

y puesto que

$$ac = \sqrt{\mathrm{L}^2 + h^2}$$

y

$$cd = \frac{h}{n}$$

tendremos

$$\frac{L}{e} = \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{\frac{h}{n}}$$

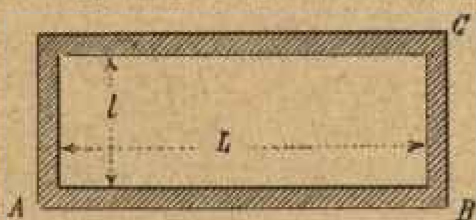
de donde

$$e = \frac{h}{n} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}}.$$

En el caso de que el recinto fuera circular, la fórmula es la misma; pero en vez de representar L la longitud del contorno cerrado por el muro, se toma L igual al lado del dodecágono regular inscrito en el círculo; lo que equivale próximamente á tomar en vez de L, para la aplicación del método que precede, la cuarta parte del diámetro.

30. **Muros de fachada.**—Suponiendo que la cubierta no ejerce empuje horizontal alguno y que no existen muros de traviesa (figura 5.ª), la regla para determinar el espesor viene á

Fig. 5.ª



ser la misma que antecede, con la sola variante de tomar, en vez de la longitud del muro, la del edificio, contada normalmente á la fachada, es decir el ancho de la nave, y de hacer $n = 12$. Así el espesor del muro AB se calculará por la fórmula

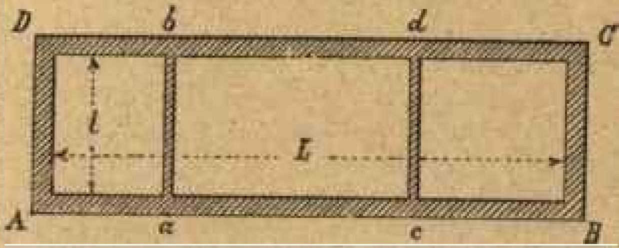
$$e = \frac{h}{12} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}$$

Al muro BC se le daría el mismo espesor.

31. Si el edificio consta de una sola nave, dividida en varios compartimentos por traviesas perpendiculares á su eje (figura 6.ª) la fórmula práctica del espesor del muro AB es

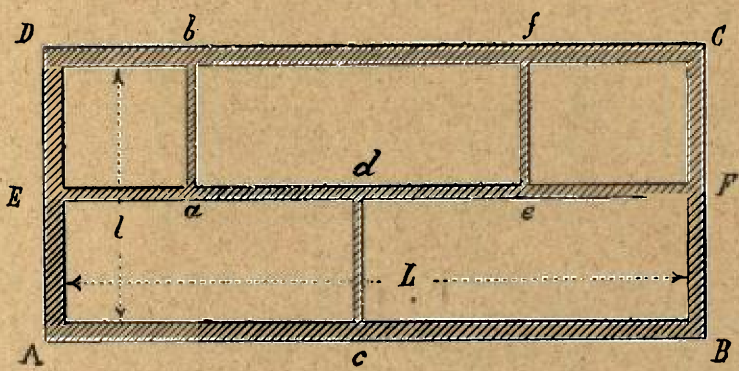
$$e = \frac{l + \frac{h}{2}}{24}$$

Fig. 6.ª



32. Si el edificio se compone de dos naves (figura 7.ª) sepa-

Fig. 7.ª



radas por una traviesa longitudinal EF, entonces el espesor del muro de fachada AB se determina por la siguiente espresión

$$e = \frac{l + h}{48}$$

No hay para qué decir que h representa la altura, desde cada uno de los suelos hasta el alero del tejado, lo que origina para e un valor distinto según el piso de que trate.

33. Muros de traviesa.—El espesor de estos muros se determina por la fórmula

$$e = \frac{l' + h'}{36}$$

siendo h' la altura del piso y l' la anchura del espacio dividido por la traviesa. Así, para la traviesa ab, $l' = \mathrm{D}f$: para la cd, $l' = \mathrm{AB}$: para la EF, $l' = \mathrm{AD}$, y así de las demás.

Al valor de e, calculado por la fórmula que precede, suele añadirse tantas veces $0^{m}.015$ como pisos haya encima del piso bajo, ó de aquel que se considere.

34. Tabiques.—Cuando no soportan vigas de suelo, basta darles un espesor igual á la cuarta parte del obtenido por la fórmula correspondlente á los muros de traviesa.

35. Apoyos aislados.—Un apoyo aislado puede considerarse como un muro aislado de muy poca longitud; y de ordinario se acepta para su espesor $\frac{1}{8}$ ó $\frac{1}{12}$ de la altura del mismo, á menos que la importancia de la presión que se desenvuelva en su base por ias cargas superiores, hagan necesario el empleo de las condiciones generales de resistencia que oportunamente hemos establecido.

36. Fórmulas prácticas de Redtenbacher.—En la quinta edición de su obra titulada *Resultate für den Maschinenbau* establece las fórmulas siguientes; en las cuales representan

H .. la altura total del edificio hasta el alero del tejado

$h_1, h_2, h_3 \ldots$ la altura respectiva de los diversos pisos, á contar del último ó más elevado.

$e_1, e_2, e_3 \ldots$ los espesores de los muros de fachada en los pisos correspondientes.

$$e_1 = \frac{H}{40} + \frac{h_1}{25}$$

$$e_2 = \frac{H}{40} + \frac{h_1 + h_2}{25}$$

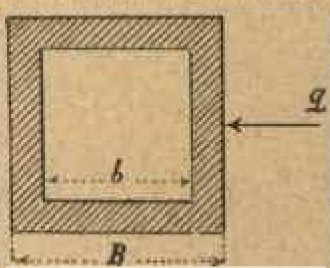
$$e_3 = \frac{H}{40} + \frac{h_1 + h_2 + h_3}{25}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Cuando los muros se construyen de ladrillo, conviene procurar que su espesor sea un múltiplo de la longitud de medio ladrillo, más las juntas correspondientes, á fin de evitar el empleo de terciados, etc., y con ello el desperdicio y aumento de mano de obra consiguiente.

37. Muros de altas chimeneas. —Las chimeneas que exigen algunas fábricas para el establecimiento de ciertas industrias, se construyen ordinariamente de ladrillo. Su sección recta suele ser cuadrada ó circular, aceptándose algunas veces la primera forma, por la facilidad y menor coste en la ejecución.

Fig. 8.ª



38. Supongamos, en primer lugar, que se trata de una chimenea cuadrada de sección uniforme, es decir, de espesor constante y de altura H. Llamemos B al lado de la sección exterior, b al de la interior y Ω al área de la sección recta del muro.

Refiriéndonos á la base de la chimenea, que es donde se halla la sección peligrosa, y considerando que el empuje del viento se ejerce normalmente á una de las caras del muro, tendremos

$$\Omega = B^2 - b^2 \qquad Z = \frac{1}{6} \cdot \frac{B^4 - b^4}{B}$$

$$P = \Omega\delta' H \qquad Q = BqH.$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas generales de resistencia que ya conocemos (núm. **25**), resultará

$$\text{de la 1.}^a \ \ldots\ldots \ \frac{B^4 - b^4}{B^2} = \frac{3qH}{\delta'} \ \ldots\ldots \ (a)$$

$$\text{de la 2.}^a \ \ldots\ldots \ \frac{B^4 - b^4}{B^2} = \frac{3qH^2}{K - \delta' H} \ \ldots\ldots \ (b)$$

La incógnita de la cuestión, cuyo conocimiento basta para determinar el espesor necesario de la chimenea, es B; porque el lado b de la sección interior, es un dato definido por consideraciones de Física, que no son de este lugar.

Resolviendo, por tanto, las ecuaciones (a) y (b) con relación á B^2, tendremos

$$(1) \ \ldots\ldots \ B^2 = \frac{3qH}{2\delta'} + \sqrt{\left(\frac{3qH}{2\delta'}\right)^2 + b^4}$$

$$(2) \ \ldots\ldots \ B^2 = \frac{3qH^2}{2(K - \delta' H)} + \sqrt{\left(\frac{3qH^2}{2(K - \delta' H)}\right)^2 + b^4}$$

De estas fórmulas emplearemos siempre aquella que dé el mayor valor para B^2.

La condicion necesaria y suficiente que motiva el empleo de la primera, es, como se observa desde luego

$$\frac{1}{\delta'} > \frac{H}{K - \delta' H}$$

ó bien

$$H < \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{\delta'}$$

Del mismo modo veríamos que deberá emplearse la segunda fórmula cuando se verifique la condición

$$H > \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{\delta'}$$

Si la chimenea se construye con materiales elegidos, para los cuales pudiera aceptarse que el coeficiente de seguridades K valga 10 kilogramos por centímetro cuadrado, siendo $\delta' = 0{,}002$ kilogramos por centímetro cúbico, tendríamos

$$H \lesseqgtr 2500 \text{ centímetros} = 25 \text{ metros},$$

lo que nos dice que, en tales condiciones, la sección trasversal habría de determinarse por la primera fórmula, cuando la altura de la chimenea fuera menor que 25^{m}, y por la segunda cuando dicha altura excediera de ese límite.

39. La construcción de chimeneas de sección constante y espesor uniforme, que acabamos de considerar, no puede aceptarse casi nunca, porque sin ventaja alguna para la resistencia de la obra, se necesita emplear un exceso inútil de materiales. Con objeto de disminuir en lo posible la cantidad de fábrica, sin menoscabo de la estabilidad, conviene, y así se hace, que la sección de la chimenea sea variable, aumentando el espesor del muro desde el vértice hasta la base por medio de retallos interiores ó exteriores que dividen la chimenea en diversas zonas de espesores crecientes.

Generalmente, la disminución del espesor de la base al vértice se consigue por medio de retallos interiores que separan las zonas sucesivas, de manera que la más alta resulte con un espesor de medio ladrillo ó de uno entero, según que la altura sea menor ó mayor de 30 metros, quedando la superficie exterior continua y con una pendiente respecto de la vertical, que suele variar de 1 á 3 por 100 (figura 9.ª)

Fig 9.ª

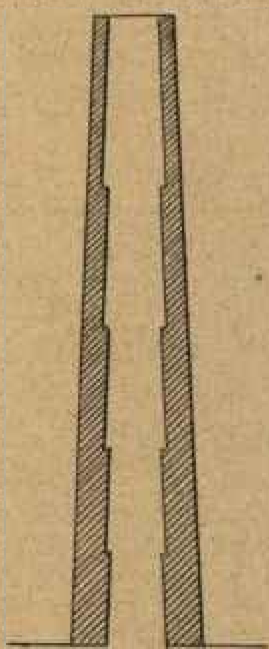
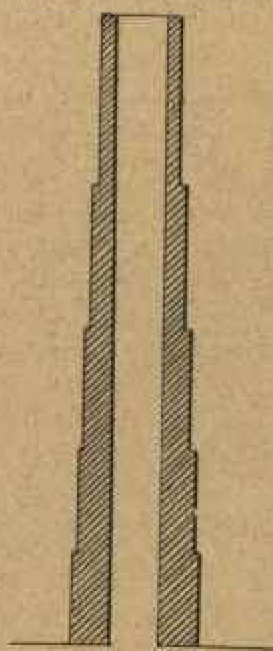


Fig. 10.



40. Para simplificar el estudio de la resistencia de esta clase de muros, cuyo cálculo riguroso, por otra parte, no ofrecería verdadera utilidad práctica, en razón á la imposibilidad de realizar el perfil resultante, conviene proceder del siguiente modo.

Supondremos que la sección interior de la chimenea es constante, verificándose la disminución progresiva de los espesores de la base al vértice, por retallos exteriores y sucesivos, como indica la figura 10; y si bien es cierto que, por virtud de esta hipótesis, los resultados que se obtengan irán afectados de un cierto error, como en realidad el cambio de forma es insignificante, dicho error podrá despreciarse por su escasa importancia.

Conociendo el espesor del muro de la chimenea en la zona más alta ó en su vértice (medio ladrillo ó uno entero), su altura total y la variacion constante de espesores que se fije como más conveniente y apropiada á la fácil y práctica ejecución de la obra, la cuestión queda reducida á determinar la altura parcial de cada zona, de manera que las condiciones generales de resistencia queden satisfechas en todas las secciones de la chimenea.

Contando las zonas desde la más alta, sean:

Ω'... el área de la sección de la primera zona,

h'... la altura de dicha zona,

Y'... la ordenada del diagrama de compresiones unitarias producidas por el peso de la fábrica en la base inferior de dicha primera zona,

y'... la ordenada del diagrama de compresiones máximas unitarias engendradas por la flexión que produce el empuje del viento en la referida base,

B'... el lado de la sección exterior de la primera zona,

Z'... el módulo de flexión de la sección Ω',

δ'.... el peso de la unidad de volumen de la fábrica empleada.

Sean además:

Ω'', Ω'''...; h'', h'''...; Y'', Y'''...; y'', y'''...; B'', B'''...; Z'', Z'''...; los elementos que quedan consignados, relativos á las zonas subsiguientes 2.ª, 3.ª, etc.

Y_n... la ordenada del diagrama de compresiones propiamente dichas en una sección cualquiera de la zona de lugar n, distante la cantidad h_n de su base superior.

y_n... la ordenada del diagrama de presiones debidas á la flexión, en la sección que se considere.

41. Representando Y_n la tensión unitaria que engendra el peso propio de la fábrica P_n, é y_n la que origina la flexión producida por la acción del viento, tendremos, para una sección cualquiera de la primera zona, situada á la distancia h_1 del vértice:

$$
(\mathrm{A}) \ldots \left\{ \begin{aligned} Y_1 &= \frac{P_1}{\Omega'} = \frac{\Omega'\delta' h_1}{\Omega'} = \delta' h_1 \\ y_1 &= \frac{Q\,\dfrac{h_1}{2}}{Z'} = \frac{\dfrac{1}{2}\,q B' h_1^2}{Z'}, \end{aligned} \right.
$$

siendo

$$
Z' = \frac{1}{6} \cdot \frac{B'^4 - b^4}{B'}
$$

y b el lado de la sección interior y constante de la chimenea.

Para la segunda zona, y suponiendo determinada, como pronto veremos, la altura h' de la primera, las expresiones generales de las ordenadas de ambos diagramas, para una sección cualquiera de dicha segunda zona, situada á la distancia h_2 de su base superior, serán las siguientes:

$$
(\mathrm{B}) \ldots \left\{ \begin{aligned} Y_2 &= \frac{\Omega'\delta' h' + \Omega''\delta' h_2}{\Omega''} = \frac{\Omega'}{\Omega''}\, Y' + \delta' h_2 \\ y_2 &= \frac{q\left[B'h'\left(\dfrac{h'}{2} + h_2\right) + B''h_2\,\dfrac{h_2}{2}\right]}{Z''} \ \text{(a)}, \end{aligned} \right.
$$

siendo $Z'' = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{B''^4 - b^4}{B''}$

(a) Para obtener las expresiones que anteceden, basta recordar que los valores de Y_1, Y_2... son los que representa (núm. **8**) la fórmula general $K' = \dfrac{P}{\Omega}$, y los de y_1, y_2... los que corresponden é la expresión $K'' = \dfrac{Ql}{Z}$.

Respecto de los primeros valores no puede haber duda; puesto que P no representa en el caso actual otra cosa que el peso propio de la fábrica.

Respecto de los segundos, basta observar que Ql es el momento del empuje del viento, el cual se escribe bajo la forma de la suma de los momentos de las acciones del viento, sobre cada una de las zonas determinadas y sobre la porción de aquella á que pertenece la sección que se considera, respecto de la cual se toman los momentos indicados.

Del mismo modo veríamos que las expresiones de las ordenadas de dichos diagramas, para una sección de la tercera zona situada á la distancia h_3 de su base superior, serán las que á continuación se expresan:

$$
(\mathrm{C})\ldots \left\{
\begin{aligned}
Y_3 &= \frac{\Omega'\delta' h' + \Omega''\delta' h'' + \Omega'''\delta' h_3}{\Omega'''} = \frac{\Omega''}{\Omega'''} \cdot \frac{\Omega'\delta' h' + \Omega''\delta' h''}{\Omega''} \\
&\quad + \delta' h_3 = \frac{\Omega''}{\Omega'''}\, Y'' + \delta' h_3 \\
y_3 &= \frac{q\left[B'h'\left(\frac{h'}{2} + h'' + h_3\right) + B''h''\left(\frac{h''}{2} + h_3\right) + B'''h_3 \frac{h_3}{2}\right]}{Z'''}
\end{aligned}
\right.
$$

siendo $Z''' = \frac{1}{6} \cdot \frac{B'''^4 - b^4}{B'''}$, y así de las demás zonas subsiguientes.

42. Si en las fórmulas (A) damos á la variable h_1 diferentes valores y se calculan los correspondientes de Y_1 y de y_1, será fácil construir los diagramas que ambas representan, de los cuales el primero será una recta y el segundo una parábola.

Tomando como origen el vértice de la chimenea y por ejes coordenados su altura y una perpendicular á ella trazada por aquél, claro es que las ordenadas de aquellos diagramas, relativas á una misma abscisa, representarán las compresiones unitarias que experimentará la sección correspondiente, producidas, como hemos dicho, por el peso propio de la fábrica superior y por el empuje horizontal del viento.

Ahora bien; para que la primera zona resulte suficientemente estable, se necesita que en su base la compresión debida al empuje del viento sea menor que la que produce el peso de la obra, dada la poca resistencia relativa de esta á la flexión; y, además, que entre ambas compresiones no produzcan una compresión máxima total, por unidad, mayor que la que se señale como coeficiente de seguridad ó límite de resistencia.

Por esto, para limitar la altura de la primera zona, determinando así el valor de h', basta elegir un punto de la altura de la chimenea, ó eje de abscisas, en donde se verifique que, siendo la ordenada del primer diagrama siempre mayor que la del segundo, la diferencia de ambas sea tal que no origine en la segunda zona una altura menor que la de la primera. Por lo demás, la suma de los valores de aquellas ordenadas resultará en la primera zona, indudablemente, menor que la tensión límite que hubiéramos fijado, como coeficiente de seguridad.

43. Determinada h', se procede á calcular por las fórmulas (B) diversos valores de Y_2 é y_2, tomando como origen un punto situado en el eje de abscisas y á la misma altura que la base inferior de la primera zona que acaba de limitarse.

Construídos los diagramas correspondientes, se fija la altura de la segunda zona, es decir el valor de h'', del mismo modo y por las mismas consideraciones que se han hecho respecto de la primera; y así se continúa para las zonas subsiguientes, con lo cual quedará por completo definido el perfil del muro de la chimenea.

44. Claro es que tales alturas serán aceptables, siempre que cumplan con la condición de que la suma de las compresiones máximas unitarias en la base de cada zona, no resulte mayor que el coeficiente de seguridad que se hubiere señalado.

Conviene, además, atribuir á q (empuje del viento por centímetro cuadrado) un valor superior al máximo posible en el lugar en que haya de ejecutarse la obra. Generalmente en nuestros climas, bastará dar á q el valor $q = 0{,}02$ kilogramos.

45. Para el mejor orden de los cálculos, se determinarán:

1.º Los valores de b, B', B'', B''', etc., sus cuadrados y sus cuartas potencias.

2.º Los valores de Ω', Ω'', Ω''', etc., recordando que su expresión general es $\Omega = B^2 - b^2$.

3.° Los valores de las relaciones $\frac{\Omega'}{\Omega''}$, $\frac{\Omega''}{\Omega'''}$, $\frac{\Omega'''}{\Omega^{iv}}$, etc.

4.° Los de los módulos de flexión Z', Z'', Z''', Z^{iv}, etc., cuya expresión general, como sabemos, es

$$Z = \frac{1}{6} \cdot \frac{B^4 - b^4}{B}.$$

Y por último, las fórmulas para calcular Y_n é y_n, se dispondrán ordenando sus términos con relación á las potencias creciente de h_n: de cuya suerte, tendremos:

Para la primera zona

$$(A) \begin{cases} Y_1 = \delta' h_1 \\ y_1 = \dfrac{\frac{1}{2} q B'}{Z'} h_1^2. \end{cases}$$

Para la segunda zona

$$(B) \begin{cases} Y_2 = \dfrac{\Omega'}{\Omega''} Y' + \delta' h_2 \\ y_2 = \dfrac{q B' h' \dfrac{h'}{2}}{Z''} + \dfrac{q B' h'}{Z''} h_2 + \dfrac{\frac{1}{2} q B''}{Z''} h_2^2. \end{cases}$$

Para la tercera zona

$$(C) \begin{cases} Y_3 = \dfrac{\Omega''}{\Omega'''} Y'' + \delta' h_3 \\ y_3 = \dfrac{q\left[B' h' \left(\dfrac{h'}{2} + h''\right) + B'' h'' \dfrac{h''}{2}\right]}{Z'''} + \dfrac{q(B' h' + B'' h'')}{Z'''} h_3 + \\ \qquad + \dfrac{\frac{1}{2} q B'''}{Z'''} h_3^2. \end{cases}$$

y así para las demás zonas.

46. En el caso en que la chimenea hubiera de ser de sección circular, basta tener presente que el empuje del viento sobre una superficie cilíndrica es próximamente 0,6 del que corresponde al área de la sección causada por un plano diametral.

En efecto; sea $ab = pdx$ (figura 11) la presión elemental que se ejerce en el elemento a. La componente tangencial no produ-

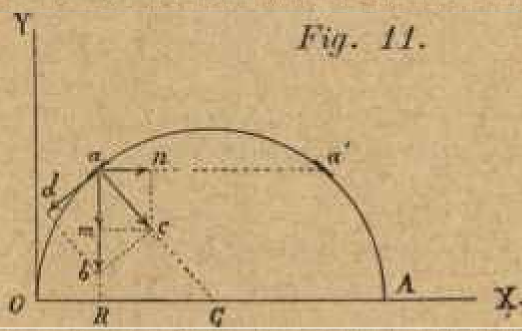


Fig. 11.

ce efecto alguno; porque representa una fuerza que choca contra las capas de aire que circundan la chimenea. La componente normal puede descomponerse en dos; la an, que queda anulada por otra igual y contraria que se desarrolla en el elemento simétrico a', y la am que produce todo su efecto, y cuya suma integral hay que calcular.

Refiriendo la circunferencia á los ejes OX, OY, su ecuación es

$$y^2 = 2rx - x^2$$

Los triángulos amc y aRC dan: $\frac{am}{ac} = \frac{y}{r}$, de donde $am = \frac{y}{r} \times ac$.

Los triángulos abc y aRC son también semejantes y de ellos se deduce que $\frac{ac}{ab} = \frac{y}{r}$, de donde $ac = \frac{y}{r} \times ab$.

Por lo tanto tendremos $am = \frac{y^2}{r^2} \cdot ab$

Como am representa el elemento de empuje del viento, normal al plano diametral OA, que produce, como hemos visto, odo su efecto, lo llamaremos dQ; y puesto que hemos llamado pdx á la fuerza elemental ab, podremos escribir

$$dQ = \frac{y^2}{r^2} \cdot pdx \qquad \text{y} \qquad Q = \frac{p}{r^2} \int_0^{2r} y^2 dx$$

Poniendo el valor de y^2 en función de x resultará

$$Q = \frac{p}{r^2} \int_0^{2r} (2rx - x^2)\, dx = \frac{2p}{r} \int_0^{2r} xdx - \frac{p}{r^2} \int_0^{2r} x^2 dx;$$

ó bien,

$$Q = \frac{2}{3} \cdot 2pr = 0{,}66 \cdot 2pr.$$

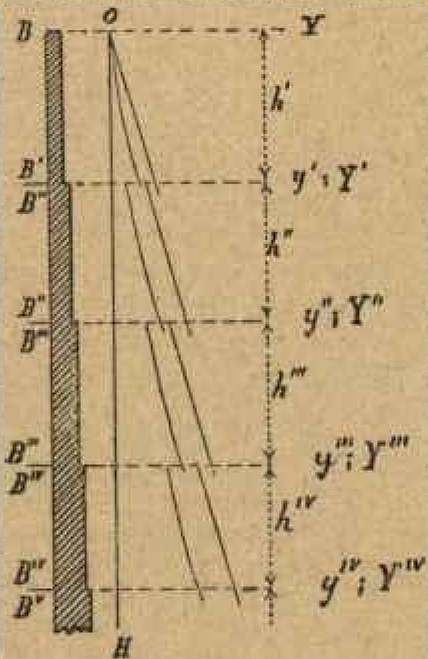
Como $2pr$ representa la acción del viento sobre el plano diametral, ya se ve, como habíamos indicado, que la acción de aquel sobre la chimenea circular es próximamente 0,6 de la presión $2pr$.

47. Lo expuesto se refiere á una zona de chimenea de altura igual á la unidad. Puede hacerse extensivo á una altura h, en cuyo caso, siendo R y r los radios de las secciones exteriores extremas, la presión total tendría por expresión

$$0{,}6 \cdot 2p \frac{(R + r)}{2} h = 0{,}6 \cdot p\,(R + r)\, h.$$

48. De lo dicho anteriormente, se deduce que la determinación de las alturas más convenientes de las diversas zonas, ha de llevar consigo una serie de tanteos y cálculos auxiliares de comparación, propios de los diferentes casos particulares que pueden ofrecerse, y sobre los cuales no es posible dictar reglas fijas.

Fig. 12.



Lo único que procede consignar, bajo el punto de vista general que estudiamos ahora esta cuestión, es que cuando el espesor en el vértice sea relativamente pequeño, ó las primeras zonas resultaran relativamente altas, puede suceder que el peso que soportan ciertas secciones, generalmente las situadas en la región media de la chimenea, no sea suficiente para contrarrestar la flexion originada por el empuje del viento, en cuyo caso la tensión total puede alcanzar rápidamente un valor excesivo que comprometa la estabilidad de la construcción. En tal caso es suficiente aumentar el espesor de las primeras zonas y disminuir su altura, siendo asimismo conveniente el empleo de materiales y sobrecargas de gran peso.

En todos los casos, es evidente que, aumentando las dimensiones exteriores, se aumentará considerablemente la estabilidad del conjunto, cuyas condiciones particulares de resistencia se pondrán de manifiesto con notable claridad, construyendo los diagramas de tensiones unitarias, como hemos dicho é indica la figura 12.

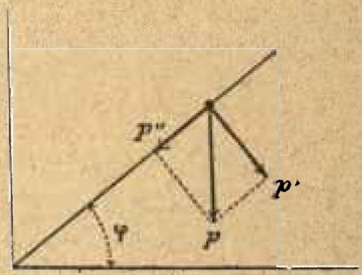
49. **Muros de sostenimiento.**—Reciben este nombre los muros destinados á sostener las tierras adosadas á una de sus caras y á resistir el empuje que aquellas determinan.

50. Si en una masa de tierra se hace un corte vertical, al cabo de cierto tiempo el macizo se desmorona y al fin la superficie definitiva resulta próximamente plana y con una inclinación variable, según la naturaleza de aquella.

Esto prueba que toda masa de tierra puede presentar su superficie con cierta pendiente compatible con el equilibrio de las partículas que la constituyen. La inclinación máxima de la superficie de las tierras dependerá naturalmente del *frotamiento* y de la *cohesión* recíproca de sus partes.

Si la tierra no tiene ninguna cohesión, se llama *talud natural* la superficie correspondiente al ángulo máximo que esta puede formar con el horizonte. Este ángulo es precisamente el que, como límite, pueden tomar los macizos de tierra cortados á pico, bajo la acción del tiempo, que destruye en un plazo variable la cohesión de los elementos más superficiales.

Fig. 13.



51. Es evidente que si consideramos en la superficie inclinada de una tierra, correspondiente á su talud natural, una de sus partículas, su estado de equilibrio exige que la componente de su peso, paralela al plano en que se halla, sea igual y contraria á la resistencia al resbalamiento de la misma que, como sabemos, es directamente proporcional á la presión normal.

Por tanto (figura 13), llamando p al peso de la partícula de tierra que se considera, φ al ángulo que forma el talud natural con el horizonte y f el coeficieute de rozamiento, tendremos, puesto que la partícula está en estricto equilibrio,

$$p'' = fp',$$

ó bien

$$p \operatorname{sen} \varphi = fp \cos \varphi,$$

de donde

$$f = \operatorname{tg} \varphi.$$

52. El ángulo φ recibe también el nombre de ángulo de rozamiento. Su valor para algunos tipos de tierras, así como el peso del metro cúbico de las mismas, se consignan en el siguiente cuadro; pero, siempre que sea posible, conviene determinar tales datos por experiencias directas.

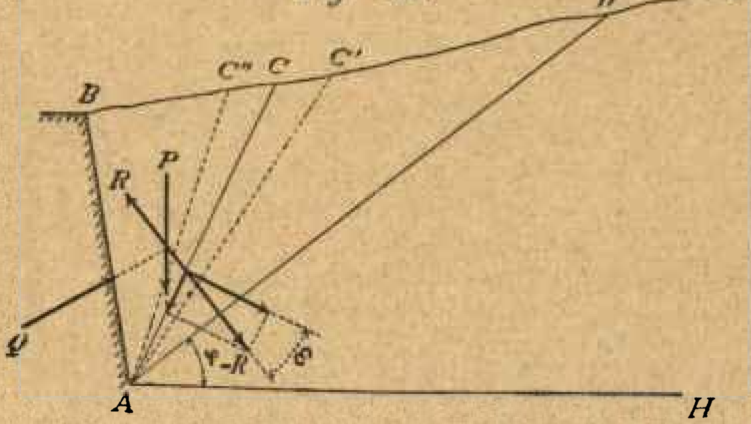
CLASE DE TIERRA	Peso del metro cúbico en kilogramos.	Talud natural. φ
Tierra silícea seca	1200 á 1400	35° á 40°
Tierra silícea húmeda	1500 á 1700	30° á 35°
Tierra de consistencia media, seca	1400 á 1500	40° á 46°
Idem íd. húmeda	1700 á 1800	35° á 40°
Idem arcillosa ó compacta, seca	1500 á 1600	40° á 50°
Idem íd. húmeda	1800 á 2000	25° á 40°
Tierra pedregosa	1500 á 1700	30° á 40°
Grava	1400 á 1500	35° á 45°
Arena seca	1300 á 1500	27° á 35°
Arena húmeda	1600 á 1800	35° á 40°

53. Claro es que cuando la superficie ó talud de un macizo de tierra deba formar con el horizonte un ángulo menor que el de frotamiento φ, el equilibrio será estable; pero cuando dicho ángulo haya de ser mayor, es necesario recurrir al empleo de un muro de sostenimiento, capaz de resistir á la acción ó *empuje de* *las tierras*, que de otra suerte se deslizarían amontonándose al pie del macizo.

Para determinar las dimensiones del muro de manera que reuna las condiciones necesarias de resistencia, es preciso, ante todo, fijar el valor de la suma de las acciones de la masa de tierra sobre el muro, así como la dirección y punto de aplicación de su resultante.

54. Empuje de las tierras.— Sea HABM (figura 14) la proyección vertical de una masa de tierra, limitada por la cara interna AB de un muro de sostenimiento y, perpendicularmente

Fig. 14.



á dicha cara, por dos planos verticales que disten entre sí la unidad de longitud; φ el ángulo de frotamiento de las tierras y AD el talud natural.

La masa MDAH, inferior al plano AD, no ejercerá acción alguna sobre el muro. El empuje que éste recibe provendrá únicamente del prisma ABD, situado sobre el talud natural; porque si se suprimiera el muro AB, dicho prisma se desmoronaría y llegaria á desaparecer por completo, á no impedirlo en parte la tierra que se acumulara al pie del talud DA.

55. Supongamos que el sistema formado por el muro y por el prisma de tierra ABD se halle en estado de equilibrio estricto, y representemos por Q la resultante de las reacciones que el muro desenvuelve contra el prisma BAD. Esta resultante Q será igual y contraria al empuje de las tierras.

Sea AC una sección plana que pase por el pie del muro, es decir, por A. El prisma proyectado en ABC, estará en equilibrio bajo la acción de su peso P, de la resultante R de las reacciones desarrolladas en el plano AC y de la reacción Q, igual y contraria, como hemos dicho, al empuje total de las tierras sostenidas. Claro es que la resultante de las reacciones desarrolladas en el plano AC, será igual y contraria á la resultante — R, de las otras dos fuerzas Q y P.

Llamando ε al ángulo formado por la resultante R y la normal al plano AC, y φ al ángulo de frotamiento de las tierras, la condición de equilibrio exige que $\varepsilon \leqq \varphi$, lo cual equivale á decir que la componente tangencial de — R no puede ser mayor que la componente normal multiplicada por el coeficiente de frotamiento, porque si lo fuera, en cuyo caso sería $\varepsilon > \varphi$, las moléculas situadas en el plano AC no estarían en equilibrio, contra lo que hemos supuesto; y el prisma ABC se deslizaría forzosamente á lo largo del plano AC, lo que no sucede por impedirlo el muro.

56. Se comprende, además, que si Q experimentara una disminución, por pequeña que fuese, el equilibrio de la masa de tierra ABD dejaría en el acto de subsistir. Roto el equilibrio, la tierra no podría desde luego deslizarse á lo largo del talud natural AD; porque aun imaginando el prisma ABD de una sola pieza, quedaría apoyado en estricto equilibrio sobre dicho talud. Se admite que, cuando el muro cede al empuje de las tierras, un prisma particular, tal como ABC se desprende de la masa, iniciándose el deslizamiento del mismo á lo largo del plano AC, que por tal causa se llama *plano de rotura* ó de deslizamiento.

Es indudable que en este plano particular, la componente tangencial de R alcanzará el valor máximo compatible con el estado de estricto equilibrio en que antes hemos supuesto á la masa de tierra y al muro que la sostiene; y por consiguiente, que en ese plano ε tendrá el mayor de los valores que puede tener; y como según hemos visto, la condición de equilibrio exige que $\varepsilon \overline{<} \varphi$, el plano de rotura quedará caracterizado por la condición $\varepsilon = \varphi$.

Para todos los demás planos distintos del de rotura, tales como AC′ y AC″ en los cuales el deslizamiento no se inicia, es claro que será $\varepsilon < \varphi$, por lo cual podremos establecer

$$\varphi = \text{máximo de } \varepsilon.$$

El prisma ABC definido por el plano de rotura, recibe el nombre de *prisma de máximo empuje.*

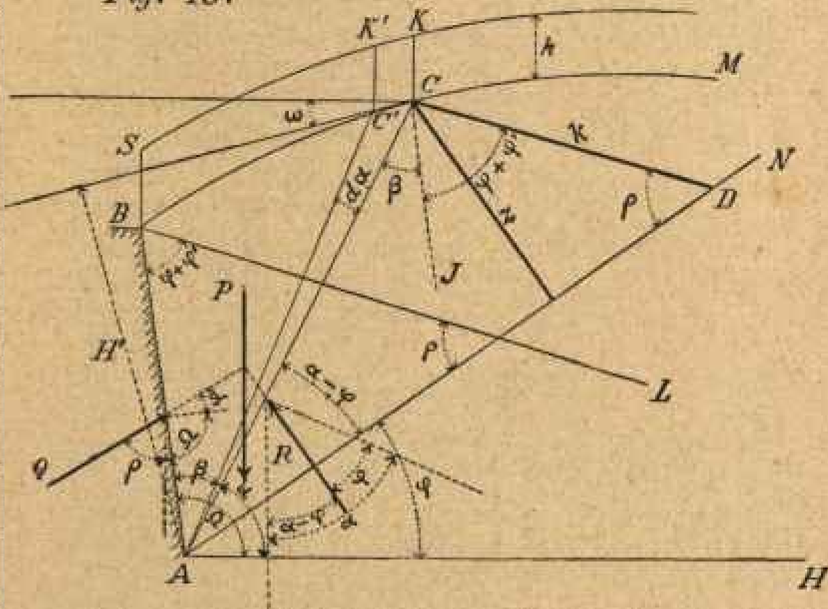
57. Prescindiremos por completo de la cohesión de las tierras, con lo cual, además de simplificar los cálculos, supondremos al muro en el caso más desfavorable. A virtud de esta hipótesis resultará, sin duda, para el empuje, un valor algo excesivo que, lejos de ser perjudicial, será favorable á la resistencia del muro.

58. Determinación del plano de rotura.—Supongamos un muro plano AB (figura 15) que sostiene una masa de tierra cuyo perfil sea BCM y sobre la cual gravite una sobrecarga uniformemente repartida en proyección horizontal, de p kilogramos por unidad de superficie. Si la sobrecarga la reducimos á otra equivalente de tierra, la podremos representar por una zona ó capa de espesor constante h, siendo $h = \frac{p}{\delta}$, en cuya expresión, δ representa el peso por unidad de volumen, de la tierra de que se trate.

59. Consideremos, como siempre, una zona de muro, de longitud igual á la unidad (un metro) y el macizo prismático de tierra que le corresponde.

Sea AC el plano de rotura y α el ángulo que forma con el horizonte; Q la reacción del muro, igual y contraria al empuje de las tierras y ρ el ángulo que forma con la vertical; R la reac-

Fig. 15.



ción total desarrollada en el plano AC y $\varphi =$ máximo de ε, el ángulo que forma R con la normal al plano de rotura. El ángulo que forma R con la vertical, será $\alpha - \varphi$.

Llamemos V al volumen del prisma de máximo empuje ABSKCA, cuyo peso es P. Como su altura es la unidad, el valor numérico del volumen será el mismo que el de la base, y por tanto:

$$V = \text{superf. ABSKCA}, \quad \text{y} \quad P = \delta V.$$

Las fuerzas Q, P y R que solicitan al prisma V están en equilibrio; por consiguiente, su polígono será cerrado.

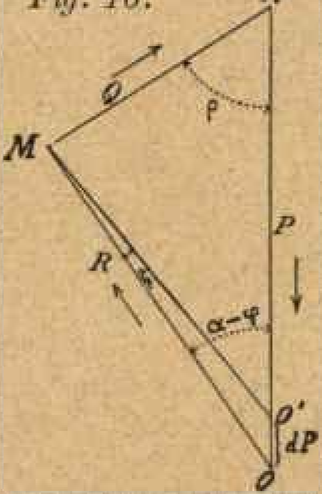


Fig. 16.

Sea MNO el triángulo de dichas fuerzas (figura 16). Los ángulos en N y en O serán respectivamente iguales á ρ y $\alpha - \varphi$.

Supongamos que el plano de rotura gire alrededor de la arista proyectada en A (figura 15), un ángulo infinitamente pequeño $d\alpha$. El peso del elemento de volumen ACKK'C'A será dP. Si tomamos sobre ON (fig. 16) la cantidad $OO' = dP$, la recta MO' representará la reacción R' (no representada en la figura) sobre el plano AC'. Ahora bien, el ángulo formado por R y la normal al plano de rotura AC es un máximo, el máximo de ε. Es evidente, además que, variando P, R y ε, á medida que el plano cambia de posición al girar alrededor de A, ε será una función de las variables P y R, las cuales tendrán valores distintos para cada posición del referido plano. En su virtud, podremos establecer que

$$\varepsilon = f(P, R)$$

Para que ε sea un máximo, se necesita que la primera derivada sea nula y la segunda negativa.

De la primera condición se deduce que

$$d\varepsilon = \frac{df}{dP} dP + \frac{df}{dR} dR = 0$$

lo que demuestra que la variación de ε es nula, para las variaciones dP y dR, de las variables P y R, cuando éstas tienen los valores peculiares al máximo de la función ε.

Por consiguiente, R' formará con la normal el plano AC' el mismo ángulo que R forma con la normal al plano AC, es decir, el ángulo φ; y es claro además que R y R' formarán entre sí el mismo ángulo que forman los planos AC y AC', que es $d\alpha$.

60. El área del triángulo MOO' tiene por expresión $\frac{1}{2} R^2 d\alpha$ y la del triángulo ACC', $\frac{1}{2} (AC)^2 d\alpha$.

Como la escala para representar las fuerzas puede ser cualquiera, elijamos aquella con la cual la representación gráfica de R resulte precisamente igual á la magnitud AC.

Los triángulos MOO' y ACC' serán equivalentes y podremos establecer

$$\text{superf. } MOO' = \text{superf. } ACC'.$$

El peso de la carga elemental proyectada en $CKK'C'C$ tendrá por expresión $\delta h CC' \cos \omega$, siendo ω el ángulo que forma el elemento CC' con la horizontal. Por tanto, la expresión del peso dP será

$$dP = \delta \times \text{superf. } ACC' + \delta h CC' \cos \omega$$

ó bien

$$dP = \delta \times \text{superf. } ACC' \left(1 + h \frac{CC' \cos \omega}{\text{superf. } ACC'}\right)$$

Siendo H' la perpendicular bajada desde el vértice A á la prolongación de CC', es decir, la altura del triángulo ACC', tomando CC' como base, claro es que

$$\text{superf. } ACC' = \frac{CC' \times H'}{2},$$

por lo tanto

$$dP = \delta \times \text{superf. } MOO' \left(1 + \frac{2h}{H'} \cos \omega\right)$$

Como $P = \delta V$, podremos escribir

$$\frac{P}{dP} = \frac{V}{\text{superf. } MOO' \left(1 + \frac{2h}{H'} \cos \omega\right)}$$

Además, de la figura 16 se deduce:

$$\frac{P}{dP} = \frac{NO}{OO'} = \frac{\text{superf. MON}}{\text{superf. MOO}'}.$$

Por tanto

$$\frac{\text{superf. MON}}{\text{superf. MOO}'} = \frac{V}{\text{superf. MOO}'\left(1 + \frac{2h}{H'}\cos\omega\right)}$$

de donde

$$V = \text{superf. MON}\left(1 + \frac{2h}{H'}\cos\omega\right)$$

61. Si ahora trazamos por el punto C la recta CD que forme el ángulo ρ con el talud natural AN, el triángulo ACD, no sólo será semejante al MON, sino igual á él; puesto que

$$\begin{aligned} MO &= R = AC \\ MNO &= \rho = CDA \\ MON &= \alpha - \varphi = CAD. \end{aligned}$$

Dada la igualdad de aquellos triángulos, la expresión de V podremos escribirla bajo la siguiente forma:

$$V = \text{superf. ACD}\left(1 + \frac{2h}{H'}\cos\omega\right).$$

62. Sea φ' el ángulo formado por Q y la normal el paramento del muro y Ω el que forma dicho paramento AB con el horizonte.

La figura manifiesta claramente que

$$\varphi' = 180^\circ - \rho - \Omega.$$

La recta BL, trazada desde la coronación del muro, de manera que forme con el talud natural AN el ángulo ρ, la llamaremos *línea de orientación*. El ángulo LBA que la define vale

$$LBA = 180^\circ - \rho - \Omega + \varphi,$$

pero como hemos visto que $180 - \rho - \Omega = \varphi'$, resultará:

$$LBA = \varphi + \varphi'.$$

Ya se ve que el trazado de la línea de orientación depende exclusivamente del conocimiento del ángulo φ', que determina la dirección del empuje de las tierras.

63. Este ángulo representa el de frotamiento de las tierras contra el paramento del muro, y su valor puede variar con el estado higrométrico de unos mismos materiales. En los casos en que el valor de φ' fuera mayor que el de φ, supondremos que $\varphi' = \varphi$; lo que equivale á admitir la hipótesis, favorable para la práctica, de que el deslizamiento tendería entonces á efectuarse á lo largo de un plano interior á la masa de tierra é infinitamente próximo al paramento AB.

64. En el caso general que estamos considerando de que la superficie de la masa de tierra no sea plana y arranque de la misma coronación del muro, el plano de rotura se determina fácilmente, una vez trazada la línea de orientación, á virtud de unos cuantos tanteos hasta que se obtenga un triángulo tal como ACD que satisfaga á la ecuación

$$V = \text{superf. ACD}\left(1 + \frac{2h}{H'}\cos\omega\right),$$

si existe sobrecarga uniformemente repartida, ó bien á la ecuación

$$V = \text{superf. ACD}$$

cuando no haya sobrecarga, en cuyo caso $h = 0$.

65. Cálculo del empuje Q. — Determinado el plano de rotura y conocido el triángulo ACD, es fácil calcular el empuje de las tierras.

Siendo iguales por construcción los triángulos ACD y MON (figuras 15 y 16) tendremos:

$$\frac{MN}{NO} = \frac{Q}{P} = \frac{CD}{AD},$$

de donde

$$Q = \frac{P \times CD}{AD}$$

Representemos por k la magnitud CD y por z la de la perpendicular bajada desde el punto C al talud natural (figura 15). Como

$$\text{superf. ACD} = \frac{AD \times z}{2},$$

y de la expresión de V se deduce que

$$\text{superf. ACD} = \frac{V}{1 + \frac{2h}{H'} \cos \omega}$$

tendremos

$$\frac{AD \times z}{2} = \frac{V}{1 + \frac{2h}{H'} \cos \omega}$$

de donde

$$AD = \frac{2V}{z\left(1 + \frac{2h}{H'} \cos \omega\right)}$$

Por lo tanto, sustituyendo este valor de AD en la expresión de Q y recordando que $P = \delta V$, resultará

$$Q = \frac{\delta V k}{\left(\frac{2V}{z\left(1 + \frac{2h}{H'} \cos \omega\right)}\right)}$$

ó finalmente

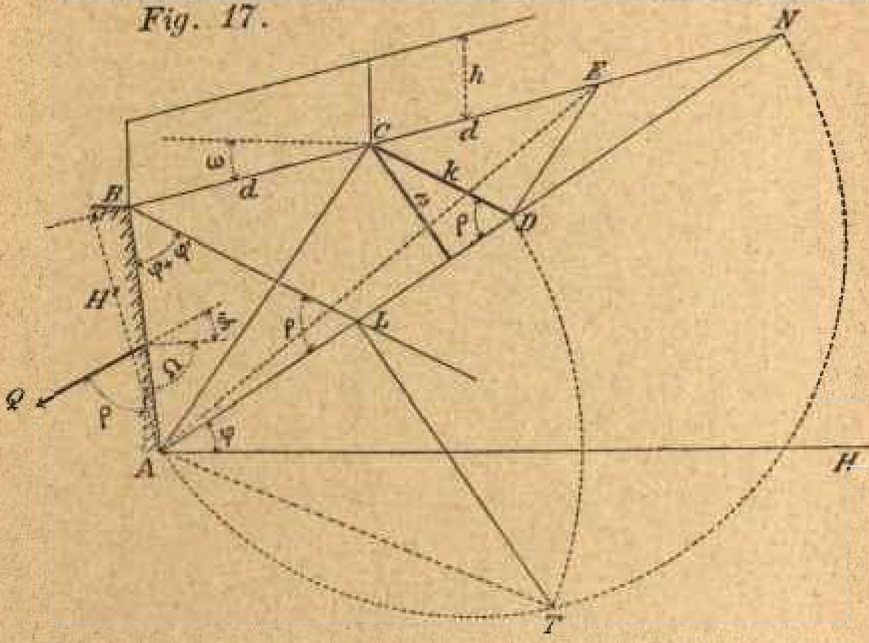
$$Q = \frac{1}{2} \delta \left(1 + \frac{2h}{H'} \cos \omega\right) k z \ldots \quad (a)$$

66. Casos particulares.—Tratemos ahora los casos particulares más importantes, bajo el supuesto de que el muro sea de paramentos planos.

67. I.^{er} CASO.—*Cuando la superficie de la masa de tierra sea un plano inclinado.*

Supongamos que la sobrecarga por unidad de superficie natural sea p, ω el ángulo que forma dicha superficie con el horizonte y h la altura representativa de la sobrecarga, reducida á su equivalente de tierra. (Figura 17.)

Fig. 17.



Tendremos

$$p = \delta h \cos \omega$$

de donde

$$h = \frac{p}{\delta \cos \omega}$$

Reemplazando este valor de h en la fórmula (a) resultará:

$$Q = \frac{1}{2}\delta\left(1 + \frac{2p}{\delta H'}\right) kz$$

Y si no hubiese sobrecarga

$$Q = \frac{1}{2}\delta k z$$

68. En el caso que nos ocupa puede simplificarse la determinación del plano de rotura, evitando los tanteos que son necesarios cuando la superficie de las tierras no es un plano, procediendo de un modo directo y muy sencillo á virtud de las consideraciones que vamos á exponer.

Sea AN el talud natural (figura 17), AC el plano de rotura, BL la línea de orientación y CD una paralela á BL trazada por el extremo C del plano de rotura.

Si en la expresión de V ponemos en vez de h su valor

$$\frac{p}{\delta \cos \omega}$$

tendremos

$$V = \text{superf. ACD}\left(1 + \frac{2p}{\delta H'}\right) \ldots (b)$$

Tenemos además, $V = \text{superf. ABC} + h \times \text{BC} \cos \omega$, ó puesto que $h = \frac{p}{\delta \cos \omega}$, será $V = \text{superf. ABC} + \frac{p \times \text{BC}}{\delta}$; y también $V = \text{superf. ABC}\left(1 + \frac{p \times \text{BC}}{\delta \times \text{superf. ABC}}\right)$.

Pero como superf. $\text{ABC} = \frac{1}{2}\text{BC} \times \text{H}'$, resultará, sustituyendo sólo en el paréntesis,

$$V = \text{superf. ABC}\left(1 + \frac{2p}{\delta H'}\right)\ldots \quad (c)$$

Comparando las expresiones (b) y (c) se ve inmediatamente que

$$\text{superf. ABC} = \text{superf. ACD},$$

lo que nos dice que en el caso actual, es decir, *cuando el muro y la superficie del macizo son planos, la posición del plano de rotura es independiente de la sobrecarga uniformemente repartida.*

69. Si conociéramos la situación del punto D, es claro que trazando por él una paralela á la línea de orientación, obtendríamos el punto C que define el plano de rotura de una manera directa, y, además, podríamos en seguida medir el valor de las magnitudes z y k que entran en la expresión del empuje.

Tracemos ahora por el punto D la recta DE paralela al plano de rotura AC y unamos el punto E con el A. Los triángulos ACD y ACE serán equivalentes por tener la base AC común y una misma altura; por lo tanto tendremos

$$\text{superf. ABC} = \text{superf. ACE},$$

y como consecuencia

$$BC = CE.$$

Hagamos

$$\begin{aligned} BC = CE &= d \\ CN &= e \\ AL &= a \\ AD &= x \\ AN &= b \end{aligned}$$

Los triángulos ACN y DEN son semejantes, lo mismo que los BLN y CDN.

De la semejanza de los primeros se deduce

$$\frac{x}{b} = \frac{d}{e};$$

y de la semejanza de los segundos

$$\frac{x - a}{b - x} = \frac{d}{e}$$

Por lo tanto

$$\frac{x - a}{b - x} = \frac{x}{b}$$

de donde

$$x = \sqrt{ab};$$

lo que nos dice que la magnitud x = AD es una media proporcional entre AL y AN.

Para construirla pudiéramos fundarnos, por ejemplo, en que la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo; ó bien en que la cuerda es media proporcional entre el diámetro y la proyección de aquella sobre éste. Preferimos el segundo procedimiento; porque por el primero el punto de tangencia no suele determinarse con la exactitud necesaria.

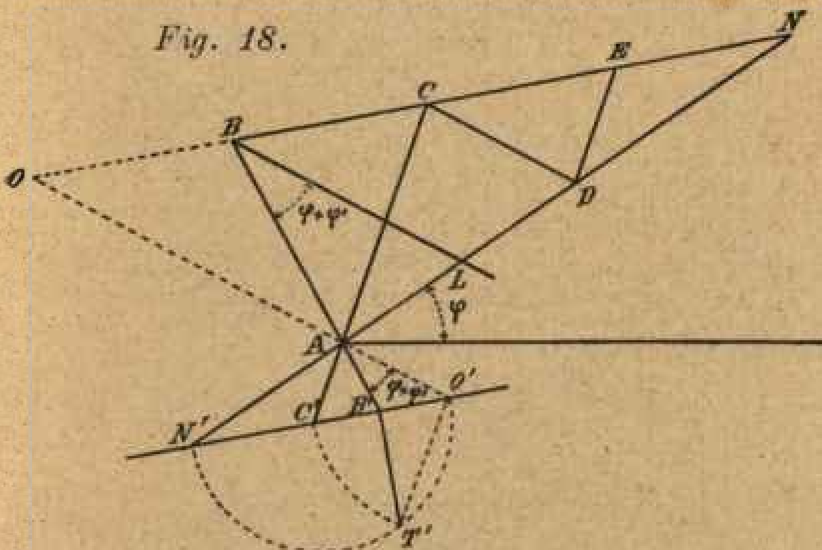
Si sobre AN, como diámetro, trazamos una semicircunferencia, tiramos por el punto L la perpendicular LT, y haciendo centro en A trazamos el arco TD, su intersección con AN nos dará el punto D, que queríamos encontrar.

70. Pudiera ocurrir que el punto N cayera muy lejos del punto A, resultando la magnitud AN demasiado grande y, por tanto, incómodo proceder como acabamos de indicar. Entonces la construcción puede verificarse del modo siguiente (figura 18).

Por el punto A se traza una paralela AO á la línea de orientación hasta que corte en O á la prolongación de la NB, y así resultarán los lados del ángulo ONA cortados por las tres paralelas CD, BL y OA. Los segmentos homólogos que resultan sobre

NO y sobre NA serán proporcionales; por consiguiente, así como AD es media proporcional entre AL y AN, OC será también media proporcional entre OB y ON. Ahora bien, si prolongamos las rectas OA, BA, CA y NA, y á una distancia conveniente trazamos la O′N′ paralela á la ON, las figuras AOBCNA y AO′B′C′N′A serán semejantes; por lo tanto O′C′ será media proporcional entre O′B′ y O′N′, siendo el punto C′ el que unido con A define, por la recta C′A que los une, el plano de rotura.

Fig. 18.

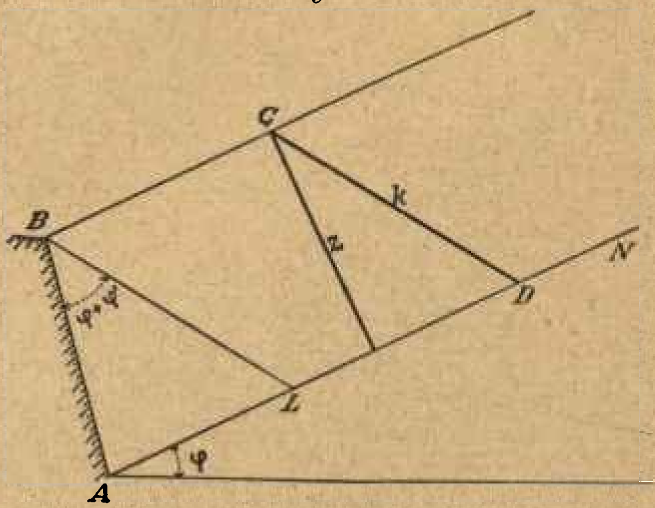


Para fijar el punto C′, trazaríamos una semicircunferencia sobre O′N′ como diámetro, por B′ levantaríamos la perpendicular B′T′, y haciendo centro en O′ y describiendo con el radio O′T′ el arco T′C′, el punto C′ quedaría conocido, y por consiguiente la recta C′AC, que fija la posición del plano de rotura.

71. Si la superficie del terraplén fuera paralela á AN, es decir, si presentara la inclinación del talud natural; en tal caso, la construcción necesaria para determinar el plano de rotura sería imposible, porque los puntos C y N resultarían alejados al infinito. Esta consideración basta para probar que el plano de rotura coincidiría con el talud AN que pasa por el pie del muro.

La indeterminación del empuje que parece resultar en el

Fig. 19.



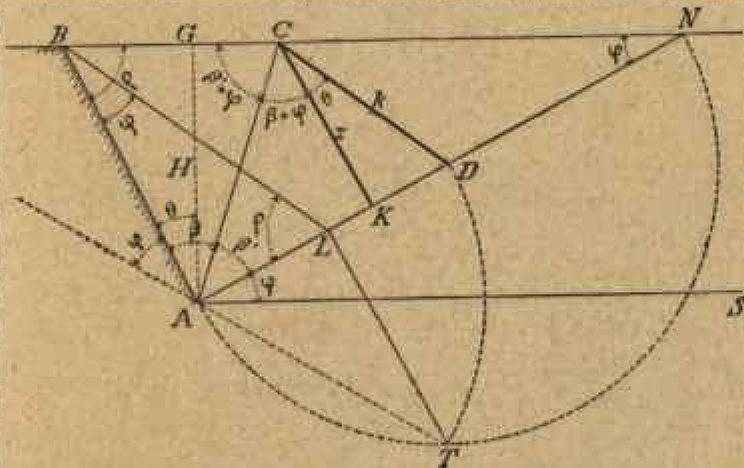
caso actual no existe, observando que las magnitudes z y k, que entran en la expresión de Q, se pueden medir en cualquier región de la figura, por ser las rectas BC y AN paralelas.

72. Observación.—En adelante prescindiremos por completo del frotamiento de las tierras contra el paramento del muro, aunque por ello resulte para Q un valor algo mayor que el verdadero. Esto supone que $\varphi' = 0$.

73. 2.º CASO. *Cuando la superficie del macizo de tierra sea un plano horizontal.*—En este caso, y bajo el supuesto de que $\varphi' = 0$, se verifica la notable propiedad de que el plano de rotura es bisector del ángulo BAN formado por el paramento del muro y el talud natural.

En efecto; los triángulos ABL y ABN son semejantes, por tener el ángulo en A común y el ABL del menor, igual al ANB del

Fig. 20.



mayor; pues ambos son iguales á φ.

Comparando sus lados homólogos, tendremos:

$$\frac{AB}{AL} = \frac{AN}{AB},$$

de donde

$$(AB)^2 = AL \times AN;$$

pero hemos demostrado que

$$(AD)^2 = AL \times AN;$$

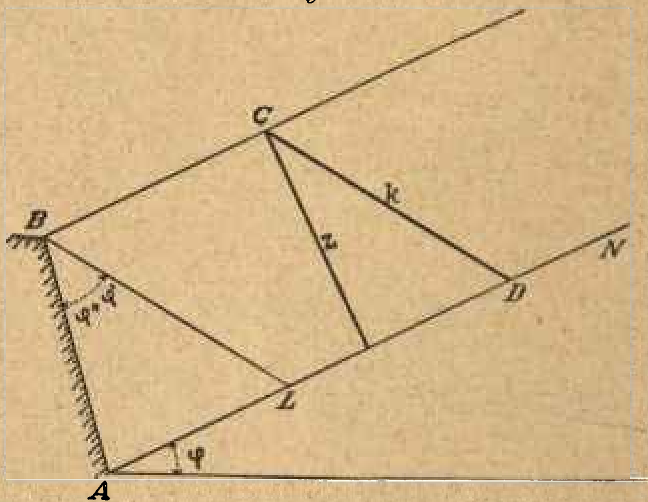
luego

$$AB = AD$$

Además, los ángulos ABN y ALB son iguales por homólogos de los triángulos semejantes que acaban de indicarse, los ALB y ADC también lo son por correspondientes entre las paralelas posible, porque los puntos C y N resultarían alejados al infinito. Esta consideración basta para probar que el plano de rotura coincidiría con el talud AN que pasa por el pie del muro.

La indeterminación del empuje que parece resultar en el

Fig. 19.



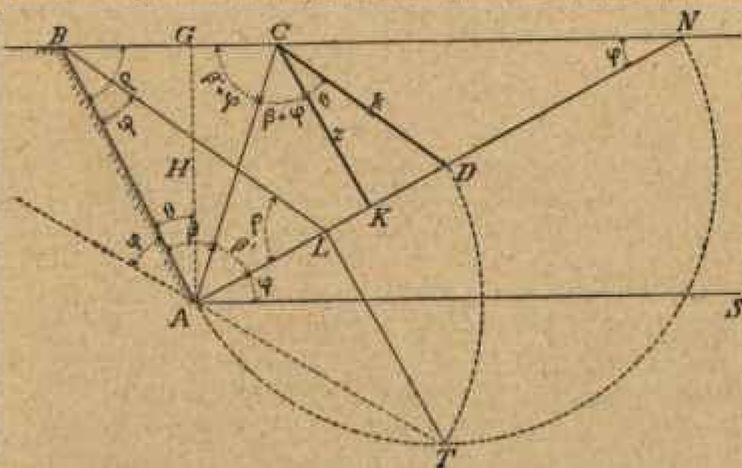
caso actual no existe, observando que las magnitudes z y k, que entran en la expresión de Q, se pueden medir en cualquier región de la figura, por ser las rectas BC y AN paralelas.

72. Observación.—En adelante prescindiremos por completo del frotamiento de las tierras contra el paramento del muro, aunque por ello resulte para Q un valor algo mayor que el verdadero. Esto supone que $\varphi' = 0$.

73. 2.º CASO. *Cuando la superficie del macizo de tierra sea un plano horizontal.*—En este caso, y bajo el supuesto de que $\varphi' = 0$, se verifica la notable propiedad de que el plano de rotura es bisector del ángulo BAN formado por el paramento del muro y el talud natural.

En efecto; los triángulos ABL y ABN son semejantes, por tener el ángulo en A común y el ABL del menor, igual al ANB del

Fig. 20.



mayor; pues ambos son iguales á φ.

Comparando sus lados homólogos, tendremos:

$$\frac{AB}{AL} = \frac{AN}{AB},$$

de donde

$$(AB)^2 = AL \times AN;$$

pero hemos demostrado que

$$(AD)^2 = AL \times AN;$$

luego

$$AB = AD$$

Además, los ángulos ABN y ALB son iguales por homólogos de los triángulos semejantes que acaban de indicarse, los ALB y ADC también lo son por correspondientes entre las paralelas

LB y DC: por lo tanto, los ángulos CBA y CDA, que son iguales á un tercero, serán iguales entre sí.

Por otra parte, de los triángulos ABC y ACD se deduce que $\text{sen}\,(\beta + \varphi) = \frac{AD}{AC}\,\text{sen}\,\rho$, $\text{sen}\,(\beta' + \varphi) = \frac{AB}{AC}\,\text{sen}\,\rho$; de donde $\text{sen}\,(\beta + \varphi) = \text{sen}\,(\beta' + \varphi)$, lo que prueba que los ángulos $\beta + \varphi$ y $\beta' + \varphi$ han de ser iguales ó suplementarios.

No pueden ser suplementarios, porque la construcción exige que $(\beta + \varphi) + (\beta' + \varphi) < 180$; para todo valor de $\theta < 90 - \varphi$, que es lo que en la realidad acontece; luego necesariamente serán iguales, resultando en conclusión que $\beta = \beta'$. La recta AC será bisectriz del ángulo BAN, como queríamos demostrar.

74. Conviene ahora escribir la expresión del empuje en función de la altura H del muro, del ángulo θ que este forma con la vertical, del ángulo β que forma el paramento con el plano de rotura y del ángulo φ de frotamiento de las tierras.

Observemos que los triáugulos AGB y KCD son semejantes, por ser rectángulos y tener el ángulo CDK igual al ABG. El ángulo KCD será igual al BAG, es decir, á θ.

Del triángulo KCD se saca

$$k = \frac{z}{\cos\theta}$$

y del triángulo ACK

$$z = AC\,\text{sen}\,\beta$$

de donde

$$k = AC\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\theta}.$$

Multiplicando estas expresiones, resultará

$$kz = (AC)^2\,\frac{\text{sen}^2\beta}{\cos\theta}$$

El ángulo BCA es igual al CAS, por alternos, y vale $\beta + \varphi$, por lo cual del triángulo CGA deduciremos que

$$AC = \frac{H}{\text{sen}\,(\beta + \varphi)}$$

y sustituyendo en la expresión de $k\zeta$ resultará:

$$\zeta k = \frac{H^2}{\cos\theta} \times \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2(\beta + \varphi)}$$

Si esta expresión de ζk la remplazamos en la fórmula general del empuje, que es, como sabemos

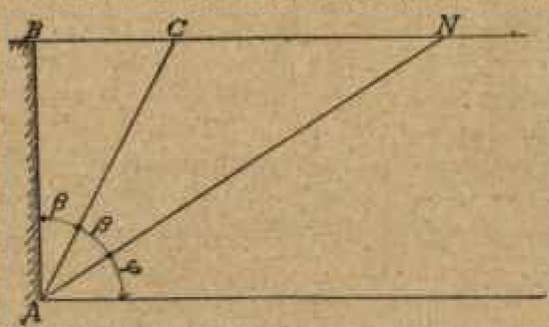
$$Q = \frac{1}{2}\,\delta\left(1 + \frac{2p}{\delta H'}\right)\zeta k$$

y observamos que H′ es en este caso la altura H del muro, tendremos

$$Q = \frac{1}{2}\,\delta\left(1 + \frac{2p}{\delta H}\right)\frac{H^2}{\cos\theta} \times \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2(\beta + \varphi)}$$

75. Si el paramento del muro fuese vertical (figura 21), sería $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$.

Fig. 21.



Además

$$\beta + \varphi = 90 - \beta$$

y por tanto

$$\operatorname{sen}(\beta + \varphi) = \cos\beta.$$

En este caso, la expresión del empuje se reduce á la siguiente forma:

$$Q = \frac{1}{2}\delta\left(1 + \frac{2p}{\delta H}\right)H^2 tg^2\beta$$

76. Por último, si no existiera sobrecarga, sería entonces $p = 0$, y tendríamos

$$Q = \frac{1}{2}\delta H^2 tg^2\beta$$

que es la expresión más conocida del empuje de las tierras, cuando el terraplén es horizontal, arranca de la coronación del muro, no hay sobrecarga y el paramento interior del muro es vertical.

77. 3.er CASO. *Cuando la superficie del macizo de tierra está constituída por dos planos.*—Sea BFN (figura 22) el perfil de la superficie del macizo de tierra, limitado por los planos BF y FN. Tracemos la línea de orientación BL, unamos el punto A con el F y por F tracemos la recta FJ paralela á la línea de orientación.

Si el plano de rotura coincidiera con AF, los triángulos ABF y AFJ serían equivalentes, y como consecuencia tendríamos BM = MJ.

Si el plano de rotura cayera á la izquierda del punto M, entonces se verificaría que BM > MJ; y por último, si dicho plano cayera á la derecha de M, resultaría BM < MJ, como la figura manifiesta.

En conclusión; para saber si el plano de rotura caerá á la izquierda ó á la derecha de la recta AF, que une el pie del muro con el punto F de encuentro de los dos planos en que termina el macizo, no hay más que determinar el punto M, como antes hemos dicho, y comparar las magnitudes BM y MJ.

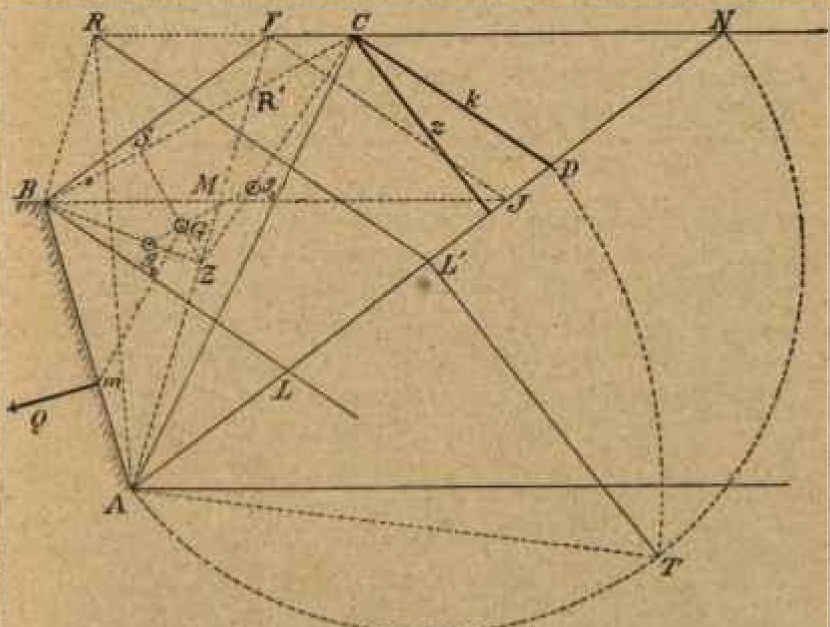
78. Supongamos, como indica la figura, que BM < MJ, y sea

AC el plano de rotura. Deberá verificarse, como sabemos, que

superf. ABFCA = superf. ACD.

Si por el punto B trazamos la recta BR paralela á AF hasta

Fig. 22.



su encuentro en R con la prolongación de NF, los triángulos AFB y AFR serán equivalentes, por tener la base común y la misma altura, y por tanto resultará

superf. ABFCA = superf. ARC,

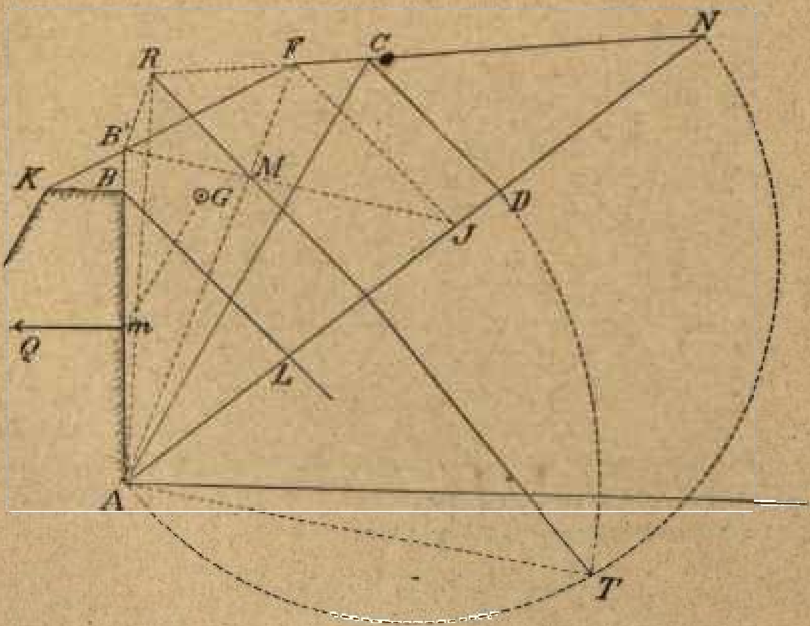
en cuyo caso tendremos también

superf. ARC = superf. ACD,

como condición necesaria que define el plano de rotura.

Observando que si el paramento del muro fuese AR, y RN el plano en que terminase el terraplén, llegaríamos á la misma condición que queda establecida, se ve en seguida que para fijar el plano de rotura no hay más sino aplicar las construcciones conocidas al macizo ARN. En su virtud, una vez fijado el punto R, trazaríamos por él la paralela RL′ á la línea de orientación, describiríamos sobre AN, como diámetro, una semicircunferencia; por el punto L′ levantaríamos la perpendicular L′T y haciendo centro en A con el radio AT, se trazaría el arco TD, en cuyo caso trazando por D la paralela DC á la línea de orientación, el punto C, unido con el A, determinaría la traza del plano de rotura.

Fig. 23.



79. Si este plano cayera á la izquierda, lo que sucederá, como hemos dicho, si BM > MJ, entonces la línea de orientación se trazaría por el punto B, y por L levantaríamos la perpendicular á la recta AN′, siendo N′ el punto en que se corten las rectas BF y AN prolongadas suficientemente, continuando la construcción, como en el caso anterior.

80. 4.º CASO. *Cuando las tierras cubren la coronación del muro, estando constituída la superficie de aquéllas por dos planos.*—En este caso (figura 23) basta prolongar AB hasta su encuentro en B′ con el plano KF, y proceder con el macizo AB′FN como se ha dicho en el caso anterior, lo que equivale á suponer que ahora el muro es el AB′, que se encuentra en las condiciones del caso que precede.

81. Punto de aplicación del empuje. Cuando la superficie del terraplén es un plano. — Si en un mismo muro consideramos diversas alturas, á contar de la arista de coronación, es evidente que para cada altura resultará un empuje distinto, y á mayor altura corresponderá mayor empuje. Veamos ante todo cómo varía éste, cuando la altura varía de o á H.

Hemos demostrado que la expresión del empuje es

$$Q = \frac{1}{2}\,\delta\left(1 + \frac{2p}{\delta H'}\right)kz$$

Representemos por Q_x el empuje correspondiente á la altura x. Si para esta altura hiciéramos las construcciones necesarias que determinan las magnitudes de k, z y H', correspondientes á Q_x, y que representaremos respectivamente por k_1, z_1, H'_1 veríamos que

$$\frac{k_1}{k} = \frac{z_1}{z} = \frac{H'_1}{H'} = \frac{x}{H}$$

de donde

$$k_1 = k\frac{x}{H}\ ;\quad z_1 = z\frac{x}{H}\quad \text{y}\quad H'_1 = H'\frac{x}{H}\,.$$

Por tanto, si en la expresión de Q_x,

$$Qx = \frac{1}{2}\delta\left(1 + \frac{2p}{\delta H'_1}\right)k_1\zeta_1$$

reemplazamos los valores de k_1, ζ_1 y H'_1 en función de x, que quedan indicados, tendremos

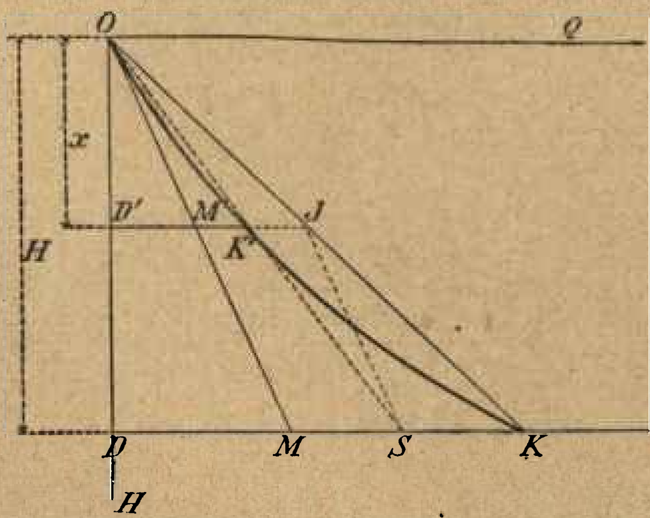
$$Q_x = \frac{1}{2}\delta\left(1 + \frac{2p}{\delta H' \frac{x}{H}}\right)k\zeta\frac{x^2}{H^2}$$

ó bien

$$Q_x = \delta\left[\frac{1}{2}k\zeta \cdot \frac{x^2}{H^2} + \frac{pk\zeta}{\delta H'} \cdot \frac{x}{H}\right]$$

82. Sean OQ y OH (figura 24) dos ejes rectangulares, mi-

Fig. 24.



diendo las alturas sobre el vertical OH y los empujes correspondientes sobre el horizontal OQ.

Tomemos OD = H, altura del muro, y tracemos por D la recta DK, paralela al eje de empujes.

Si en la expresión general de Q_x, hacemos x = H, resultará:

$$Q_H = \delta \left(\frac{1}{2} kz + \frac{pkz}{\delta H'} \right)$$

La magnitud representada dentro del paréntesis, se compone de dos partes. Desde el punto D, tomemos DM igual á la segunda parte, y á continuación MK, igual á la primera.

Tendremos

$$DM = \frac{pkz}{\delta H'}$$

$$MK = \frac{1}{2} kz$$

Unamos el origen O con los puntos M y K por las rectas OM y OK.

Sobre el eje de alturas tomemos una magnitud arbitraria $OD' = x$; tracemos D'J paralela á DK, JS paralela á OM y por S la recta SO.

Vamos á demostrar que el punto K', intersección de las rectas SO y D'J, tiene por coordenada horizontal una magnitud D'K', cuyo valor, multiplicado por δ, da precisamente el del empuje Q_x, que corresponde á la altura x.

De la semejanza de los triángulos que indica la figura 24 se deduce

$$\frac{M'K'}{MS} = \frac{x}{H}, \text{ y } M'K' = MS \frac{x}{H};$$

pero como

$$MS = M'J, \quad \text{será} \quad M'K' = M'J \frac{x}{H}$$

Además,

$$\frac{M'J}{MK} = \frac{x}{H}, \text{ y } M'J = MK \frac{x}{H}$$

de donde

$$M'K' = MK \frac{x^2}{H^2}$$

Tenemos también

$$\frac{D'M'}{DM} = \frac{x}{H}, \quad y \quad D'M' = DM \frac{x}{H};$$

por tanto, como

$$D'K' = M'K' + D'M'$$

resultará

$$D'K' = MK \frac{x^2}{H^2} + DM \frac{x}{H}.$$

y reemplazando, en vez de MK y DM sus valores, tendremos

$$D'K' = \frac{1}{2} kz . \frac{x^2}{H^2} + \frac{pkz}{\delta H'} . \frac{x}{H};$$

por consiguiente

$$D'K' \times \delta = Q_x$$

como queríamos demostrar.

83. La curva obtenida por medio de suficiente número de puntos análogos al punto K′ recibe el nombre de *curva de los empujes*. En ella representan; las coordenadas verticales alturas contadas desde la coronación, y las horizontales, *multiplicadas por* δ, los empujes correspondientes.

84. Consideremos de nuevo la espresión de Q_x:

$$Q_x = \delta \left(\frac{1}{2} . \frac{kz}{H^2} x^2 + \frac{pkz}{\delta H'H} x \right)$$

y hagamos

$$\frac{1}{2} . \frac{kz}{H^2} = A$$

$$\frac{pkz}{\delta H'H} = B$$

Tendremos

$$Q_x = \delta(Ax^2 + Bx)$$

El empuje elemental, sobre el elemento *ab* de superficie de muro, proyectado según *dx* (figura 25) será:

$$dQ_x = \delta\,(2Ax + B)\,dx\,.$$

ó bien

$$dQ_x = \delta y dx$$

siendo

$$y = 2Ax + B.$$

Esta es la ecuación de una recta en la cual

$$\text{para } x = 0 \quad , \quad y = B$$
$$\text{y para } x = H \quad , \quad y = 2AH + B.$$

Sean OX y OY los ejes rectangulares á los que esté referida dicha recta, siendo AB el paramento del muro (figura 25).

Si tomamos OL=B, ordenada en el origen, y para la abscisa OA′ = H, trazamos la ordenada A′R = 2AH + B, la recta pasará por los puntos L y R.

85. El trapecio que resulta limitado por el eje de abscisas, las ordenadas extremas y la recta RL, es decir, el A′OLR, recibe el nombre de *trapecio de los empujes*. Uno cualquiera de los elementos de su superficie, ydx, multiplicado por δ, representa, como hemos visto, el empuje elemental sobre el elemento correspondiente *ab* del muro. La suma de los empujes elementales, es decir, el empuje total sobre todo el paramento AB, estará, por tanto, representado por la superficie Ω de dicho trapecio, multiplicada por δ. En efecto; el area Ω tiene por expresión

$$\Omega = \frac{A'R + OL}{2} \times H\,,$$

ó multiplicando por δ y sustituyendo en vez de A′R y OL sus valores, será

$$\delta\Omega = \delta\,(AH^2 + BH)\,,$$

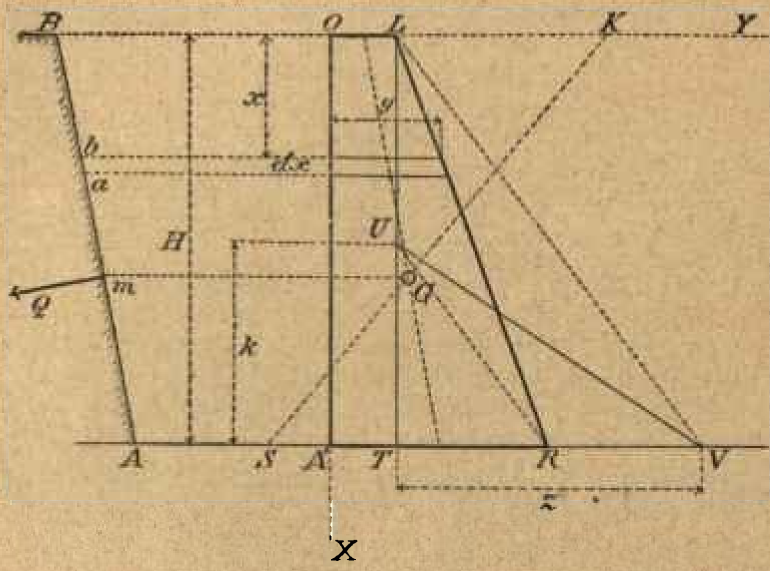
y remplazando por A y B los suyos

$$\delta\Omega = \frac{1}{2}\,\delta\left(1 + \frac{2p}{\delta H'}\right) kz = Q,$$

como habíamos indicado.

86. Representando las ordenadas horizontales del trapecio,

Fig. 25.



multiplicadas por δ; las componentes paralelas de Q, esta fuerza quedará representada por una recta horizontal cuyo valor sea $\delta\Omega$, trazada por el centro de gravedad G de dicho trapecio. Por consiguiente, el punto *m*, en que la horizontal G*m* corta al paramento del muro, será el punto de aplicación del empuje Q.

87. Como, según hemos visto antes,

$$Q = \delta\Omega,$$

podemos también decir que *el empuje sobre un muro de sostenimiento está representado por el peso de un prisma de tierra, cuya altura es la unidad y cuya base ó sección recta es el trapecio de los empujes.*

88. Conocidas las magnitudes k y z, es fácil construir dicho trapecio, teniendo en cuenta que se compone de un rectángulo y un triángulo, cuya altura común es H, y que este último es equivalente al triángulo rectángulo, cuyos catetos son k y z.

La base del rectángulo es $A'T = B = \frac{pkz}{\delta H'H}$.

La del triángulo es $TR = 2AH = \frac{kz}{H}$.

El area de este será $\frac{1}{2} TR \times H = \frac{1}{2} kz$.

Por lo tanto, si á continuación de la base A′T del rectángulo tomamos la magnitud $TV = z$ y sobre TL tomamos $TU = k$, la cuestion queda reducida á transformar el triángulo TUV, cuya superficie vale $\frac{1}{2} kz$, en otro equivalente cuya altura sea H.

Para ello trazaremos la recta VL y por U la UR paralela á la anterior. El punto R definirá la base TR del triángulo TLR equivalente al TUV, y el cual sumado con el rectángulo A′OLT, dará el trapecio de los empujes A′OLR.

89. **Caso en que no existe sobrecarga.** — Cuando sobre el terraplén no gravita ninguna sobrecarga, el término en p desaparece y la expresión del empuje se reduce, como sabemos, á

$$Q = \frac{1}{2} \delta kz.$$

Para una altura x, el empuje correspondiente Q_x será

$$Q_x = \frac{1}{2}\, \delta k z\, \frac{x^2}{H^2}$$

ó bien

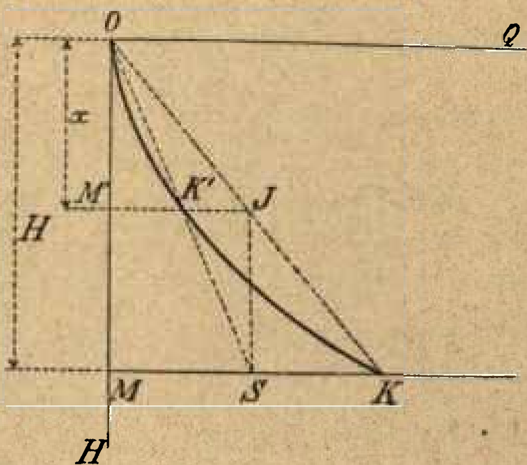
$$Q_x = \delta A x^2,$$

haciendo

$$\frac{1}{2}\, \frac{kz}{H^2} = A$$

En este caso la curva de los empujes es una parábola, cuyo vértice está en O (figura 26).

Fig. 26.



El empuje elemental tendrá por expresión

$$dQ_x = \delta \,.\, 2Axdx,$$

ó bien

$$dQ_x = \delta\, y dx,$$

haciendo

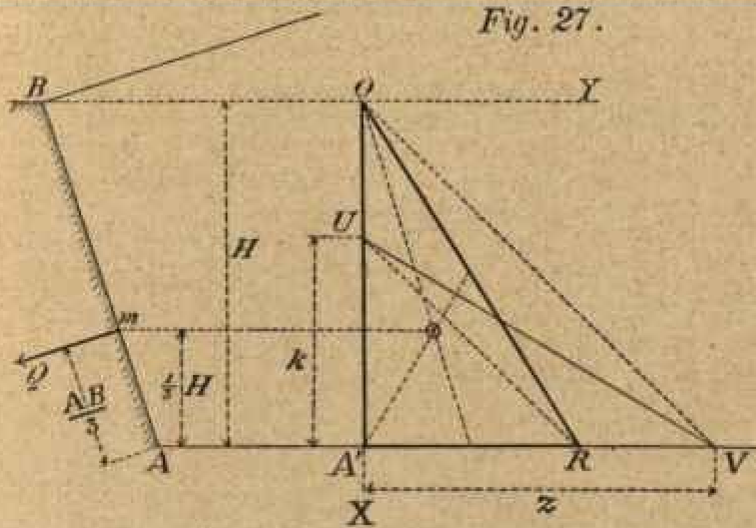
$$y = 2Ax,$$

ecuación de una recta en la que:

$$\text{para } x = 0, \qquad y = 0$$
$$\text{»} \quad x = \mathrm{H}, \qquad y = 2\mathrm{AH} = \frac{kz}{\mathrm{H}}$$

90. La recta representada por la ecuación $y = 2\mathrm{A}x$, será la O R, (figura 27) y la superficie de los empujes se reducirá al

Fig. 27.



triángulo A'OR, cuya área es

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{A'R} \times \mathrm{H} = \frac{1}{2}\,kz$$

y por tanto

$$\delta\Omega = \frac{1}{2}\,\delta kz = \mathrm{Q}.$$

91. Si UA'V es el triángulo rectángulo cuyos catetos son k y z, transformándolo en otro equivalente de altura H, dará el triángulo de los empujes A'OR.

El punto m de aplicación del empuje Q distará del pie del muro el tercio de la longitud de su paramento AB.

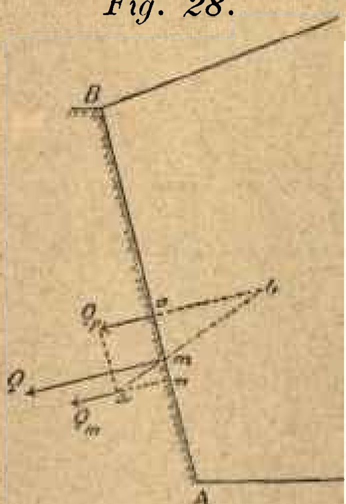
92. Observación.—Cuando existe sobrecarga no es necesario, en realidad, construir el trapecio de los empujes para hallar el punto de aplicación de Q.

En efecto; la expresión de Q

$$Q = \frac{1}{2}\,\delta k z + \frac{pkz}{H'},$$

consta de dos términos, que podemos llamar Q_m y Q_p y los cuales representan respectivamente

Fig. 28.



$Q_m = \frac{1}{2}\,\delta k z$, el empuje engendrado solamente por el prisma de tierra de máximo empuje, y

$Q_p = \frac{pkz}{H'}$, el empuje suplementario producido por la sobrecarga.

Claro es que la fuerza Q_m se distribuye sobre el paramento del muro como las ordenadas horizontales del triángulo LTR (figura 25), es decir, de una manera uniformemente creciente de o á TR, á contar de la arista de coronación, y su punto de aplicación distará, por tanto, del pie del muro, el tercio de la longitud de su paramento AB (figura 28).

La fuerza Q_p se distribuye sobre dicho paramento uniformemente, como las ordenadas horizontales del rectángulo

A'OLT, y su punto de aplicación estará en el punto medio del paramento AB (figura 28).

Por consiguiente, calculadas las componentes paralelas

$$Q_m = \frac{1}{2}\delta k z \quad \text{y} \quad Q_p = \frac{pkz}{H'},$$

aplicadas á los puntos conocidos n y o (figura 28), sobre la prolongación de Q_p, tomaríamos $Ob = Q_m$ y sobre Q_m, $an = Q_p$, y uniendo a y b, por medio de la recta ab, el punto m de intersección con el paramento será el de aplicación de la resultante Q ([a]).

93. Caso en que la superficie del terraplén se compone de dos planos.— Cuando la superficie del terraplén se compone de dos planos, no existiendo sobrecarga (figura 29), hay que proceder de la manera siguiente para encontrar el punto de aplicación del empuje.

Supongamos dividido el paramento AB (figura 30) en suficiente número de partes. Las distancias de los puntos de división á la arista B darán, proyectadas sobre la vertical OA' = H (altura del muro), otros tantos valores de x. Los empujes correspondientes se calcularán siguiendo la marcha que expusimos oportunamente para el caso que nos ocupa; lo que permitirá construir la curva ODA'' de los empujes.

Sobre el elemento de muro dx, situado, por ejemplo, en n, se ejercerá un empuje dQ_x. Su momento con respecto á la arista A tendrá por expresión

$$\frac{H - x}{\cos\theta}\, dQ_x$$

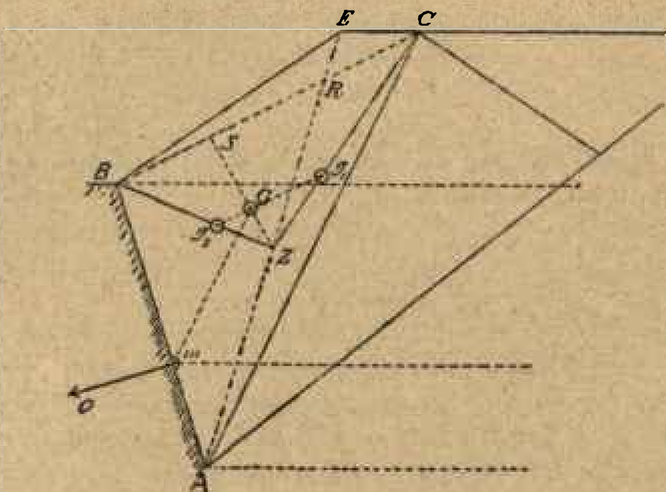
([a]) Si llamáramos L á la longitud AB del paramento, la distancia Am, que es igual á $An + nm$, puede calcularse fácilmente, teniendo en cuenta que $An = \frac{1}{3}L$ y $On = \frac{1}{6}L$. Dicha distancia, que define el punto m, tiene por expresión,

$$Am = \frac{1}{3} L \times \frac{\delta H' + 3p}{\delta H + 2p}.$$

y la suma de todos los momentos análogos será, por tanto, igual al momento de la resultante Q.

Si representamos por ζ la distancia del punto *m* al plano horizontal que pasa por A, el brazo de palanca de Q, que es *m*A,

Fig. 29.



será $mA = \frac{\zeta}{\cos\theta}$, y el momento del empuje Q, será

$$\frac{\zeta}{\cos\theta}\cdot Q.$$

Por consiguiente tendremos

$$\frac{1}{\cos\theta}\int (H - x)\, dQ_x = \frac{1}{\cos\theta}\,\zeta Q$$

ó suprimiendo la constante que multiplica á ambos miembros.

$$\int (H - x)\, dQ_x = \zeta Q \qquad (a)$$

Si el área OA′A″ la dividiéramos en fajas verticales infinitamente estrechas, el área elemental de la curva de los empujes, $d\Omega$, tendría por expresión

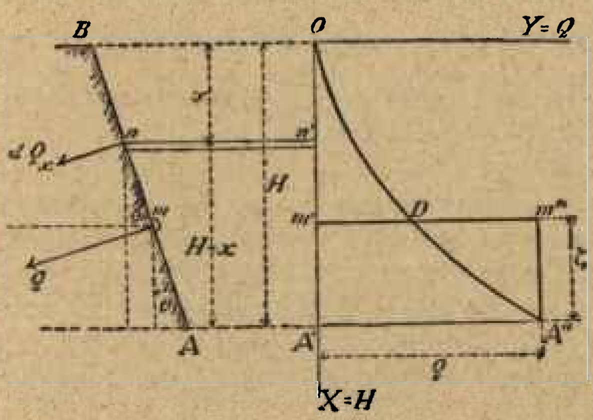
$$d\Omega = (\mathrm{H} - x)\, d\mathrm{Q}_x$$

de donde

$$\Omega = \int (\mathrm{H} - x)\, d\mathrm{Q}_x .$$

lo que hace ver que el primer miembro de la ecuación (a) repre-

Fig. 30.



senta el área de la referida curva de los empujes. El segundo miembro ζQ representa, á su vez, el área de un rectángulo, cuya base es el empuje Q y cuya altura ζ es la proyección vertical del brazo de palanca del empuje, con relación al punto A.

En vista de esto, si transformamos el área de la curva de los empujes en un rectángulo A′A″$m''m'$, equivalente, cuya base sea Q = A′A″, es evidente que la altura será el valor de ζ. La base superior de este rectángulo, prolongada, cortará al paramento del muro en el punto m de aplicación del empuje Q.

94. La construcción de la curva de los empujes es un tanto penosa, si ha de hacerse bien; por cuyo motivo el punto *m* se encontrará con mucha más facilidad y con la necesaria exactitud trazando por el centro de gravedad G del cuadrilátero ABFC, la recta G*m* paralela al plano de rotura, que cortará al paramento AB en el punto *m* (figura 29).

95. La determinación del centro de gravedad del cuadrilátero referido ABFC, que representa el prisma de máximo empuje, se reduce á las sencillas operaciones siguientes (figura 29).

Se trazan las diagonales AF y BC. Sobre la primera se fija el punto medio Z y sobre la segunda el punto S, de manera que CS = BR. Se traza la recta SZ y se toma sobre ella $ZG = \frac{1}{3}$ SZ.

El punto G es el centro de gravedad del cuadrilátero, como es fácil demostrar.

96. Si las tierras cubren la coronación del muro, estando constituida la superficie de aquellas por dos planos, el punto de aplicación del empuje se fijará, con la aproximación suficiente, hallando el centro de gravedad del cuadrilátero AB′FC (figura 23), y trazando por él una paralela al plano de rotura, que cortará al paramento AB en el punto *m*.

97. Cálculo del empuje sin necesidad de medir las magnitudes k y z.—Bajo otra forma muy sencilla podemos escribir el empuje de las tierras.

Hemos visto (número **65**) que

$$Q = P\frac{CD}{AD}$$

es decir, que el empuje viene dado en todos los casos por el producto del peso P del prisma de máximo empuje, multiplicado por la relación $\frac{CD}{AD}$.

Ahora bien (figura 15); si por el punto C se traza la recta CJ, paralela al paramento del muro AB, se verá que

$$\text{ang.}^{\circ}\ ACJ = \text{ang.}^{\circ}\ BAC = \beta$$

$$\text{ang.}^{\circ}\ JCD = \text{ang.}^{\circ}\ ABL = \varphi + \varphi'$$

y por tanto

$$\text{ang.}^{\circ}\ ACD = \beta + \varphi + \varphi'$$

Del triángulo ACD se deduce que la expresada relación $\frac{CD}{AD}$, vale.

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\text{sen}\ (\alpha - \varphi)}{\text{sen}\ (\beta + \varphi + \varphi')};$$

pero como en las aplicaciones prescindiremos por completo, para el cálculo del empuje normal, del rozamiento de las tierras contra el muro, lo que equivale á establecer que $\varphi' = 0$, dicha relación se reducirá á

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\text{sen}\ (\alpha - \varphi)}{\text{sen}\ (\beta + \varphi)}$$

y reemplazándola en la expresión de Q, tendremos

$$Q = P\,\frac{\text{sen}\ (\alpha - \varphi)}{\text{sen}\ (\beta + \varphi)} \qquad (1)$$

fórmula general, en la que, conociendo los ángulos α, β y φ, sólo se necesita determinar el valor de P.

98. Este valor de P puede obtenerse en todos los casos, multiplicando por δ el área, según la cual se proyecta verticalmente el prisma de máximo empuje; y dicha área se determinará con un planímetro ó directamente por el cálculo. Lo primero puede hacerse siempre; lo segundo no es difícil cuando la superficie del terraplén es un plano.

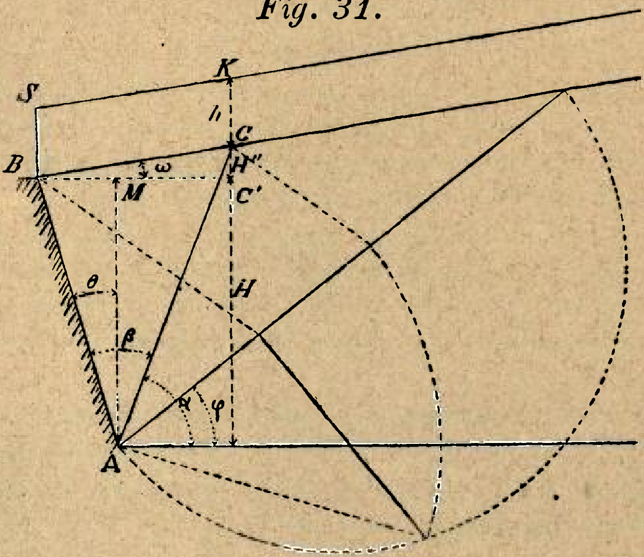
99. Calculemos el valor de P en el caso más general, es decir, cuando siendo un plano inclinado la superficie del terraplén, exista además una sobrecarga uniformemente repartida y el paramento del muro forme con la vertical un ángulo θ.

Sea ω el ángulo que forme la superficie plana del terraplén con el horizonte.

El prisma de máximo empuje se proyectará según ABSKCA (figura 31), cuya área se compone de un triángulo y un paralelógramo. El peso de dicho prisma, será por tanto

$$P = \delta \text{ (superf. ABC + superf. BSKC).}$$

Fig. 31.



Pero claramente se deduce de la figura que

$$\text{superf. ABC} = \frac{1}{2} \text{BN (H + H'')}$$

Además

$$H'' = BC \text{ sen } \omega$$

y como en el triángulo ABC se verifica que

$$\frac{BC}{AB = \dfrac{H}{\cos\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha - \omega)},$$

de donde

$$BC = \frac{H \operatorname{sen}\beta}{\cos\theta \operatorname{sen}(\alpha - \omega)};$$

tendremos

$$H'' = \frac{H \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\omega}{\cos\theta \operatorname{sen}(\alpha - \omega)},$$

y también

$$\text{superf. ABC} = \frac{1}{2} BN \times H \left(1 + \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\omega}{\cos\theta \operatorname{sen}(\alpha - \omega)}\right).$$

Del triángulo ABN se deduce que

$$BN = H (\operatorname{tg}(\beta - \theta) + \operatorname{tg}\theta)$$

por tanto, resultará

$$\text{superf. ABC} = \frac{1}{2} H^2 (\operatorname{tg}(\beta - \theta) + \operatorname{tg}\theta) \left(1 + \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\omega}{\cos\theta \operatorname{sen}(\alpha - \omega)}\right)$$

y puesto que

$$\text{superf. BSKC} = BC \cos\omega \, . \, h,$$

tendremos, remplazando el valor de BC antes calculado,

$$\text{superf. BSKC} = \frac{H \operatorname{sen}\beta \cos\omega \, . \, h}{\cos\theta \operatorname{sen}(\alpha - \omega)}$$

Si sustituímos en la expresión de P el valor de estas superficies y separamos $\frac{1}{2} H^2$ como si fuera factor común, tendremos por último

102. Si la superficie del terraplén fuera horizontal y existiese sobrecarga, entonces se tendría $\omega = 0$, $\cos\omega = 1$ y $H' = H$ y la fórmula anterior se reducirá á

$$Q = \frac{1}{2}\,\delta\left(1 + \frac{2h}{H}\right)kz$$

aplicable á los casos 3.º y 5.º que hemos considerado antes. En todos los demás casos, es decir en el 1.º, 2.º, 4.º y 6.º, en que no hay sobrecarga, dicha fórmula se convierte en

$$Q = \frac{1}{2}\,\delta kz.$$

103. Construyendo la figura en escala de $\frac{1}{100}$, que es bastante reducida y apreciando hasta medios milímetros, el error en los empujes determinados de esta manera tan sencilla no pasa de un cinco por mil, lo cual no tiene importancia alguna en las aplicaciones prácticas.

104. Cálculo de muros de sostenimiento.—Al calcular el empuje de las tierras, hemos prescindido del rozamiento de las mismas con la fábrica del muro; suponiendo por tanto que $\varphi' = 0$ y que dicho empuje tiene una dirección normal al paramento.

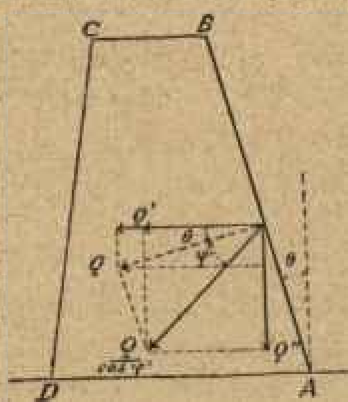
En este supuesto, como antes de ahora hemos hecho notar, el valor de Q resultará siempre mayor que el verdadero; porque para que se anulara el ángulo φ' de rozamiento sería preciso que entre el muro y las tierras se interpusiera una capa de agua ó una masa cenagosa suficientemente flúida, procedente de las filtraciones posibles á lo largo del paramento ó á través de la masa de tierra, lo que no sucede tomando en la construcción del muro las precauciones ordinarias de saneamiento, cuyo estudio no corresponde á este lugar.

Por otra parte, las experiencias hechas con el fin de determinar prácticamente la dirección del empuje han demostrado que éste no es normal á la cara interna del muro y por tanto que φ' no es igual á cero.

105. Si calculamos el empuje teniendo en cuenta el valor de φ' que se creyera más apropiado al caso de que se tratara, el empuje efectivo sería oblícuo (figura 32) y tendría por expresión $\frac{Q}{\cos\varphi'}$. Su componente horizontal $Q' = \frac{Q}{\cos\varphi'} \cos(\varphi' + \theta)$, tiende á determinar que el muro gire alrededor de la arista exterior de su base; y la componente vertical, juntamente con el peso de la fábrica, se opone á dicho giro apoyando el muro á la referida base.

106. Si admitiéramos que $\varphi' = 0$, el empuje normal resultará mayor que en el caso que precede. La componente horizontal $Q' = Q \cos\theta$ resultará también mayor, y en cambio la componente vertical $Q'' = Q \operatorname{sen}\theta$ será menor que antes. Habría por tanto ahora mayor tendencia al giro, no sólo por el aumento de la componente horizontal sino por la disminución de la componente vertical, cuyos brazos de palanca serían los mismos que antes.

Fig. 32.



107. Como compensación que pronto hemos de justificar, aceptaremos la condición $\varphi' = 0$ para el cálculo del empuje normal y supondremos $\varphi' = 25°$ (valor medio de φ') para determinar y trazar el empuje oblicuo que ha de servirnos de base al estudio de las condiciones de estabilidad de los muros de sostenimiento.

108. Condiciones de estabilidad y resistencia.— Oportunamente hemos establecido que eran tres las condiciones necesarias para que un muro cualquiera sea estable y resistente.

1.ª Imposibilidad de la rotación del muro alrededor de la arista exterior de su base.

Esta condición la reemplazaremos en las aplicaciones por la de *extensión teórica nula;* lo que quiere decir que la resultante de las presiones no corte á la base fuera de su tercio medio ó núcleo central.

2.ª Imposibilidad del deslizamiento á lo largo de dicha base.

3.ª Que la presión máxima unitaria no exceda del coeficiente de seguridad que se señale.

Estas tres condiciones, aplicables á todas las secciones horizontales, se refieren á los tres movimientos que pueden provocar la ruína de la obra y que es necesario impedir dotando al muro de la forma y dimensiones convenientes.

109. Como vimos en su lugar, tales condiciones se traducen algebráicamente del siguiente modo:

1.ª $K' \geqq K''$ ..... Rotación.

2.ª $Q < fP$ ..... Deslizamiento.

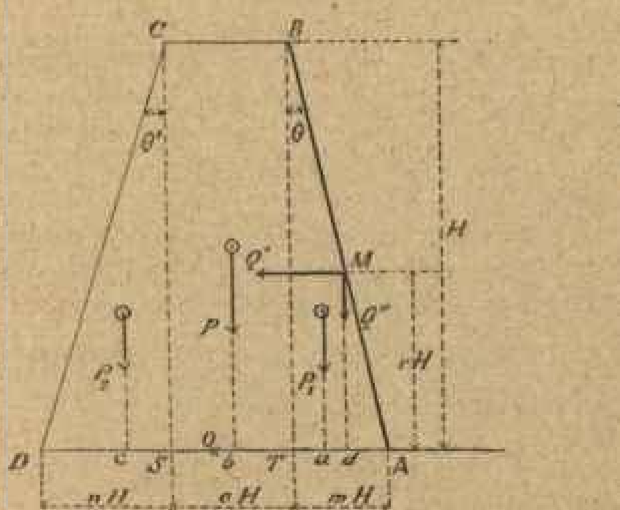
3.ª $K \geqq K' + K''$ ..... Aplastamiento.

En estas expresiones representan:

K' la tensión unitaria producida por la compresión;
K'' la máxima engendrada por la flexión;
K el coeficiente de seguridad á la compresión;
P la suma de las fuerzas verticales;
Q la suma de las fuerzas horizontales;
f el coeficiente de rozamiento de la fábrica sobre sí misma.

110. 1.ª condición.—*Extensión teórica nula, y como consecuencia imposibilidad de la rotación del muro alrededor de la arista exterior de su base.*

Fig. 33.



Consideremos como caso general un muro con ambos paramentos en talud (figura 33).

Llamemos

H á la altura del muro;

E al espesor del mismo en la base;

E′ al ancho de coronación;

e á la relación $\dfrac{E'}{H}$;

m á la tangente trigonométrica del ángulo θ que forma el paramento interior AB con la vertical;

n á la tangente del ángulo θ' que forma la vertical con el paramento exterior;

r á la relación entre la altura Md del punto de aplicación del empuje y la altura H del muro.

Es evidente que los espesores en la base y en la coronación tendrán por expresión

$$\mathrm{E} = (m + n + e)\mathrm{H}$$
$$\mathrm{E}' = e\mathrm{H}$$

111. Si se dan las inclinaciones m y n de ambos paramentos la incógnita del problema será la relación $e = \frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{H}}$, que vamos á determinar de manera que satisfaga á la ecuación primera de estabilidad $\mathrm{K}' = \mathrm{K}''$.

Sea Q el empuje determinado por cualquiera de los métodos indicados, pero sin tener en cuenta el ángulo φ', de cuya suerte resultará un valor de Q mayor que el verdadero.

El empuje oblicuo será $\frac{\mathrm{Q}}{\cos \varphi'}$; y si esta fuerza la descomponemos en una componente horizontal Q′ y otra vertical Q″, tendremos

$$\mathrm{Q}' = \frac{\mathrm{Q} \cos (\varphi' + \theta)}{\cos \varphi'}$$

$$\mathrm{Q}'' = \frac{\mathrm{Q} \operatorname{sen} (\varphi' + \theta)}{\cos \varphi'}.$$

112. Sea δ' el peso de la unidad del volumen de la fábrica con que haya de construirse el muro; p el peso de la parte rectangular proyectada en BCST; p_1 el de la triangular proyectada en ABT y p_2 el de la otra porción triangular CDS.

Si al punto O, centro de gravedad de la base (que equidistará de los extremos, puesto que la suponemos rectangular), trasladamos las fuerzas Q′, Q″, p, p_1, p_2 y al propio tiempo añadimos los pares de traslación correspondientes, para que subsistan las primitivas condiciones de equilibrio, veremos que la base se halla sometida.

1.º A un esfuerzo de compresión igual á $p+p_1+p_2+Q''$.

2.º A un esfuerzo de flexión producido por las fuerzas Q', p_2, p, p_1 y Q''; cuyos momentos, con relación al punto O, dan la siguiente suma algebráica.

$$Q' \times Md + p_2 \times Oc - p \times Ob - p_1 \times Oa - Q'' \times Od. \quad (^a)$$

3.º A un esfuerzo cortante igual á Q'.

Por consiguiente tendremos

$$K' = \frac{p+p_1+p_2+Q''}{\Omega}$$

$$K'' = \frac{Q' \times Md + p_2 \times Oc - p \times Ob - p_1 \times Oa - Q'' \times Od}{Z};$$

representando Ω el área de la base que, por considerar una zona de muro cuya longitud sea igual á la unidad, tendrá por expresión

$$\Omega = (m+n+e)H,$$

y siendo el módulo de flexión de dicha base

$$Z = \frac{(m+n+e)^2H^2}{6}.$$

Además, como la figura manifiesta claramente, tenemos:

$Md = rH$

$$Oc = OD - Dc = \frac{(m+n+e)H}{2} - \frac{2}{3}nH = H\left(\frac{m+e}{2} - \frac{n}{6}\right)$$

(a) Consideramos positivos, en este caso, los momentos de las fuerzas que tienden á hacer girar el muro de derecha á izquierda, al rededor del punto O, y negativos los de las fuerzas que se oponen á dicho giro.

$$Ob = OA - (bT + TA) = \frac{(m + n + e)H}{2} - \frac{eH}{2} - mH = H\frac{n - m}{2} \text{ (a)}$$

$$Oa = OA - Aa = \frac{(m + n + e)H}{2} - \frac{2}{3}mH = H\left(\frac{n + e}{2} - \frac{m}{6}\right)$$

$$Od = OA - dA = \frac{(m + n + e)H}{2} - mrH.$$

Los pesos p_1 y p_2 de las porciones triangulares pueden calcularse desde luego; puesto que sus expresiones, independientes de la incógnita, son:

$$p_1 = \frac{1}{2}\delta' mH^2 \quad ; \quad p_2 = \frac{1}{2}\delta' nH^2.$$

El peso de la porción rectangular es desconocido y tiene por expresión $p = \delta' eH^2$.

En resúmen tenemos:

Fuerzas.	Brazos de palanca.	Signo del momento.
$Q' = \frac{Q\cos(\varphi' + 0)}{\cos\varphi'}$	rH .... $= Md$	$+$
$p_2 = \frac{1}{2}\delta' nH^2$	$\left(\frac{m + e}{2} - \frac{n}{6}\right)H$ .. $= Oc$	$+$
$p = \delta' eH^2$	$\frac{n - m}{2}H$ .... $= Ob$	$-$
$p_1 = \frac{1}{2}\delta' mH^2$ ...	$\left(\frac{n + e}{2} - \frac{m}{6}\right)H$ ... $= Oa$	$-$
$Q'' = \frac{Q\,\mathrm{sen}(\varphi' + 0)}{\cos\varphi'}$	$\left(\frac{m + n + e}{2} - mr\right)H = Od$	$-$

(a) Si en vez de ser $n > m$, como hemos supuesto, se verificara lo contrario, es decir $n < m$, el brazo de palanca Ob tendría signo contrario y su valor absoluto sería $\frac{m - n}{2}$ H.

113. Sustituyendo en las expresiones de K′ y K″, el valor de p y los de los diversos brazos de palanca, é igualando los resultados, la ecuación primera de estabilidad tomará la siguiente forma:

$$\frac{\delta' H^2 e + p_1 + p_2 + Q''}{(m+n+e)H} = \frac{6}{(m+n+e)^2 H^2}\left[Q' r H + p_2\left(\frac{m+e}{2} - \frac{n}{6}\right)H\right.$$

$$\left. - \delta' H^2 e \frac{n-m}{2} H - p_1\left(\frac{n+e}{2} - \frac{m}{6}\right) H - Q''\left(\frac{m+n+e}{2} - mr\right) H\right]$$

ó bien

$$e^2 + 2\left(\frac{2(Q''+p_1) - p_2}{\delta' H^2} + 2n - m\right) e - \frac{1}{\delta' H^2}\left(6rQ'\right.$$

$$\left. - [4(m+n) - 6mr]\,Q'' - 4np_1 - 2(n-m)p_2\right) = 0;$$

ecuación de la forma

$$e^2 + 2\alpha e - \beta = 0 \qquad (1)$$

de donde

$$e = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta},$$

siendo

$$\alpha = \frac{2(Q''+p_1) - p_2}{\delta' H_2} + 2n - m$$

$$\beta = \frac{6rQ' - \big(4(m+n) - 6mr\big)Q'' - 4np_1 - 2(n-m)p_2}{\delta' H^2}$$

114. Si el paramento interior fuera vertical haríamos en estas expresiónes

$$m = 0, \quad p_1 = 0$$

Si el paramento exterior fuera vertical haríamos

$$n = 0, \quad p_2 = 0$$

Y finalmente si ambos ambos paramentos fueran verticales haríamos

$$m = 0, \quad n = 0, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0.$$

En este caso lo fórmula (1) se convierte en

$$e = -\frac{2Q''}{\delta' H^2} + \sqrt{\left(\frac{2Q''}{\delta' H^2}\right)^2 + \frac{6rQ'}{\delta' H^2}},$$

expresión fácil de comprobar aplicando el procedimiento de cálculo que precede á un muro de paramentos verticales. En tal supuesto, como el espesor del muro es $E = eH$, tendríamos

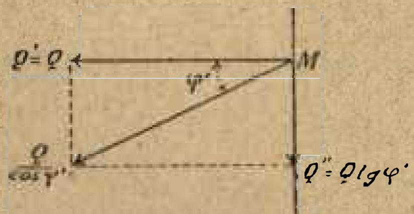
$$E = -\frac{2Q''}{\delta' H} + \sqrt{\left(\frac{2Q''}{\delta' H}\right)^2 + \frac{6rQ'}{\delta'}}.$$

115. Si no existiera sobrecarga y por lo tanto el punto de aplicación del empuje estuviera al tercio de la altura del muro á contar de la base del mismo, en cuyo caso sería $r = \frac{1}{3}$, entonces el espesor vendría dado por la siguiente expresión:

$$E = -\frac{2Q''}{\delta' H} + \sqrt{\left(\frac{2Q''}{\delta' H}\right)^2 + \frac{2Q'}{\delta'}}.$$

116. No hay para qué advertir que, cuando el paramento interior del muro es vertical, las componentes Q' y Q'' tienen los siguientes valores:

Fig. 34.



$$Q' = Q$$
$$Q'' = Q\,tg\varphi'.$$

117. Simplificaciones del cálculo de muros de sostenimiento, respecto á la imposibilidad del giro que implica la primera condición de

estabilidad.—Estas simplificaciones se fundan en la trans- formación de un perfil rectangular estable en otro trapezoidal equivalente, es decir que presente la misma resistencia á la rotación alrededor de la arista exterior de la base.

118. Admitiendo, como datos medios;

$\delta = 1600$ kg. peso del metro cúbico de tierra;

$\delta' = 2200$ kg. peso del metro cúbico de fábrica;

$\varphi = 40^\circ$ ángulo del talud natural de las tierras con el horizonte;

$\varphi' = 25^\circ$ ángulo de frotamiento de las tierras con la fábrica,

el espesor de un muro rectangular que cumple con la primera condición de estabilidad que nos ocupa; resulta igual *al tercio de su altura,* de acuerdo con la regla práctica que para tales datos medios suelen seguir los constructores.

En efecto; si por la fórmula

$$E = -\frac{2Q''}{\delta' H} + \sqrt{\left(\frac{2Q''}{\delta' H}\right)^2 + \frac{2Q'}{\delta'}}$$

calculamos el espesor de un muro de paramentos verticales cuya altura sea de 9 metros, tendremos

$$\beta = 25^\circ \qquad \operatorname{tg} \beta = 0{,}4663 \qquad Q' = Q$$

$$\varphi' = 25^\circ \qquad \operatorname{tg} \varphi' = 0{,}4663 \qquad Q'' = Q \operatorname{tg} \varphi'$$

$$Q = \frac{1}{2} \delta H^2 \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{2} \times 1600 \times 81 \times \overline{0{,}4663}^2 = 14090 \text{ kg.}$$

$$Q' = 14090 \text{ . kg.}$$

$$Q'' = 6570 \text{ . kg.}$$

$$\delta' H = 19800$$

por consiguiente

$$E = -\frac{2 \times 6570}{19800} + \sqrt{\left(\frac{2 \times 6570}{19800}\right)^2 + \frac{2 \times 14090}{2200}} = 2^m{,}98;$$

ó en números redondos y con un error insignificante por exceso,

$$E = 3^{m} = \frac{1}{3} H,$$

de acuerdo con la regla práctica de *la relación al tercio*, que habíamos indicado.

119. Si como suele hacerse por varios autores, supusiéramos que el empuje de las tierras es normal al paramento y por lo tanto que $Q'' = 0$, cuando aquel es vertical; y tomáramos los momentos del empuje horizontal Q y del peso P del muro, con relación á la arista exterior de la base, la ecuación de equilibrio sería, bajo tal supuesto,

$$P \times \frac{E}{2} = Q \times \frac{H}{3},$$

y la ecuación de estabilidad al movimiento de giro,

$$P \times \frac{E}{2} = c\,Q \times \frac{H}{3},$$

siendo c un número mayor que la unidad, y que generalmente se toma igual á 2, llamado coeficiente de estabilidad.

120. Como tenemos que

$$P = \delta' E H$$

$$Q = \frac{1}{2} \delta H^2 \operatorname{tg}^2 \beta,$$

la ecuación de estabilidad tomará la forma

$$\frac{\delta' E^2 H}{2} = \frac{c\,\delta H^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{2} \times \frac{H}{3}$$

de donde

$$E = H \operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{c\delta}{3\delta'}}$$

Haciendo $c = 2$ y sustituyendo en vez de H_1 tg β, δ y δ' los valores antes indicados resulta

$$E = 9 \times 0{,}4663 \sqrt{\frac{2 \times 1600}{3 \times 2200}} = 2^{m}{,}92$$

espesor que, aun cuando con una diferencia algo mayor que el anteriormente calculado, concuerda bastante bien con la regla práctica de la relación al tercio.

En vista de estos resultados, y para los datos medios que consignamos al principio, admitiremos que *el espesor de un muro rectangular debe ser igual al tercio de su altura,* siempre que no exista sobrecarga y el terraplén termine por un plano horizontal.

Claro es que si variaran todos ó algunos de los datos φ' δ y δ', convendrá calcular directamente el espesor del muro rectangular tipo; porque entonces la relación al tercio dejará de subsistir.

121. Admitiendo que la resistencia á la rotación de un muro de altura determinada, depende solamente del momento de su peso y por consiguiente del momento del área de su perfil ó sección recta (lo cual en rigor no es exacto, porque dicha resistencia varía también con la inclinación del paramento interior), es fácil deducir las reglas de transformación de un perfil rectangular en otro equivalente trapezoidal de la misma resistencia al giro; porque bajo tal supuesto, la única fuerza vertical cuyo momento habría que considerar con respecto á la arista exterior es el peso del muro; de suerte que en tal caso se dirá que dos perfiles son equivalentes, cuando sus momentos con relación á la arista exterior de la base correspondiente son iguales.

122. Supongamos que el perfil rectangular ABCD (figura 35) sea equivalente al trapezoidal A'B'C'D', de manera que la resistencia de ambos, al giro, sea la misma; el primero con respecto á la arista D y el segundo con respecto á la arista D'.

Tomemos como unidad la altura del muro y llamemos e al espesor AD del perfil rectangular y b al espesor A'D' en la base del perfil trapezoidal.

Los momentos de ambos perfiles serán los siguientes:

Del rectángulo. . . $\frac{1}{2} e^2$

Del trapecio. . . . . $\frac{1}{2}\left[b^2 - \frac{n^2}{3} - m\left(b - \frac{m}{3}\right)\right]$

Igualando estos momentos y ordenando con relación á b, tendremos

$$b^2 - mb - \left(e^2 + \frac{n^2 - m^2}{3}\right) = 0$$

de donde

$$b = \frac{m}{2} + \sqrt{e^2 + \frac{n^2}{3} - \frac{m^2}{12}}$$

123. Si el paramento interior fuese vertical, en cuyo caso $m = 0$, el espesor de la base del muro trapezoidal equivalente se calcularía por la expresión

$$b = \sqrt{e^2 + \frac{n^2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a).$$

124. Si fuese vertical el paramento exterior, dicho espesor se calcularía por la expresión

$$b = \frac{m}{2} + \sqrt{e^2 - \frac{m^2}{12}} \quad \ldots \quad (b).$$

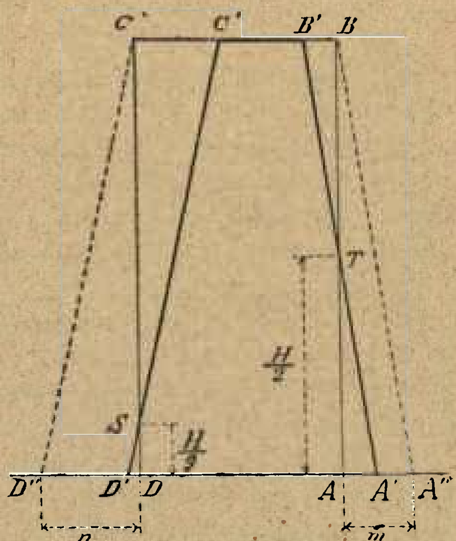
125. Ahora bien, si por la fórmula (a) y con los datos medios establecidos calculáramos los valores de b para diversos de n, veríamos que siendo $e = \frac{1}{3}$, *el ancho* de los trapecios resultantes *medido al noveno de la altura,* ancho que vendría dado por la expresión

$$e' = b - \frac{n}{9}$$

sería casi constante é igual á $\frac{1}{3}$, es decir, igual á e; lo que viene á confirmar la regla práctica de transformación al noveno, para el paramento exterior.

126. Del propio modo, si por medio de la fórmula *(b)* diéramos diversos valores á m, dentro de los límites admisibles en la práctica, por ejemplo de 0 á 0,3, encontraríamos que *el ancho* de los trapecios resultantes, *á la mitad de su altura,* diferirá muy poco de $e = \frac{1}{3}$, lo que demuestra la regla práctica de transformación al medio, para el paramento interior.

Fig. 35.



127. Como consecuencia resulta que, una vez calculado el espesor del muro rectangular tipo ABCD (figura 35), para obtener el perfil trapezoidal equivalente hay que proceder del siguiente modo.

Sobre el paramento exterior CD se fija el punto S al noveno de la altura, con lo que resultará $DS = \frac{1}{9} H$, y sobre el paramento interior AB el punto T situado á la mitad de dicha altura y así será $AT = \frac{1}{2} H$.

Por el punto C se traza la recta CD′′ con la inclinación que ha de tener el paramento exterior, para lo cual se toma $DD'' = n$ y se une el punto D′′ con el punto C. La recta D′C′ tirada por el punto S paralelamente á la CD′′, representará el paramento exterior del nuevo perfil.

Finalmente, tomaremos $AA'' = m$ y trazando por el punto T una paralela á la recta A′′B, dicha paralela A′B′ representará el paramento interior del muro trapezoidal equivalente al rectangular que se había calculado.

128. Como en realidad la resistencia del perfil transformado difiere muy poco de la del perfil rectangular tipo, en la práctica no hay ningún inconveniente en aplicar las reglas de transformación que hemos indicado, con la ventaja importante de simplificar y abreviar muchísimo los cálculos, por no tener que emplear la fórmula general que oportunamente establecimos.

129. La figura 35 manifiesta claramente que, bajo el punto de vista de la economía de material, no hay ventaja alguna en ataluzar el paramento interior; así como la hay, y grande, en que el paramento exterior sea lo más inclinado posible.

Por esta razón el perfil más racional, cuando los paramentos son planos, es el de un trapecio cuyo paramento interior sea vertical y el exterior inclinado ([a]).

(*a*) Para los perfiles curvilíneos más convenientes de los muros en desplome, que modernamente se construyen para realizar el máximo de economía compatible con la estabilidad, deben consultarse las obras especiales, donde con los detalles necesarios se estudia esta cuestión importante.

De todas suertes, la inclinación del paramento exterior tiene un límite impuesto por la necesidad de dotar al muro de un cierto ancho de coronación, que no suele ser menor que $0^m,60$.

130. Claro es que si se diera de antemano el ancho de coronación, variaría el orden de las operaciones de transformación, según que el paramento interior hubiera de ser vertical ó inclinado, y según que se fijara el valor de n ó el de m.

Si por ejemplo se diera el valor de n, lo que determina la inclinación del paramento exterior, trazaríamos la recta D′C′, como queda dicho, tomaríamos en seguida la magnitud C′B′ igual al ancho de coronación que se diera y no quedaría más que unir el punto B′ con el punto T para obtener la recta B′A′ que representaría el paramento interior.

131. 2.ª condición.—*Imposibilidad del deslizamiento á lo largo de la base.*

Para que un muro satisfaga prácticamente á esta condición se necesita que la componente horizontal del empuje de las tierras sea menor que la suma de las fuerzas verticales que obran sobre la base, multiplicada por el coeficiente de frotamiento respectivo, ó en otros términos, es necesario que se verifique la desigualdad $Q' < f\,(P + Q'')$, ó bien

$$\frac{Q'}{P + Q''} < f.$$

132. Los valores de f, hemos visto que varían entre 0,51 y 0,78, llegando hasta el valor mínimo de 0,34 para el rozamiento de la mampostería sobre un lecho de arcilla húmeda y reblandecida. Por consiguiente, en los casos ordinarios será preciso que, tratándose de evitar el resbalamiento á lo largo de la base del muro ó de otra junta horizontal cualquiera, el macizo correspondiente satisfaga por el peso propio del mismo, á la desigualdad

$$\frac{Q'}{P + Q''} < 0{,}70 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

y si se tratara de todo el muro, incluyendo la cimentación ejecutada sobre terreno natural, la desigualdad sería

$$\frac{Q'}{P + Q''} < 0{,}34 \quad \ldots\ldots \quad (b).$$

133. En general, todo muro cuyas dimensiones se han calculado para que satisfaga á la primera condición de extensión teórica nula, satisfará también á la segunda condición de estabilidad, que ahora nos ocupa.

En efecto; consideremos el muro de 9^m de altura, de paramentos verticales, y cuyo espesor basta que sea de 3^m para que la primera condición quede satisfecha, como hemos visto anteriormente.

Los componentes del empuje eran

$Q' = 14090$ kg. componente horizontal.

$Q'' = 6570$ kg. id. vertical.

El peso del muro será

$$P = 3 \times 9 \times 2200 = 59400 \text{ kg.}$$

Por tanto el valor de la relación $\frac{Q'}{P + Q''}$ será

$$\frac{Q'}{P + Q''} = \frac{14090}{59400 + 6570} = 0{,}213.$$

Resulta que se verifica la desigualdad establecida, y por consecuencia que en este caso el deslizamiento es imposible.

134. Si aplicando las reglas de transformación, determinamos las dimensiones del perfil equivalente al rectángulo de 9^m de altura por 3^m de base que acabamos de considerar, de manera que la inclinación de los paramentos corresponda á $m = 0{,}1$ y $n = 0{,}2$, tendremos

$$b = \frac{0{,}1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{0{,}2^2}{3} - \frac{0{,}1^2}{12}} = 0{,}4015$$

ó en números redondos

$$b = 0{,}4$$

y

$$b - (m + n) = 0{,}1$$

Por consiguiente resultará

Ancho en la base. . . . . $E\ bH = 0.4 \times 9 \quad = 3^m{,}60$

Id. en la coronación $E'\ (b - (m + n))H = 0{,}1 \times 9 = 0^m{,}90$.

El peso del muro será

$$P = \frac{3{,}6 + 0{,}9}{2} \times 9 \times 2200 = 44550 \text{ kg.}$$

Como el paramento interior forma ahora con la vertical un ángulo θ, cuya tangente trigonométrica vale $m = 0{,}1$, que corresponde próximamente á un valor angular de 6^o, el empuje normal Q lo calcularemos por la expresión ya conocida

$$Q = \frac{1}{2}\delta H^2 \left(\operatorname{tg}(\beta - \theta) + \operatorname{tg}\theta\right) \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos(\beta - \theta)}.$$

Pero tenemos

$\theta = 6^o$	$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = 0{,}404$	$\delta = 1600$
$\varphi = 40^o$	$\operatorname{tg}\theta = 0{,}105$	$H = 9$
$\beta = 28^o$	$\operatorname{sen}\beta = 0{,}469$	
$\beta - \theta = 22^o$	$\cos(\beta - \theta) = 0{,}927$	$\frac{1}{2}\delta H^2 = 64800$

Sustituyendo en la expresión de Q resultará

$$Q = 16687 \text{ kg.}$$

Recordando que las componentes horizontal y vertical del empuje, tienen por expresión

$$Q' = \frac{Q \cos(\varphi' + \theta)}{\cos \varphi'}$$

$$Q'' = \frac{Q \operatorname{sen}(\varphi' + \theta)}{\cos \varphi'}$$

y como además $\varphi' = 25°$, y por tanto $\varphi' + \theta = 31°$, tendremos

$$\cos(\varphi' + \theta) = 0{,}857$$
$$\operatorname{sen}(\varphi' + \theta) = 0{,}515$$
$$\cos \varphi' = 0{,}906$$

de donde resulta

$$Q' = 15784 \text{ kg.}$$
$$Q'' = 9485 \text{ kg.}$$

La relación $\frac{Q'}{P + Q''}$ valdrá en este caso

$$\frac{Q'}{P + Q''} = \frac{15784}{44550 + 9485} = 0{,}29.$$

Por donde vemos que también ahora la desigualdad necesaria queda satisfecha, resultando, como antes, que el resbalamiento es imposible.

135. Si en algún caso no ocurriera esto, es decir, si la relación $\frac{Q'}{P + Q''}$ resultara igual ó mayor que f, pudiera calcularse directamente el muro de manera que las nuevas dimensiones garantizaran por completo la imposibilidad del deslizamiento.

En efecto; la ecuación de equilibrio es

$$f = \frac{Q'}{P + Q''}$$

por consiguiente la ecuación de estabilidad será

$$f = c \times \frac{Q'}{P + Q''} \quad (c)$$

siendo c un número mayor que la unidad, que podemos denominar coeficiente de estabilidad al deslizamiento.

Despejando P en la ecuación que precede, tendremos.

$$P = \frac{cQ' - fQ''}{f}$$

y observando que en el caso general la expresión del peso P es

$$P = \left(\frac{m + n}{2} + e\right) \delta' H^2$$

sustituyendo y despejando e, resultará

$$e = \frac{cQ' - fQ''}{f\delta' H^2} - \frac{m + n}{2}$$

con lo que quedará suficientemente definida la forma del nuevo perfil, rectificado para que cumpla con la segunda condición de estabilidad.

136. Rara vez habrá que acudir á la rectificación de dimensiones que acabamos de indicar; porque, como ya hemos dicho, todo muro que dentro de las condiciones ordinarias cumpla con la primera condición de estabilidad cumplirá también con la segunda.

No obstante, conviene siempre calcular el valor de la relación $\frac{Q'}{P+Q''}$, para ver si efectivamente resulta menor que el valor de f que se considere aplicable al caso de que se trate; como debe suceder para poder afirmar que el muro será estable al deslizamiento.

137. 3.ª condición.—*Que la presión máxima unitaria en la base no exceda del límite que se señale como coeficiente de seguridad, y como consecuencia, imposibilidad de la rotura ó aplastamiento de los materiales.*—Esta condición quedará prácticamente satisfecha siempre que el valor de R, calculado por una de las dos fórmulas

$$R = \frac{2P}{b}\left(2 - \frac{3d}{b}\right) \ldots\ldots (1)$$

$$R = \frac{2P}{3d} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

resulte igual ó menor que el coeficiente de seguridad K.

Emplearemos la primera si $d \geqq \frac{b}{3}$ y la segunda si $d < \frac{b}{3}$, recordando que representan respectivamente:

P la componente, normal á la junta, de la resultante de todas las fuerzas que la solicitan;

b la longitud de la junta considerada; en este caso el espesor del muro en la base;

d la distancia entre el punto en que la resultante de todas las fuerzas corta á la base del muro y la arista de giro.

138. Punto de paso de la resultante.—Para elegir y aplicar las fórmulas que preceden es necesario ante todo conocer el valor de *d*.

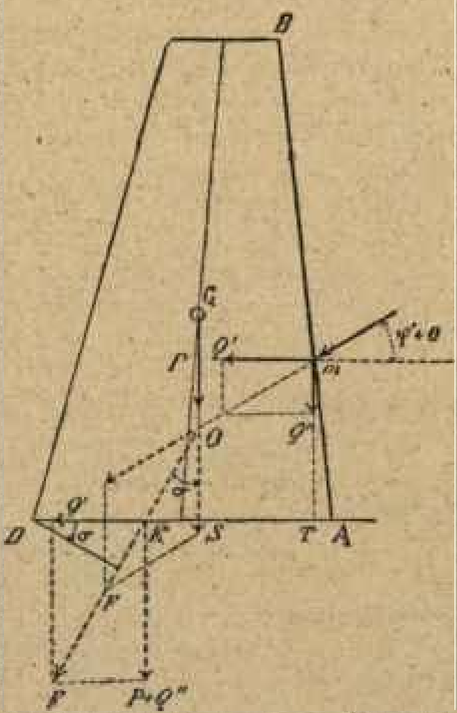
Su determinación puede hacerse gráficamente ó por medio del cálculo.

139. La determinación gráfica de *d*, tiene la ventaja de ser más fácil y expedita, sin que los errores cometidos tengan verdadera importancia en las aplicaciones.

Para ello (figura 36) una vez conocida la magnitud y dirección del empuje oblícuo $\frac{Q}{\cos \varphi'}$, así como su punto de aplicación *m* y el centro de gravedad G del trapecio ABCD, que representa el perfil del muro, trazaremos por G una recta vertical y por *m* otra recta con la dirección del empuje oblicuo, la cual formará con el horizonte el ángulo $\varphi' + \theta$.

Desde el punto O en que se corten dichas rectas, tomaremos sobre la vertical una magnitud que represente el peso P del muro y sobre la oblicua otra magnitud proporcional al empuje $\frac{Q}{\cos \varphi'}$, medidas ambas magnitudes con la escala que se hubiese establecido para la representación gráfica de las fuerzas.

Fig. 36.



La diagonal del paralelógramo construído sobre las intensidades de P y de $\frac{Q}{\cos \varphi'}$, será, como sabemos, la resultante F, y cortará á la base del muro en el punto E, cuya distancia DE á la arista de rotación, medida con la escala de longitudes, nos dará á conocer con la aproximación suficiente el valor de *d*.

140. Para determinar *d* analíticamente, recordaremos que el momento de la resultante F es igual á la suma algebráica de los momentos de sus componentes, P, Q′ y Q″.

Tomemos los momentos con relación á la arista de rotación de la base y representemos los brazos de palanca;

por b, el de la fuerza P
» b', » » Q'
» b'', » » Q''.

La perpendicular DE', bajada del punto D á la dirección de la resultante F, será el brazo de palanca de esta fuerza.

Si llamamos σ al ángulo que forma F con la vertical, el mismo ángulo formará el brazo de palanca DE' con la horizontal; puesto que dichos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

Tomando los momentos con relación al punto D tendremos:

$$Pb - Q'b' + Q''b'' = F \times DE';$$

pero como

$$DE' = DE \cos \sigma = d \cos \sigma,$$

podremos escribir

$$Pb - Q'b' + Q''b'' = F \cos \sigma \times d;$$

de donde

$$d = \frac{Pb - Q'b' + Q''b''}{F \cos \sigma},$$

y observando que

$$F \cos \sigma = P + Q'',$$

resultará

$$d = \frac{Pb - Q'b' + Q''b''}{P + Q''}, \quad (a)$$

lo que nos dice, que *la distancia del punto de paso de la resultante á la arista de rotación de la base, es igual al cociente de dividir la suma algebráica de los momentos de todas las fuerzas que solicitan á dicha base, por la suma de las componentes verticales.*

141. Como las expresiones de Q' y Q'' nos son conocidas y las de Pb, b', b'', se deducen fácilmente de la figura 36; para aplicar la fórmula (a), habrá que calcular los valores siguientes:

$$Pb = \left[\frac{e^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2}\right) e + \frac{n^2}{3} + \frac{mn}{2} + \frac{m^2}{6}\right] \delta' H^2$$

$$Q' = \frac{Q \cos(\varphi'_1 + \theta)}{\cos \varphi'_1}$$

$$Q'' = \frac{Q \operatorname{sen}(\varphi'_1 + \theta)}{\cos \varphi'_1}$$

$$b' = rH$$

$$b'' = \left(n + e + m\,(1 - r)\right) H.$$

142. Determinado el valor de d, por cualquiera de los procedimientos indicados, no habrá duda acerca de la fórmula que debemos emplear para el cálculo de la presión unitaria máxima.

143. Si resultara para R un valor menor ó igual que el coeficiente de seguridad K que se hubiera fijado con arreglo á la naturaleza de los materiales que hayan de emplearse, podremos afirmar que la 3.ª condición de estabilidad queda satisfecha, y por tanto, que la rotura ó aplastamiento de la fábrica será imposible.

144. Si el valor encontrado para R excediera del coeficiente de seguridad K que se hubiera señalado previamente, sería preciso modificar el perfil del muro, ensanchándolo en la base y disminuyendo cuanto fuera posible el ancho de coronación, con objeto de que la resultante F corte á dicha base á una distancia mayor que antes de la arista de giro.

145. Cuando la resultante corta á la base dentro del núcleo central, no es fácil que R resulte mayor que K, á menos que la altura del muro alcanzara un valor considerable, poco frecuente.

Y en efecto; si el punto de paso de la resultante fuera uno de los extremos del tercio medio de la base, para que la presión máxima unitaria llegara á valer 10 kilogramos por centímetro cuadrado, valor admisible para K en muchos casos, sería preciso que la altura del muro, supuesto rectangular, fuera de unos $20^m,50$.

146. Claro es que si para esta altura se transformara el perfil rectangular en otro trapezoidal equivalente, de paramento interior vertical, resultaría para R un valor bastante menor que 10 kilogramos por centímetro cuadrado ó que 100000 kilogramos por metro cuadrado; pues el valor de P experimentaría una disminución importante, aumentando en cambio b y d.

Resulta de aquí, que el ataluzar el paramento exterior, no sólo ofrece la ventaja de economizar fábrica, sino que, además, se consigue con ello reducir el valor de la presión máxima unitaria en la base, haciendo más imposible la rotura.

147. Muros con contrafuertes.—Los muros de sostenimiento pueden construirse, consolidándolos de trecho en trecho, á distancias iguales, por medio de macizos salientes que forman cuerpo con el resto de la fábrica y reciben el nombre de *contrafuertes,* los cuales pueden ser exteriores cuando se disponen del lado opuesto á las tierras, ó interiores cuando se adosan al paramento oculto del muro, quedando en contacto con aquellas.

La porción de muro comprendida entre dos contrafuertes consecutivos recibe el nombre de *entrepaño.*

148. Contrafuertes exteriores.—Consideremos la parte de muro comprendida entre los ejes de dos contrafuertes consecutivos (figura 37), y llamemos

l á la distancia entre ejes de los contrafuertes;
d á la longitud del entrepaño;

a al espesor de los contrafuertes;

s á la relación entre el vuelo de los contrafuertes y la altura del muro;

e á la relación entre el espesor del entrepaño y dicha altura;

δ al peso del metro cúbico de tierra;

δ' al del metro cúbico de fábrica.

149. Trataremos sólo el caso más sencillo de que los paramentos sean verticales.

Como se verifica que $d = l - a$, resulta que en el problema de determinar las dimensiones del macizo que consideramos sólo entran cuatro elementos diferentes, que son l, a, s y e, puesto que la altura H es un dato impuesto por las circunstancias.

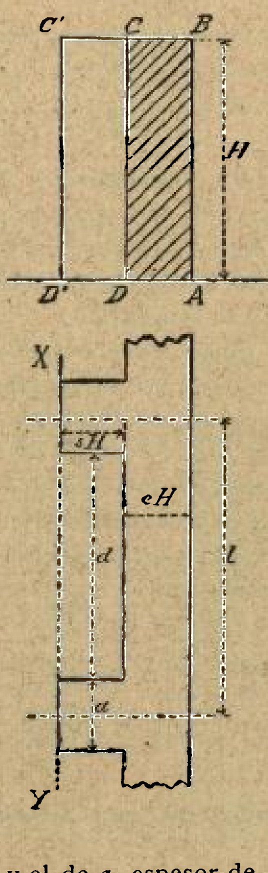
Por otra parte, disponemos únicamente de dos ecuaciones distintas, que son:

1.ª La de resistencia á la flexión del entrepaño, considerándolo como un prisma empotrado por sus extremos y sometido á una carga uniformemente repartida.

2.ª La de resistencia de todo el macizo á la rotación del mismo alrededor de la arista exterior XY de los contrafuertes.

La primera ecuación nos permitirá calcular el valor de e, y la segunda el de s. Es preciso, por tanto, fijar de antemano el valor de l, distancia entre ejes de los contrafuertes y el de a, espesor de los mismos.

Fig. 37.



Para esto aceptaremos las siguientes relaciones:

$$l = \frac{1}{2} H \qquad a = \frac{1}{8} H$$

y como consecuencia

$$l - a = d = \frac{3}{8} H,$$

conforme con las que establece el Ingeniero D. E. Boix en su importante obra *Estabilidad de las construcciones de mampostería*, segunda edición, 1892.

150. **Resistencia del entrepaño á la flexión.**—Teniendo en cuenta que el entrepaño queda unido á la fábrica de cimentación por toda su base, admitiremos que el empuje total de las tierras Qd, que obra sobre él, se reparte uniformemente eu toda su extensión.

Como vimos oportunamente, la ecuación de resistencia á la flexión de un prisma empotrado por sus extremos y sometido á una carga uniformemente repartida, es $KZ = \frac{1}{12} pL^2$, en la cual representan; K el coeficiente de seguridad, Z el módulo de flexión de la sección recta del prisma, p la carga por unidad de longitud y L la longitud del prisma ó distancia entre los empotramientos.

151. En el caso actual tenemos,

$$p = Q, \qquad L = d, \qquad Z = \frac{1}{6} H \times (eH)^2 = \frac{1}{6} H^3 e^2;$$

por lo tanto, aquella ecuación tomará la siguiente forma:

$$K \times \frac{1}{6} H^3 e^2 = \frac{1}{12} Q d^2,$$

y recordando que en el caso que nos ocupa

$$Q = \frac{1}{2} \delta H^2 \operatorname{tg}^2 \beta$$

resultará

$$\frac{1}{6} KH^3 e^2 = \frac{1}{24} \delta H^2 \operatorname{tg}^2 \beta \, d^2$$

ó bien

$$4HKe^2 = d^2 \operatorname{tg}^2 \beta \delta$$

de donde

$$e = \frac{1}{2} d \operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{\delta}{HK}} = \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{H}} \operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{\delta}{K}}$$

Pero como hemos aceptado que $d = \frac{3}{8} H = 0{,}375\, H$, sustituyendo en la expresión de e tendremos también

$$e = \frac{1}{2} \times 0{,}375 \operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{\delta}{K}} \times \sqrt{H}$$

152. Para el coeficiente de seguridad K, podemos aceptar por metro cuadrado el valor $K = 3000$ kilogramos, que no es nada exagerado, sobre todo teniendo la precaución de no verter las tierras contra el muro, sino después que haya fraguado el mortero; y recordando que para los valores medios admitidos tenemos $\delta = 1600$ kilogramos y $\operatorname{tg} \beta = 0{,}466$, sustituyendo en la fórmula anterior, resultará

$$e = \frac{0{,}375 \times 0{,}466}{2} \times \sqrt{\frac{1600}{3000}} \times \sqrt{H}$$

que se reduce á la expresión más sencilla y suficientemente aproximada:

$$e = 0{,}06 \sqrt{H}$$

153. Resistencia del macizo á la rotación.—Llamando c al coeficiente de estabilidad, tendremos:

Momento de los semicontrafuertes extremos:

$$a\,(s+e)\,H^2\delta' \times \frac{(s+e)\,H}{2} = \frac{1}{2}\,a\,(s+e)^2H^3\delta'$$

Momento del entrepaño:

$$d\,eH^2\delta' \times \left(sH + \frac{eH}{2}\right) = \frac{1}{2}\,de(2s+e)H^3\delta'$$

Momento de todo el macizo

$$\frac{1}{2}\,H^3\delta'\left(a\,(s+e)^2 + de(2s+e)\right)$$

Momento del empuje

$$cQl\,\frac{H}{3} = c\,\frac{1}{2}\,\delta\,H^2\mathrm{tg}^2\,\beta\,l\,\frac{H}{3} = \frac{c}{6}\,\delta\,\mathrm{tg}^2\,\beta\,l\,H^3$$

Por consiguiente la ecuación de estabilidad á la rotación será

$$\frac{1}{6}\,c\delta\,\mathrm{tg}^2\beta\,l\,H^3 = \frac{1}{2}\left[a(s+e)^2 + de(2s+e)\right]\delta'H^3.$$

Suprimiendo el factor común H^3, efectuando las operaciones indicadas y haciendo

$$c=2 \qquad a=\frac{1}{8}H \qquad d=\frac{3}{8}H \qquad l=\frac{1}{2}H$$

resultará

$$s^2 + 8es + 4e^2 - \frac{8\delta\,\mathrm{tg}^2\beta}{3\delta'} = 0$$

de donde

$$s = -4e + \sqrt{12e^2 + \frac{8\delta\,\mathrm{tg}^2\beta}{3\delta'}}.$$

154. Recordando que hemos encontrado poco hace

$$e = 0{,}06\sqrt{\mathrm{H}},$$

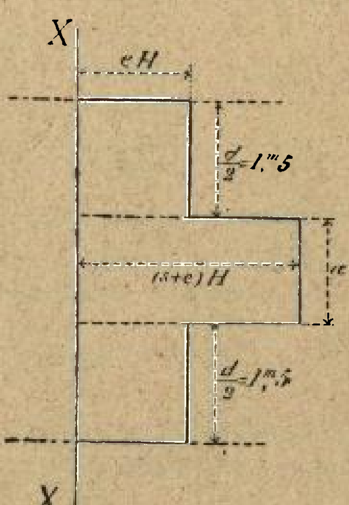
y que como valores medios hemos admitido $\delta = 1600$, $\delta' = 2200$, $\mathrm{tg}^2\,\beta = 0{,}217$, si en la expresión de s reemplazamos estos valores encontraremos

$$s = -0{,}24\sqrt{\mathrm{H}} + \sqrt{0{,}0442\mathrm{H} + 0{,}42},$$

expresión sencilla del vuelo de los contrafuertes, para calcular su valor en función de la altura del muro, en las condiciones medias y en el caso que hemos supuesto como ejemplo general.

155. Contrafuertes interiores.—De dos maneras principales puede efectuarse la rotura de la fábrica en la unión del contrafuerte y los entrepaños contiguos, considerando teóricamente la cuestión; ó por el plano de la cara interna del entrepaño, ó por cualquiera de los planos perpendiculares á dicha cara que separan el contrafuerte de los entrepaños adyacentes (figura 38).

Fig. 38.



156. Para evitar el primer caso de rotura, será preciso que las reacciones normales al entrepaño que se desarrollan en el plano de unión con el contrafuerte, no excedan del límite que resulte de multiplicar el coeficiente de seguridad K por la superficie resistente.

157. Para que no se produzca la rotura del segundo modo que hemos indicado, será necesario que el momento máximo de flexión que el empuje desarrolla en el contrafuerte, considerándolo como apoyo del entrepaño, no exceda del valor KZ, siendo, como sabemos, Z el módulo de flexión de la sección recta de dicho entrepaño y K el coeficiente de seguridad.

La primera condición nos permitirá calcular a y la segunda e. Haremos $d = 3^m$, como suele admitirse en la práctica.

158. Siendo la superficie resistente aH y admitiendo que el empuje $Qd = 3Q$ sobre el entrepaño, se reparte uniformemente en toda su extensión, podremos establecer que

$$aHK = 3Q$$

Haciendo K = 3000 kg. por metro cuadrado; y puesto que para los datos medios consignados resulta muy próximamente $Q = 174\ H^2$, tendremos

$$1000\ Ha = 174\ H^2$$

de donde

$$a = 0{,}17\ H \quad \ldots \quad (1)$$

Aunque el momento máximo varía algo según el número de contrafuertes, tomemos como valor medio $M = \frac{1}{9}\ Q\ d^2$, ó bien $M = 174H^2$.

La ecuación de resistencia $M = KZ$, tomará la forma

$$174H^2 = \frac{1}{6} Ke^2H^3$$

de la cual se deduce, haciendo como antes K = 3000 kilogramos por metro cuadrado,

$$e = \frac{0{,}59}{\sqrt{H}}$$

y por tanto

$$eH = 0{,}59\sqrt{H} \quad \ldots \quad (2)$$

159. Para calcular el vuelo sH de los contrafuertes, estableceremos la ecuación de estabilidad á la rotación alrededor de la arista exterior del muro, refiriéndonos á uno de sus elementos, constituído por un contrafuerte y los semientrepaños contiguos.

Para esto tenemos

Designación.	Pesos.	Brazos de palanca.	Momentos.
Contrafuerte..	$\delta' a(s+e)H^2$	$\frac{(s+e)H}{2}$	$\frac{1}{2}\delta' H^3 a(s^2+2es+e^2)$
Entrepaño. . .	$3\delta' eH^2$	$\frac{eH}{2}$	$\frac{3}{2}\delta' H^3 e^2.$

Por lo tanto, el momento del peso total del elemento de muro que consideramos será

$$M(P) = \frac{1}{2}\delta' aH^3\left(s^2 + 2es + e^2 + \frac{3e^2}{a}\right)$$

Tomando 2 por coeficiente de estabilidad, tendremos para el empuje total $Q(d + a) = Q(3 + a)$

$$2M(Q) = \frac{2Q(a+3)H}{3} = 116\,(3+a)H^3$$

Igualando los momentos expresados y suprimiendo el factor común H^3, resultará

$$\frac{a\delta'}{2}\left(s^2 + 2es + e^2 + \frac{3e^2}{a}\right) = 116\,(3+a)$$

Finalmente, si en esta ecuación hacemos

$$e^2 = \frac{0{,}59^2}{H} \qquad \delta' = 2200 \qquad a = 0{,}17\ H,$$

y despejamos s, tendremos

$$s = -e + \sqrt{0{,}105 + 1{,}86 \times \frac{1}{H} - 6{,}14 \times \frac{1}{H^2}}$$

y multiplicando por H ambos miembros, resultará para la expresión del vuelo de los contrafuertes

$$sH = -eH + \sqrt{0{,}105H^2 + 1{,}86H - 6{,}14} \qquad (3).$$

160. Bajo la base de que $eH = 0{,}59\sqrt{H}$ y $d = 3^m$, esta expresión no es aplicable más que para muros cuya altura sea superior á $3^m{,}30$. A partir de esta altura, la utilidad de los contrafuertes interiores va en aumento. Para una altura de 16^m resultaría, respecto del muro equivalente de perfil rectangular y paramentos verticales, una economía en la fábrica de un 22 por 100.

MUROS DE CONTENCIÓN DE AGUA.

161. Esta clase de muros, que se construyen para la formación de depósitos, albercas y pequeños embalses, están caracterizados por tener sus paramentos planos y no exceder su altura de unos 10 metros.

Generalmente son de fábrica; pero para pequeños embalses conviene hacerlos de tierra, por su menor coste.

162. **Muros de fábrica.**—El espesor de estos muros se calcula fácilmente por los medios indicados al tratar de los muros de sostenimiento, con la variante de que ahora el empuje del agua es mayor que el de las tierras ordinarias; obra, como sabemos, normalmente al paramento interior, y está aplicado al tercio de la altura del líquido, á contar del pie del muro.

163. Si llamamos

Q al empuje del agua, por unidad de longitud de muro;
h á la altura de la porción mojada del paramento, ó sea á la distancia vertical entre el pie del muro y la línea de flotación ó nivel del agua;
θ al ángulo que forma con la vertical el paramento interior,

la expresión de Q será:

$$Q = \frac{500h^2}{\cos\theta}.$$

En efecto; sabemos que la presión del agua en reposo sobre una superficie plana es igual al resultado de multiplicar el área de dicha superficie, por la distancia vertical de su centro de gravedad al nivel de líquido y por la densidad de éste.

Como sólo se considera una zona de muro de una longitud igual á la unidad, la superficie mojada será un rectángulo cuya área tendrá por expresión $\frac{h}{\cos\theta}$, la distancia del centro de gravedad de dicho rectángulo al nivel del agua será $\frac{1}{2}h$; y puesto que la densidad del líquido (peso del metro cúbico) es 1000, el valor del empuje ó presión total será

$$Q = \frac{h}{\cos\theta} \times \frac{1}{2}h \times 1000 = \frac{500h^2}{\cos\theta},$$

como habíamos indicado.

164. Si el paramento interior fuese vertical, sería $\theta = 0$ y el empuje tendría entonces por expresión

$$Q = 500h^2$$

165. Cuando sea grande la superficie del agua embalsada y la acción del viento pueda producir oleaje algo importante, entonces la altura H del muro deberá ser mayor que la del agua, h. La diferencia $H - h$ no será menor que $0^m,60$ y su determinación dependerá de la magnitud del oleaje que se considere probable, á fin de evitar que los vientos más fuertes hagan saltar el agua por encima de la coronación del muro.

166. Para calcular esta clase de muros, lo más sencillo es aplicar las reglas de transformación que oportunamente establecimos, partiendo del perfil tipo rectangular que vamos á determinar ahora, admitiendo que la superficie del agua enrasa con la coronación y que la resultante de las presiones corte á la base del muro en el extremo externo del núcleo central, ó en otros términos, que la distancia d, del punto de paso de dicha resultante á la arista exterior de la base, sea igual al tercio de su espesor.

Tendremos por tanto

$$d = \frac{1}{3}E$$

y como ya hemos visto que la expresión de d, es

$$d = \frac{M(P) - M(Q)}{P}$$

podremos establecer la ecuación

$$\frac{1}{3}E = \frac{M(P) - M(Q)}{P},$$

que nos permitirá determinar el espesor E del muro tipo rectangular.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{ll} P = \delta' E h \quad , & M(P) = \dfrac{1}{2}\delta' h E^2 \\ Q = 500h^2 \quad , & M(Q) = \dfrac{1}{3} \times 500h^3 \end{array}\right\} \text{ por lo tanto, sustituyendo}$$

tendremos

$$\frac{1}{3}E = \frac{\frac{1}{2}\delta' h E^2 - \frac{1}{3} \times 500h^3}{\delta' E h}$$

Suprimiendo el factor h, común á los términos del segundo miembro, y multiplicando toda la ecuación por $6\delta' E$, resultará,

$$2\delta' E^2 = 3\delta' E^2 - 1000 h^2,$$

de donde

$$E = \sqrt{\frac{1000}{\delta'}} \times h.$$

Admitiendo para δ' el valor medio $\delta' = 2200$ kg., resulta para E,

$$E = 0{,}67\, h.$$

167. Como en la práctica, para muros de alguna elevación y á fin de economizar materiales, no se emplea el perfil rectangular, sino el trapezoidal, en el que de ordinario el paramento interior suele ser vertical, no hay inconveniente en aceptar que el espesor del muro tipo sea igual á los dos tercios de la altura, pudiendo, por tanto, establecer

$$E = \frac{2}{3} h$$

Procediendo así, y transformando el rectángulo obtenido, como ya sabemos, el nuevo perfil trapezoidal será algo más ó menos resistente que el rectangular, según la inclinación del paramento exterior; pero la resultante de las presiones en la base caerá dentro del tercio medio, como puede confirmarse calculando d y viendo que su valor resulta mayor que un tercio de B, siendo B el espesor de la base del perfil nuevo.

168. Consideremos, como ejemplo, un muro para resistir el empuje del agua, cuando ésta alcance una altura de 9^m sobre el pie de aquél.

El espesor del perfil tipo rectangular será

$$E = \frac{2}{3} \times 9 = 6^m$$

169. Supongamos que queremos reemplazar este muro tipo por otro trapezoidal, cuyo ancho de coronación b sea de 2^{m}, conservando vertical el paramento interior (figura 39).

Aplicando la regla de transformación al noveno para el paramento exterior, resulta:

$$B = AD' = 6^{m},50 \qquad\qquad P = R + T$$
$$b = BC' = 2^{m},00 \qquad\qquad M(P) = M(R) + M(T)$$

$$R = 2 \times 9 \times 2200 = 39600 \text{ kg.}$$
$$T = \frac{1}{2} \times 4,5 \times 9 \times 2200 = 44550 \text{ »}$$
$$P = R + T = 84150 \text{ kg.}$$

$$M(R) = R \times 5,50 = 217800 \qquad Q = 500 \times 9^2 = 40500 \text{ kg.}$$
$$M(T) = T \times 3 = 133650$$
$$M(P) = M(R) + M(T) = 351450 \qquad M(Q) = Q \times \frac{9}{3} = 121500.$$

Sustituyendo en la expresión de d, que ya recordamos antes,

$$d = \frac{M(P) - M(Q)}{P},$$

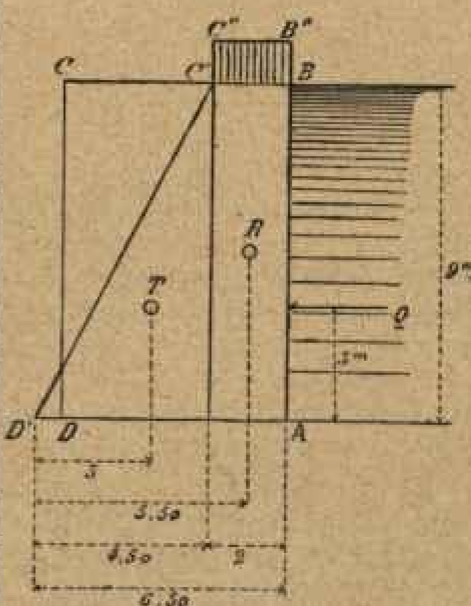
tendremos

$$d = \frac{351450 - 121500}{84150} = \frac{229950}{84150} = 2,^{m}73.$$

170. Como el tercio del espesor B en la base resulta de unos $2^{m},16$ próximamente; y el momento del perfil rectangular vale 356400, ya se ve, como habíamos indicado, que $d > \frac{1}{3}$ B, y que el perfil transformado es aceptable, aunque al movimiento de giro, y con una diferencia algo menor del 1,4 por 100, no sea más resistente que el muro tipo rectangular, cuyo espesor se fijó en los $\frac{2}{3}$ de la altura.

171. El macizo rectangular BC′C″B″, que debe añadirse para impedir que el agua salte por el muro, cuando haya oleaje, no exige rectificación alguna en las dimensiones principales del perfil transformado; pues su peso favorecerá la resistencia de la obra, alejando algo más de la arista exterior D′ el punto de paso de la resultante de las presiones.

Fig. 39.



El perfil trapezoidal que acabamos de determinar, realiza, respecto del muro tipo rectangular, una economía en el cubo de fábrica de un 29 por 100, sin contar con el pretil ó macizo de coronación.

172. Muros de tierra.—Constrúyense esta clase de muros para formar embalses parciales, y también para constituir verdaderos pantanos. En el primer caso, la acción del agua no es permanente; porque dentro del año y á veces en un tiempo relativamente corto, aquella desaparece por evaporación y filtración. En el segundo caso, la cantidad de agua almacenada es mucho mayor y su acción sobre las tierras es constante, cuyos efectos son asimismo más importantes por la mayor intensidad del oleaje.

De todas suertes, el perfil transversal de tales muros es siempre un trapecio, cuyo paramento exterior ofrece de ordinario y por lo menos, la inclinación propia del talud natural de las tierras.

El paramento interior, es decir, el que está en contacto con el agua debe ser más tendido; no para dotar á la obra de la suficiente resistencia al empuje que recibe del agua, resistencia que siempre resulta mucho mayor que la necesaria, sino para evitar las filtraciones, y además, para que el movimiento oscilatorio del agua no socave dicho paramento, modificando profundamente la disposición y forma de su superficie, lo que podría comprometer la estabilidad del muro en un plazo más ó menos largo.

173. En el primer caso, es decir para pequeños embalses, en los cuales el oleaje sea poco importante y la acción del agua no sea constante, bastará que el paramento interior tenga un talud de 1,50, por lo menos, de base, por 1 de altura.

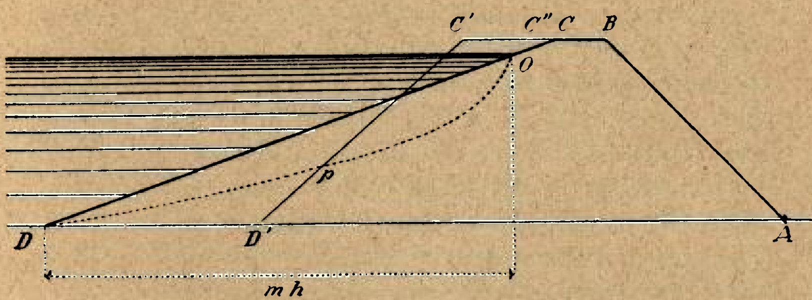
En el segundo caso, el talud de aguas arriba, debe corresponder á 2,80 de base por 1 de altura.

Esta relación no es arbitraria. La experiencia enseña que los muros importantes de tierra, construídos con taludes interiores más rápidos y grandes anchos de coronación, se modifican, pasando el perfil transversal (figura 40) de la forma ABC′D′ á la ABC″OpD, en la cual el ancho de coronación ha disminuído notablemente y el paramento plano interior ha sido reemplazado por una superficie mucho más inclinada, cóncava hacia arriba y cuya sección vertical OpD es comparable á un arco de parábola cuyo vértice O está á flor de agua y cuyo parámetro es, como término medio, $\frac{h}{m}$, siendo h la altura del agua y $m = 2,80$.

Al construir el muro, pudiera darse al paramento interior la referida forma de cilindro parabólico, cuya generatriz O*p*D es fácil de trazar; pero creemos preferible y más sencillo, que presente una superficie plana CD, inclinada á 2,80 de base por 1 de altura, toda vez que el agua se encargará de modificarla con el tiempo, de la manera que hemos indicado.

Con tal inclinación, no hay inconveniente en dar á la cresta ó coronación un ancho de $1^m,80$ á 2^m; lo que correspon-

Fig. 40.



de á unos $4^m,50$ á $4^m,70$ de espesor á la altura del nivel de agua, cuando la distancia entre ésta y la coronación es solamente de $0^m,70$; espesor que, conforme á lo que enseña la experiencia, es suficiente para evitar las filtraciones, si las tierras son de consistencia media.

174. Finalmente, para contrarrestar el efecto del asiento de las tierras, es necesario aumentar las alturas calculadas de la obra en $\frac{1}{20}$ de su valor. De esta suerte resultará en un principio para la coronación una superficie convexa hacia arriba, que con el tiempo resultará próximamente horizontal.

175. Los revestimientos en seco sobre el paramento interior, y con mayor razón, si por economizar tierras ha de ser este de talud rápido, no deben jamás emplearse; porque, á la larga, el agua modificará la superficie del mismo, como hemos dicho, y el conjunto del revestimiento, falto de base en que apoyarse, podrá experimentar una dislocación total, resultando al cabo inútil, si es que su ruina no es origen de más graves consecuencias.

PRESAS DE EMBALSE

176. Generalidades.—Reciben el nombre de *presas de embalse* aquellos muros que se construyen á través de un valle de laderas bastante inclinadas, con objeto de almacenar grandes volúmenes de agua, que de otra suerte se perderían en su mayor parte, sin provecho alguno para la zona regable.

Constituyen un medio poderoso para aumentar considerablemente la extensión de los terrenos de regadío, y por tanto la riqueza agrícola de numerosas comarcas de nuestro país, aprovechando corrientes de agua, al parecer poco importantes, y recogiendo además, en el embalse ó pantano que determinan, las aguas de lluvia que caen sobre la cuenca de recepción correspondiente.

Como tales muros pueden alcanzar alturas considerables (50 metros la presa de Furens) y se construyen generalmente de mampostería ejecutada con esmero, resultan siempre obras costosas, por cuyo motivo exigen un estudio muy detenido, tanto en lo relativo á su emplazamiento para que el desarrollo longitudinal de la obra sea el menor posible, como respecto á la forma más conveniente del perfil que deben ofrecer, para que sin menoscabo de la gran estabilidad que necesitan, resulte la sección transversal con aquella superficie mínima que permita realizar la mayor economía en el cubo de fábrica.

Claro es que bajo el punto de vista del emplazamiento convendrá elegir aquel lugar en que el valle presente su mayor estrechamiento, siempre que la naturaleza del terreno ofrezca las mejores condiciones para ejecutar la fundación, conforme á los buenos principios de seguridad y economía.

177. Suponiendo conocida la altura del nivel del agua sobre el pie del muro, altura que depende de la cantidad de líquido que se haya de almacenar y de la configuración particular de la cuenca, veamos cómo conviene proceder para determinar el perfil de una presa de embalse.

En dos situaciones extremas hay que considerar al muro. Cuando el embalse está completamente lleno y cuando está vacío. En el primer caso, la resultante de las presiones se acercará lo más posible á la arista exterior de la base; porque el empuje del agua se combina con el peso de la fábrica. En el segundo caso, aquel empuje es nulo, y dicha resultante, por el contrario, se acercará más á la arista interior que á la opuesta, teniendo en cuenta la menor inclinación del paramento interior que siempre ofrecen estos muros.

Esto mismo ocurre si se considera, en vez de la base de la presa, una cualquiera de sus secciones horizontales.

Es, pues, necesario, para que la obra resulte suficientemente estable, que en las dos situaciones extremas que hemos indicado, cumpla con las condiciones siguientes:

1.ª Que la resultante de las presiones no corte á ninguna de las secciones horizontales fuera del tercio medio ó núcleo central.

2.ª Que la presión máxima unitaria no exceda del límite que se señale como coeficiente de seguridad.

Ya veremos que si estas condiciones quedan satisfechas el deslizamiento será imposible á lo largo de cualquiera de las juntas horizontales.

178. Como la altura de la presa ha de ser superior á la del agua, para impedir que ésta salte en momentos de fuerte oleaje, y además hay que dar un cierto ancho á la coronación, no sólo para resistir á la acción dinámica de las olas y de los cuerpos flotantes arrastrados por la corriente que choquen contra el muro, sino para que por encima de la obra puedan pasar los encargados del servicio, ó también los peatones, caballerías y vehículos, cuando sea necesario establecer sobre la presa una verdadera vía de comunicación, hay que empezar por determinar con recto criterio estas dos dimensiones: altura de la cresta sobre el nivel máximo del embalse y espesor del muro en la coronación.

179. Con arreglo á la naturaleza de los materiales que hayan de emplearse, no habrá dificultad en fijar el valor del coeficiente de seguridad, es decir, la presión máxima unitaria que debe admitirse; tanto más si se tiene en cuenta que, entre tan apartados límites como son el de 4 kilogramos por centímetro cuadrado, que aconseja Zazilly y el de 15 kilogramos por la misma unidad superficial que se admitió en la antigua presa del pantano de Almansa, suele aceptarse generalmente la de 6 á 7 kilogramos por centímetro cuadrado, como presión unitaria que puede soportar la mampostería, sin inconveniente alguno.

No hay para qué decir que si la presión unitaria presentara un ligero exceso sobre el coeficiente de seguridad adoptado, en alguna de las juntas de la presa, no será necesario rectificar sus dimensiones; siempre, repetimos, que la diferencia por exceso sea insignificante.

180. Los datos del problema que tenemos que resolver son los siguientes:

H_t altura total de la presa, en su mayor sección transversal, en metros;

h_t altura del agua en íd., íd., en íd.;

δ' peso del metro cúbico de fábrica, en kg.;

1000 peso del metro cúbico de agua, en íd.;

K coeficiente de seguridad, por cm.^{2};

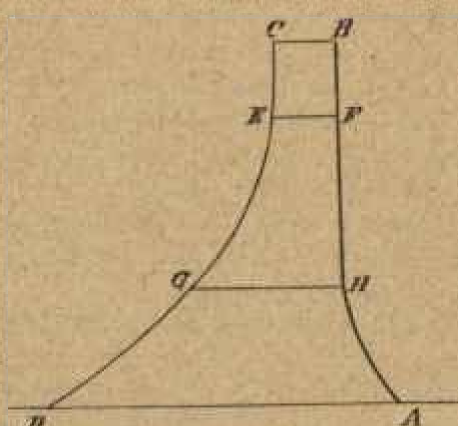
a ancho de la presa en la coronación, en metros.

181. Veamos ahora cuál es la forma general que deben tener los paramentos.

Estando vacío el embalse, la presión unitaria en el paramento interior crece con la distancia entre la coronación y el punto que se considere; y claro es que mientras dicha presión no exceda del coeficiente K de seguridad, podrá admitirse que aquel paramento sea vertical. En adelante, desde aquella altura, contada de la coronación, para la cual la presión unitaria sea igual ó ligeramente superior á K, es necesario que el paramento interior ofrezca un talud creciente, para conseguir que aquella presión se conserve sensiblemente igual á K. De donde resulta que el paramento interior debe presentar una parte, la más alta, completamente plana y vertical, y el resto será una superficie cóncava, de cuya generatriz se determinarán los puntos necesarios, como pronto veremos.

El paramento exterior debe también ofrecer una parte, la más alta, plana y vertical; pero de menor altura que la del paramento opuesto, y cuyo valor límite luego determinaremos. El resto, por el contrario, debe ofrecer un talud ó inclinación creciente, para que se cumplan las condiciones fundamentales que oportunamente hemos establecido, estando lleno el embalse; lo que origina una superficie cóncava, de cuya generatriz se determinarán asimismo los puntos necesarios para su trazado, de la manera que se verá más adelante.

Fig. 41.



A virtud de lo expuesto, resulta que toda presa importante de embalse se compondrá de tres zonas (figura 41) á saber:

1.ª La superior, ó más alta, CBFE, cuya sección transversal es un rectángulo.

2.ª La intermedia EFHG, en la que el paramento interior FH es plano y vertical, y el exterior EG es una superficie cóncava, y

3.ª La inferior AHGD, en la cual ambos paramentos son superficies cóncavas.

182. Altura límite de la zona superior.—Aunque en los momentos de calma, la superficie líquida no llega nunca á enrasar con la coronación, porque para eso se disponen aliviaderos de superficie que dan paso al agua en exceso que pueda acumularse, manteniéndola á un nivel máximo constante, admitiremos, para el estudio de la presa, que la altura del agua sea la misma que la del muro. A virtud de esta hipótesis, resultará la obra con un ligero exceso de resistencia perfectamente admisible, y además se simplificarán las operaciones, evitando la resolución de una ecuación de tercer grado en el cálculo de la altura de que vamos á ocuparnos.

Representemos por H la altura máxima que puede tener la primera zona de la presa, es decir, la rectangular y más alta, y supongamos lleno el embalse.

Sea d la distancia del punto de paso de la resultante de las presiones á la arista exterior de la base de dicha zona, cuyo espesor (ancho de coronación) es a.

La altura H ha de ser tal, que quede satisfecha la condición

$$d = \frac{a}{3} = \frac{M(P) - M(Q)}{P}.$$

Las expresiones del peso P del macizo, del empuje Q del agua y de los momentos de estas dos fuerzas, con relación á la arista exterior de la base, son las siguientes, considerando como siempre una longitud de muro igual á la unidad (un metro).

$$P = \delta' a H \qquad M(P) = \frac{1}{2}\delta' a^2 H$$

$$Q = 500 H^2 \qquad M(Q) = \frac{1}{3} \times 500 H^3$$

Sustituyendo estas expresiones en la condición que precede, resulta:

$$\frac{a}{3} = \frac{\frac{1}{2}\delta' a^2 H - \frac{1}{3} \times 500 H^3}{\delta' a H}$$

y simplificando

$$2\,\delta' a^2 = 3\,\delta' a^2 - 1000\, H^2$$

ó bien

$$1000\, H^2 = \delta' a^2,$$

de donde

$$H = a\sqrt{\frac{\delta'}{1000}} = 1{,}483\, a$$

Admitiendo para δ' el valor medio $\delta' = 2200$ kg. y variando a, por lo común, de 3 á 5 metros, tendremos

Para $a = 3^m$ ..... $H = 4^m{,}45$
» $a = 4^m$ ..... $H = 5^m{,}93$
» $a = 5^m$ ..... $H = 7^m{,}42$

Generalmente, la altura de la primera zona se hace menor que su valor límite, calculado como acabamos de indicar, y por lo común igual á la de las fajas en que se supone dividido el muro, como luego veremos.

183. Conviene ahora hacer notar que para los anchos de coronación y alturas límites de la primera zona que quedan expresados, la presión máxima unitaria en la base, cuando el embalse está lleno, no llega ni con mucho á los 6 ó 7 kilogramos por centímetro cuadrado que anteriormente hemos indicado, como valor medio muy aceptable para coeficiente de seguridad.

En efecto; como lo resultante pasa por el tercio anterior de la base y hemos visto que tal condición supone que la relación entre H y *a* sea

$$H = 1{,}483\, a,$$

la presión unitaria máxima ρ crecerá indudablemente con la altura, y por lo tanto, con el ancho correspondiente de coronación.

Tenemos para la expresión de ρ (presión máxima por metro cuadrado)

$$\rho = \frac{2\,P}{a} = \frac{2\,\delta' a\, H}{a} = 2\,\delta' H.$$

y sustituyendo en vez de H su valor en función de *a*

$$\rho = 2 \times 1{,}483\, \delta' a\,;$$

de donde

$$(a) \qquad a = \frac{\rho}{2 \times 1{,}483\, \delta'} = 0{,}000153\, \rho\,, \text{ próximamente,}$$

y

$$(b) \qquad \rho = 6525{,}2\, a$$

Prueba la relación *(a)* que, una vez fijado el valor de la presión unitaria, el ancho de coronación no puede pasar del límite indicado por dicha relación *(a)*, cuando se acepta para la altura su valor límite.

Así, por ejemplo, resultará:

Para	$\rho = 50000$ kg.	$a = 7^{m},65$
»	$\rho = 60000$ kg.	$a = 9^{m},18$
»	$\rho = 70000$ kg.	$a = 10^{m},71$

De la relación (b) se deduce

Para $a = 3^m$	y	$H = 4^m,449$	$\rho = 19575,6$ kg.
» $a = 4^m$	y	$H = 5^m,932$	$\rho = 26100,8$ kg.
» $a = 5^m$	y	$H = 7^m,415$	$\rho = 32626$ kg.

lo que prueba, según habíamos indicado, que cuando a varía entre 3 y 5 metros, la presión unitaria resulta siempre muy inferior al coeficiente de seguridad medio, fijado en 6 kg. por centímetro cuadrado, ó lo que es lo mismo, en 60000 kg. por metro cuadrado.

184. Marcha general de cálculo.—Para determinar la forma especial de las líneas de la sección principal que definan prácticamente los dos paramentos, se dividirá la altura conocida H_t de la presa en partes iguales, no muy grandes, (de 4 á 6 metros cada una) para que los contornos poligonales que resulten puedan sustituirse fácilmente y sin gran error, en caso necesario, por líneas curvas tangentes á los lados de aquellos.

De esta suerte quedará el muro dividido en un cierto número de partes ó fajas de igual altura, que las denominaremos por el número de orden que les corresponda, á contar de la más alta, que como ya hemos visto será completamente rectangular.

Con respecto á una cualquiera de dichas fajas aceptaremos la notación siguiente:

H altura desde la coronación de la presa hasta la base inferior de la faja que se considere, en metros;

h altura constante de cada faja, en íd.;

b anchura de la base superior de dicha faja, en íd.;

B anchura de la base inferior de la misma, en íd.;

x proyección horizontal del talud del paramento exterior, en idem.;

y proyección horizontal del talud del parámento interior, en idem.;

P peso total que gravita sobre la base inferior, incluso el del agua que cargue sobre el paramento interior cuando este sea inclinado, en kg.;

d distancia del punto de paso de la resultante á la arista exterior de la base, cuando el embalse está lleno, en metros;

d' distancia del punto de paso de la resultante á la arista interior, cuando el embalse está vacío, en íd.;

Q empuje horizontal del agua correspondiente á la altura H del macizo constituído por la faja que se considere y las que hay encima de ella, en kg.;

ρ presión unitaria (por metro cuadrado) en la arista exterior de la base, cuando el embalse está lleno, en íd.;

ρ' presión unitaria (íd. íd.) en la arista interior de dicha base cuando el embalse está vacío, en kg.;

δ' peso del metro cúbico de fábrica, en íd.;

P_1 peso que gravita sobre la base superior de la faja que se considere, incluso el del agua que cargue sobre el paramento interior del macizo que descansa sobre aquella, en idem.;

K coeficiente de seguridad, ó sea presión por centímetro cuadrado que se fija como límite máximo, en íd.;

El cálculo de las dimensiones de una faja varía según la zona á que corresponda. Por este motivo bastará que consideremos los tres casos siguientes, para comprender con entera claridad la marcha de las operaciones.

185. **Primera faja, constituída por la primera zona.**—Ninguna incóguita contiene la primera faja, pues su sección transversal es un rectángulo cuya base B es el ancho de coronación, y cuya altura h es la de todas las fajas; dimensiones que se suponen fijadas de antemano, la primera para atender, sobre todo, al servicio de la presa, y la segunda por ser el cociente de dividir la altura H_t del muro por el número arbitrario de fajas en que lo hemos dividido.

Debe advertirse que para simplificar ciertas operaciones conviene que h sea un número entero ó mixto divisible por 3.

Es necesario, sin embargo, determinar los elementos d, d', ρ, ρ', P y M(P), para utilizarlos en el cálculo de la segunda faja. Para ello procederemos de la manera siguiente.

Como $B = b = a$, y el cálculo de P, M(P), Q, M (Q), no ofrece nada de particular, podremos desde luego establecer, cuando el embalse está lleno:

$$d = \frac{M(P) - M(Q)}{P} = \frac{\frac{1}{2}\delta' b^2 h - \frac{1}{3} \times 500 h^3}{\delta' b h}$$

Ya sabemos que, por ser h menor que la altura límite que puede tener la zona rectangular, se verifica que $d > \frac{1}{3}B$, ó bien que $\frac{d}{B} > \frac{1}{3}$; por lo tanto, el valor de ρ habrá de calcularse por la primera de las fórmulas de la ley del trapecio, y será

$$\rho = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d}{B}\right)$$

También hemos visto que esta presión máxima es muy inferior á la que indica el coeficiente de seguridad; por tanto, resultará asimismo que $\rho < 10000$ K.

Cuando el embalse esté vacío, es claro que la resultante pasará por el punto medio de la base, y tendremos:

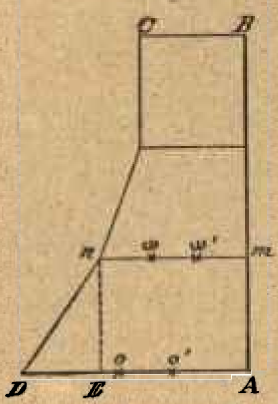
$$d' = \frac{B}{2}, \quad \frac{d'}{B} = 0{,}5, \quad \rho' = \frac{P}{B} = \frac{b\delta' h}{b} = \delta' h, \quad \rho' < 10000 \text{ K.}$$

186. Cálculo de una de las fajas comprendidas en la segunda zona.—Suponiendo determinadas las fajas anteriores, es evidente que, respecto del macizo C*Bmn* (figura 42) que descansa sobre la faja A*mn*D que se va á calcular, conoceremos: el peso de dicho macizo C*Bmn* que representaremos por P_1; los puntos de paso ω, ω', de la resultante, cuando el embalse está lleno y cuando está vacío, así como las distancias $d_1 = n\omega$ y $d_1' = m\omega'$.

Las dimensiones de la faja que consideramos, son:

Altura..................	$Am = h$
Base superior...........	$mn = b$
Base inferior	$AB = B = b + x$

Fig. 42.



Como h es constante para todas las fajas y b es conocida á virtud del cálculo de la faja precedente (que se supone hecho), la única incógnita es x. Para determinarla, basta imponer la condición de que la resultante de las presiones corte á la base $AD = B$, cuando el embalse está lleno, en el tercio anterior de su anchura, es decir, en el punto O, siendo

$$OD = \frac{1}{3} AD.$$

Dicha condición toma la forma

$$\frac{B}{3} = \frac{M(P) - M(Q)}{P} \qquad (a)$$

Si ahora sustituímos en vez de B, P y M(P) sus expresiones en función de x, tendremos una ecuación de segundo grado, con la sola incógnita x. Una vez resuelta, quedará suficientemente definida la faja de que se trata.

187. Llamando p al peso de dicha faja, el cual se descompone en los del rectángulo y triángulo indicados en la figura, que llamaremos R al del primero y T al del segundo, es claro que tendremos

$$P = P_1 + p$$

y también

$$P = P_1 + R + T$$

de donde

$$M(P) = M(P_1) + M(R) + M(T)$$

Los brazos de palanca, con relación á la arista exterior proyectada en D, son:

Para el peso P_1 .... $d_1 + x$

— R .... $\frac{1}{2} b + x$

— T .... $\frac{2}{3} x$

Las expresiones de los pesos R y T son:

$$R = \delta' bh$$

$$T = \frac{1}{2} \delta' hx$$

Por consiguiente los momentos serán:

$$M(P_1) = P_1(d_1 + x) = P_1 d_1 + P_1 x$$

$$M(R) = \delta' bh\left(\frac{1}{2} b + x\right) = \frac{1}{2} \delta' b^2 h + \delta' bhx$$

$$M(T) = \frac{1}{2} \delta' hx \times \frac{2}{3} x = \frac{1}{3} \delta' hx^2,$$

y la expresión de M(P), en función de x, será:

$$M(P) = \left(P_1 d_1 + \frac{1}{2} \delta' b^2 h\right) + (P_1 + \delta' bh)x + \frac{1}{3} \delta' hx^2.$$

Tenemos además $Q = 500\,H^2$ y $M(Q) = \frac{1}{3} \times 500\,H^3$, así como

$$P = P_1 + \delta' bh + \frac{1}{2} \delta' hx.$$

Si ahora sustituimos en la ecuación (a), resultará por último

$$\frac{b+x}{3}=\frac{\left(P_1 d_1+\frac{1}{2}\delta' b^2 h\right)+(P_1+\delta' bh)x+\frac{1}{3}\delta' hx^2-\frac{1}{3}\times 500\,H^3}{P_1+\delta' bh+\frac{1}{2}\delta' hx},$$

ecuación que se reduce á la forma

$$x^2+\left(\frac{4P_1}{\delta' h}+3b\right)x+\frac{2P_1\,(3d_1-b)-1000\,H^3}{\delta' h}+b^2=0.$$

188. Para poder calcular la faja siguiente, una vez determinado el valor de x, resolviendo la ecuación que precede, lo sustituiremos en las expresiones de

$$B,\ P,\ M(P),\ d=\frac{M(P)-M(Q)}{P},\ \frac{d}{B},\ \rho,\ d'=B-\frac{M(P)}{P},\ \frac{d'}{B},\ \rho'.$$

Como comprobación debe resultar que $\frac{d}{B}=\frac{1}{3}$, y además que $\frac{d'}{B} \mathrel{\substack{=\\>}} \frac{1}{3}$, $\rho < 10000\ K$ y $\rho' < 10000\ K$

Puesto que $d=\frac{1}{3}B$, claro es que ρ se calculará por la fórmula

$$\rho=\frac{2P}{B}$$

y ρ' por la

$$\rho'=\frac{2P}{B}\left(2-\frac{3d'}{B}\right).$$

Pudiera suceder que d' resultara muy poco menor que $\frac{1}{3}B$, siendo insignificante la diferencia. Si así ocurriera, no hace falta en rigor ataluzar todavía el paramento interior; pero entonces ρ' se calcularía por la fórmula

$$\rho' = \frac{2P}{3d'}$$

debiendo resultar necesariamente que $\rho' < 10000$ K, si la faja calculada pertenece en realidad á la zona intermedia.

Resulta de lo expuesto, que conocida la primera faja, podrá calcularse la segunda, y por su orden natural, todas las que le siguen, de la segunda zona.

A medida que las fajas se alejan de la coronación, se observará, inspeccionando los resultados, que la relación $\frac{d'}{B}$ disminuye, así como el valor de ρ' aumenta.

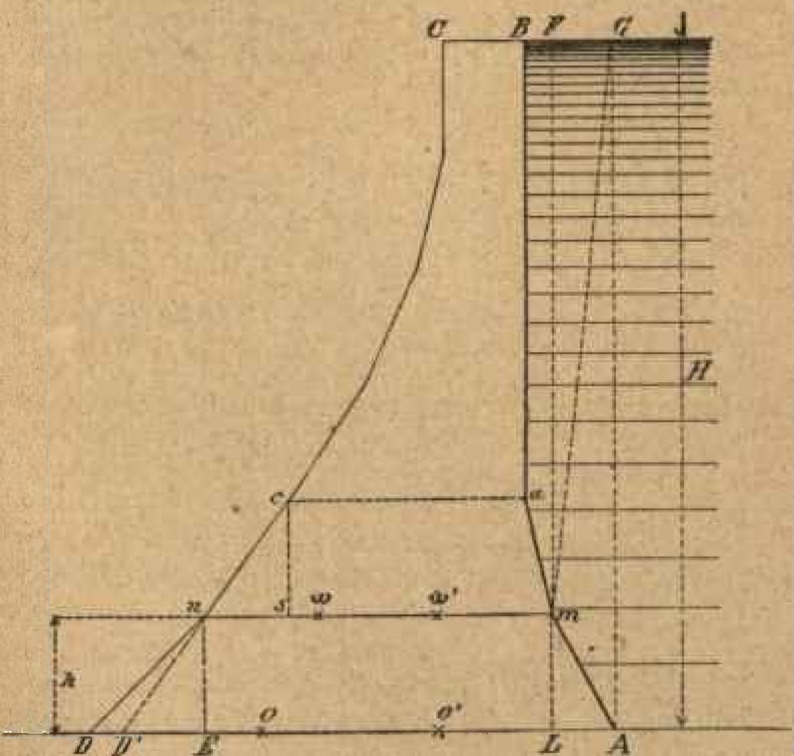
Cuando se llegue á las desigualdades simultáneas $\frac{d'}{B} < \frac{1}{3}$ y $\rho' > 10000$ K, probará esto que la faja que se calcula ya no pertenece á la zona intermedia, sino que, por el contrario, es la primera de la zona inferior. Será preciso en tal caso dar un talud conveniente al paramento interior, para que $\frac{d'}{B}$ no resulte menor que $\frac{1}{3}$, ni ρ' mayor que 10000 K; teniendo que determinar una nueva incógnita y, que, como ya dijimos, no es otra cosa que la proyección horizontal del paramento interior inclinado.

189. **Cálculo de las fajas comprendidas en la tercera zona.**—Sea $AmnD$ (figura 43) la faja que corresponde calcular, de la que se conoce la base superior $b = mn$ y la altura $nE = h$.

La base inferior $B = AD$ tiene por expresión $B = b + x + y$, siendo $x = DE$, $y = AL$. Por lo tanto, en el problema actual hay dos incógnitas: x, la proyección horizontal del paramento exterior Dn, é y, la del paramento interior Am.

Para no tener que resolver ecuaciones de grado superior al segundo, y como procedimiento suficientemente exacto en la práctica, calcularemos primero y, atribuyendo á x el valor aproximado por defecto $D'E = ns$, es decir, el de la proyección

Fig. 43.



horizontal del paramento exterior cn de la faja anterior inmediata. De esta suerte, considerando como definitivo el valor de y', así calculado, ya no habrá dificultad en determinar en seguida el valor verdadero de x.

190. Cálculo de y.—Para determinar esta incógnita hay que suponer que el embalse está vacío, porque los momentos de los pesos hay que referirlos á la arista interior proyectada en A; pero como la faja que resulte definida por este primer cálculo será menor que la verdadera, afectaremos del subíndice e todos los elementos de la misma que después resulten corregidos.

El peso P_e, comprende en este caso:

1.º El peso P' del macizo superior $mBCn$, cuyo momento $P'd'$ con relación á la arista interior m, se conoce.

2.º El peso de la faja, algo menor que la verdadera, proyectada en $AmnD'$ y cuya expresión será

$$p_e = R + T_e + t$$

en la cual R representa el peso de la porción rectangular $LmnE$, T_e el de la triangular EnD' y t el de la triangular interior AmL,

Llamando x' á la magnitud conocida $D'E = ns$, tendremos

$$P_e = P' + p_e$$

ó bien

$$P_e = P' + R + T_e + t$$

de donde

$$M(P_e) = M(P') + M(R) + M(T_e) + M(t)\ .$$

Los brazos de palanca de estos pesos, con relación á la arista interior proyectada en A, son los siguientes:

Para el peso P' .... $d_1' + y$

— R .... $\frac{1}{2} b + y$

— T_e .... $b + \frac{1}{3} x' + y$

— t .... $\frac{2}{3} y$.

Además, las expresiones de R, T_e y t son respectivamente:

$$R = \delta' b h \quad , \quad T_e = \frac{1}{2} \delta' h x' \quad , \quad t = \frac{1}{2} \delta' h y \ ;$$

por consiguiente resultará

$$P_e = P' + \delta' b h + \frac{1}{2} \delta' h x' + \frac{1}{2} \delta' h y$$

y también

$$M(P_e) = P' d'_1 + \frac{1}{2} \delta' h \left(b^2 + b x' + \frac{x'^2}{3} \right) +$$

$$\left(P' + \delta' h \left(b + \frac{x'}{2} \right) \right) y + \frac{1}{3} \delta' h y^2 .$$

Ahora, lo que hay que hacer para determinar el valor de y, es establecer como condición que la presión por metro cuadrado ρ'_e que se desarrolle en la arista interior sea precisamente igual á 10000 K, siendo K el coeficiente de seguridad adoptado (por centímetro cuadrado).

Como el talud y del paramento interior aleja el punto de paso de la resultante de la arista A, cuya distancia representaremos por d'_e, es claro que pudiendo afirmar que $d'_e > \frac{1}{3} B_e$, el valor de ρ'_e habrá de calcularse por la primera de las fórmulas de la ley del trapecio, y así tendremos

$$\rho'_e = \frac{2 P_e}{B_e} \left(2 - \frac{3 d'_e}{B_e} \right) ,$$

ó bien,

$$2 P_e B_e - 3 P_e d'_e = \frac{1}{2} \rho'_e B_e^2$$

Si, como antes hemos dicho, introducimos la condición de que $\rho'_e = 10000$ K, cuando el embalse está vacío, que es como lo venimos suponiendo, esta ecuación se convertirá en

$$2 P_e B_e - 3 P_e d'_e = 5000 \text{ K } B_e^2$$

ó también, puesto que $P_e d'_e = M(P_e)$

$$2P_e B_e - 3\,M(P_e) = 5000\;K\;B_e^2.$$

Por último, si sustituimos en vez de P_e, B_e y $M(P_e)$ sus expresiones en función de y, resultará:

$$y^2 + \left[\frac{2P' - \delta' h x'}{10000\;K} + 2\,(b + x')\right] y -$$

$$\left[\frac{2P'\left(2\,(b+x') - 3d'_1\right) + \delta' h\,(b^2 + 3bx' + x'^2)}{10000\;\;K} - (b+x')^2\right] = 0.$$

La raiz positiva de esta ecuación nos dará el valor de y, quedando así resuelta la primera parte del problema que nos ocupa.

Si se calculan ahora los valores numéricos de

$$P_e\;,\;M(P_e),\,d'_e = \frac{M(P_e)}{P_e}\;,\;B_e = b + x' + y\;,\;\frac{d'_e}{B_e}\;,\;\rho'_e =$$

$$\rho'_e = \frac{2P_e}{B_e}\left(2 - \frac{3d'_e}{B_e}\right);$$

deberá resultar, como comprabación, que

$$\frac{d'_e}{B_e} > \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad \rho'_e = 10000\,K;$$

pero por lo demás, el conocimiento de tales valores no es indispensable, puesto que no hacen falta para proceder al cálculo del verdadero valor de x, de que vamos á ocuparnos.

191. Cálculo de x.—Para determinar x, se considera lleno el embalse, se toman todos los momentos de las fuerzas que intervienen, con relación á la arista exterior D y se establece como condición que $\rho = 10000\;K$; debiendo resultar además que $\frac{d}{B} \geqq \frac{1}{3}$.

El peso total P comprende en este caso:

1.º El peso P_1 que representa el del macizo superior mBCn y el del agua amFB, y cuyo momento $P_1 d_1$ con relación á la arista proyectada en n, es conocido, puesto que se determinó al calcular la faja anterior.

2.º El peso del prisma de agua AmFG que carga sobre el paramento interior mA y representaremos por $\pi = \pi' + \pi''$, siendo π' el de la parte triangular proyectada en mFG y π'' el de la proyectada en AmG.

3.º El peso $p = t + R + T$ de la faja AmnD.

Por lo tanto tendremos

$$P = P_1 + \pi' + \pi'' + t + R + T$$

y

$$M(P) = M(P_1) + M(\pi') + M(\pi'') + M(t) + M(R) + M(T)$$

Las expresiones de estos pesos y de sus brazos de palanca en función de $x = DE$, con relación á la arista exterior D, son las siguientes:

Pesos.	Brazos de palanca.
P_1	$d_1 + x$
$\pi' = 500\,(H - h)\,y$	$\frac{1}{3}y + b + x$
$\pi'' = 500\,Hy$	$\frac{2}{3}y + b + x$
$t = \frac{1}{2}\,\delta' h y$	$\frac{1}{3}y + b + x$
$R = \delta' b h$	$\frac{1}{2}b + x$
$T = \frac{1}{2}\,\delta' h x$	$\frac{2}{3}x$

Por consiguiente, las expresiones de P y de M(P) en función de x serán:

$$P = P_1 + 500\,(H - h)\,y + 500\,Hy + \frac{1}{2}\,\delta' hy + \delta' bh + \frac{1}{2}\,\delta' hx$$

$$M(P) = P_1\,(d_1 + x) + 500\,(H - h)\,y\left(\frac{1}{3}\,y + b + x\right) +$$
$$500\,Hy\left(\frac{2}{3}\,y + b + x\right) + \frac{1}{2}\,\delta' hy\left(\frac{1}{3}\,y + b + x\right) +$$
$$\delta' bh\left(\frac{1}{2}\,b + x\right) + \frac{1}{2}\,\delta' hx \times \frac{2}{3}\,x$$

y simplificando:

$$P = P_1 + \left[500\,(2H - h) + \frac{1}{2}\,\delta' h\right] y + \delta' bh + \frac{1}{2}\,\delta' hx$$

$$M(P) = P_1 d_1 + b\left[\frac{1}{2}\,\delta' h\,(b + y) + 500\,y\,(2H - h)\right] +$$
$$y^2\left[500\,H + \frac{(\delta' - 1000)\,h}{6}\right] +$$
$$\left[P_1 + y\left(1000\,H + h\,.\,\frac{\delta' - 1000}{2}\right) + \delta' bh\right] x + \frac{1}{3}\,\delta' hx^2\ .$$

Para obtener ahora la ecuación de 2.º grado, que resuelta ha de darnos el valor de x, escribiremos la expresión de ρ conforme á la primera de las fórmulas de la ley del trapecio, toda vez que seguramente ha de ser $d > \frac{1}{3}$ B, en atención al ensanchamiento de la base inferior, que resulta de la mayor inclinación de los dos paramentos de la faja que se considera. Si al propio tiempo asignamos á ρ su valor límite 10000 K tendremos que la referida expresión de ρ,

$$\rho = \frac{2P}{B}\left(2 - \frac{3d}{B}\right)$$

podrá escribirse bajo la forma

$$\frac{1}{2}\rho B^2 + 3Pd - 2PB = 0$$

ó bien, puesto que $d = \dfrac{M(P) - M(Q)}{P}$ y $Pd = M(P) - M(Q)$,

$$5000\ KB^2 + 3M(P) - 3M(Q) - 2PB = 0\,.$$

Sustituyendo en vez de P y M(P) sus valores, escritos antes en función de x, y en lugar de B y M(Q), los suyos, que son $B = b + y + x$, y $M(Q) = \dfrac{1}{3} \times 500\ H^3$, resultará la ecuación que necesitamos y es la siguiente:

$$x^2 + \left[\frac{2P_1 - \delta' hy}{10000\ K} + \frac{(2H - h)y}{10\ K} + 2(b+y)\right]x -$$

$$\left[\frac{2P_1\,(2(b+y) - 3d_1) + \delta' h\,((b+y)^2 + by)}{10000\ K} +\right.$$

$$\left.\frac{H(H^2 - 2by + y^2) + hy\,(b-y)}{10\ K} - (b+y)^2\right] = 0;$$

que tiene la forma

$$x^2 + mx - n = 0$$

siendo

$$m = \frac{2P_1 - \delta' hy}{10000\ K} + \frac{(2H - h)\,y}{10\ K} + 2\,(b+y)$$

$$n = \frac{2P_1\,(2\,(b+y) - 3d_1) + \delta' h\,((b+y)^2 + by)}{10000\ K} +$$

$$\frac{H\,(H^2 - 2\,by + y^2) + hy\,(b-y)}{10\ K} - (b+y)^2$$

192. Conviene notar que d_1 representa el brazo de palanca del peso P_1 con relación á la arista proyectada en n; y que para todas las fajas de la tercera zona, desde la segunda de aquellas inclusive, en adelante, dicho peso P_1 comprende no sólo el del macizo de fábrica, sino el del prisma de agua que gravita sobre el paramento inclinado correspondiente.

El valor de d_1 se hallará siempre dividiendo el valor de $M(P_1)$ por P_1; cantidades ambas que se calcularon al estudiar la faja inmediata anterior.

En cuanto á los coeficientes m y n, bastará calcularlos con tres decimales á lo sumo, para que la determinación de x se considere suficientemente exacta en la práctica.

Lo mismo se hará respecto de los coeficientes análogos de la ecuación que hay que resolver para el cálculo de y.

193. Observaciones.—Estudiadas todas las fajas en que se supone descompuesta la presa de embalse, y calculadas las cantidades P, M(P), Q y M(Q), d, d', ρ y ρ'; y satisfaciendo el macizo obtenido á las condiciones fundamentales

$$\left.\begin{matrix} d \\ d' \end{matrix}\right\} \geqq \frac{1}{3}\,B \quad \text{y} \quad \left.\begin{matrix} \rho \\ \rho' \end{matrix}\right\} \leqq 10000\ K,$$

lo que demuestra la imposibilidad del giro y del aplastamiento; conviene, además, calcular las relaciones $\frac{M(P)}{M(Q)}$ y $\frac{Q}{P}$.

La primera constituye el coeficiente de estabilidad al giro alrededor de la arista exterior de la sección horizontal de que se trate, y la segunda es inversamente proporcional al coeficiente de estabilidad al resbalamiento.

La importancia de los primeros valores (generalmente superiores á 1,90) confirmarán la imposibilidad de la rotación, y los segundos pondrán claramente de manifiesto que el deslizamiento es también imposible, porque resultarán bastante inferiores á $f = 0{,}76$, que suele tomarse como tipo.

Dadas las precauciones que hay que tomar al construir este género de obras para que el macizo quede enraigado sobre la roca firme, que es donde debe apoyarse, no hay que abrigar el más pequeño temor de que pueda iniciarse el deslizamiento á lo largo de la base de la cimentación.

194. Si para las dos situaciones en que hemos considerado el embalse (lleno y vacío), se unen por medio de una línea continua los puntos de paso de la resultante de las presiones, determinados por sus distancias d ó d' á la arista más próxima de cada una de las secciones horizontales estudiadas, se obtendrán las dos *curvas de presión* correspondientes, las cuales manifestarán, á su vez, de una manera gráfica la imposibilidad del giro y del resbalamiento, si cumplen, como de seguro ha de suceder, con las condiciones siguientes:

1.ª Que ambas curvas no corten á las diversas secciones horizontales del muro fuera del núcleo central.

Si así ocurre, no sólo probará esto que la resistencia á la rotación es más que suficiente, sino que además no se desenvolverán esfuerzos de tracción en ningún punto.

2.ª Que la tangente á dichas curvas, trazada por un punto cualquiera de las mismas, forme con la vertical un ángulo cuya tangente trigonométrica no sea mayor que 0,76, lo cual quiere decir que dicho ángulo no ha de ser mayor que 37° 20′ próximamente.

Si las secciones efectivas del macizo no fueran horizontales, la condición actual se enunciaría diciendo que la tangente á la curva de presiones debe formar con la normal á la junta respectiva un ángulo que no sea mayor que 37° 20′, y por consecuencia, con la junta misma, un ángulo que no sea menor que 52° 40′, complemento del primero.

195. La sección de presa que se estudie conviene dibujarla en escala de $\frac{1}{200}$, construyendo además las dos curvas de presión y representando, para cada grupo de fajas consecutivas, á contar de la primera ó más alta, el paralelógramo de las fuerzas P y Q acotadas, cuya diagonal cortará á la junta correspondiente en el punto de paso de antemano conocido.

196. Trazado de las curvas de presión.—Ya hemos dicho que para trazar las curvas de presión, sólo se necesita conocer los puntos de paso de las resultantes en cada una de las juntas que se consideren, cuando el embalse está lleno y cuando está vacío.

El procedimiento de cálculo analítico expuesto anteriormente define aquellos puntos con gran exactitud; pero también es posible y fácil determinarlos, ya construyendo las diversas resultantes de las fuerzas que solicitan á cada una de las agrupaciones de fajas consecutivas, á contar de la más alta; ó bien sus componentes, constituídas la una por el peso del macizo respectivo, y la otra por el empuje total del agua sobre el paramento interior de aquél.

Es preferible determinar tales componentes con preferencia á las resultantes, por dos razones, á saber:

1.ª Porque el conocimiento de las primeras se necesita para construir el paralelógramo de las fuerzas P y Q, según hemos dicho antes, en cuyo caso las diagonales representarán las segundas.

2.ª Porque la investigación directa de las resultantes exige el empleo de un solo polígono funicular, el cual presenta el inconveniente, en este caso, de que cualquiera que sea el polo que se elija, no sirve para fijar con la necesaria exactitud las líneas de acción de dichas resultantes, porque las intersecciones de sus lados, cuando se consideran como extremos del polígono funicular de las fuerzas que comprenden, se verifican bajo ángulos demasiado agudos.

197. Procederemos, por lo tanto, del modo siguiente:

Se divide la sección de la presa, por planos horizontales, en varias partes de igual altura; por ejemplo, en 4, 5, ó 6 fajas, á cuya altura llamaremos *h*.

Supondremos, como indica la figura 44, que la altura total de la presa se divide en cuatro partes iguales. Resultarán cuatro macizos ó fajas, sobre cada uno de los cuales el agua ejercerá un empuje distinto.

Llamemos

P_1, P_2, P_3, P_4 á los pesos de cada macizo.

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 á los empujes correspondientes sobre el paramento interior de cada uno de dichos macizos.

P_1, P', P'', P''' á los pesos de las agrupaciones de macizos consecutivos.

Q_1, Q', Q'', Q''' á los empujes correspondientes á tales agrupaciones.

Claro es que, teniendo en cuenta que los pesos son fuerzas paralelas, y que los empujes, en general, no lo son, por no formar un solo plano el paramento interior del muro, tendremos en el caso que indica la figura:

$$P_1 = P_1$$
$$P' = P_1 + P_2$$
$$P'' = P_1 + P_2 + P_3$$
$$P''' = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

y

$Q_1 = \ldots\ldots\ldots = Q_1$

$Q' =$ resultante de Q_1 y Q_2 $\ldots\ldots = Q_1 + Q_2$

$Q'' =$ íd. de Q_1, Q_2, y Q_3 $\ldots < Q_1 + Q_2 + Q_3$

$Q''' =$ íd. de Q_1, Q_2, Q_3 y $Q_4 < Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

Si llamamos

R, R', R'', R''' á las resultantes finales sobre cada una de las agrupaciones de macizos, serán:

$R =$ resultante de P_1 y Q_1

$R' =$ íd. de P' y Q'

$R'' =$ íd. de P'' y Q''

$R''' =$ íd. de P''' y Q'''

198. Determinemos, de una parte P_1, P', P'', P'''; y de otra, Q_1, Q', Q'', Q'''. Para ello se trazan por los centros de gravedad g_1, g_2, g_3, g_4, rectas verticales, que representarán las líneas de acción de los pesos P_1, P_2, P_3, P_4; y por un punto α (figura 45) el polígono 1. 2. 3. 4, de aquellas fuerzas que se designarán por **1, 2, 3, 4.**

Por los puntos de aplicación m, m', m'', m''' de los empujes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (figura 44), los cuales se designan por **I, II, III, IV,** se trazan otras rectas perpendiculares á los paramentos interiores de las fajas correspondientes, que representarán las líneas de acción de los empujes referidos; y por el mismo punto α (1) elpolígono I. II. III. IV, de los mismos.

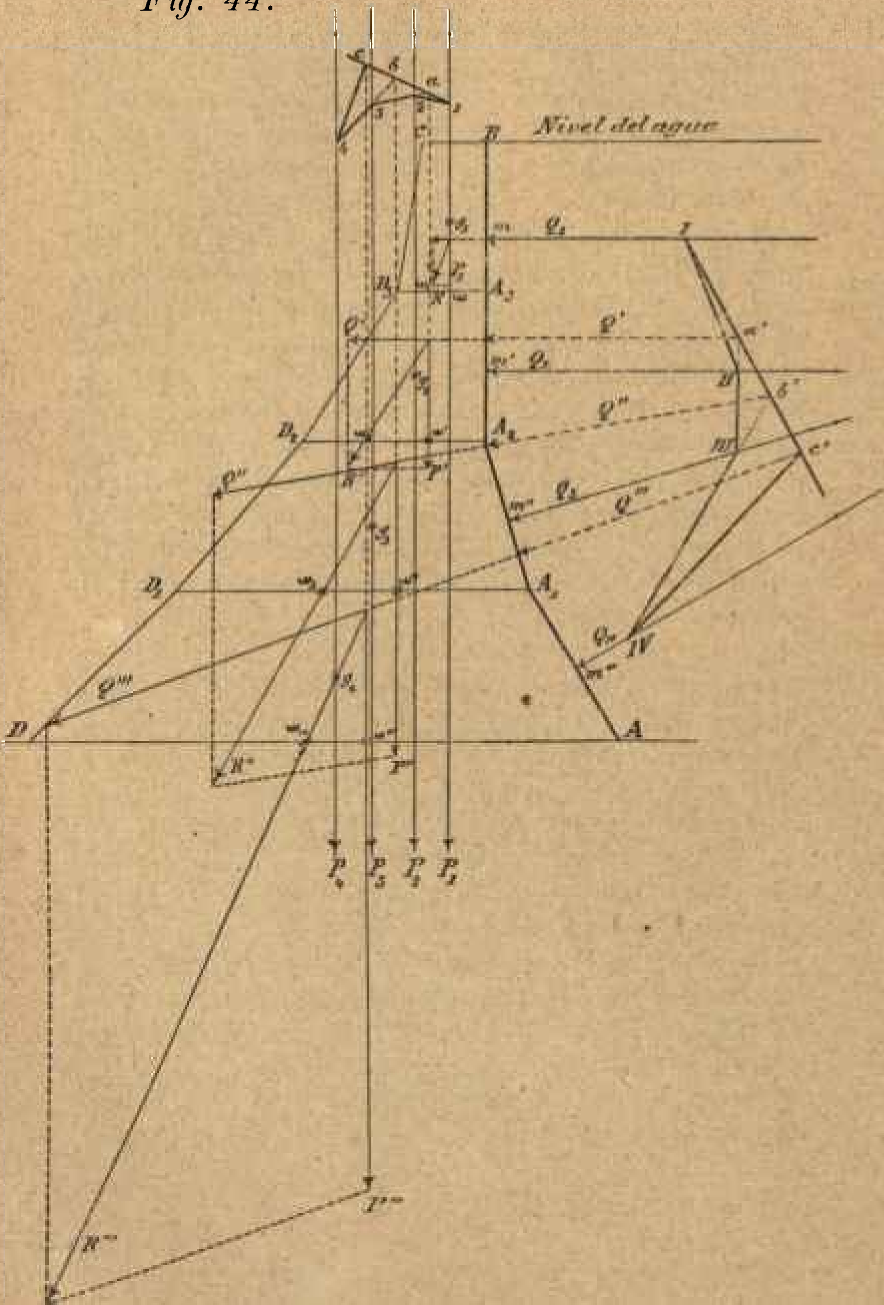
Finalmente, se construyen los polígonos funiculares **1. 2. 3. 4.** *c*, y **I. II. III. IV.** *c'*; (figura 44) el primero relativo al polo O, convenientemente elegido (figura 45) y correspondiente al sistema de fuerzas **1, 2, 3, 4,** y el segundo, relativo al polo O', elegido en sitio apropiado y correspondiente al sistema **I, II, III, IV.**

199. Con arreglo á lo establecido en otro lugar, el punto *a* (figura 44) en que se cortan los lados *c*. **1** y **2.3**, pertenecerá á la línea de acción de la resultante de P_1 y P_2, que es P'. El punto *b*, de interseción de los lados *c*. **1**, y **3. 4,** corresponderá á la línea de acción de P'', resultante de P_1, P_2 y P_3; y por último, el punto *c* en que se cortan los lados extremos *c*. **1** y **4.** *c* pertenece á la resultante P''' de las cuatro fuerzas verticales P_1, P_2, P_3, P_4; cuya suma constituye el peso de todo el macizo.

Del mismo modo, los puntos *a'*, *b'*, *c'* (figura 44) en que se cortan los lados extremos de los polígonos funiculares relativos al polo O', y correspondientes á los sistemas de fuerzas **I, II**$=Q_1, Q_2$; **I, II, III**$=Q_1, Q_2, Q_3$ y **I, II, III, IV**$=Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$, pertenecerán á las resultantes respectivas Q', Q'', Q''', las cuales serán paralelas á las sumas geométricas de dichos sistemas,

(1) Pudiera ser otro cualquiera.

Fig. 44.



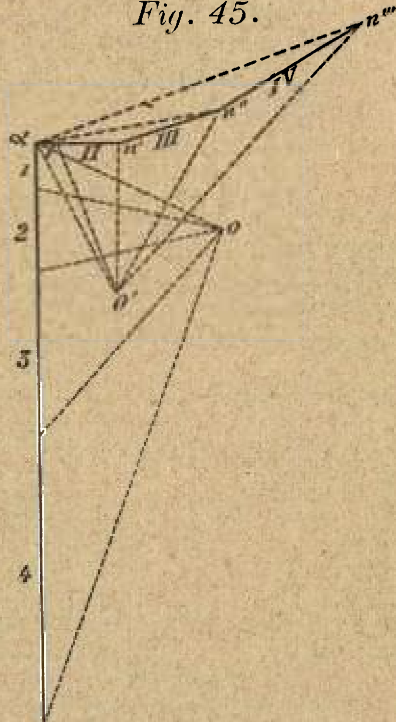
que son: (figura 45) $\alpha n'$, la del primero; $\alpha n''$ la del segundo, y $\alpha n'''$ la del tercero.

Conocidas las líneas de acción de las fuerzas P_1, Q_1; P', Q', P'', Q'': P''', Q''', cuyas magnitudes se hallan definidas en los polígonos correspondientes de los sistemas dados, no habrá dificultad en construir los paralelógramos, cuyas diagonales representarán las resultantes finales R, R′, R″, R‴ (figura 44).

Estas diagonales cortan á las bases de los macizos respectivos en los puntos ω_1, ω_2, ω_3, ω_4; y por ellos pasará la curva de presión cuando el embalse esté lleno.

Los puntos ω, ω', ω'', ω''', en que las resultantes parciales P_1, P', P'', P''' cortan á las referidas bases A_3D_3, A_2D_2, A_1 D_1, AD, determinan la curva de presión, cuando el embalse esté vacío.

Fig. 45.

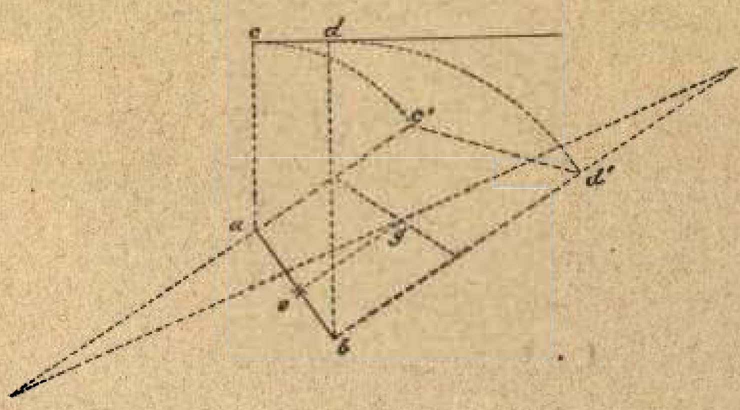


200. Observaciones.—Para evitar dudas en la práctica del procedimiento, y con objeto de que las construcciones gráficas que lleva consigo no alcancen proporciones exageradas, que lo hagan de aplicación incómoda ó imposible, es necesario hacer algunas observaciones.

No conviniendo, para la claridad del dibujo, que aparezcan más líneas que las estrictamente necesarias, que son las de acción de las fuerzas, los polígonos de las mismas y los polígonos funiculares, deberán borrarse las construcciones previas ó auxiliares que se hagan con lápiz, una vez obtenidos los centros de gravedad de los trapecios que representan las diversas fajas y los centros de presión de las superficies proyectadas según los paramentos interiores de las mismas; pues por los primeros pasarán las verticales de los pesos P_1, P_2, P_3, P_4 y por los segundos habrán de trazarse, perpendicularmente al paramento correspondiente, las líneas de acción de los empujes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

Claro es que los centros de presión se encontrarán proyectando sobre la línea de paramento, los centros de gravedad de los trapecios representativos de los empujes.

Fig. 46.



Por ejemplo, (figura 46) si *ab* es el paramento interior de una de las fajas en que se ha dividido el muro, y $ac = (n - 1)\,h$, $bd = nh$, son las distancias verticales de sus extremos al nivel del agua, el trapecio que representa el empuje Q_n sobre *ab* será el *abc'd'*, cuyo centro de gravedad *g* se hallará por cualquiera de los procedimientos usuales. Trazando por *g* la recta *go* paralela á las bases del trapecio, y perpendicularmente, por lo tanto, al paramento *ab*, el punto *o* en que corte á éste será el centro de presión del empuje Q_n.

La escala para la representación gráfica de las fuerzas puede ser cualquiera, con tal que sea una misma para los pesos y para los empujes; pero ha de ser tal, que los polígonos de ambos sistemas quepan en los límites del dibujo y que los errores relativos sean aceptables, al deducir los valores numéricos de las resultantes por la medición, con la escala establecida, de las líneas que las representan.

201. Para fijar las ideas, supongamos que con los elementos de dibujo disponibles, apreciáramos con claridad medios milímetros, y que no pudiéramos apreciar con certeza cuartos de milímetro. Claro es que el máximo error que podremos cometer en la medición de una longitud cualquiera, será el que resulte de tomar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$ de milímetro, ó viceversa. El valor del límite del error absoluto será, por lo tanto, en el caso supuesto

$$\text{lím. } \varepsilon = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{mm} = \left(\frac{1}{4}\right)^{mm};$$

es decir $\frac{1}{4}$ de milímetro, máximo error que podrá ser por exceso ó por defecto.

Sea f la menor de las fuerzas representadas y F la mayor de ellas, y supongamos que sus valores numéricos sean los siguientes:

$$f = 72000 \text{ kg.}$$
$$F = 2.100000 \text{ kg.}$$

siendo el milímetro la unidad lineal de la escala y representando á su vez dicha unidad c kilogramos.

Es indudable que al apreciar la menor de las fuerzas, cometeremos el mayor error relativo, cuyo límite lo designaremos por E, que será un número de kilogramos que podremos despreciar.

Si n es el número de unidades lineales que la fuerza f contiene, claro es que su valor numérico exacto será $f = cn$, pero el valor erróneo podrá ser $f = c\,(n + 0{,}25)$ ó $f = c\,(n - 0{,}25)$; cometiendo en ambos casos un error absoluto de $0{,}25c$ kilogramos.

La expresión del límite del error relativo, será

$$E = 0{,}25 \frac{c}{f};$$

lo que nos dice que es directamente proporcional al número arbitrario c, que se llama base de reducción, é inversamente proporcional á la magnitud de la fuerza medida.

Si hacemos $E = 0{,}04$, es decir, si no hay inconveniente en tolerar hasta el 4 por 100 de error al apreciar las fuerzas por medio de la escala, la base de reducción que en tal caso es conveniente, se calculará por la expresión

$$c = \frac{E \times f}{0{,}25} = \frac{0{,}04 \times f}{0{,}25} = 0{,}16 f$$

Bajo las condiciones que hemos supuesto, el valor de c será:

$$c = 11520 \text{ kg.}$$

y como consecuencia resultará:

Magnitud líneal de f, ... $n = \frac{f}{c} = \frac{72000}{11520} = 6{,}25$ milím.

Id. id. de F, ... $N = \frac{F}{c} = \frac{2.100000}{11520} = 182{,}29$ milím.

Máximo error posible en la medida de F

$$e = 0{,}25 \frac{c}{F} = \frac{0{,}25 \times 11520}{2.100000} = 0{,}0014$$

ó sea el 0,14 por 100. De modo que los límites del error relativo serían 0,04 y 0,0014.

Aun cuando la base de reducción puede ser cualquiera, suele ser conveniente tomarla igual al factor común que multiplique á las expresiones de uno de los grupos de fuerzas, pesos ó empujes.

Si para la presa que representa la figura 44 llamamos:

a . . . al ancho de coronación;
B_1, B_2, B_3, B_4, á las bases de los cuatro macizos;
h . . . á la altura constante de los mismos;
θ . . . al ángulo que forma con la vertical al paramento A_1A_2;
θ'. . . al que forma con la vertical el AA_1;
y. . . á la proyección horizontal del paramento A_1A_2;
y'. . . á la del paramento AA_1;

tendremos que las expresiones de los pesos y de los empujes serán las siguientes:

$$P_1 = \frac{\delta' h}{2}(B_1 + a) \qquad Q_1 = 500\, h^2 \times 1$$

$$P_2 = \frac{\delta' h}{2}(B_2 + B_1) \qquad Q_2 = 500\, h^2 \times 3$$

$$P_3 = \frac{\delta' h}{2}(B_3 + B_2) \qquad Q_3 = 500\, h^2 \times \frac{5}{\cos\theta}$$

$$P_4 = \frac{\delta' h}{2}(B_4 + B_3) \qquad Q_4 = 500\, h^2 \times \frac{7}{\cos\theta'}$$

Si tomamos el factor $500\, h^2$, común á los empujes, como base de reducción, ya se ve que siendo el milímetro la unidad de la escala, aquellos resultarían excesivamente pequeños al representarlos gráficamente.

Si en cambio tomamos, como base de reducción, el factor $\frac{\delta' h}{2}$ que multiplica como factor común á las expresiones de todos los pesos, veremos que los resultados son aceptables.

Para esto, fijemos por vía de ejemplo los valores de los datos necesarios, y sean

$$a = 5^m \qquad h = 12^m$$

$$B_1 = 7^m,17 \qquad y = 3^m,56$$

$$B_2 = 15^m,04 \qquad y' = 7^m,08$$

$$B_3 = 28^m,74 \qquad \frac{1}{\cos\theta} = 1,04333$$

$$B_4 = 47^m,81 \qquad \frac{1}{\cos\theta'} = 1,16083$$

Tendremos los siguientes resultados:

$$\frac{P_1}{c} = 12,17 \text{ mm.} \qquad \frac{Q_1}{c} = 5,45 \text{ mm.}$$

$$\frac{P_2}{c} = 22,21 \text{ mm.} \qquad \frac{Q_2}{c} = 16,36 \text{ mm.}$$

$$\frac{P_3}{c} = 43,78 \text{ mm.} \qquad \frac{Q_3}{c} = 28,45 \text{ mm.}$$

$$\frac{P_4}{c} = 76,55 \text{ mm.} \qquad \frac{Q_4}{c} = 44,32 \text{ mm.}$$

Estos números son, como vemos, proporcionales á las fuerzas correspondientes; por lo tanto, la representación gráfica de ellas se hará, lo mismo tomando el milímetro como unidad de longitud, que otra magnitud cnalquiera que se juzgara conveniente.

En el supuesto de que aquellos números representen milímetros, se ve que las fuerzas resultan de una magnitud muy apropiada para la comodidad en la construcción del dibujo.

Como el valor de $\frac{\delta' h}{2}$ resulta de 13200, nos dice esto que cada milímetro representará 13200 kilogramos, suponiendo que $\delta' = 2200$.

En este caso los errores relativos se hallan comprendidos entre los límites 4,58 % y 0,32 %.

202. El trazado de las curvas de presión, por el procedimiento gráfico de que nos hemos ocupado, constituye sin duda el medio más cómodo y expedito para comprobar en breve tiempo las condiciones de estabilidad de un perfil de presa trazado de antemano, y respecto del cual no se tuvieran otros datos que sus dimensiones y forma, altura del agua y naturaleza de la fábrica.

203. Forma del perfil y de la planta.—En el paramento interior, ó de aguas arriba, la parte superior que corresponde á las dos primeras zonas debe perfilarse según una recta vertical. El resto puede ofrecer indistintamente un perfil curvilíneo ó poligonal, cuyos lados no sean demasiado grandes para que por el aspecto parezca una superficie continua la que de tal suerte se obtenga. En ambos casos, el contorno que se acepte debe ceñirse lo posible al que haya resultado del estudio de la sección principal.

El paramento exterior, ó de aguas abajo, debe asimismo perfilarse mediante una recta vertical en la parte que corresponde á la primera zona, y el resto, de la manera que hemos indicado para el paramento opuesto; pero debiendo advertir que para colocar los mampuestos ó los sillares en mejores condiciones de resistencia, sobre todo en la región curva ó poligonal del paramento exterior, conviene que resulten aparejados normalmente á la superficie del mismo, para evitar ángulos diedros agudos, por los cuales, las piedras pudieran despostillarse con más facilidad, bajo la influencia de la presión que soportan.

En cuanto á la forma de la planta, y para evitar los efectos de la flexión producida por el empuje del agua, tanto más temible cuanto más ancho fuera el valle, debe ser curva cuya convexidad corresponda al lado del embalse. Jamás debe ser recta en las presas algo importantes. Generalmente se adoptan arcos de círculo, cuyo radio varía entre 100 y 300 metros.

La forma poligonal que se observa en algunas presas antiguas debe desecharse.

204. Para el estudio de los detalles de construcción de este género de obras puede consultarse el notable Proyecto de los pantanos de Hijar, formulado por nuestro querido compañero D. Hermenegildo Gorria, y publicado el año 1880 en el tomo octavo de los *Anales de Obras Públicas.*

Para otras diversas cuestiones importantes que se relacionan con la influencia de las presas de embalse, sobre el régimen de las avenidas, cálculo de las dimensiones de los desagües, etc., puede consultarse la excelente obra *Traité d'Hidraulique*, de M. A. Graëff.

205. Finalmente; para tener una idea aproximada del perfil de una presa de embalse y poder averiguar, con la rapidez que exigen los anteproyectos, el volumen de la fábrica que probablemente habrá de necesitarse, y como consecuencia el coste aproximado de la obra, conviene utilizar el perfil que propone con tal objeto el Ingeniero Sr. Boix en su ya citada obra *Estabilidad de las construcciones de mampostería*, y cuyo trazado es sencillísimo.

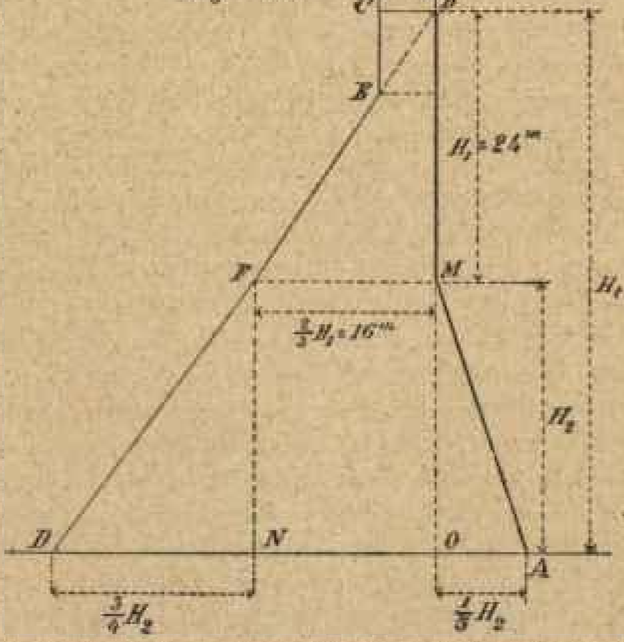
Por un punto O (figura 47) se trazan las rectas perpendiculares AOD y OB, fijando sobre la vertical OB la altura total H_t que ha de tener el muro.

Se fija el punto M á 24^m por debajo del punto B, y la recta vertical BM representará el paramento interior correspondiente á las zonas 1.ª y 2.ª

Por M se traza la horizontal MF, igual á los $\frac{2}{3}$ de $H_1 = BM$, es decir, de 16^m, y se une al punto B con el F. Trazando BC perpendicular á OB, y de una magnitud igual al ancho a de coronación, se tira por C la vertical CE hasta su encuentro en E con BF. La recta CE representará el paramento exterior de la primera zona rectangular y la EF el de la segunda zona, ó zona intermedia.

Por último, si á la izquierda del punto N, una vez trazada FN paralela á OB, se toma una magnitud ND $= \frac{3}{4}$ H_2 y á la dere-

Fig. 47.



cha de O la distancia OA igual á $\frac{1}{3}$ de H_2, los puntos D y A unidos respectivamente con F el primero y con M el segundo por las rectas DF y AM, completarán el perfil aproximado y representarán los paramentos de la zona inferior del muro.

BÓVEDAS

206. Preliminares. — Todo macizo de fábrica, de tal modo dispuesto que pueda sostenerse por sí mismo y tenga por objeto cubrir ó salvar un espacio cualquiera, recibe el nombre de *bóveda*.

La superficie que la limita al exterior, se llama *trasdos,* y la que la limita al interior, *intrados*.

Si esta última es un cilindro, la bóveda se llama entonces *cilíndrica* ó de *cañón recto,* y los planos verticales que limitan la obra reciben el nombre de *planos de cabeza*. Estas bóvedas son las que más nos interesan, y las únicas de que hemos de ocuparnos.

Cualquiera que sea el material con que se construyan las bóvedas (excepto el caso de que fuera el hormigón, pues entonces resultaría un verdadero monolito) aquellas se descomponen siempre en porciones llamadas *dovelas,* cuyos planos de junta se disponen normalmente al intrados, al que cortan según sus generatrices; recibiendo el nombre de *clave* la dovela que ocupa el punto medio y el sitio más alto, cuando la bóveda es simétrica y sus extremos ó arranques están de nivel.

Las dovelas extremas se llaman *salmeres* y se apoyan directamente sobre sólidos macizos, que reciben el nombre de *estribos* cuando la bóveda es única, y el de *pilas* cuando el macizo constituye un apoyo común á dos bóvedas contiguas.

Las superficies planas de contacto entre la bóveda y los macizos de apoyo, se denominan *juntas de arranque.*

Si una bóveda se corta por un plano vertical, paralelo á los planos de cabeza, las curvas de intersección con las superficies exterior é interior que limitan aquella, se denominan simplemente *trasdos* é *intrados;* llamándose *arranques* á los puntos en que el intrados corta á los estribos, y *línea de arranques* la recta que los une.

Finalmente, llámase *luz* de la bóveda á la distancia horizontal entre los arranques, y *flecha* á la distancia vertical entre el punto más alto del intrados y la línea de arranques, cuando esta es horizontal.

Sobre las bóvedas suele existir una sobrecarga permanente, generalmente de tierra, que termina á cierta altura en un plano horizontal. Para considerar macizos homogéneos, supondremos que aquella está constituída por otra equivalente de la misma naturaleza que la bóveda, y la denominaremos *sobrecarga reducida* á su equivalente de fábrica.

207. Las bóvedas de cañón recto reciben diferentes nombres, según la relación entre la flecha y la luz, y la naturaleza del intrados.

Si este es una semicircunferencia, las bóvedas se llaman *de medio punto.*

Si la flecha es menor que la mitad de la luz, se llaman *rebajadas,* las cuales se dividen en *escarzanas,* si el intrados es un arco de círculo menor que 180°; *carpaneles,* ó de varios centros, cuando aquel está formado por varios arcos de círculo tangentes entre sí, y *elípticas,* si el intrados es una semielipse.

Por el contrario, cuando la flecha es mayor que la mitad de la luz, se llaman *peraltadas,* y se dividen á su vez en *ojivales,* si el intrados está compuesto de dos arcos de círculo, cuyos centros se hallan en la línea de arranques, *elípticas* si está constituído por una semielipse, siendo la luz el eje menor, y *moriscas,* cuando aquel es un arco de círculo mayor que media circunferencia.

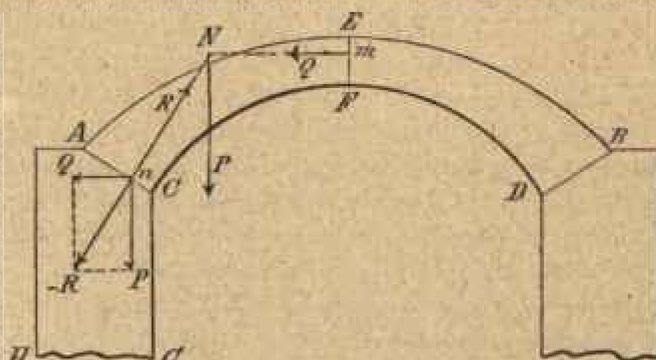
En las bóvedas de poca luz, el trasdos es generalmente paralelo al intrados. En las de más importancia, el trasdos no suele ser paralelo al intrados, para que el espesor de la bóveda vaya creciendo de la clave á los arranques, á medida que las presiones aumentan progresivamente, como acontece, de la primera región á la segunda.

Por último, si el intrados es una recta horizontal, entonces la bóveda se llama *adintelada,* y si la línea de arranques es oblicua, recibe el nombre de *bóveda por tranquil,* siendo el intrados una curva generalmente de dos centros, compuesta de dos arcos de círculo tangentes entre sí.

TEORÍA DE LAS BÓVEDAS.

208. Consideraciones generales.—Sea ABCD (figura 48) la proyección vertical de una bóveda simétrica de cañón seguido, sin sobrecarga alguna, dividida en dovelas reales (no

Fig. 48.



indicadas en la figura), y las cuales están en equilibrio por simple yuxtaposición, sin atribuir, por lo tanto, influencia alguna al mortero que une sus lechos contiguos; y consideremos, como siempre, una zona de obra de longitud igual á la unidad (sea esta 1 metro).

Es evidente que si suprimiéramos la semibóveda de la derecha, provocaríamos la caída de la otra mitad, lo que prueba que ambas se mantienen en equilibrio por el mutuo apoyo que se prestan.

Las acciones recíprocas que las dos semibóvedas ejercen entre sí, y las cuales se desarrollan en el plano EF (aunque esta junta no tenga existencia real) originan dos fuerzas iguales y contrarias, perpendiculares á dicho plano y aplicadas á un cierto punto *m*. Cualquiera de dichas fuerzas no es otra cosa que la resultante de las acciones que una de las semibóvedas ejerce contra la otra; recibe el nombre de *empuje horizontal* ó *empuje en la clave*, y la designaremos con la letra Q.

Por lo tanto, si al suprimir la mitad de la derecha, aplicáramos en el punto *m* una fuerza perpendicular al plano EF, igual en magnitud al empuje horizontal, la otra mitad AEFC subsistiría en equilibrio, exactamente en las mismas condiciones que cuando se consideraba la bóveda completa.

Podemos también imaginar que suprimimos el estribo ACGH, con tal de introducir ó aplicar en el punto *n* una fuerza R, igual en dirección, sentido y magnitud á la resultante de las reacciones desarrolladas por dicho estribo contra la bóveda, en el plano ó junta de arranques AC.

209. De tal suerte, la semibóveda AEFC, que consideramos, estará en equilibrio bajo la acción de las tres resultantes únicas que la solicitan, á saber:

Q empuje horizontal ó empuje en la clave;
R reacción del estribo;
P peso de todas las dovelas que constituyen la semibóveda.

El equilibrio entre estas tres fuerzas exige que su polígono (que será un triángulo) sea cerrado, y que sus líneas de acción se corten en un punto, tal como N (figura 48).

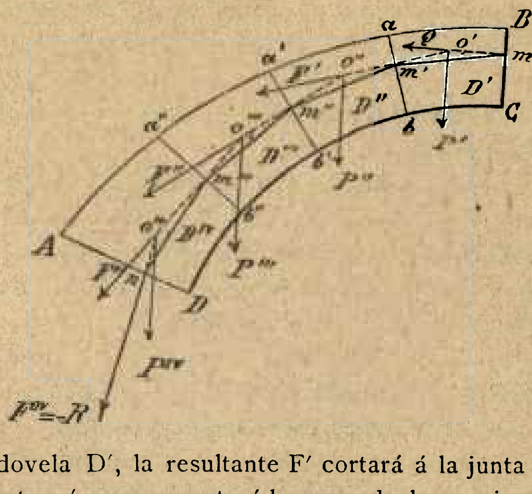
Sea *abc* el triángulo de dichas fuerzas P, Q y R (figura 49). Como se trata de tres fuerzas concurrentes en equilibrio, cualquiera de ellas será, como sabemos, igual y contraria á la resultante de las otras dos. Por consiguiente la reacción en los arranques será igual y contraria á la resultante del empuje horizontal y del peso de la semibóveda; lo que equivale á decir que al estribo se transmiten íntegras estas dos fuerzas, contribuyendo el peso P á aumentar su estabilidad, mientras que el empuje Q, por el contrario, contribuye á disminuirla; puesto que si su intensidad fuera suficiente determinaría la rotación del estribo, alrededor de la arista exterior de una de sus juntas horizontales.

Fig. 49.

210. Polígono de presiones y polígono de centros de presión. —Supongamos que se conoce el empuje horizontal Q y su punto de aplicación *m*, así como los pesos P′, P″, etc., y centros de gravedad de las distintas dovelas que forman la semibóveda (figura 50).

Si componemos el empuje horizontal Q con el peso P′ de la

Fig. 50



primera dovela D′, la resultante F′ cortará á la junta *ab* en un cierto punto *m*′, y representará la suma de las acciones que se desarrollan en dicha junta. Componiendo esta resultante F′ con el peso P″ de la dovela siguiente D″, tendremos la resultante F″ de las acciones que se desarrollan en la junta $a'b'$, siendo m'' su punto de aplicación.

Del mismo modo se obtendrán las resultantes F‴ y $F^{IV} = -R$, así como sus respectivos puntos de aplicación m''' y n.

El polígono $m\, o'\, o''\, o'''\, o^{IV}\, n$, cuyos lados coinciden con las líneas de accion de las resultantes que obran en cada una de las juntas, recibe el nombre de *polígono de presiones*.

El polígono $m\, m' m'' m''' n$, cuyos vértices coinciden con los centros de presión de cada junta, se llama *polígono de centros de presión.*

No hay para qué decir que si las dovelas ideales en que supusiéramos descompuesta la semibóveda, fueran infinitamente estrechas, tales polígonos se convertirían en curvas; pero con la circunstancia de que por ello no cambiarían de posición los centros de presión m', m'', etc., determinados, como se ha dicho, en el reducido número de juntas que generalmente suelen considerarse al estudiar una bóveda cualquiera.

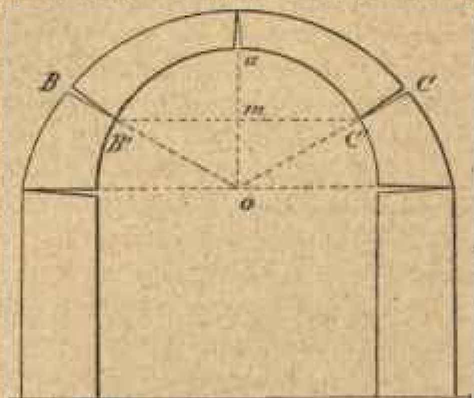
Si además de la semibóveda estuviera dibujado el estribo, se continuaría la construcción de ambos polígonos hasta la base de aquel, del mismo modo que hemos explicado; es decir, dividiendo el macizo en diversas fajas por planos horizontales y componiendo cada resultante parcial con el peso de la faja respectiva.

211. Manera de romperse las bóvedas de cañón recto.—La observación y la experiencia demuestran que las bóvedas cilíndricas se rompen del siguiente modo.

Bóvedas de medio punto.—Como indica la figura 51, estas bóvedas se abren en la clave y en los arranques por el intrados, y en los riñones por el trasdos, según una generatriz situada á la mitad de la altura que hay entre la clave y los arranques. Los estribos, si no tienen el espesor necesario, giran alrededor de la arista exterior de su base, bajo la influencia preponderante del empuje horizontal.

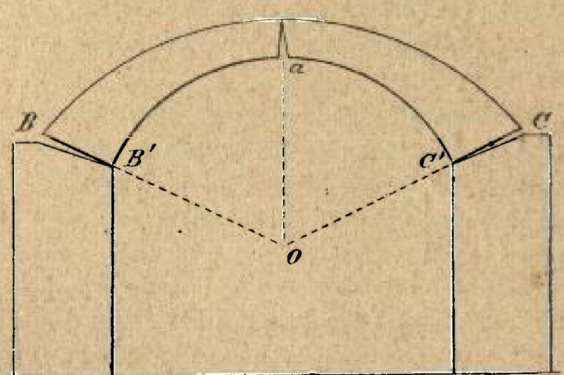
Bóvedas carpaneles y elípticas.—Se rompen del mismo modo que las de medio punto.

Fig. 51.



Bóvedas escarzanas.— Se verifica la fractura, abriéndose la clave por el intrados y los arranques por el trasdos, como manifiesta la figura 52.

Fig. 52.

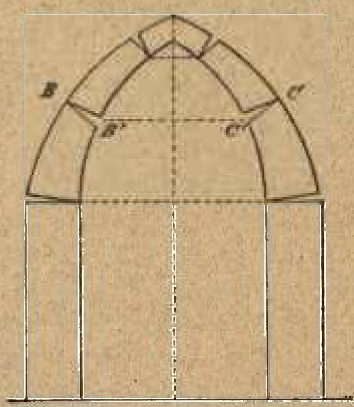


Bóvedas ojivales.—Estas bóvedas se rompen de la manera indicada en la figura 53, abriéndose por el trasdos en la clave y en los arranques y por el intrados en los riñones.

212. Los planos BB′, CC′, que corresponden á la región media de las bóvedas, excepto en las escarzanas, que suelen coincidir con los arranques, y en cuyos planos se verifica la separación de los materiales cuando aquellas se rompen, reciben el nombre de *juntas de fractura*, y en ellas es donde las compresiones y extensiones unitarias alcanzan su valor máximo, indicando además las regiones en que la curva de presiones se acerca más al intrados ó al trasdos.

Así, por ejemplo, podemos afirmar en general que, tratándose de bóvedas estables de medio punto, aquella curva pasará más cerca del intrados que del trasdos en las juntas de fractura, y, por el contrario. más cerca del trasdos que del intrados en la clave y en la junta de arranques. En las escarzanas se acerca en la clave al trasdos y en los arranques al intrados, porque en ellos suele estar la junta de fractura. Por último, en las ojivales sucede lo contrario que en las de medio punto, es decir, que la curva de presiones se acerca en la clave al intrados, en los riñones al trasdos y en los arranques al intrados.

Fig. 53.



213. Situación de la junta de fractura.—De ordinario se aplican las siguientes reglas prácticas para determinar la junta de fractura.

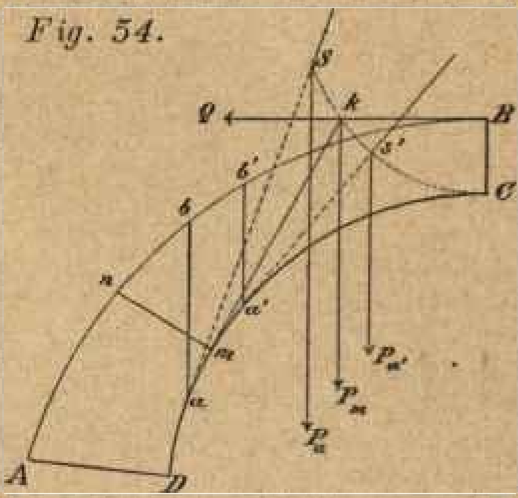
Bóvedas de medio punto carpaneles y elípticas.—Por el punto medio *m* de la flecha (figura 51) se traza una horizontal hasta que corte el intrados en los puntos B′ y C′, los cuales determinan las juntas de fractura.

Los ángulos *a*OB′ y *a*OC′ resultan de 60°.

Bóvedas escarzanas.—Si el ángulo en el centro, B′OC′ (figura 52) es igual ó menor que 120°, la junta de fractura coincidirá con los arranques. Si aquel ángulo fuese mayor que 120°, se completará el arco de intrados, como si se tratase de una bóveda de medio punto, procediendo como se ha dicho al principio; lo que equivale á decir que las juntas de fractura en este caso formarán con la vertical un ángulo de 60°.

214. Puede también determinarse la junta de fractura siguiendo el método propuesto por MM. Lamé y Clapeyron, que se reduce á lo siguiente.

Fig. 54.



Se trazan diversas juntas verticales entre las que comprendan la junta de fractura, tales como *ab*, *a′b′*, etc. (figura 54). Se determinan los centros de gravedad de las superficies *ab*BC, *a′b′*BC, y tantas otras análogas como juntas verticales se hayan trazado; y por dichos centros se tiran las verticales P_a, $P_{a'}$,.... Por los pnntos a, a',.... se trazan las tangentes al intrados, as, $a's'$,..... hasta que corten á las verticales respectivas P_a, $P_{a'}$,.... en los puntos s, s',..... los cuales, unidos por una línea continua, darán la curva $cs's$.

Si por el punto B, extremo superior de la clave, se traza la recta BQ, perpendicular á BC, que representa la línea de acción del empuje, en la situación extrema que puede tener al iniciarse la fractura de la bóveda, cuya recta cortará á la curva referida en el punto k, y por este punto se traza, por último, la tangente km al intrados; el punto de contacto m determina, con la necesaria exactitud para la práctica, la junta de fractura, que será por tanto la mn.

Que el punto m, así determinado, corresponderá á la junta de fractura, se comprende fácilmente considerando que, por ser tangente al intrados en dicha junta el polígono de presiones cuando se inicia la rotura; la tangente al intrados trazada por la arista interior de dicha junta, la vertical del centro de gravedad de la porción de bóveda comprendida entre la clave y la junta de fractura y la recta BQ, que como hemos dicho representa la línea de acción del empuje en la clave, se cortarán en un mismo punto, que será precisamente el k, único que ofrece esta propiedad.

El considerar juntas verticales para la aplicación de este procedimiento no conduce á errores inadmisibles, y en cambio, presenta la ventaja de facilitar la determinación gráfica de los centros de gravedad de las diversas superficies que hay que tener en cuenta.

215. Condiciones de estabilidad y resistencia. — Como en todo macizo de fábrica, son tres, á saber:

1.ª Imposibilidad de la rotación de la obra alrededor de las aristas (exterior ó interior) de cualquiera de las juntas, tanto de la semibóveda como del estribo.

2.ª Imposibilidad del resbalamiento á lo largo de los planos de junta.

3.ª Que la presión máxima, en cualquier junta, no exceda del límite que se señale como coeficiente de seguridad ó coeficiente de trabajo del material empleado, para garantizar su resistencia á la rotura por aplastamiento.

Para poner de manifiesto si tales condiciones quedan satisfechas, nada más claro que construir el polígono de presiones, por el cual se formará cabal juicio de la estabilidad y resistencia de la bóveda y sus estribos, procediendo como oportunamente establecimos al ocuparnos de las presas de embalse.

Para construir cualquiera de los polígonos expresados, pues el uno es consecuencia inmediata del otro, es necesario conocer:

1.º El perfil de la semibóveda y estribo correspondiente, así como la naturaleza de los materiales que han de emplearse.

2.º El empuje horizontal ó empuje en la clave.

3.º El punto de aplicación de este empuje.

Como la dirección del empuje Q es conocida, cuando la bóveda es simétrica y está simétricamente cargada, por ser perpendicular al plano de la junta que separa las dos semibóvedas, y también se conoce el peso P y su punto de aplicación (centro de gravedad de la semibóveda), la construcción del polígono de presiones será posible, cuando además del perfil de aquella, se logre determinar dos puntos de dicho polígono; por ejemplo, los de aplicación del empuje y de la reacción del estribo en la junta de arranques; porque de tal suerte, conociendo, como se conocen, la magnitud de P y las direcciones de Q y R, la construcción del triángulo de estas fuerzas será fácil y nos dará inmediatamente las magnitudes del empuje en la clave y de la reacción en el estribo.

216. Dimensiones principales.—Respecto de la forma y dimensiones del perfil del conjunto constituído por la semibóveda y el estribo correspondiente, procede hacer notar que la luz, la flecha, forma del intrados y altura del estribo, son datos impuestos de ordinario por las circunstancias de cada caso, quedando como incógnitas del problema:

a) Espesor de la bóveda en la clave.

b) Espesor en los riñones y en los arranques, y por consecuencia, forma del trasdos.

c) Espesor del estribo en los arranques y en su base.

Pero como la forma del trasdos, cuando no es paralelo al intrados, depende, como veremos, del espesor en la clave, resulta que las incógnitas principales son dos:

1.ª Espesor en la clave.

2.ª Espesor de los estribos.

Para determinar estas dos dimensiones fundamentales, sobre todo la primera, no podemos apoyarnos en ninguna teoría que satisfaga las necesidades de la práctica, siendo, por lo tanto, necesario recurrir al empleo de fórmulas empíricas que para muy diversas circunstancias han deducido notables ingenieros, á virtud de su propia experiencia y del estudio hecho de las bóvedas que mejor han resistido á la acción destructora del tiempo.

217. Fórmulas empíricas del espesor en la clave.— Admitamos la siguiente notación, tomando el metro por unidad.

$L = 2l$ luz de la bóveda;

r radio de curvatura del intrados en la clave;

f flecha;

e espesor de la bóveda en la clave, medido normalmente al intrados;

e' ídem íd., en la junta de fractura;

e'' ídem íd., en los arranques;

c espesor de los estribos, á nivel de los arranques de la bóveda;

c' ídem íd., en su base;

h altura de la sobrecarga de tierra que gravita sobre el trasdos en la clave;

h' altura del estribo desde su base hasta el arranque de la bóveda;

H altura total de la obra desde el plano superior de la sobrecarga hasta la base del estribo. Será $H = h + e + f + h'$.

218. Bóvedas de medio punto.—En estas bóvedas tenemos $r = l = \frac{1}{2}$ L, y en el caso de no existir sobrecarga, las fórmulas más usuales son las siguientes:

Autores.		Fórmulas.
Perronet		$e = 0{,}325 + 0{,}035$ L
Gauthey	L < 16	$e = 0{,}33 + 0{,}021$ L
	L > 16 < 32	$e = 0{,}042$ L
	L > 32	$e = 0{,}67 + 0{,}021$ L
Léveillé		$e = 0{,}33 + 0{,}033$ L
Lesguillier		$e = 0{,}10 + 0{,}20 \sqrt{L}$
Dejardin		$e = 0{,}30 + 0{,}05$ L
Dupuit		$e = 0{,}20 \sqrt{L}$
Ingenieros rusos y alemanes		$e = 0{,}43 + 0{,}05$ L
Edmond Roy		$e = 0{,}30 + 0{,}04$ L
Michon		$e = 0{,}40 + 0{,}04$ L
Croizette-Desnoyers	Para puentes de carretera	$e = 0{,}15 + 0{,}15 \sqrt{L}$
	Para íd. de vía férrea	$e = 0{,}20 + 0{,}17 \sqrt{L}$

Si hubiera sobrecarga de tierra de altura *h* sobre el trasdos en la clave, á las fórmulas que preceden se añadirá el término adicional 0,02 *h*.

Si la sobrecarga no fuera de tierra se calculará su altura equivalente reducida á tierra, y tendremos el valor que debe atribuirse á *h*.

219. Ejemplo.—Supongamos de $0^m{,}60$ la sobrecarga de piedra que hubiera de gravitar sobre el trasdos en la clave; que el peso del metro cúbico de este material sea de 2000 kilogramos, y que el de igual volumen de tierra sea 1600 kilogramos.

Como las alturas de dos prismas, de igual base y del mismo peso, son inversamente proporcionales á sus densidades, tendremos la siguiente proporción:

$$\frac{h}{0,60} = \frac{2000}{1600},$$

de donde

$$h = \frac{0,6 \times 20}{16} = 0^{m},75.$$

220. Bóvedas escarzanas.

Autores.		Fórmulas.
Léveillé		$e = 0,33 + 0,033\ L$
Lesguillier		$e = 0,10 + 0,20\sqrt{L}$
Dejardin	Rebajadas al $\frac{1}{3}$, $\left(f = \frac{1}{3} L\right)$	$e = 0,30 + 0,07\ r$
	— al $\frac{1}{6}$, $\left(f = \frac{1}{6} L\right)$	$e = 0,30 + 0,05\ r$
	— al $\frac{1}{8}$, $\left(f = \frac{1}{8} L\right)$	$e = 0,30 + 0,035\ r$
	— al $\frac{1}{10}$, $\left(f = \frac{1}{10} L\right)$	$e = 0,30 + 0,02\ r$
Ingenieros rusos y alemanes		$e = 0,43 + 0,10\ r$
Dupuit		$e = 0,15\sqrt{L}$
Michon	Cuando $\frac{f}{L} \geqq \frac{1}{3}$	$e = 0,40 + 0,08\ r$
	Cuando $\frac{f}{L} < \frac{1}{3}$	$e = 0,40 + 0,04\ r$

Autores.		Fórmulas.
Croizette-Desnoyers....	Para puentes de carretera.	Rebajadas al $\frac{1}{4}$ ... $e=0{,}15+0{,}15\sqrt{2r}$
		— al $\frac{1}{6}$ ... $e=0{,}15+0{,}14\sqrt{2r}$
		— al $\frac{1}{8}$ ... $e=0{,}15+0{,}13\sqrt{2r}$
		— al $\frac{1}{10}$ ... $e=0{,}15+0{,}12\sqrt{2r}$
		— al $\frac{1}{12}$ ... $e=0{,}15+0{,}11\sqrt{2r}$
	Para puentes de vía férrea.	Rebajadas al $\frac{1}{4}$ ... $e=0{,}20+0{,}17\sqrt{2r}$
		— al $\frac{1}{6}$ ... $e=0{,}20+0{,}16\sqrt{2r}$
		— al $\frac{1}{8}$ ... $e=0{,}20+0{,}15\sqrt{2r}$
		— al $\frac{1}{10}$ ... $e=0{,}20+0{,}14\sqrt{2r}$
		— al $\frac{1}{12}$ ... $e=0{,}20+0{,}13\sqrt{2r}$

Lo mismo que para las bóvedas de medio punto, cuando haya sobrecarga, se añadirán á las fórmulas establecidas el término adicional 0,02 h.

221. Bóvedas elípticas.

Ingenieros rusos y alemanes.......		$e = 0{,}43 + 0{,}10\,r$
Dupuit..........................		$e = 0{,}20\sqrt{L}$
Croizette-Desnoyers....	Para puentes de carretera..........	$e = 0{,}15 + 0{,}15\sqrt{2r}$
	Para puentes de vía férrea..........	$e = 0{,}20 + 0{,}17\sqrt{2r}$
Dejardin........................		$e = 0{,}30 + 0{,}07\,r$
Edmond Roy....................		$e = 0{,}30 + 0{,}05\,r$

Se añadirá al espesor calculado por las fórmulas anteriores, el término adicional $0{,}02h$, cuando haya sobrecarga.

222. Bóvedas carpaneles.

Autores.	Fórmulas.
Saint-Guilhem.....................	$e = 0{,}30 + 0{,}07\,r$
Si hubiera sobrecarga el espesor sería	$e = 0{,}30 + 0{,}07\,r + 0{,}02h$

223. Bóvedas ojivales.—Ojiva equilátera.

Edmond Roy.....................	$e = 0{,}30 + 0{,}04\,r$
Dejardin........................	$e = 0{,}30 + 0{,}05\,r$

Se aumentará el espesor en la cantidad $0{,}02\,h$, cuando haya sobrecarga.

224. Bóvedas peraltadas, ojivales ó elípticas.

Croizette-Desnoyers............... $e = 0{,}15 + 0{,}20\,\dfrac{L}{2\sqrt{f}}$

Como anteriormente, al espesor se añadirá el término $0{,}02h$, cuando haya sobrecarga.

225. Bóvedas oblícuas.

Resal.......................... $e_1 = \dfrac{e}{\sqrt{\operatorname{sen} \alpha}}$

En esta fórmula representan:

e_1 espesor en la clave de la bóveda oblícua.

e espesor en íd. de la bóveda recta, cuyo perfil de intrados sea igual al del plano oblícuo de cabeza de la bóveda oblícua.

α ángulo agudo que forma el plano de cabeza con el eje de la bóveda, y da la medida de su oblicuidad.

226. Para toda clase de bóvedas.

Fórmula de Planat......... $e = 0{,}333 + \left(0{,}023 + 0{,}10 \times \frac{f}{L}\right) r.$

Idem del ingeniero español

E. Boix................ $e = \frac{1}{3} \sqrt[3]{L}.$

227. Bóvedas de edificios.—Para esta clase de bóvedas, Rondelet establece las siguientes reglas.

Cuando la bóveda haya de quedar trasdosada á nivel, ó presente aumento de espesor hacia los riñones, se dará á la clave un espesor igual á la cincuentava parte de la luz.... $e = \frac{1}{50} L.$

Si la bóveda ha de ser de espesor uniforme, entonces el espesor se calculará por la fórmula...... $e = \frac{1}{36} L.$

228. Fórmulas de M. Michon.

	Bóvedas de medio punto, carpaneles ó escarzanas de ángulo en el centro mayor que 120°.	Bóvedas escarzanas de ángulo en el centro menor que 120°.
Bóvedas de sótanos, almacenes y grandes edificios......	$e = 0{,}20 + 0{,}02$ L	$e = 0{,}20 + 0{,}01$ L
Bóvedas ligeras, que no soporten más que su propio peso.	$e = 0{,}10 + 0{,}01$ L	$e = 0{,}10 + 0{,}005$ L

229. Reglas de Wanderley.—Para las bóvedas de medio punto y carpaneles que no hayan de soportar más que un piso, se les dará de espesor *medio ladrillo*, en la clave, si la luz no excede de 4,50 metros. Para luces mayores que 4,50 metros, el espesor en la clave será de *un ladrillo*, aumentando aquel hacia los arranques, ó reforzando la bóveda con arcos torales ([a]).

El espesor que debe darse á los estribos de estas bóvedas, llamando L á la luz, será el siguiente:

Bóvedas ojivales........	de	$\frac{1}{6}$ L	á	$\frac{1}{7}$ L
» de medio punto..	»	$\frac{1}{5{,}5}$ L	á	$\frac{1}{6}$ L
» rebajadas al $\frac{1}{4}$.	»	$\frac{1}{4}$ L	á	$\frac{1}{5}$ L
» » al $\frac{1}{8}$.	»	$\frac{1}{3}$ L	á	$\frac{1}{3{,}3}$ L

Cuando los estribos hayan de tener una altura mayor que 5 metros, se aumentará su espesor en $\frac{1}{6}$ á $\frac{1}{8}$ de la altura.

Para las bóvedas rebajadas, se dará á la clave el siguiente espesor:

Hasta $L = 2^{m},50$	rebajadas	al $\frac{1}{8}$ á $\frac{1}{10}$	$e = \frac{1}{2}$ ladrillo.
» $L = 3^{m}$	»	al $\frac{1}{6}$ á $\frac{1}{8}$	$e = \frac{1}{2}$ ladrillo, pero empleando arcos torales.
» $L = 4^{m}$	»	al $\frac{1}{6}$ ...	$e = \frac{1}{2}$ ladrillo. $e' = 1$ ladrillo.
» $L > 4^{m}$	»	....	$e = 1$ ladrillo. $e' = 1$ y $\frac{1}{2}$ ladrillos.

230. Espesor en los arranques y en la junta de fractura.— Siendo e el espesor en la clave, y llamando e' al espesor en las juntas de fractura, se hará en las bóvedas de

Medio punto................................ $e' = 2e$

(a) Así llamados los arcos que de trecho en trecho dividen y refuerzan una bóveda en cañón.

y en las

$$\text{Carpaneles y elípticas} \ldots \left\{ \begin{array}{lll} \text{rebajadas al } \frac{1}{3} & \ldots & e' = 1{,}80\, e \\ \text{» al } \frac{1}{4} & \ldots & e' = 1{,}60\, e \\ \text{» al } \frac{1}{5} & \ldots & e' = 1{,}40\, e \end{array} \right.$$

El espesor e'' en los arranques de las bóvedas escarzanas, debe ser, según Croizette-Desnoyers, el siguiente:

$$\begin{array}{llll} \text{Bóvedas rebajadas al} & \frac{1}{4} & \ldots & e'' = 1{,}80\, e \\ \text{» » al} & \frac{1}{6} & \ldots & e'' = 1{,}40\, e \\ \text{» » al} & \frac{1}{8} & \ldots & e'' = 1{,}25\, e \\ \text{» » al} & \frac{1}{10} & \ldots & e'' = 1{,}15\, e \\ \text{» » al} & \frac{1}{12} & \ldots & e'' = 1{,}10\, e \end{array}$$

231. Espesor de los estribos.—Las fórmulas empíricas más usuales, por las que se determina el espesor de los estribos, son las siguientes.

232. Fórmulas de M. Léveillé.— Estribos de espesor c uniforme, es decir de perfil rectangular.

Bóvedas de medio punto. $c = (0{,}30 + 0{,}162\,\mathrm{L}) \sqrt{\dfrac{h' + 0{,}25\,\mathrm{L}}{\mathrm{H}} \times \dfrac{0{,}865\,\mathrm{L}}{0{,}25\,\mathrm{L} + e}}$

Escarzanas.. . $c = (0{,}33 + 0{,}212\,\mathrm{L}) \sqrt{\dfrac{\mathrm{L}h'}{\mathrm{H}(f + e)}}$

Elípticas y carpaneles.. $c = (0{,}43 + 0{,}153\,\mathrm{L}) \sqrt{\dfrac{h' + 0{,}54\,f}{\mathrm{H}} \times \dfrac{0{,}84\,\mathrm{L}}{0{,}465\,f + e}}$

233. Fórmulas de M. Lesguillier.— Estribo de espesor uniforme.

Bóvedas de medio punto.........	$c = \sqrt{L}\,(0{,}60 + 0{,}04\,h')$
Bóvedas escarzanas...........	$c = \sqrt{L}\left[0{,}60 + 0{,}10\left(\frac{L}{f} - 2\right) + 0{,}04\,h'\right]$
Carpaneles y elípticas.......	$c = \sqrt{L}\left[0{,}60 + 0{,}05\left(\frac{L}{f} - 2\right) + 0{,}04\,h'\right]$

234. Fórmulas empleadas por los ingenieros rusos y alemanes.

Bóvedas de medio punto.........	$c = 0{,}305 + 0{,}209\ L + 0{,}166\,h' + 0{,}083\ h$
Escarzanas y elípticas	$c = 0{,}305 + \frac{3\,L - f}{L + f} + 0{,}166\,h' + 0{,}083\ h$

235. Fórmulas de Edmond Roy.— Estribo de espesor c en la base y espesor c en los arranques de la bóveda.—Límite superior de la altura del estribo, $h' = 2$ L

Para bóvedas de medio punto, escarzanas, carpaneles y elípticas.	$c = 0{,}20 + 0{,}30\,(r + 2e)$ $c' = c + 0{,}2\,h'$
Ojivas equiláteras	$c = 0{,}20 + 0{,}30\,(0{,}5\,r + 2e)$ $c' = c + 0{,}2\,h'$

Si los estribos hubieran de ser de espesor uniforme c_1, se hará

$$c_1 = c + 0{,}1\,h'$$

236. Observaciones á las fórmulas que preceden, relativas al espesor en la clave.— Todas ellas caben dentro de una de las siguientes formas generales.

$$e = a + b\,\mathrm{L} \qquad (1) \qquad\qquad e = a + br \qquad (3)$$

$$e = a + b\sqrt{\mathrm{L}} \qquad (2) \qquad\qquad e = a + b\sqrt{r} \qquad (4)$$

Las fórmulas cuya estructura es la (1) ó la (2), sólo tienen en cuenta la luz, prescindiendo de la influencia que naturalmente corresponde, en el valor del espesor, á la forma del intrados y á la magnitud de la flecha; de donde resulta que á igualdad de luz, el mismo espesor ha de darse á la clave, ya se trate de bóvedas de medio punto, ya de carpaneles, elípticas, escarzanas ó peraltadas, lo que evidentemente es poco racional.

Por tal motivo son preferibles las fórmulas cuya estructura es la indicada por las expresiones generales (3) y (4); puesto que dando á los coeficientes a y b valores convenientes, en armonía con la relación entre la flecha y la luz, se tienen en cuenta la mayor parte de los elementos que influyen en el valor que debe darse á dicho espesor, sobre todo añadiendo el término adicional $0{,}02h$, relativo á la importancia de la sobrecarga.

Las fórmulas de M. Croizette Desnoyers, cumplen con estas condiciones y no dan valores exagerados para e.

Todas ellas, lo mismo las de este autor que las demás que quedan establecidas, suponen que la sobrecarga actúa sin solución de continuidad, sobre toda la superficie del trasdos. Por esta circunstancia, los resultados que con ellas se obtengan no deben considerarse como definitivos cuando la sobrecarga se halle concentrada en regiones ó puntos determinados.

Cualquiera que sea el caso de que se trate y cualesquiera que sean las fórmulas que se hubieren empleado para determinar el espesor en la clave, en los arranques y en el estribo, con lo que el perfil de la obra quedará enteramente definido, deberán siempre comprobarse las condiciones de estabilidad y resistencia del conjunto, que oportunamente hemos indicado, y de la manera que con los detalles necesarios veremos más adelante.

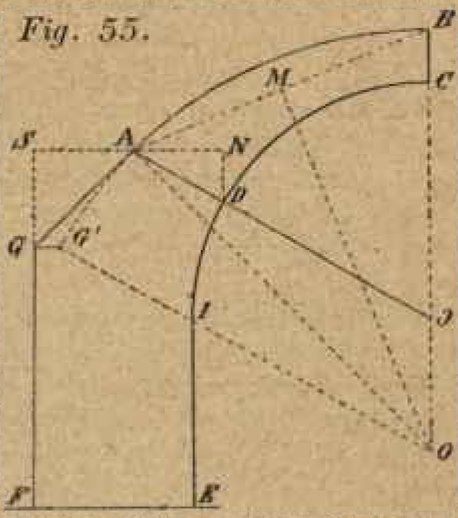
237. Forma del trasdos.—De ordinario, el trasdos es un arco de círculo para las bóvedas de medio punto y escarzanas, especialmente, y puede ser concéntrico con el intrados ó de mayor radio.

Sucede lo primero cuando las bóvedas se trasdosan paralelamente al intrados, por ser de poca luz y emplear el ladrillo en su construcción, y lo segundo cuando se trata de grandes luces y sobrecargas, empleándose la sillería ó el hormigón.

Si el espesor ha de ser creciente desde la clave hacia los arranques, el radio del trasdos suele determinarse por los siguientes medios.

1.º Dibujado el intrados CDI (figura 55), su centro O y el espesor BC en la clave, se traza el radio OD, correspondiente á la junta de fractura, y sobre su prolongación se toma la magnitud DA $= e'$, calculada por una de las fórmulas que dan el espesor en la expresada junta. Se traza la recta AB y por su punto medio M se levanta la perpendicular MO′ hasta que corte á la vertical del centro O del intrados.

Fig. 55.



El punto O′, de intersección, será el centro del arco de trasdos, cuyo radio será, por tanto, el O′A = O′B.

2.º Aplicando la regla de Rondelet (figura 55), se toma CO′ igual á vez y media el radio de intrados, lo que da inmediatamente el centro O′ del arco de trasdos. Esto equivale á decir que el radio R del trasdos, es igual al espesor de la clave más vez y media el radio r del intrados, ó lo que es igual, que

$$R = e + 1{,}5r.$$

3.º Por el punto D, arista en el intrados de la junta de fractura, se traza una vertical (figura 55), sobre la que se fija la magnitud DN, igual al espesor BC en la clave. Por el punto N se tira la horizontal NA hasta que corte á la prolongación del radio OD. El punto A de intersección corresponderá al arco de trasdos, cuyo radio se determinará como se dijo al tratar del primer procedimiento.

En las bóvedas carpaneles y elípticas, el trasdos suele ser también un arco de círculo, que se determina por uno de los medios 1.º y 3.º. Pueden hallarse, asimismo, diferentes puntos de la curva de trasdos, del mismo modo que se encontró el punto A, por el 3.º de los medios que hemos indicado.

238. Observación.—La parte de obra comprendida entre la junta de fractura y la de arranques suele considerarse como si formara parte integrante del estribo, porque los elementos que la forman pueden sostenerse por sí mismos, aun prescindiendo de la adherencia del mortero.

239. Forma de los estribos.—Los estribos suelen tener su paramento interior vertical. El exterior puede ser vertical, inclinado ó limitado por retallos, sobre todo cuando encima de él gravita un muro de más ó menos importancia, cuyo peso permite disminuir el espesor calculado por las fórmulas establecidas.

Su trazado, en todos los casos, no ofrece ninguna particularidad digna de notarse.

240. Manera de unir el trasdos de la bóveda con el estribo.—De diversos modos puede efectuarse esta unión.

1.º Por el punto A (figura 55) arista exterior de la junta de fractura, se traza la tangente al trasdos hasta que encuentre en G al perfil del paramento exterior del estribo, cualquiera que sea su forma.

2.º Se prolonga el arco de trasdos hasta que corte á la horizontal del arranque (que suponemos sea la GG′) quedando así reemplazada la tangente AG por la línea mixta AG′G; con lo que se podrá obtener una pequeña economía en el cubo de fábrica, representada por el triángulo AG′G, que no tiene importancia. Esta solución es poco recomendable, porque la bóveda resulta menos resistente que en el caso anterior.

3.º En las bóvedas carpaneles y elípticas puede unirse el trasdos con el estribo, trazando por A una recta AS con una inclinación de A á S de un 5 ó 6 por 100, hasta que corte al paramento exterior de aquel en el punto S.

241. División de la semibóveda en dovelas, y del estribo en fajas horizontales.—Determinado el perfil de la semibóveda y del estribo correspondiente, conforme á lo que, de una manera general, hemos indicado, es necesario, para comprobar las condiciones mecánicas del conjunto, dividirlo en el número de partes que sea conveniente; la semibóveda en varias dovelas y el estribo en diversas hiladas horizontales.

Aquellas partes no deben ser muchas, porque se dificultarían en extremo las construcciones gráficas de que más adelante hemos de ocuparnos; ni demasiado pocas, para evitar que los errores que se cometan alcancen valores inadmisibles.

El número de dovelas en que ha de dividirse la semibóveda debe subordinarse á dos condiciones.

1.ª Que una junta de las que se representen sea la de fractura.

2.ª Que el desplazamiento lateral del centro de gravedad de la dovela, cuando los arcos de esta se reemplazan por sus cuerdas, sea insignificante.

La división en dovelas puede hacerse de dos maneras. Por planos normales al intrados, como se verifica al ejecutar la obra, ó por medio de planos verticales.

Como antes de ahora hemos hecho notar, este segundo modo de división, aunque puramente hipotético, no sólo es aceptable en la práctica de los estudios que nos ocupan, sino que facilita mucho la determinación de los centros de gravedad de las diversas partes constituídas por cada dovela y la sobrecarga que le corresponde.

242. Representación y división de la sobrecarga. Teniendo en cuenta que cuando el macizo de tierra que descansa sobre el trasdos experimenta una dislocación sensible, esta se verifica por superficies de separación próximamente planas y verticales, admitiremos que sobre cada dovela gravita la sobrecarga limitada por los planos verticales que pasan por sus aristas extremas de trasdos. En su virtud, la sobrecarga la subdividiremos por los referidos planos, en tantos prismas verticales como dovelas haya, más el que directamente gravite sobre el estribo.

Para representar la sobrecarga, reducida á su equivalente de fábrica, procederemos como indicamos en otro lugar.

Llamando δ' al peso del metro cúbico de fábrica, δ al correspondiente de la sobrecarga (generalmente de tierra), h á la altura sobre el trasdos, en cualquiera de sus puntos, de la superficie que la limita, y h' á la de la sobrecarga reducida, tendremos

$$\frac{h'}{h} = \frac{\delta}{\delta'}$$

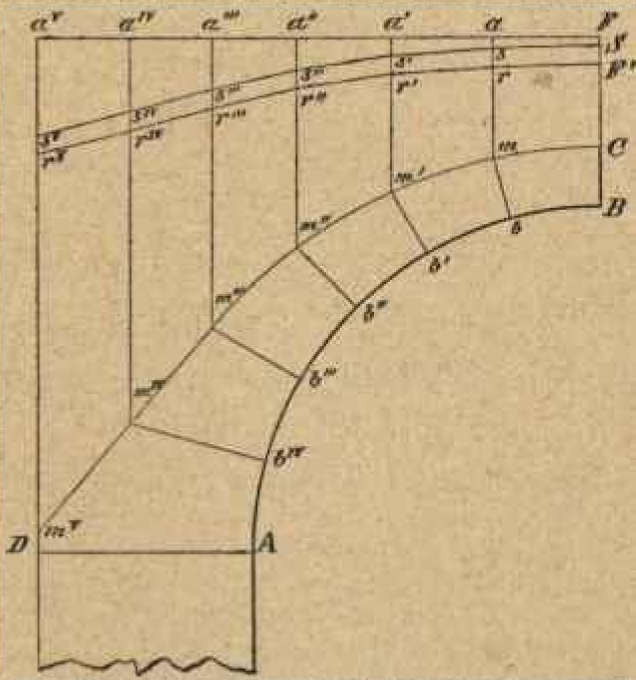
de donde

$$h' = \frac{\delta}{\delta'} h.$$

Si, para puntos suficientemente próximos del trasdos, calculáramos los respectivos valores de h', tomándolos, á contar de aquel, sobre la vertical correspondiente, obtendríamos una serie de puntos que, unidos por una línea continua, nos daría la representación de la superficie de la sobrecarga reducida.

En la práctica sólo es necesario reducir las alturas correspondientes á los puntos de división del trasdos, con lo que resultará (figura 56), la línea poligonal $F'r\, r'r''r'''r^{\text{IV}}r^{\text{V}}$, que representará con la suficiente exactitud la cara superior de la sobrecarga reducida á su equivalente de fábrica.

Fig. 56.



Se verificarán, por lo tanto, las siguientes igualdades:

$$\frac{mr}{ma}=\frac{m'r'}{m'a'}=\frac{m''r''}{m''a''}=\frac{m'''r'''}{m'''a'''}=\frac{m^{IV}r^{IV}}{m^{IV}a^{IV}}=\frac{m^{V}r^{V}}{m^{V}a^{V}}=\frac{\delta}{\delta'}$$

$$\text{superf. } CmrF' \times \delta' = \text{superf. } mCFa \times \delta$$

$$\text{superf. } m'mr'r \times \delta' = \text{superf. } mm'a'a \times \delta$$

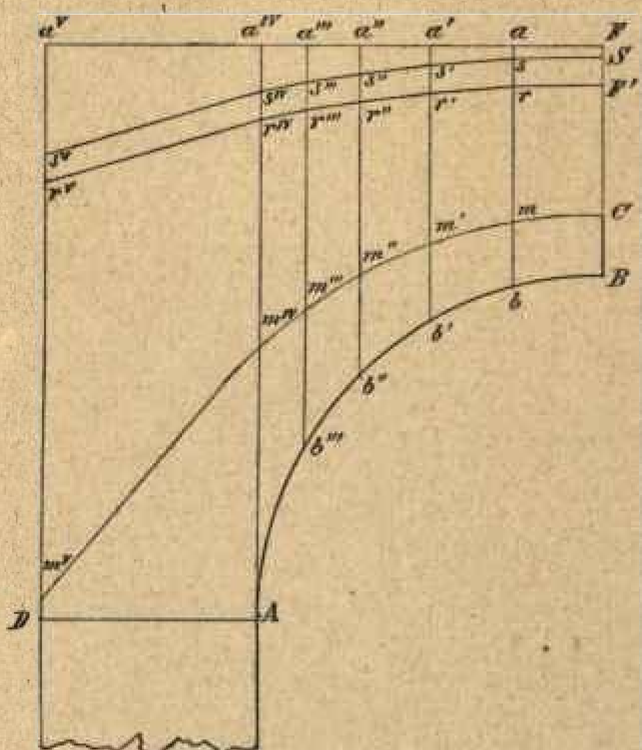
$$\text{superf. } m'm''r''r' \times \delta' = \text{superf. } m'm''a''a' \times \delta$$

etc.

La división por planos verticales se representa en la figura 57.

243. En muchos casos, las bóvedas tienen que soportar, además de la carga permanente constituída por los materiales que rellenan los tímpanos y terminan por encima de la clave á más ó menos altura para formar la superficie de tránsito, una carga accidental, que supondremos uniformemente repartida en

Fig. 57.



toda la extensión de la obra. Su representación no ofrece ninguna dificultad.

En efecto; supongamos que aquella fuera de p kilogramos por metro cuadrado de superficie horizontal. Llamemos h_1 á su altura representativa, supuesta reducida á su equivalente de fábrica y δ' al peso del metro cúbico de esta. Tendremos evidentemente:

$$p = \delta' h_1 \quad » \quad \text{de donde} \quad h_1 = \frac{p}{\delta'}.$$

Si tomamos, sobre los puntos F′, r, r'..... etc., (figuras 56 y 57), la magnitud constante $F'S = rs = r's' = ... = h_1$, obtendremos la línea poligonal $S\,s\,s's''.....s^v$ que representará con la necesaria exactitud la superficie superior que limita la sobrecarga accidental reducida á su equivalente de fábrica. Su peso total será el producto de multiplicar por δ' la superficie limitada de una parte, por las dos líneas poligonales representadas, y de otra por las verticales F′S y $r^v s^v$.

Aunque de ordinario, el peso de la carga accidental tiene poca importancia, comparado con el de la carga permanente, conviene siempre tenerlo en cuenta al comprobar las condiciones de estabilidad y resistencia de la obra.

244. Pesos de las dovelas y sobrecargas. — Cualquiera que sea el sistema de división que se adopte, el peso de cada dovela con la sobrecarga que le corresponde, se hallará, calculando primero las superficies BbsS, $b's'sb$..... etc., (figuras 56 y 57) y multiplicando los resultados por δ', peso del metro cúbico de fábrica; puesto que, como ya se ha dicho, consideraremos solamente una zona de bóveda de un metro de longitud.

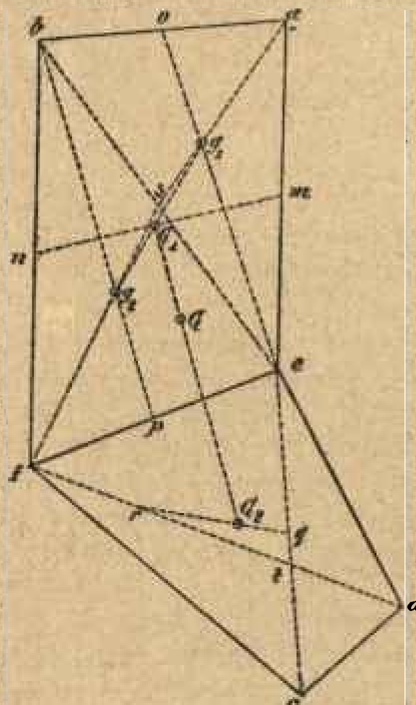
La medida de tales superficies puede hacerse por los procedimientos geométricos usuales ó por medio de los planimetros.

Del mismo modo se determinarán los pesos de las diversas hiladas en que se hubiera dividido el estribo.

245. Centros de gravedad. — Dividida la obra en diferentes partes, es necesario determinar el centro de gravedad de cada una de ellas; y como estas son prismas rectos de aristas horizontales, bastará hallar los centros de gravedad de las bases, que es lo que en el dibujo aparece representado.

Reemplacemos los arcos de intrados y de trasdos por sus cuerdas (figura 58) y sea *abcd* la proyección vertical de uno de aquellos prismas, el cual comprende una dovela representada por el cuadrilátero *fedc* y la sobrecarga correspondiente, que lo está por el trapecio *abfe*.

Fig. 58.



Si hallamos los centros de gravedad de estas dos figuras y dividimos la recta que los une en dos partes inversamente proporcionales á sus áreas, el punto de división será, como sabemos, el centro de gravedad buscado.

La cuestión, pues, queda reducida á determinar centros de gravedad de cuadriláteros y de trapecios, en el caso de dividir la bóveda en dovelas por juntas normales al intrados, ó solamente de trapecios, cuando la división se haga por juntas verticales.

246. Aunque la resolución de estos problemas no corresponde en rigor á este lugar, conviene, sin embargo, hacer sobre ellos algunas indicaciones.

Si las dimensiones del papel en que el dibujo se ejecuta consienten la prolongación de las bases del trapecio, para tomar sobre ellas y en sentido contrario la magnitud de la base opuesta, entonces puede seguirse el medio de investigación propio del trapecio, que se funda en que su centro de gravedad está dado por la intersección de la recta que une los puntos medios de los lados paralelos y de la que une los extremos de las prolongaciones de aquellos lados, en la medida á que antes hemos aludido.

Pero sucede en ocasiones que es necesario operar dentro de los límites de la figura. En tal caso puede procederse de diferentes modos.

Si una de las diagonales divide el trapecio en triángulos muy diferentes, entonces puede aplicarse la regla del cuadrilátero, que ahora recordaremos. Cuando aquellos, por el contrario, sean poco distintos, y esto suele acontecer, se puede proceder de la manera siguiente.

Se determinan (figura 58) los centros de gravedad g_1 y g_2 de los dos triángulos en que el trapecio queda descompuesto por una de sus diagonales, mediante la intersección de las medianas *pb*, *oe*, *sf* y *sa*. Se traza la recta $g_1\ g_2$ y la mediana *mn*. El punto de intersección G_1 de estas rectas será el centro de gravedad del trapecio.

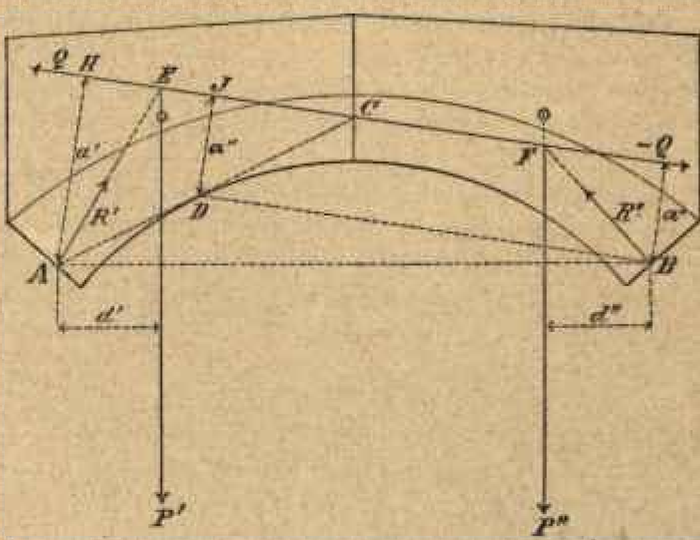
Si consideramos ahora el cuadrilátero *efcd*, y se verifica, como en la figura se observa, que la diagonal *e c*, lo divide en dos triángulos, de los cuales uno es bastante mayor que el otro, la manera más sencilla de operar es la siguiente, según se dijo en otro lugar.

Se dibujan las dos diagonales, y en una de ellas, por ejemplo en la *ec*, se fija su punto medio *q*. En la otra se toma la magnitud *fr* igual á *dt*, y se une al punto *r* con el *q*. El punto G_2, para el cual se verifica que $qG_2 = \frac{1}{3}\, qr$, será el centro de gravedad del cuadrilátero.

Finalmente, puede ocurrir que la magnitud *rq* resulte demasiado pequeña, siendo, por tanto, difícil fijar el punto G_2 al tercio de aquélla, á contar del extremo q. Entonces se determinarán los centros de gravedad de los triángulos, de la manera que se ha dicho, y la recta que los une se dividirá en partes inversamente proporcionales á las áreas de aquellos, operación que debe ejecutarse aparte.

247. Empuje en la clave.—Hemos dicho anteriormente que cuando la bóveda es simétrica con respecto á la vertical que

Fig. 59.



pasa por el punto medio del intrados y está simétricamente cargada, el empuje en la clave es horizontal. Vamos á demostrarlo, como también que la dirección particular de dicho empuje puede hallarse, conociendo los puntos de aplicación de las reacciones en la clave y en los arranques, cuando la bóveda no reune aquellas dos condiciones, ó cualquiera de ellas.

Consideremos una bóveda que las reuna, como indica la figura 59.

Sean: C el punto de aplicación del empuje Q en la clave, cuya línea de acción HF supondremos sea cualquiera; P′ y P″ las resultantes de las cargas que actúan sobre cada semibóveda (peso propio, sobrecarga permanente y accidental, si la hubiere); R′ y R″ las reacciones de los estribos, aplicada la primera en A y la segunda en B.

Es evidente que por la simetría de la figura de la obra (supuesta homogénea) y de la distribución simétrica de las cargas, los puntos A y B equidistarán de los extremos respectivos del intrados y estarán, por lo tanto, de nivel; las resultantes P′ y P″ serán iguales entre sí, y sus distancias d' y d'' á los puntos A y B también lo serán.

Ahora bien; como cualquiera de las semibóvedas podemos considerarla en equilibrio en el espacio, bajo la acción de la resultante de las cargas correspondientes, del empuje Q en la clave y de la reacción desenvuelta en el plano ó junta de arranques; si tomamos para cada una de dichas mitades de bóveda los momentos de las tres fuerzas que la solicitan y la mantienen en equilibrio, con relación al punto A para la de la izquierda, y con relación al punto B para la de la derecha, tendremos

$$Qa' = P'd' \qquad (1)$$

$$Qa'' = P''d'' \qquad (2),$$

y como consecuencia

$$\frac{a'}{a''} = \frac{P'd'}{P''d''} \qquad (3)$$

$$Q = \frac{P''d''}{a''} = \frac{P'd'}{a'} \qquad (4)$$

En el caso que nos ocupa, se verifica, como hemos dicho antes, $P' = P''$ y $d' = d''$; por lo tanto, los momentos $P'd'$ y $P''d''$ serán también iguales entre sí.

La ecuación (3) se reduce á $\frac{a'}{a'} = 1$, de donde $a' = a''$; pero como estas dos magnitudes son las perpendiculares bajadas desde A y B á la línea de acción del empuje Q, y la recta AB es horizontal, el empuje en la clave será paralelo á AB, y por consecuencia, horizontal también, como queríamos demostrar.

Cuando la bóveda no reuna alguna de las condiciones indicadas ó ninguna de las dos, es claro que el empuje en la clave no será paralelo á la recta AB; pero conociendo los puntos A, B y C, así como los momentos $P'd'$, $P''d''$, será fácil determinar la dirección particular de dicho empuje.

En efecto; si se unen los puntos A y C, y por B se traza una paralela á la dirección de Q hasta que corte á la recta AC en el punto D, los triángulos semejantes AHC y DJC, dan $\frac{DC}{AC} = \frac{a'}{a''}$;

pero como el valor de la relación $\frac{a'}{a''}$ está dado por la ecuación (3), el dividir la recta AC en dos partes que guarden entre sí dicha relación no puede ofrecer ya ninguna dificultad, con lo que se determinará el punto D. Unido éste con B, sólo habrá que trazar por C una paralela á BD, para tener la línea de acción del empuje en la clave.

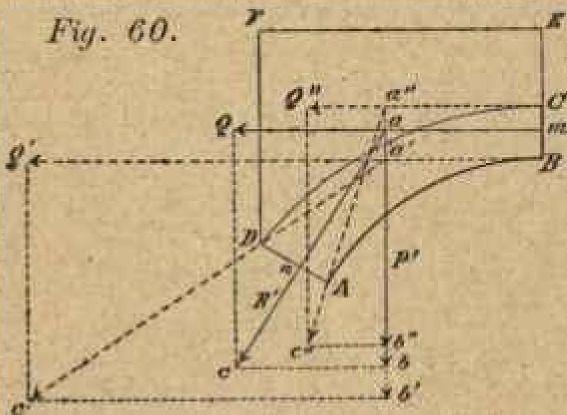
La magnitud de dicho empuje, en cualquier caso, se calculará por la ecuación (4), cuyos elementos son fáciles de determinar, siempre que se conozcan el punto C y uno de los A y B.

248. Determinación gráfica del empuje.—Conocida la línea de acción y magnitud de la resultante P' de las cargas (figura 60), y los puntos de aplicación m y n de Q y R', bastará construir el triángulo de estas fuerzas, como se indicó en otro lugar, para determinar gráficamente el empuje Q.

Si se prolongan, hasta que se corten, las líneas de acción de P' y Q, se une el punto a de intersección con el n por una recta de suficiente longitud y se toma desde a la magnitud $ab = P'$, la paralela bc á la línea de acción de Q, representará el empuje en la clave. Si este fuera horizontal, el triángulo abc sería rectángulo en b; y es claro que para una dirección determinada de dicho empuje, su valor variará con la posición particular de los puntos *m* y *n*. Cuando *n* se acerca al trasdos, lo mismo que cuando *m* lo haga al intrados, Q crece. Por el contrario, si *n* se acerca al intrados, lo mismo que cuando *m* se aproxima al trasdos, Q disminuye. Los valores límites del empuje, como indica la figura 60, se verifican:

El máximo Q′, cuando *n* coincide con el trasdos y *m* con el intrados, pasando el primer punto á la posición D y el segundo á B.

Fig. 60.



El mínimo Q″, cuando se verifica lo contrario, pasando *n* á A y *m* á C.

A pesar de las numerosas teorías ideadas para investigar la verdadera posición de los puntos *m* y *n*, es lo cierto que el problema está por resolver, sobre todo cuando se trata de bóvedas cuyos materiales se toman con mortero ordinario. Ya veremos que únicamente en el caso en que se emplee el cemento ó mortero de cemento, lo mismo que cuando aquellas se construyen de hormigón, el análisis conduce á fijar la situación de aquellos puntos tan importantes, si bien la teoría en que descansa tal determinación no inspire una confianza absoluta.

249. Fórmula de Navier para calcular el empuje en la clave.—Para una bóveda cuya longitud en el sentido de su eje sea de un metro, Navier propone una fórmula muy sencilla, que suelen aceptar muchos constructores, y es

$$Q = Fr.$$

En ella representan:

Q empuje en la clave;
F peso que gravita sobre un metro cuadrado de superficie de intrados en la clave, y que comprende el peso propio de la fábrica, y los de las sobrecargas, permanente y accidental;
r radio de curvatura del intrados en la clave.

Si el espesor en la clave es e, h la altura de la sobrecarga permanente, δ' el peso del metro cúbico de fábrica, δ el de igual volumen del material que constituye la sobrecarga permanente, y p el peso por metro cuadrado que representa la sobrecarga accidental, el valor de F tendrá por expresión

$$F = \delta' e + \delta h + p$$

y resultará, por tanto,

$$Q = (\delta' e + \delta h + p)\, r.$$

Tiene la ventaja esta fórmula, además de su sencillez, la de que no conduce á valores deficientes del empuje en los casos ordinarios.

250. Comprobacion de las condiciones de estabilidad y resistencia de una bóveda.—Consideraremos dos casos:

1.º Cuando se prescinde de la influencia de los morteros, cuyo fraguado no es completo, sino después del descimbramiento, debiendo considerarse nula en la práctica su resistencia á la tracción.

2.º Cuando se tiene en cuenta aquella influencia, resultando la obra un verdadero monolito, ya por emplear el cemento ó morteros de cemento ó por tratarse de bóvedas de hormigón, construídas con las precauciones convenientes, cuyo estudio no corresponde á este lugar.

En ambos casos la cuestión queda reducida á construir el polígono de presiones que, con cierto grado de probabilidad, haya de realizarse en la práctica, una vez efectuado el descimbramiento; pues una vez trazado aquel será fácil comprobar:

1.º Que la rotación de la obra alrededor de las aristas de cualquiera de las juntas será imposible, si el polígono de presiones resulta contenido en el tercio medio ó núcleo central de aquellas; en cuyo caso podrá también afirmarse que no se desarrollarán en parte alguna esfuerzos de extensión, como es menester que ocurra cuando se prescinde de la influencia de los morteros.

En el caso de que se tenga en cuenta esta influencia, podría aceptarse que el polígono de presiones cortara á algunas de las juntas fuera del tercio medio, siempre que el máximo esfuerzo de tracción desarrollado por unidad superficial no exceda del valor que se señale como límite de resistencia del mortero á tal esfuerzo.

2.º Que el resbalamiento será imposible, si la línea de acción de la resultante de las presiones, en una junta cualquiera, representada aquella por el lado correspondiente del referido polígono, forma con la normal á la junta un ángulo menor que el de frotamiento.

3.º Que la ruina de la obra, por aplastamiento de los materiales, será imposible, si aplicando la fórmula que corresponda (núm. **21**) para calcular la presión máxima unitaria en una junta cualquiera, el valor obtenido no es mayor que el coeficiente de seguridad que previamente se hubiere señalado; valor que depende, como sabemos, no sólo de la magnitud de la resultante normal de las presiones, sino de la distancia de su punto de paso á la arista más próxima; elementos ambos que se deducen con facilidad del polígono de presiones.

Veamos ahora cómo se construye este polígono.

251. 1.er caso.—*Cuando se prescinde de la influencia de los morteros.*

Para comprobar en este caso las condiciones de estabilidad y resistencia de una bóveda, daremos solamente á conocer el trazado del polígono de presiones por el procedimiento de M. Méry y las reglas prácticas propuestas por M. Kleitz.

252. Procedimiento de M. Méry.—Fúndase el trazado del polígono de presiones por el llamado método de Méry, en admitir la hipótesis de que en la clave, la resultante de las presiones pasa al tercio del trasdos y en la junta de fractura al tercio del intrados; ó lo que es lo mismo, que si m es el punto de paso de la resultante en la clave (figura 61) y n el de la resultante de las presiones en la junta de fractura, se admite que

$$m\mathrm{C} = \frac{1}{3}\mathrm{BC} \qquad \text{y} \qquad n\mathrm{F} = \frac{1}{3}\mathrm{EF}.$$

Claro es que habiendo fijado de esta suerte la posición de los puntos m y n, la determinación del empuje en la clave, así como el trazado del polígono de presiones, no presenta ninguna dificultad.

Para ello, y una vez dibujado el perfil de la bóveda y estribo, procederemos en el siguiente orden:

1.º Se determina la junta de fractura EF, como ya sabemos.

2.º El arco BF de intrados, comprendido entre la clave y dicha junta se divide en cierto número de partes iguales, por ejemplo, en cuatro. El arco restante FA del intrados, puede también dividirse, si se quiere, en partes iguales, por ejemplo en dos.

Por los puntos de división A, L, F, J, ... B se trazan las juntas normales AM, LL′, FE, ... HH′, BC y por las aristas de trasdos

C, H', I', J', E, L', D, se trazan las verticales CG''', H'H''', ... etcétera, hasta que corten á la rasante G'''M'''. (En vez de juntas normales, pudieran haberse preferido juntas verticales para simplificar operaciones ulteriores.)

La línea poligonal G''H'' ..... L''M'', que representa la cara superior de la sobrecarga (permanente y accidental) se determina como se explicó oportunamente.

Por último, el estribo (no dibujado por entero en la figura) se dividirá asimismo en diversas hiladas horizontales.

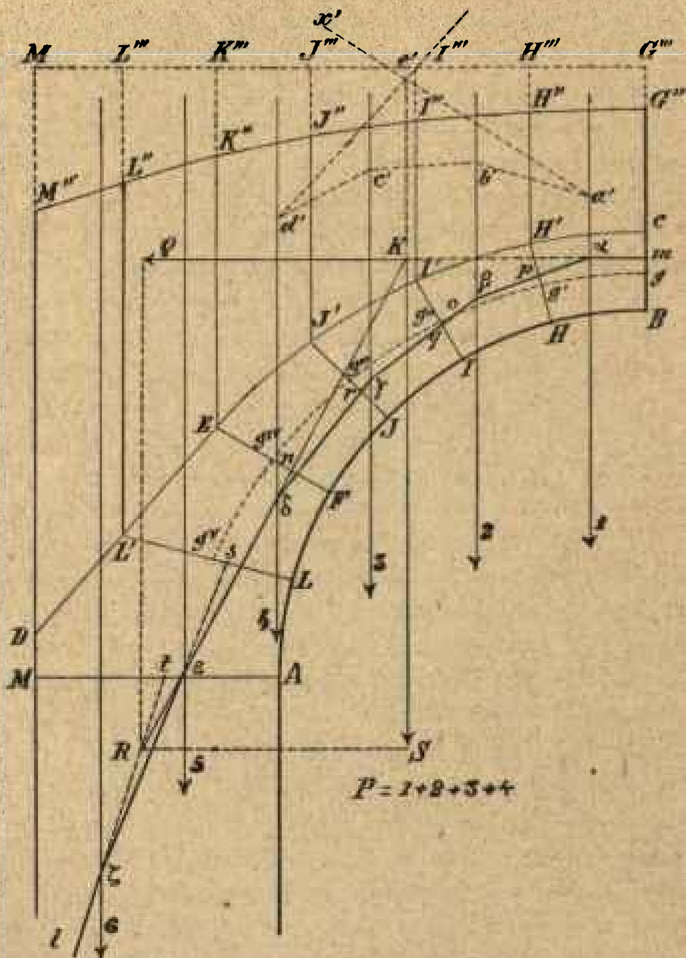
3.º En seguida se hallan los centros de gravedad de cada uno de los polígonos en que ha quedado descompuesta toda la figura, trazando por aquellos puntos las verticales correspondientes, que serán las líneas de acción de los pesos que tales polígonos representan, las cuales se designarán con las cifras gruesas **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, etc.

4.º Se calculan geométricamente, ó con el planímetro, las superficies de los referidos polígonos, que son: BG''H''H'H = **1**, HH'H''I''I'I = **2**, etc. Estas superficies multiplicadas por δ', peso del metro cúbico de fábrica, darán los pesos 1, 2, 3, ... etc.

5.º Se fijará una escala conveniente para la representación lineal de las fuerzas, de modo que la figura que se obtenga resulte de un tamaño apropiado y sean admisibles los errores de apreciación.

6.º Conocidos los valores numéricos de los pesos, y con arreglo á la escala establecida para su representación, se construye (figura 62) el polígono de fuerzas exteriores 1. 2. 3. 4. 5. 6 = ab, en el que a es el origen y b el extremo. Se toma un polo arbitrario O', se dibujan los radios polares O'a, O'u, O'v, O'x y O'y; y sobre las líneas de acción **1**, **2**, **3**, **4**, (figura 61) que son las que corresponden al macizo limitado por la vertical de la clave y la junta de fractura, se traza el polígono funicular $a'b'c'd'e'$, (figura 61) correspondiente á las fuerzas 1, 2, 3, 4 y relativo al polo O' (figura 62), tomando como punto de partida de dicho polígono auxiliar un punto cualquiera x' (figura 61). No hay para qué decir que desde este punto se trazará la recta $x'a'$, hasta que corte á la línea de acción **1**, paralelamente al primer radio polar O'*a*; por *a'* se trazará la *a'b'*, paralela al radio polar O'*u*, hasta

Fig. 61.



que corte á **2**; continuando así, hasta trazar por *d'* la *d'e'* paralela al último radio polar O'*y*.

Como ya sabemos, el punto *e'*, en que se cortan los lados extremos del polígono funicular, corresponde á la resultante de las fuerzas que aquellos lados comprenden; por consiguiente, la vertical P trazada por c', será la línea de acción de la resultante $P = \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4}$, cuyo valor no es otro que el del peso del macizo proyectado en FEK''G''CB, limitado entre la clave y la junta de fractura.

Fig. 62.

Esta línea de acción P, se ha determinado, porque, como sabemos, se necesita para hallar gráficamente el empuje en la clave.

7.° Se fijarán los puntos *m* y *n*, como al principio se dijo, es decir, de manera que resulte

$$mC = \frac{1}{3} BC \text{ y } nF = \frac{1}{3} EF;$$

pero como el empuje en la clave es horizontal, por tratarse de una bóveda simétrica, respecto de la vertical que pasa por su punto medio, y simétricamente cargada, es claro que si se traza por *m* una horizontal que cortará en K á la línea de acción de P, desde K se toma la magnitud

$$KS = P = 1 + 2 + 3 + 4,$$

se traza por K la recta KR, con la condición de que pase por el punto *n*, y por último, se tira por S la horizontal SR hasta que corte en R á la KR; la magnitud SR representará el empuje horizontal en la clave, es decir, Q.

8.° Finalmente, como el polígono de presiones no es otra cosa que el funicular correspondiente á las fuerzas, Q, **1**, **2**, **3**... etc., sujeto á pasar por el punto m y por el n, no habrá más que tomar como polo el punto O (figura 62), situado sobre la recta aO, paralela al empuje en la clave y á una distancia de a igual á dicho empuje, ya determinado en SR (figura 61).

Dibujados los radios polares Ou, Ov, Ox..... etc., se trazan: por m la recta $m\,\alpha$, paralela al radio polar Oa, hasta que corte á la línea de acción **1**; por α, la paralela $\alpha\beta$ al radio polar Ou, hasta su encuentro en β con la línea de acción **2**; por β la paralela $\beta\gamma$, al radio polar Ov, hasta que corte en γ á la línea de acción **3**, y así sucesivamente, de cuya suerte resultará el polígono de presiones $m\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$.....

El lado $\alpha\beta$ de este polígono corta en p á la junta HH', el $\beta\gamma$ lo hace en q á la II'; el $\gamma\delta$, en r á la JJ'; el $\delta\varepsilon$ prolongado corta en n á la junta de fractura EF (*); el $\varepsilon\zeta$, prolongado también lo hace en s á la LL' y el último lado ζl, que aparece en la figura encuentra en t á la junta AM: por lo tanto, los centros de presión serán los referidos puntos m, p, q, r, n, s, t; y el polígono de centros de presión, el que resultara de unirlos por medio de rectas, y cuyo trazado no aparece para no complicar inútilmente la figura.

253. Si se traza la línea media de la bóveda, $gg'g''g'''g^{\text{IV}}g^{\text{V}}$, que pasa por los puntos medios ó centros de gravedad de cada junta, se observa que el polígono de presiones la corta en el punto o, quedando la parte om por encima de dicha línea y la $o\zeta$ por debajo de la misma. Esto hace ver claramente que las compresiones máximas en cada junta se engendran en las aristas de trasdos, para la primera parte; y en las de intrados para la segunda, y que en la junta que pasa por o, las presiones se re-

(*) Si este lado no cortara á dicha junta en el punto n, sería prueba de que había habido error en las construcciones efectuadas.

parten de modo uniforme; puesto que la resultante pasa por el centro de gravedad de dicha junta.

En el caso que representa la figura 61, las aristas que más sufren, es decir, aquellas en las cuales se desarrollan las mayores presiones unitarias, son las proyectadas en C y en F.

Construído el polígono de presiones, es fácil, como ya se ha dicho, comprobar si se cumplen ó no todas las condiciones de estabilidad y resistencia de la obra, cuando se prescinde de la influencia de los morteros.

Si el polígono de centros de presión no resultara contenido por completo en el núcleo central, será preciso modificar el perfil del trasdos, para que en cada junta aquellos centros no disten de su arista más próxima menos del tercio de su longitud, sino una cantidad igual ó mayor que dicho tercio.

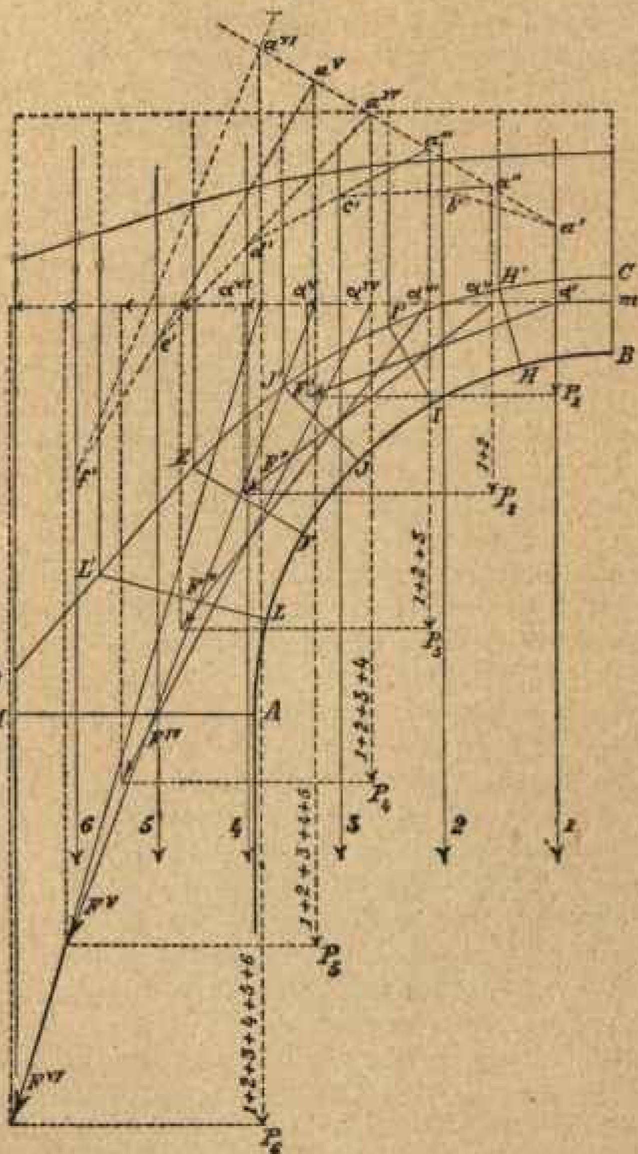
Esto mismo es aplicable al estribo, dentro del cual debe continuarse el trazado del polígono de presiones, siguiendo la marcha que queda indicada.

254. El trazado del citado polígono, tal como se acaba de explicar, tiene el inconveniente, cuando no se procede con gran esmero, de que partiendo para trazar cada uno de sus diversos lados del que inmediatamente le antecede, los errores pueden acumularse, produciendo una desviación final inadmisible de aquel poligono.

Claro es que si el lado que debe hacerlo corta á la junta de fractura, precisamente en el punto n, que se fijó de antemano para determinar el empuje en la clave, será prueba de que hasta ahí no se han cometido errores importantes; pero esto no obsta para que en adelante puedan cometerse, sin que sea posible comprobar si las construcciones están bien ejecutadas.

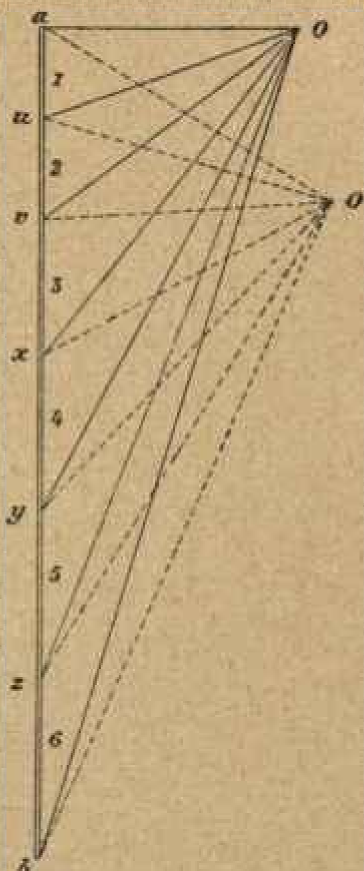
Se salva aquella dificultad (figuras 63 y 64) determinando de manera independiente las resultantes F′, F″, F‴,..... etc., que obran en cada junta; para lo cual basta componer el empuje Q en la clave con el peso del macizo limitado entre ésta y la junta que se considere. De esta suerte se consigue que los errores no

Fig. 63.



se acumulen y que los que puedan cometerse en el trazado de cualquiera de las fuarzas F', F''....., etc., no ejerzan influencia alguna en la dirección, posición y magnitud de las demás.

Fig. 64.



Esto exige, ante todo, que se determinen los puntos da paso de las resultantes **1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,** etc., para lo cual se construirá el polígono funicular

$a'b'c'd'e'f'a^{vi}$,

correspondiente al sistema de fuerzas exteriores y relativo al polo O' (figura 54). Los puntos a'', a''', a^{iv}, a^{v}, a^{vi}, (figura 63) en que cada uno de sus lados, á contar del $b'c'$, corta al primero $a'a^{vi}$, corresponderán, como sabemos, á las líneas de acción de las resultantes expresadas, cuyas líneas se obtendrán trazando por aquellos puntos las verticales P_2, P_3...., etc., que aparecen en la figura 63.

Ahora bien; las resultantes que obran en cada junta están representadas (figura 64) por los diversos radios polares O*u*, O*v*, O*x*..... O*b*, etc., cuyas componentes son:

Las de	$Ou = F'$	.....	Q y	**1**
»	$Ov = F''$	.....	Q y	**1 + 2**
»	$Ox = F'''$	.....	Q y	**1 + 2 + 3**
⋮	⋮	⋮		⋮
»	$Ob = F^{VI}$	.....	Q y	**1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6**

Por consiguiente, para obtener dichas resultantes procederemos del siguiente modo:

Por m (figura 63) se traza una horizontal, que cortará en α' á la línea de acción **1**, en α'' á la de $P_2 =$ **1 + 2**, en α''' á la de $P_3 =$ **1 + 2 + 3**..... y en α^{VI} á la de $P_6 =$ **1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.**

Por α' se traza una recta igual y paralela al radio polar Ou (figura 64); por α'' otra igual y paralela al radio polar Ov, continuando así hasta trazar por α^{VI} una recta igual y paralela al radio polar Ob.

Estas diversas rectas, iguales y paralelas á los diferentes radios polares, representarán, por lo tanto, las resultantes que obran en cada junta.

Así, la $\alpha'F'$ será la resultante F' que actúa en la junta HH'; la $\alpha''F''$ la que corresponde á la junta II'; la $\alpha'''F'''$ la de la junta JJ', y así de las demás. Sus intersecciones con dichas juntas serán los centros de presión, cuyo polígono podrá dibujarse, si se quiere, uniéndolos por medio de rectas.

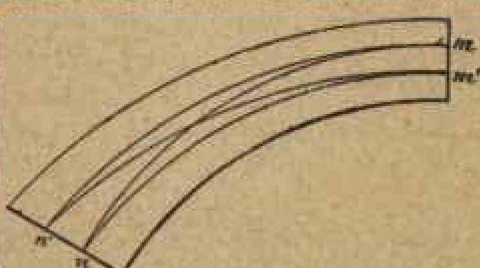
Como comprobación, ha de suceder que, en los triángulos rectángulos, cuyas hipotenusas son las diferentes resultantes F', F'', etc., los catetos verticales deben ser iguales á 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3..... etc., respectivamente y que los catetos horizontales han de ser iguales entre sí é iguales á $Oa = Q$ (figura 64).

255. De cualquier modo que se proceda, tomando como puntos de paso obligados, el m en el tercio superior de la clave y el n en el tercio inferior de la junta de fractura, no es posible afirmar que el polígono de presiones obtenido sea el que seguramente haya de realizarse en la práctica; porque la verdadera situación de aquellos puntos es en rigor desconocida, aun prescindiendo de la influencia que corresponde á los desplazamientos inevitables de la obra en el acto del descimbramiento.

Pudiera suceder que, partiendo de aquellos puntos, el polígono de presiones, ó mejor el de centros de presión, no resultara por entero contenido en el tercio medio del espesor de la bóveda, como debe exigirse, cuando se prescinde de la influencia de los morteros. Tampoco, porque esto suceda, puede afirmarse que la obra carecerá, una vez ejecutada, de las condiciones de estabilidad y resistencia que son necesarias. En tal caso, y antes de desechar el perfil que se estudia, como lo único que puede pretenderse con el procedimiento de M. Méry es hallar la posibilidad de una solución de equilibrio y resistencia, deberán practicarse nuevos tanteos, variando la posición de los puntos m y n, dentro del núcleo central, donde tales variaciones son admisibles, para ver si hay una que origine un polígono de centros de presión contenido por completo en el tercio medio de la bóveda.

Como aquellos puntos pueden tener infinitas posiciones dis-

Fig. 65.



tintas, se consideran de ordinario solamente las extremas m, m', n, n'; (figura 65) y de esta suerte, las soluciones que hay que ensayar, además de la que se supone hecha y no ha conducido á un resultado satisfactorio, se reducen á tres, que corresponden á otros tantos polígonos, sujetos á pasar: el primero, por $m n'$, el segundo, por $m' n'$ y el tercero, por $m' n$, como manifiesta la figura.

256. Reglas prácticas de M. Kleitz.—Para comprobar la estabilidad y resistencia de una bóveda, propone M. Kleitz las siguientes reglas:

1.ª El punto de aplicación del empuje en la clave, se tomará en el tercio superior de la junta respectiva, conforme con lo admitido en el procedimiento de Méry.

2.ª En la junta de fractura, el punto de paso de la resultante de las presiones, se considerará situado á una distancia del intrados igual á $\frac{1}{4}$ del espesor de esta junta, en las bóvedas de poca luz, y á $\frac{1}{5}$ de dicho espesor en las de grandes luces.

3.ª La parte de bóveda comprendida entre la junta de fractura y el arranque, se considerará como formando parte integrante del estribo ó pila que corresponda, y la estabilidad de este conjunto se determinará como si se tratase de un monolito sometido á su propio peso y á un empuje horizontal hipotético, determinado teniendo en cuenta toda la semibóveda y bajo el supuesto de que en la junta de arranques la resultante de las presiones pase por el punto medio de su espesor.

4.ª Cuando se trate de dos bóvedas contiguas, se supondrá sometido el sistema á las condiciones más desfavorables, combinando el máximo empuje de la una con el mínimo de la otra ([a]).

257. 2.º caso.—*Cuándo se tiene en cuenta la influencia de los morteros.*—Pudiendo considerar la obra en este caso co-

([a]) Para mayores desarrollos relativos al estudio de las bóvedas, debe consultarse la excelente obra del Teniente Coronel de Ingenieros D. José Marvá, titulada *Mecánica aplicada á la construcción*, segunda edición, 1894; así como la ya citada del Ingeniero D. E. Boix, *Estabilidad de las construcciones de mampostería*, segunda edición, 1891.

mo un monolito capaz de resistir determinados esfuerzos de extensión, puede aplicarse, para el trazado del polígono ó curva real de presiones, la siguiente teoría:

TEORÍA DE LAS BÓVEDAS CILÍNDRICAS TENIENDO EN CUENTA LA ELASTICIDAD

258. Consideremos como siempre una zona de bóveda de un metro de longitud, en sentido de su eje (figura 66) y llamemos:

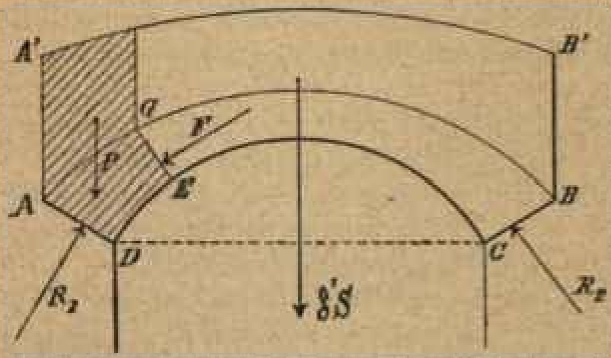
S superficie de la bóveda y sobrecarga reducida á su equivalente de fábrica;

δ' peso del metro cúbico de fábrica;

R_1, R_2 reacciones en los estribos.

Las fuerzas que han de estar en equilibrio son $\delta'S$, R_1, R_2.

Fig. 66.



Por lo tanto, las cantidades que entran en el problema general de estabilidad y constituyen las incógnitas de la cuestión serán:

Magnitud.................. }
Dirección.................. } de R_1 y R_2, total 6 incógnitas.
Punto de aplicación......... }

Son necesarias, por tanto, seis ecuaciones.

Tres de ellas resultan de aplicar á las tres fuerzas indicadas las condiciones generales de equilibrio, que son:

1.ª La suma de las componentes verticales de las reacciones debe ser igual á $\Sigma' S$.

2.ª Las componentes horizontales de las reacciones deben ser iguales entre sí.

3.ª La suma algebráica de los momentos de las tres fuerzas, tomados con relación á un centro cualquiera de rotación, debe ser nula.

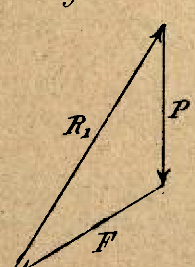
Las tres ecuaciones restantes deben deducirse de la condición siguiente:

Después de haber sufrido la bóveda la deformación total, consiguiente al descimbramiento, bajo la influencia de las cargas y de las reacciones que la solicitan, deberá seguir aplicada por completo á las juntas de arranques, supuestos indiformables los estribos.

Trataremos de hallar dichas tres ecuaciones, que llamaremos ecuaciones de elasticidad de la bóveda; pero antes hagamos algunas consideraciones previas.

259. Consideremos la porción de bóveda y sobrecarga que aparece rayada en la figura 66, á cuyo peso llamaremos P; y sea F la resultante de las presiones que el resto de la bóveda ejerce en la junta EG.

Fig. 67.



Las fuerzas R_1, P y F se equilibran; por lo tanto se cortarán en un punto y su polígono será un triángulo, como indica la figura 67, cuyos lados podrán recorrerse en un sentido continuo; y es claro que suponiendo conocida la fuerza R_1, F quedará determinada en magnitud y dirección.

Esto prueba que para construir la curva real de presiones, es necesario y suficiente, como ya sabíamos, conocer las reacciones sucesivas, análogas á R_1; para lo cual bastará saber determinar la verdadera situación de los puntos de paso de las reacciones extremas y del empuje horizontal, en las juntas respectivas.

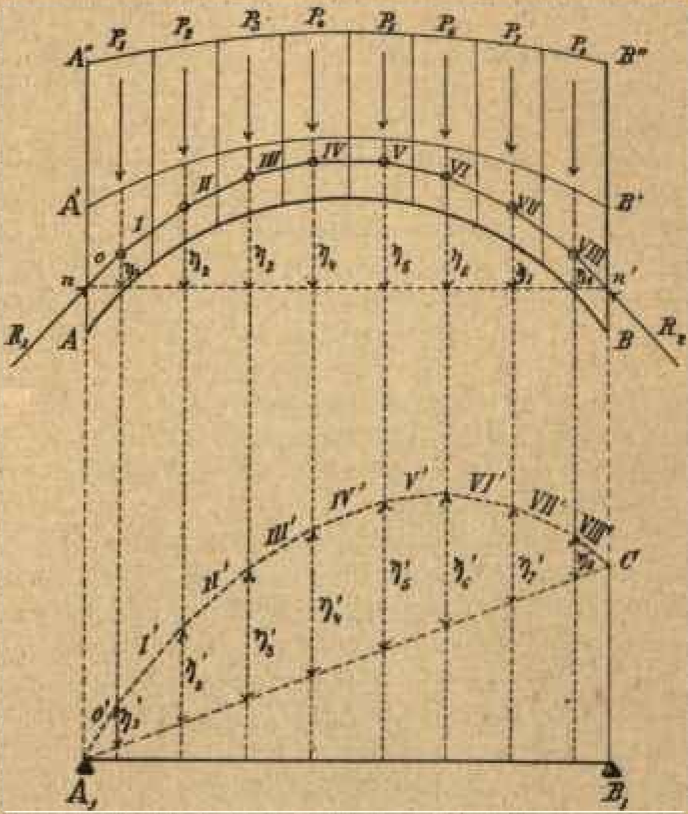
260. Si la división en dovelas se hiciera por planos verticales, á la curva de presiones que de tal suerte resultara la llamaremos *curva de fuerzas de la bóveda.*

Es evidente que si conociéramos las fuerzas R_1, P_1, P_2, P_3, etc. (figura 68), sería fácil construir la curva de fuerzas, ó más propiamente el polígono de fuerzas. En efecto; construyamos la figura recíproca tomando como polo el origen O de la reacción $R_1 = Oa$ (figura 69). Los radios polares sucesivos I, II, III, etc., representarán, como sabemos, la magnitud y dirección de las fuerzas moleculares resultantes que se desarrollan en el interior de la bóveda; y es claro que construyendo el polígono funicular correspondiente, tomando como punto de partida el de aplicación de R_1, es decir el *n* (figura 68), los lados de dicho funicular determinarán las líneas de acción de aquellas fuerzas interiores; y los puntos de intersección de tales lados con las juntas, serán los centros de presión.

Si las juntas verticales estuvieran infinitamente próximas, el polígono funicular se convertiría en lo que pudiera llamarse curva de fuerzas, y la recta nn' que une sus extremos es la línea de cerramiento.

261. La división de la bóveda por planos verticales, como ya hemos dicho, no es la que resulta en la práctica, puesto que las juntas se disponen normalmente al intrados: pero es fácil deducir de las presiones determinadas sobre las juntas verticales, las correspondientes á las juntas efectivas, trazadas según los radios de curvatura del intrados. En efecto; si J′L es una junta vertical (figura 71), y J′J la normal al intrados trazada por J′; la presión r', que obra sobre ésta, será la resultante de la presión r, conocida, que obra sobre la junta vertical, y el peso p del prisma proyectado según LJ′J. Conociendo p y r, y el punto en que se cortan, el triángulo de las fuerzas de que se trata dará á conocer la presión r' sobre la junta normal. Procediendo de esta suerte en todas las juntas, deduciremos del polí-

Fig. 68.



gono de fuerzas el de presiones sobre las juntas efectivas; pero en la práctica tales polígonos se separan tan poco, que no hay inconveniente alguno en tomar el primero por el segundo, lo cual, en cambio, tiene la ventaja de simplificar el problema que nos ocupa.

262. Veamos ahora cómo, si conociéramos el empuje hori-

Fig. 69.

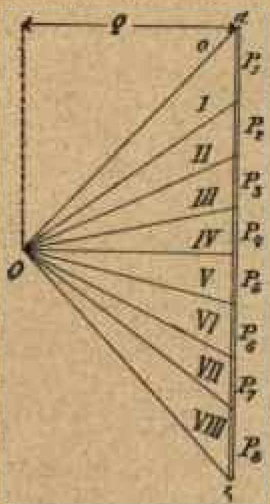
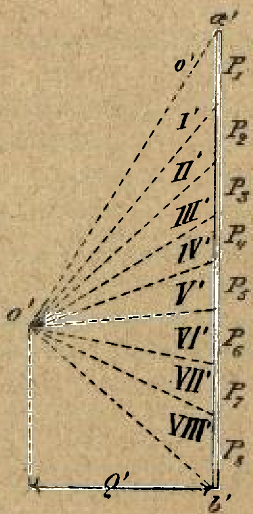
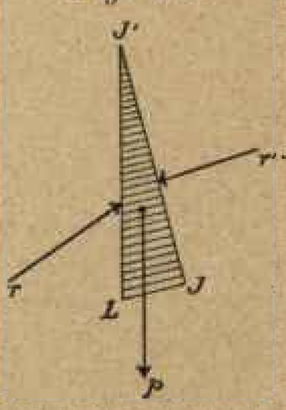


Fig. 70.



zontal Q y la línea de cerramiento *nn'*, pudiera construirse la curva de presiones, ó más propiamente, el polígono de presiones.

Fig. 71.



Ante todo conviene notar que el empuje horizontal Q no es otra cosa que la componente horizontal de cualquiera de las fuerzas I, II, III, etc., ó lo que es lo mismo, la distancia polar de polígono O*ab*; y además que el momento de la presión en una junta vertical cualquiera, con relación á su punto medio, es igual al empuje horizontal multiplicado por la distancia vertical entre la línea media de la bóveda y la curva de fuerzas, tomando dicho momento como positivo cuando la curva de fuerzas pase por encima de la línea media, y como negativo en el caso contrario.

263. Consideremos una viga horizontal A_1B_1 (figura 68) apoyada por sus extremos, cuya longitud sea la misma que la luz de la bóveda y sometida á iguales cargas verticales que ella.

Si con las fuerzas P_1, P_2, P_3..... etc., y un polo arbitrario O′ (figura 70,) trazamos el polígono funicular correspondiente que indica la figura 68 y su línea de cerramiento A_1C, sabemos que los momentos de flexión en las distintas secciones de la viga se obtendrán multiplicando las ordenadas correspondientes η_1', η_2'... etc., del polígono funicular, por la distancia polar Q′; en cuyo caso tendremos, representando por M_1, M_2... dichos momentos:

$$M_1 = Q'\eta'_1 \quad M_2 = Q'\eta'_2 \quad M_3 = Q'\eta'_3 ..... \text{ etc.}$$

Claro es que designando por η_1, η_2... etc., las ordenadas del polígono de presiones, correspondientes á las secciones consideradas, por la misma razón tendremos

$$M_1 = Q\eta_1 \quad M_2 = Q\eta_2 \quad M_3 = Q\eta_3 ..... \text{ etc.}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} Q'\eta'_1 = Q\eta_1 \\ Q'\eta'_2 = Q\eta_2 \\ Q'\eta'_3 = Q\eta_3 \\ \vdots \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ y por lo tanto } \left\{\begin{array}{l} \eta_1 = \dfrac{Q'}{Q}\eta'_1 \\ \eta_2 = \dfrac{Q'}{Q}\eta'_2 \\ \eta_3 = \dfrac{Q'}{Q}\eta'_3 \\ \vdots \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

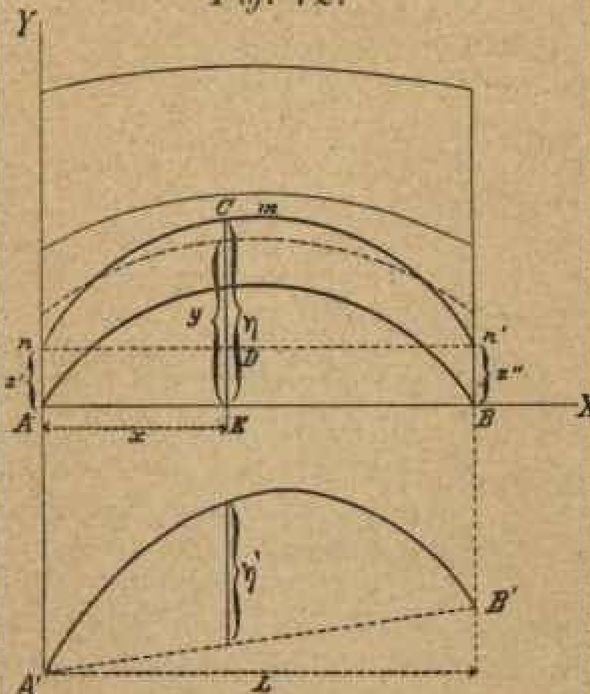
lo que demuestra que para calcular las ordenadas de la curva de presiones es necesario y suficiente conocer el empuje horizontal

Q y las ordenadas η'_1, η'_2, η'_3, etc., de un polígono ó curva funicular, correspondiente á las cargas P_1, P_2, etc., y relativo á un polo arbitrario.

264. La ecuación de la curva de presiones se deduce del modo siguiente:

Tomemos por eje de abscisas la horizontal trazada por el

Fig. 72.



vértice del ángulo interior del arranque de la izquierda y por eje de ordenadas la vertical que pasa por dicho punto (figura 72).

Llamemos

η á la ordenada de la curva de presiones;

y á la ordenada de la línea media de la bóveda;

η' á la ordenada de una curva funicular trazada con un polo arbitrario y á la distancia polar Q';

L á la luz de la bóveda;

ζ', ζ'' á las ordenadas extremas de la línea de cerramiento nn'.

Sabemos que la parte CD de la ordenada η tiene por expresión:

$$DC = \eta' \frac{Q'}{Q}.$$

Por otra parte, es fácil deducir que, cuando nn' y AB no sean paralelas,

$$DE = \zeta' + (\zeta'' - \zeta') \frac{x}{L}$$

en el supuesto de que $\zeta'' > z'$.

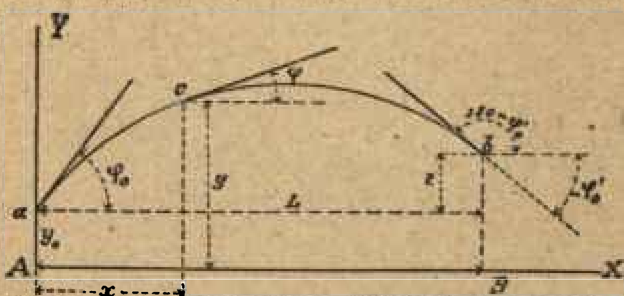
Por lo tanto tendremos

$$\text{(A)} \qquad \eta = \zeta' + (\zeta'' - \zeta') \frac{x}{L} + \frac{Q'}{Q} \eta',$$

ecuación de la curva de presiones.

265. Para poder utilizar esta ecuación, sólo falta determinar

Fig. 73.



los valores de ζ', ζ'' y Q; y esto lo conseguiremos por medio de las ecuaciones fundamentales dependientes de la elasticidad, de cuyo establecimiento vamos á ocuparnos.

Sea *acb* (figura 73) la curva media de la bóveda; φ_0, $-\varphi'_0$ los valores que toma el ángulo φ para $x = 0$ y $x = L$.

Por virtud de la deformación de la bóveda, las variables φ, x, y, sufrirán las variaciones $\Delta\varphi$, Δy, Δx.

Considerando el punto (x, y) tendremos

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \int_0^x d\Delta\varphi$$

Pero como se supone que los planos de arranques son de posición invariable y que la bóveda sigue á ellos aplicada por completo, como si estuviera empotrada, podremos establecer que $\Delta\varphi_0 = 0$ y análogamente $\Delta y_0 = 0$, $\Delta x_0 = 0$; de suerte que

$$(B)\left\{\begin{aligned} \Delta\varphi &= \int_0^x d\Delta\varphi && (1)\\ \Delta y &= \int_0^x d\Delta y && (2)\\ \Delta x &= \int_0^x d\Delta x && (3)\end{aligned}\right.$$

Siendo ds un elemento de la línea media, claro es que se verificará:

antes de la deformación. $dy = ds \operatorname{sen} \varphi$
y después de ella. . . . . . $d(y + \Delta y) = d(s - \Delta s) \operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi)$ (a)

Pudiendo, sin inconveniente, establecer; $\operatorname{sen} \Delta\varphi = \Delta\varphi$ y $\cos \Delta\varphi = 1$, tendremos (despreciando el infinitamente pequeño de 2.º orden, $d\Delta s \Delta\varphi \cos \varphi$),

$$dy + d\Delta y = ds \operatorname{sen} \varphi + ds \cos \varphi \,\Delta\varphi - d\Delta s \operatorname{sen} \varphi$$

Pero $ds \cos \varphi = dx$, y como según se indicó, $ds \operatorname{sen} \varphi = dy$, tendremos

$$dy + d\Delta y = dy + \Delta\varphi \, dx - \frac{d\Delta s}{ds} dy\,, \quad \text{y por lo tanto}$$

$$d\Delta y = \Delta\varphi \, dx - \frac{d\Delta s}{ds} dy$$

(a) A consecuencia de la compresión s se convierte en $s - \Delta s$.

Integrando resultará

$$\Delta y = \int_0^x \Delta\varphi\, dx - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds}\, dy,$$

y aplicando á la primera integral el método de integración por partes

$$\Delta y = \left(\Delta\varphi\, x\right)_0^x - \int_0^x x d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds}\, dy.$$

Observando que la expresión $\Delta\varphi\, x$ se anula para $x = 0$, límite inferior de la integral, resultará

$$\Delta y = \Delta\varphi\, x - \int_0^x x d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds}\, dy$$

De análoga manera se obtiene,

$$\Delta x = -\Delta\varphi y + \int_0^x y d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds}\, dx\,.$$

Admitida la condición de indeformabilidad de los arranques, claro es que si hacemos $x = L$, resultará

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi'_0 = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta x = 0$$

y por lo tanto obtendremos las ecuaciones siguientes:

$$(C)\left\{\begin{array}{ll} 0 = \int_0^L d\Delta\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ 0 = -\int_0^L x d\Delta\varphi - \int_0^L \frac{d\Delta s}{ds}\, dy \;\ldots\ldots\ldots & (2) \\ 0 = +\int_0^L y d\Delta\varphi - \int_0^L \frac{d\Delta s}{ds}\, dx \;\ldots\ldots\ldots & (3) \end{array}\right.$$

266. Como para $x + dx$ corresponde $\varphi - d\varphi$ ([a]); si $-d\varphi$ es el ángulo que forman dos juntas normales infinitamente próxi-

---

([a]) Porque se toma como orígen de los ángulos la vertical trazada por O, considerando positivos los contados á la izquierda y negativos los contados á la derecha (figura 74).

mas y llamamos ρ al radio de curvatura de la línea media y b al espesor de la bóveda en la región que se considere, las expresiones de los elementos del trasdos, intrados y línea media serán las siguientes (figura 74).

$$\left.\begin{array}{l} ds_t = \left(\rho + \frac{1}{2} b\right)(-d\varphi) \ldots \\ ds_i = \left(\rho - \frac{1}{2} b\right)(-d\varphi) \ldots \end{array}\right\} ds = \rho\,(-d\varphi)$$

ó también, puesto que $-d\varphi = \frac{ds}{\rho}$

$$ds_t = \frac{ds\left(\rho + \frac{1}{2} b\right)}{\rho}, \quad \text{y} \quad ds_i = \frac{ds\left(\rho - \frac{1}{2} b\right)}{\rho}$$

Representando por R_t, R_i; las presiones unitarias en el trasdos y en el intrados, claro es que si el centro de presión cae dentro del núcleo central de la junta, R_t y R_i serán ambas compresiones.

Fig. 74.

Siendo E el coeficiente de elasticidad del material con que se construya la bóveda, es claro que el elemento ds_t se acortará la cantidad

$$\Delta\, ds_t = \frac{R_t\, ds_t}{E}.$$

Lo mismo sucederá respecto del elemento ds_i y su acortamiento será

$$\Delta\, ds_i = \frac{R_i\, ds_i}{E}$$

Es indudable, además, que antes de la deformación se verificará

$$ds_i - ds_t = bd\varphi,$$

y después de la deformación resultará

$$(ds_i - \Delta ds_i) - (ds_t - \Delta ds_t) = b\,(d\varphi + \Delta d\varphi)$$

Restando estas dos últimas ecuaciones, tendremos,

$$\Delta ds_t - \Delta ds_i = b\,\Delta d\varphi\;;$$

Por lo tanto

$$\Delta d\varphi = d\Delta\varphi = \frac{R_t ds_t - R_i ds_i}{bE},$$

ó bien

$$d\Delta\varphi = \frac{ds}{E}\left[\frac{R_t - R_i}{b} + \frac{R_t + R_i}{2\rho}\right]$$

267. La fórmula general de la presión unitaria en un punto de una junta, definido por su distancia x al centro de gravedad de la misma, y siendo P la componente normal que la solicita, b la longitud de aquella y l la distancia entre su punto medio y el de aplicación de P, sabemos que es

$$R = \frac{P}{b}\left(1 + \frac{12lx}{b^2}\right).$$

Por consigniente, como en el caso actual, corresponde

$$x = +\frac{b}{2} \quad \ldots\ldots \quad \text{á}\ R_t$$

$$x = -\frac{b}{2} \quad \ldots\ldots \quad \text{á}\ R_i$$

tendremos:

$$R_t = \frac{P}{b}\left(1 + \frac{6l}{b}\right) = \frac{P}{b} + \frac{6Pl}{b^2}$$

$$R_i = \frac{P}{b}\left(1 - \frac{6l}{b}\right) = \frac{P}{b} - \frac{6Pl}{b^2}$$

Llamando M al momento Pl, de la componente normal P, con relación al punto medio de la junta, tendremos también

$$R_t = \frac{P}{b} + \frac{6M}{b^2}$$

$$R_i = \frac{P}{b} - \frac{6M}{b^2}$$

de donde se deduce

$$R_t - R_i = \frac{12M}{b^2}$$

$$R_t + R_i = \frac{2P}{b}$$

Siendo rectangular la sección causada en la bóveda por cualquiera de los planos de junta, normales al intrados; y los lados del rectángulo, 1 y b, el módulo de flexión Z será, como sabemos, $Z = \frac{1}{6} b^2$; por lo tanto la primera de las expresiones anteriores podrá escribirse bajo la siguiente forma:

$$R_t - R_i = \frac{2M}{Z}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de $d\Delta\varphi$, resulta

$$d\Delta\varphi = \frac{2M ds}{ZEb} + \frac{P ds}{\rho b E}$$

ó bien

$$d\Delta\varphi = \frac{M dx}{\frac{1}{2} Z \frac{dx}{ds} Eb} + \frac{P ds}{\rho E b}$$

ó finalmente

$$d\Delta\varphi = \frac{1}{\frac{1}{2} Z \frac{dx}{ds} Eb} \left[M dx + \frac{\frac{1}{2} Z \frac{dx}{ds} P ds}{\rho} \right] \ldots \quad (a)$$

Teniendo en cuenta que la presión unitaria en el punto medio de la junta es $\frac{P}{b}$, el acortamiento del elemento ds de la curva medía será

$$d\Delta s = \frac{P}{bE} ds \quad \dots . \quad (b)$$

268. Si en las ecuaciones (C) sustituímos los valores (*a*) y (*b*) que acabamos de encontrar para $d\Delta\varphi$ y $d\Delta s$; y al propio tiempo hacemos $Z \frac{dx}{ds} = Z \cos\varphi = Z'$; dividiendo por el factor constante que resulte, tendremos las siguientes formas de aquellas ecuaciones:

$$(D) \left\{ \begin{array}{lll} 0 = & \int_0^L M dx + \int_0^L \frac{Z'P}{2} \cdot \frac{ds}{\rho} & \dots\dots\dots \quad (1) \\ 0 = & - \int_0^L M x dx - \int_0^L \frac{Z'P}{2} \left(x \frac{ds}{\rho} + dy \right) & (2) \\ 0 = & \int_0^L M y dx + \int_0^L \frac{Z'P}{2} \left(y \frac{ds}{\rho} - dx \right) & (3) \end{array} \right.$$

269. Finalmente, si observamos que $P = \frac{Q}{\cos\varphi}$(a), la expresión $\frac{Z'P}{2}$ podrá escribirse bajo la forma

$$\frac{Z'P}{2} = \frac{Z\cos\varphi}{2} \times \frac{Q}{\cos\varphi} = \frac{ZQ}{2} = \frac{b^2Q}{12},$$

cantidad constante, si asignamos á b su valor medio, que podrá sacarse, por lo tanto, fuera del signo $\int$.

Pudiendo, además, establecer que $M = Q(\eta - y)$, si sustituimos en las ecuaciones (D) las expresiones indicadas, de $\frac{Z'P}{2}$ y M,

---

(*a*) Este valor es exacto cuando la curva de presiones coincide con la linea media de la bóveda. En otro caso sólo es aproximado; pero el error es perfectamente despreciable.

resultan las siguientes nuevas formas de las ecuaciones fundamentales, dependientes de la elasticidad, dividiendo todo por Q.

$$(E)\begin{cases} -\dfrac{b^2}{12}\displaystyle\int_0^L \frac{ds}{\rho} + \int_0^L y\,dx = \int_0^L \eta\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ -\dfrac{b^2}{12}\displaystyle\int_0^L \left(dy + x\frac{ds}{\rho}\right) + \int_0^L yx\,dx = \int_0^L \eta x\,dx & (2) \\ \dfrac{b^2}{12}\displaystyle\int_0^L \left(dx - y\frac{ds}{\rho}\right) + \int_0^L y^2 dx = \int_0^L \eta y\,dx & (3) \end{cases}$$

ó más sencillamente

$$(F)\begin{cases} -\dfrac{b^2}{12}A + \displaystyle\int_0^L y\,dx = \int_0^L \eta\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ -\dfrac{b^2}{12}B + \displaystyle\int_0^L yx\,dx = \int_0^L \eta x\,dx \ldots\ldots\ldots & (2) \\ \dfrac{b^2}{12}C + \displaystyle\int_0^L y^2 dx = \int_0^L \eta y\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots & (3) \end{cases}$$

haciendo

$$\int_0^L \frac{ds}{\rho} = A \,;\; \int_0^L \left(dy + x\frac{ds}{\rho}\right) = B \,;\; \int_0^L \left(dx - y\frac{ds}{\rho}\right) = C.$$

270. Si dividimos la línea media de la bóveda en segmentos, s_1, s_2, s_3 .... etc., y determinamos las coordenadas de sus puntos medios, á las que llamaremos $(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$ ... etc., así como los radios de curvatura ρ_1 ρ_2 ρ_3 .... etc., de los mismos, el cálculo suficientemente aproximado de las integrales A, B, C, será fácil y resultará:

$$A = \frac{s_1}{\rho_1} + \frac{s_2}{\rho_2} + \frac{s_3}{\rho_3} + \ldots \text{ etc.}$$

$$B = t + \frac{x_1 s_1}{\rho_1} + \frac{x_2 s_2}{\rho_2} + \ldots \text{ etc.}$$

$$B = L - \left(\frac{y_1 s_1}{\rho_1} + \frac{y_2 s_2}{\rho_2} + \ldots \text{ etc.}\right);$$

siendo t la diferencia de las ordenadas de los puntos medios de las juntas de arranques y L la luz de la bóveda.

271. Si en las ecuaciodes (F) sustituímos en vez de η su valor (A), (núm. **264**), tendremos:

$$
(G)\left\{
\begin{aligned}
-\frac{b^2}{12}A+\int_0^L ydx &= \zeta'\int_0^L dx+\frac{\zeta''-\zeta'}{L}\int_0^L xdx+\frac{Q'}{Q}\int_0^L \eta' dx \quad (1)\\
-\frac{b^2}{12}B+\int_0^L yxdx &= \zeta'\int_0^L xdx+\frac{\zeta''-\zeta'}{L}\int_0^L x^2dx+\frac{Q'}{Q}\int_0^L \eta' xdx \quad (2)\\
\frac{b^2}{12}C+\int_0^L y^2dx &= \zeta'\int_0^L ydx+\frac{\zeta''-\zeta'}{L}\int_0^L yxdx+\frac{Q'}{Q}\int_0^L \eta' ydx. \quad (3)
\end{aligned}
\right.
$$

Veamos la significación de las integrales que figuran en las ecuaciones (G).

$\int_0^L ydx$ es el area comprendida por la línea media de la bóveda y el eje de abscisas, entre las ordenadas estremas $y_0 = \zeta'$ é $y_n = \zeta''$. Este área puede representarse por el rectángulo $f L = \Omega$.

$\int_0^L \eta' dx$ representa el área limitada por la curva funicular arbitraria y su línea de cerramiento, que asimismo puede sustituirse por la del rectángulo equivalenfe $f' L = \Omega'$.

$\int_0^L yxdx = \int_0^L x \times ydx$, no es otra cosa que la suma de los momentos de los elementos del area $\int_0^L ydx$ con relación al eje de ordenadas. Por consiguiente llamando ξ á la abscisa del centro de gravedad del área Ω, dicha integral podrá representarse por la expresión $\xi\Omega = f L \xi$.

$\int_0^L \eta' xdx$ es la suma de los momentos, con respecto al eje de las Y, de los elementos del área $\Omega' = \int_0^L \eta' dx$, y es claro que si ξ' es la abscisa de su centro de gravedad, podrá establecerse que $\int_0^L \eta' x dx = \Omega'\xi' = f' L \xi'$.

$\int_0^L y^2 dx = 2\int_0^L \frac{1}{2} y \times y dx$, es el doble de la suma de los momentos de las áreas elementales ydx, con relación al eje de las X. Por lo tanto, si llamamos u al duplo de la ordenada del centro de gravedad del área Ω, tendremos $\int_0^L y^2 dx = u\Omega = ufL$.

Finalmente $\int_0^L \eta' y dx = \int_0^L \eta' \times y dx$ puede considerarse como la suma de los momentos de las áreas elementales ydx, con relación al eje de las X, si cada una de ellas se dispusiera en el extremo de la ordenada η' que le corresponde, paralelamente á dicho eje. Llamando u' al brazo de palanca de la resultante, que vale $\Omega = fL$, podremos establecer que $\int_0^L \eta' y dx = u' f L$.

272. En conclusión, las expresadas integrales se representarán de la manera siguiente:

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned} &\int_0^L y dx = fL \ldots && (a)\\ &\int_0^L yx dx = fL\xi. && (b)\\ &\int_0^L y^2 dx = ufL. && (c)\end{aligned}\right. \qquad (\beta)\left\{\begin{aligned} &\int_0^L \eta' dx = f'L \ldots && (d)\\ &\int_0^L \eta' x dx = f'L\xi'. && (e)\\ &\int_0^L \eta' y dx = u'fL && (f)\end{aligned}\right.$$

273. Si sustituimos estas expresiones en las ecuaciones (G) y al propio tiempo efectuamos la integración en la parte posible, resultarán las siguientes formas:

$$
(\mathrm{H})\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{b^2}{12}\,\mathrm{A}+f\mathrm{L}=\zeta'\mathrm{L}+\frac{\zeta''-\zeta'}{\mathrm{L}}\cdot\frac{\mathrm{L}^2}{2}+\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}}\,f'\mathrm{L}\\
&-\frac{b^2}{12}\,\mathrm{B}+f\mathrm{L}\xi=\zeta'\,\frac{\mathrm{L}^2}{2}+\frac{\zeta''-\zeta'}{\mathrm{L}}\cdot\frac{\mathrm{L}^3}{3}+\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}}\,f'\mathrm{L}\xi'\\
&\frac{b^2}{12}\,\mathrm{C}+uf\mathrm{L}=\zeta' f\mathrm{L}+\frac{\zeta''-\zeta'}{\mathrm{L}}\cdot f\mathrm{L}\xi+\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}}\,u'f\mathrm{L}
\end{aligned}
\right.
$$

ó simplificando

$$
(\mathrm{I})\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{b^2}{12}\,\mathrm{A}+f\mathrm{L}=\frac{1}{2}\,(\zeta'+\zeta'')\,\mathrm{L}+\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}}\,f'\mathrm{L}\,\ldots\ldots\ldots && (1)\\
&-\frac{b^2}{12}\,\mathrm{B}+f\mathrm{L}\xi=\frac{1}{6}\,(\zeta'+2\zeta'')\,\mathrm{L}^2+\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}}\,f'\mathrm{L}\xi'\,\ldots\ldots && (2)\\
&\frac{b^2}{12}\,\mathrm{C}+uf\mathrm{L}=\left(\zeta'+(\zeta''-\zeta')\,\frac{\xi}{\mathrm{L}}\right)f\mathrm{L}+\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}}\,u'f\mathrm{L} && (3)
\end{aligned}
\right.
$$

274. Para el cálculo de las integrales (α) y (β) consideraremos dos casos:

1.º Cuando la línea media sea una curva cualquiera, simétrica respecto de la vertical de su punto medio.

2.º Cuando sea un arco de círculo de cuerda horizontal.

En el primer caso, lo más cómodo es determinar el valor aproximado de las integrales (a), (C), (d) y (f) aplicando el método de Simpson, y el de las (b) y (e) determinando los centros de gravedad de las superficies $f\mathrm{L}=\Omega$ y $f'\mathrm{L}=\Omega'$.

En el segundo, aquellas integrales se calculan fácilmente, como veremos más adelante.

275. Supongamos dividida la línea media en segmentos, por los planos que descomponen la bóveda en macizos de juntas verticales; y sea λ la distancia constante de las ordenadas y_0, y_1 ..... etc., de los puntos de división de la línea media.

Si aplicamos el método de Simpson á las semiáreas de la izquierda, las cuales son idénticas, por la supuesta simetría, á las de la derecha, y multiplicamos por 2 los resultados, tendremos:

$$fL = \frac{2}{3}\lambda\left[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots)\right]$$

$$ufL = \frac{2}{3}\lambda\left[(y_0^2 + y_n^2) + 4(y_1^2 + y_3^2 + y_5^2 + \ldots) + 2(y_2^2 + y_4^2 + y_6^2 +)\right]$$

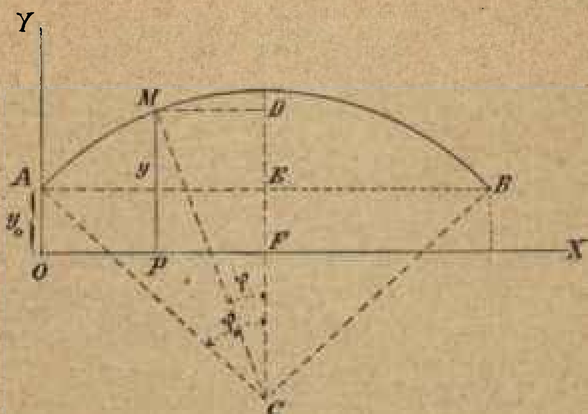
$$f'L = \frac{2}{3}\lambda\left[(\eta'_0 + \eta'_n) + 4(\eta'_1 + \eta'_3 + \eta'_5 + \ldots) + 2(\eta'_2 + \eta'_4 + \eta'_6 + \ldots)\right]$$

$$u'fL = \frac{2}{3}\lambda\left[(\eta'_0 y_0 + \eta'_n y_n) + 4(\eta'_1 y_1 + \eta'_3 y_3 + \ldots) + 2(\eta'_2 y_2 + \eta'_4 y_4 + \ldots)\right]$$

Por medio de estas expresiones se calcularán fácilmente los valores de f, u, f', u'; y no hay para qué decir que á y_0 corresponde $x = o$ y á y_n, $x = \frac{1}{2}$ L, siendo además $\eta'_0 = 0$.

Conocidos además los valores de ξ, ξ', A, B y C, y sustituídos en las ecuaciones (I), tendremos tres ecuaciones distintas y compatibles que permitirán determinar las incógnitas ζ', ζ'' y Q; lo que basta para construir el polígono real de presiones.

Fig. 75.



276. Veamos ahora cómo se simplifican las ecuaciones (I) cuando el intrados es un arco de círculo y los arranques están de nivel. Desde luego ρ es constaute, y además las integrales

A, B, C, toman los siguientes valores:

$$A = 2\varphi_0 \qquad B = L\varphi_0 \qquad C = 2h'\varphi_0$$

siendo h' la distancia CF (figura 75).

En efecto; observando que, como manifiesta la figura, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} DC &= \rho \cos \varphi \\ EC &= \rho \cos \varphi_0 \end{aligned}\right\} DE = \rho \cos \varphi - \rho \cos \varphi_0$$

$$\left.\begin{aligned} AE &= \rho \operatorname{sen} \varphi_0 \\ MD &= \rho \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}\right\} OP = \rho \operatorname{sen} \varphi_0 - \rho \operatorname{sen} \varphi$$

$$h' = FC = EC - OA = \rho \cos \varphi_0 - y_0,$$

resultará:

$$y = y_0 + \rho \cos \varphi - \rho \cos \varphi_0$$
$$x = \rho \operatorname{sen} \varphi_0 - \rho \operatorname{sen} \varphi,$$

de donde

$$dy = -\rho \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi$$
$$dx = -\rho \cos \varphi \, d\varphi$$

Además

$$ds = -\rho \, d\varphi \quad \text{y} \quad \frac{ds}{\rho} = -d\varphi .$$

Sustituyendo en las expresiones de A, B y C, tendremos

$$A = \int_0^L \frac{ds}{\rho} = \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (-d\varphi) = 2\varphi_0 ;$$

$$B = \int_0^L \left(dy + x\frac{ds}{\rho}\right) = \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (-\rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi - \rho \operatorname{sen} \varphi_0 d\varphi + \rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi)$$

$$B = -\int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} \rho \operatorname{sen} \varphi_0 d\varphi = -\rho \operatorname{sen} \varphi_0 \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} d\varphi = -\frac{1}{2} L \times (-2\varphi_0) = L\varphi_0;$$

$$C = \int_0^L \left(dx - y\frac{ds}{\rho}\right) = \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (-\rho \cos \varphi d\varphi + y_0 d\varphi + \rho \cos \varphi d\varphi - \rho \cos \varphi_0 d\varphi)$$

$$C = -\int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (\rho \cos \varphi_0 - y_0) d\varphi = -h' \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} d\varphi = -h' \times (-2\varphi_0) = 2h'\varphi_0 ;$$

como habíamos indicado.

277. Si las cargas no están repartidas simétricamente, será $\zeta' \gtrless \zeta''$, y las fórmulas (I) subsisten, sin que sea posible simplificar más su estructura.

Por el contrario, cuando las cargas están simétricamente repartidas, la línea de cerramiento de la curva de presiones será horizontal, las ordenadas extremas ζ' y ζ'' serán iguales, pudiendo establecer $\zeta' = \zeta'' = \zeta$: y las ecuaciones (I) se reducen á dos; porque como ahora veremos la (1) y (2) resultan idénticamente iguales.

En efecto; si en el sistema (I) hacemos $\zeta' = \zeta'' = \zeta$, $A = 2\varphi_0$, $B = L\varphi_0$, $C = 2h'\varphi_0$ y dividimos cada ecuación por el coeficiente respectivo de ζ, tendremos:

$$-\frac{b^2\varphi_0}{6L} + f = z + \frac{Q'}{Q} f' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$-\frac{b^2\varphi_0}{6L} + \frac{2\xi}{L} f = \zeta + \frac{Q'}{Q} \cdot \frac{2\xi'}{L} f' \quad (2)$$

$$\frac{b^2 h'\varphi_0}{6fL} + u = \zeta + \frac{Q'}{Q} u' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ahora bien, es evidente que por la simetría de la curva media y de la distribución de las cargas, los centros de gravedad de las superficies Ω y Ω' estarán en la vertical que pasa por el pnnto medio de aquella curva, es decir sobre el eje vertical de simetría; por consiguiente tendremos que

$$\xi = \xi' = \frac{1}{2} L; \quad \text{y} \quad \frac{2\xi}{L} = \frac{2\xi'}{L} = 1;$$

lo que hace ver que las ecuaciones (1) y (2) tienen los términos correspondientes idénticos, como queríamos demostrar.

En el caso que nos ocupa, las incógnitas son dos: ζ y Q; y las ecuaciones que habrá que resolver, son las siguientes

$$
(\mathrm{J}) \begin{cases} -\dfrac{b^2\varphi_0}{6\mathrm{L}} + f = \zeta + \dfrac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}} f' \\[2ex] \dfrac{b^2 h' \varphi_0}{6 f \mathrm{L}} + u = \zeta + \dfrac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}} u' \end{cases}
$$

278. Si el intrados, en vez de ser un arco de círculo, fuese una curva cualquiera simétrica respecto de la vertical de su punto medio, y bajo el supuesto de que las cargas están simétricamente repartidas, la ecuación (2) del sistema (I) es también inútil y las que hay que resolver son:

$$
(\mathrm{K}) \begin{cases} -\dfrac{b^2}{12} \cdot \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{L}} + f = \zeta + \dfrac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}} f' \\[2ex] \dfrac{b^2}{12} \cdot \dfrac{\mathrm{C}}{f\mathrm{L}} + u = \zeta + \dfrac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}} u' \end{cases}
$$

Las cantidades A y C se culcularán como se indicó oportunamente por las fórmulas

$$
\mathrm{A} = \frac{s_1}{\rho_1} + \frac{s_2}{\rho_2} + \frac{s_3}{\rho_3} + \ldots\ldots \text{ etc.}
$$

$$
\mathrm{C} = \mathrm{L} - \left[\frac{y_1 s_1}{\rho_1} + \frac{y_2 s_2}{\rho_2} + \frac{y_3 s_3}{\rho_3} + \ldots \text{ etc.} \right]
$$

Si hacemos

$$
f - \frac{b^2}{12} \cdot \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{L}} = f_0 \quad \text{y} \quad u + \frac{b^2}{12} \cdot \frac{\mathrm{C}}{f\mathrm{L}} = u_0,
$$

las ecuaciones (K) toman las formas

$$
f_0 = \zeta + \frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}} f'
$$

$$
u_0 = \zeta + \frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{Q}} u';
$$

de los cuales se obtiene

$$Q = \frac{u' - f'}{u_0 - f_0} Q'$$

$$z = f_0 - \frac{Q'}{Q} f'$$

Por la primera de estas fórmulas se calculará el empuje horizontal y por la segunda, la ordenada del orígen de la curva de presiones.

279. Finalmente, si en la ecuación general de esta curva (número **264**) hacemos $z' = z$ y $z'' - z' = 0$, aquella toma la forma,

$$\eta = z + \frac{Q'}{Q} \eta',$$

con la cual se determinarán las ordenadas necesarias del polígono real de presiones, para proceder á su trazado.

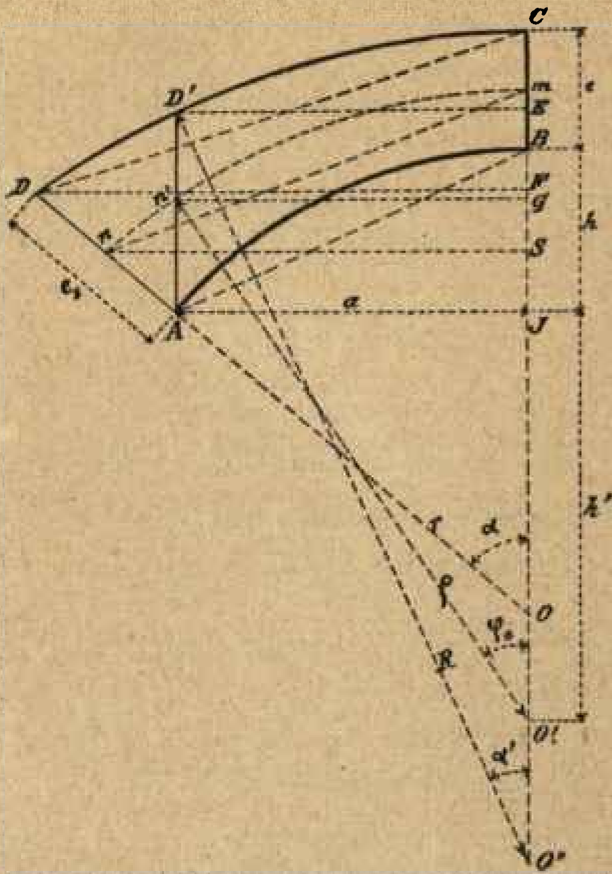
280. Ejemplo.—Supongamos una bóveda escarzana, rebajada al $\frac{1}{6}$, siendo los datos del problema los siguientes:

L	$= 2a$ **Luz de la bóveda**....................	$L = 18^m$.
h	**Flecha**....................................	$h = 3^m$.
e	**Espesor en la clave**......................	$e = 0^m,80$.
e_1	**Idem en los arranques**....................	$e_1 = 1^m,00$.
b	Espesor medio de la bóveda $= \frac{e + e_1}{2}$	$b = 0^m,90$.
δ'	**Peso del metro cúbico de fábrica**..........	$\delta' = 2200$ kg.
δ	Peso del metro cúbico de la sobrecarga....	$\delta = 1600$ kg.
h_1	Altura de la sobrecarga, sobre el trasdos en **la clave**..............................	$h_1 = 0^m,70$.

Ante todo hay que hallar la expresión general de y, es decir, la ecuación de la línea media referida á los ejes rectangulares

OX, OY (figura 77), cuyo origen es el vértice del ángulo interior del arranque de la izquierda, para calcular las ordenadas $y_0, y_1 \ldots y_n$.

Fig. 76.



Representemos (figura 76) por

r el radio del intrados;

R el radio del trasdos;

ρ el radio del arco medio;

α el ángulo que forma con la vertical el radio extremo OA del intrados;

α' el ángulo que forma con la vertical el radio O''D' del trasdos;

φ_0 el ángulo que forma con la vertical el radio extremo O'n' de la línea media;

y_0 la ordenada del punto n', extremo izquierdo de la línea media;

Y_0 la ordenada del extremo izquierdo D' del trasdos;

h' la distancia O'J, entre el centro del círculo á que corresponde la línea media y la horizontal de los arranques.

Fundándose en que toda cuerda es media proporcional entre el diámetro y la proyección de aquella sobre éste, la expresión de r será

$$r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$$

El ángulo α quedará definido por su seno, cuya expresión es

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{r}.$$

Si el espesor en los arranques se determina por la fórmula $e_1 = \frac{e}{\cos \alpha}$, y fuera necesario calcular $\cos \alpha$, su valor es, como se deduce de la figura,

$$\cos \alpha = \frac{r - h}{r}.$$

El radio ρ de la línea media se calculará por la expresión

$$\rho = \frac{\left(r + \frac{1}{2} e_1\right)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + h^2}{2h},$$

que se deduce fácilmente aplicando á la cuerda mn la propiedad, antes indicada, de que es media proporcional entre el diámetro 2ρ y su proyección *ms* sobre este.

El cuadrado de la cuerda *mn* es

$$(mn)^2=(ns)^2+(sm)^2=(on)^2 \operatorname{sen}^2\alpha+h^2=\left(r+\frac{1}{2}e_1\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha+h^2.$$

El áugulo φ_0, se define por su seno, cuyo valor es

$$\operatorname{sen}\varphi_0=\frac{a}{\rho}.$$

El coseno será

$$\cos\varphi_0=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi_0}$$

La ordenada y_0 del punto n' es

$$y_0=JG=mJ-mG=mJ-(mO'-O'G);$$

pero como se tiene $mJ=\frac{e}{2}+h$, $mO'=\rho$, $O'G=\rho\cos\varphi_0$, resultará

$$y_0=\frac{e}{2}+h-(\rho-\rho\cos\varphi_0)$$

El radio R del trasdos, tendrá por expresión

$$R=\frac{(r+e_1)^2\operatorname{sen}^2\alpha+h^2}{2h},$$

la cual se deduce considerando que el cuadrado de la cuerda DC, vale $(DC)^2=(DF)^2+(FC)^2$, que $DF=DO\operatorname{sen}\alpha=(r+e_1)\operatorname{sen}\alpha$ y $FC=h$; de donde $(DC)^2=2R\,(FC)$, ó bien

$$(r+e_1)^2\operatorname{sen}^2\alpha+h^2=2Rh.$$

Determinado R, el ángulo α' quedará definido por su seno ó por su coseno; siendo

$$\operatorname{sen}\alpha' = \frac{a}{R} \quad \text{y} \quad \cos\alpha' = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha'}$$

La ordenada Y_0 del punto D', que es necesario conocer, se deduce fácilmente (figura 76);

$$Y_0 = JE = JC - CE = JC - (CO'' - O''E) ;$$

pero como, según se ve en la figura,

$$JC = h + e, \qquad C''O'' = R, \qquad O''E = R\cos\alpha',$$

resultará

$$Y_0 = e + h - (R - R\cos\alpha') .$$

La aplicación de las fórmulas que preceden, al caso que estudiamos, conduce á los siguientes resultados:

$r = 15^m,00$	$\rho = 15^m,915$
$\operatorname{sen}\alpha = 0,6$	$\operatorname{sen}\varphi_0 = 0,5655$
$\cos\alpha = 0,8$	$\cos\varphi_0 = 0,8247$
$e_1 = 1^m,00$	$y_0 = 0^m,61$
$R = 16^m,86$	$h' = \rho\cos\varphi_0 - y_0 = 12^m,515$
$\operatorname{sen}\alpha' = 0,5338$	$\varphi_0 = 34°26'13'',26$
$\cos\alpha' = 0,8456$	$\varphi_0 = 0,601$
$Y_0 = 1^m,20$	$2\varphi_0 = 1,202.$

La ecuación del arco medio, referido á los ejes XY (figura 77), es fácil de hallar. En efecto; la ecuación de la línea media referida á los ejes X'Y' que pasan por su centro y son respectivamente paralelos á los XY, es

$$x'^2 + y'^2 = \rho^2$$

Las fórmulas de transformación de coordenadas para pasar á los ejes X_1Y son:

$$x' = x - a$$
$$y' = y_1 + \rho\cos\varphi_0$$

Sustituyendo tendremos

$$y_1^2 + 2\rho \cos \varphi_0 y_1 - x(2a - x) = 0$$

que es la ecuación de la línea media referida á los ejes X_1Y, y de la cual se deduce

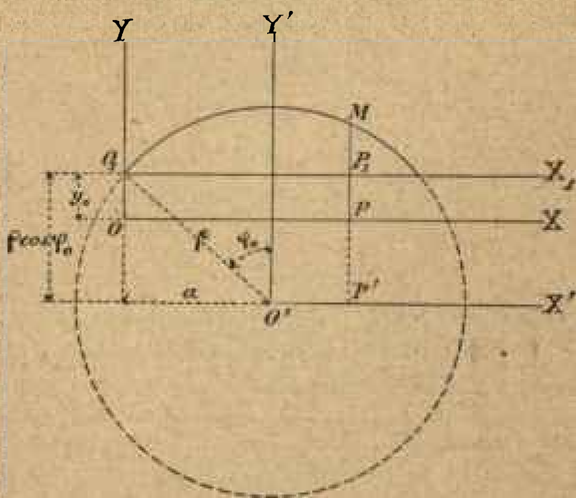
$$y_1 = -\rho \cos \varphi_0 + \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi_0 + x(2a - x)}$$

Pero como el valor de y es, según se ve claramente en la figura, $y = y_0 + y_1$, tendremos por último:

$$y = -(\rho \cos \varphi_0 - y_0) + \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi_0 + x(2a - x)}$$

que es la expresión general de la ordenada de la línea media referida á los ejes que nos interesan, XY.

Fig. 77.



Observando que $\rho \cos \varphi_0 - y_0 = h'$ y que $2a = L$, podremos tambien escribir

$$y = -h' + \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi_0 + x(L - x)},$$

y puesto que tenemos

$$h' = \rho \cos \varphi_0 - y_0 = \quad 12{,}515$$
$$\rho^2 \cos^2 \varphi_0 = \quad \dots\dots\dots \quad = 172{,}2656$$
$$L = \quad \dots\dots\dots \quad = 18$$

resultará

$$(a) \qquad y = -12{,}515 + \sqrt{172{,}2656 + x(18 - x)}$$

Si dividimos la semibóveda por planos verticales, equidistantes la cantidad $\lambda = 1^m{,}50$, en seis partes (figura 78) las coordenadas de los puntos de división de la linea media serán, aplicando la fórmula (*a*), las que siguen

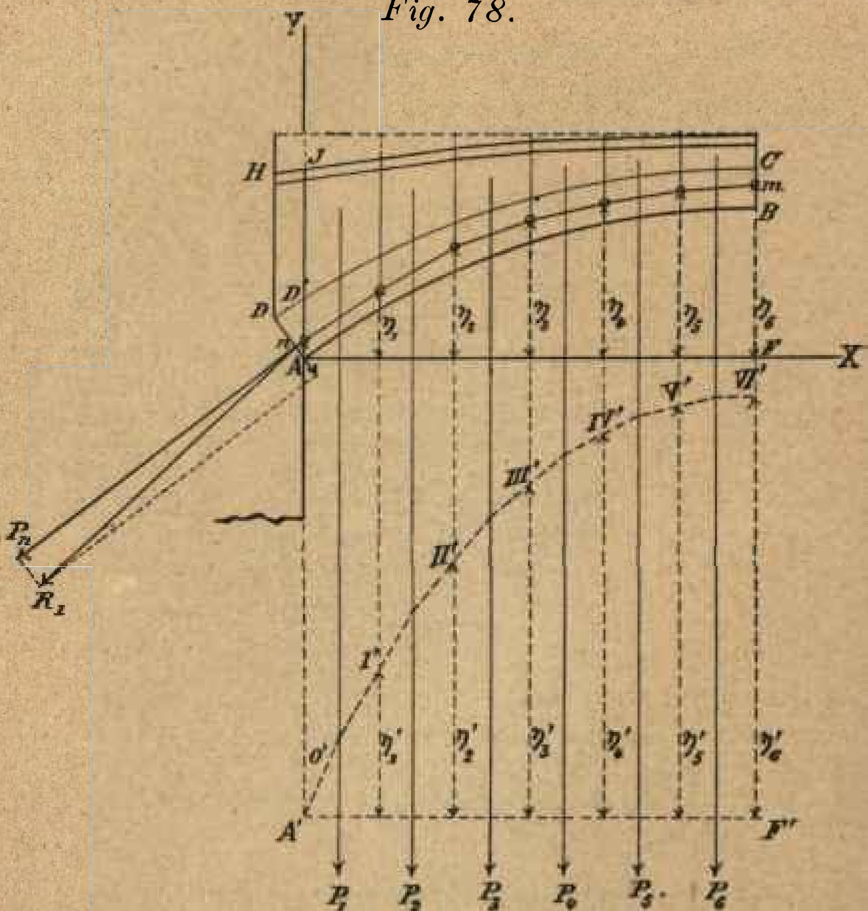
Para	$x_0 = 0$	.....	$y_0 = 0{,}61$
»	$x_1 = 1{,}50$	.....	$y_1 = 1{,}521$
»	$x_2 = 3$	.....	$y_2 = 2{,}225$
»	$x_3 = 4{,}50$	.....	$y_3 = 2{,}75$
»	$x_4 = 6$	.....	$y_4 = 3{,}114$
»	$x_5 = 7{,}50$	.....	$y_5 = 3{,}328$
»	$x_6 = 9$	.....	$y_6 = 3{,}40$

Como comprobación debe resultar que $h = y_6 - \frac{e}{2}$; y en efecto, como $\frac{e}{2} = 0{,}40$ tendremos $h = 3^m$, según se había establecido.

Reducida la sobrecarga á su equivalente de fábrica, se han determinado las superficies en que se descompone la semibóveda y sobrecarga correspondiente; y sus valores numéricos, en metros cuadrados, se han multiplicado por $\delta' = 2200$ kg., para obtener los valores de las cargas P_1, P_2 ..... P_6.

Para evitar la acumulación de errores gráficos, se ha hecho la suma de las cargas sucesivas, $P_1 + P_2$, $P_1 + P_2 + P_3$ ..... etcétera: y su valor lineal se ha obtenido, estableciendo que cada milímetro represente 400 kg.

Fig. 78.

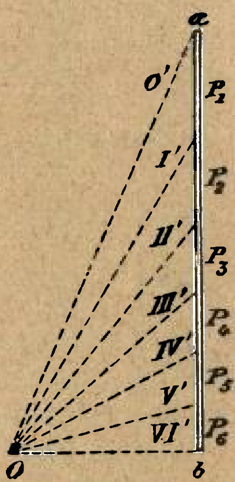


Los resultados son los siguientes:

$P_1 = 11319$ kg.	$P_1 = 11319$ kg.	$= 28{,}3$ mm
$P_2 = 9092$ »	$P_1 + P_2 = 20411$ »	$= 51$ »
$P_3 = 7425$ »	$P_1 + P_2 + P_3 = 27836$ »	$= 69{,}6$ »
$P_4 = 6270$ »	$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 34106$ »	$= 85{,}3$ »
$P_5 = 5494$ »	$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 39600$ »	$= 59$ »
$P_6 = 5082$ »	$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 44682$ »	$= 111{,}7$ »

La determinación de los centros de gravedad se ha hecho considerando como trapecios las superficies parciales limitadas por las juntas verticales, el intrados y la línea de sobrecarga, aplicando el procedimiento propio del trapecio.

Fig. 79.



Dibujadas las líneas de acción de las cargas P_1, P_2 .... P_6, y construído su polígono *ab* (figura 79), se ha elegido como polo el punto O situado sobre la horizontal que pasa por el punto *b*, y á una distancia $Ob = 50^{mm}$, que representará 20000 kg.; por lo tanto $Q' = 20000$ kg.

Trazados los radios polares I', II', III' .... etc., se ha construído el polígono funicular que se ve en la figura 78, correspondiente á las fuerzas P_1, P_2 .... P_6 y relativo al polo O.

La recta A'F' será horizontal, porque representa la mitad de la línea de cerramiento.

Medidas las ordenadas η'_1, η'_2, ... η'_6 se han encontrado los valores siguientes:

$\eta'_0 = 0$	
$\eta'_1 = 2{,}90$	$\eta'_4 = 7{,}63$
$\eta'_2 = 5{,}08$	$\eta'_5 = 8{,}20$
$\eta'_3 = 6{,}61$	$\eta'_6 = 8{,}38$

Para calcular f, f', u, u', es necesario disponer de los cuadrados y_0^2, y_1^2 ... etc., así como de los productos $y_1\,\eta_1, y_2\,\eta_2$ ... etcétera. Los resultados se consignan á continuación, enfrente de los de y y η'.

$y_0 = 0{,}61$	$\eta'_0 = 0$	$y_0^2 = 0{,}372$	
$y_1 = 1{,}521$	$\eta'_1 = 2{,}90$	$y_1^2 = 2{,}313$	$y_1\eta'_1 = 4{,}411$
$y_2 = 2{,}225$	$\eta'_2 = 5{,}08$	$y_2^2 = 4{,}951$	$y_2\eta'_2 = 11{,}303$
$y_3 = 2{,}75$	$\eta'_3 = 6{,}61$	$y_3^2 = 7{,}562$	$y_3\eta'_3 = 18{,}177$
$y_4 = 3{,}114$	$\eta'_4 = 7{,}63$	$y_4^2 = 9{,}697$	$y_4\eta'_4 = 23{,}76$
$y_5 = 3{,}328$	$\eta'_5 = 8{,}20$	$y_5^2 = 11{,}075$	$y_5\eta'_5 = 27{,}289$
$y_6 = 3{,}40$	$\eta'_6 = 8{,}38$	$y_6^2 = 11{,}56$	$y_6\eta'_6 = 28{,}492$

Las expresiones de f , f' , u , u', son:

$$f = \frac{2\lambda}{3L}\left[y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)\right]$$

$$f' = \frac{2\lambda}{3L}\left[\eta'_6 + 4(\eta'_1 + \eta'_3 + \eta'_5) + 2(\eta'_2 + \eta'_4)\right]$$

$$u = \frac{2\lambda}{3fL}\left[y_0^2 + y_6^2 + 4(y_1^2 + y_3^2 + y_5^2) + 2(y_2^2 + y_4^2)\right]$$

$$u' = \frac{2\lambda}{3fL}\left[y_6\eta'_6 + 4(y_1\eta'_1 + y_3\eta'_3 + y_5\eta'_5) + 2(y_2\eta'_2 + y_4\eta'_4)\right]$$

Observando que $\frac{2\lambda}{3L} = \frac{1}{18}$, tendremos

$$f = \frac{1}{18}\left[0{,}61 + 3{,}40 + 4(1{,}521 + 2{,}75 + 3{,}328) + 2(2{,}225 + 3{,}114)\right]$$

$$f' = \frac{1}{18}\left[8{,}38 + 4(2{,}90 + 6{,}61 + 8{,}20) + 2(5{,}08 + 7{,}63)\right]$$

y efectuando operaciones indicadas.

$$f = 2{,}505$$
$$f' = 5{,}813$$

Del propio modo, tenemos

$$u = \frac{1}{45{,}09}\left[0{,}372 + 11{,}56 + 4(2{,}313 + 7{,}562 + 11{,}075) + 2(4{,}951 + 9{,}697)\right]$$

$$u' = \frac{1}{45{,}09}\left[28{,}492 + 4(4{,}411 + 18{,}177 + 27{,}289) + 2(11{,}303 + 23{,}76)\right]$$

y efectuando operaciones

$$u = 2{,}773$$
$$u' = 6{,}612$$

Por otra parte, como $A = 2\varphi_0$ y $C = 2h'\varphi_0$, resulta

$$A = 1{,}202$$
$$C = 15{,}043$$

Las expresiones generales de u_0 y f_0 son

$$u_0 = u + \frac{b^2C}{12fL}$$

$$f_0 = f - \frac{b^2A}{12L}$$

las cuales toman los siguientes valores, sustituyendo los de u, f, C, y A, que se han calculado

$$u_0 = 2{,}7955$$
$$f_0 = 2{,}5005$$

La fórmula del empuje horizontal es, como hemos visto,

$$Q = \frac{u' - f'}{u_0 - f_0} Q'$$

y sustituyendo

$$Q = \frac{6{,}612 - 5{,}813}{2{,}795 - 2{,}500} \times 20000 ,$$

ó bien, en números redondos,

$$Q = 54170 \text{ kg.}$$

La ordenada z tiene por expresión

$$z = f_0 - \frac{Q'}{Q} \times f'$$

que se convierte en

$$\zeta = 2,5005 - \frac{20000}{54170} \times 5,813\,,$$

ó bien

$$\zeta = 0^m,3543\,.$$

Por último, como la ecuación de la curva real de presiones es

$$\eta = \zeta + \frac{Q'}{Q}\eta',$$

las expresiones numéricas de η_1, η_2 .... η_6 serán las siguientes:

$$\eta_0 = \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta_0 = 0^m,354$$

$$\eta_1 = 0,3543 + \frac{20000 \times 2,90}{54170} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta_1 = 1^m,425$$

$$\eta_2 = 0,3543 + \frac{20000 \times 5,08}{54170} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta_2 = 2^m,23$$

$$\eta_3 = 0,3543 + \frac{20000 \times 6,61}{54170} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta_3 = 2^m,795$$

$$\eta_4 = 0,3543 + \frac{20000 \times 7,63}{54170} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta_4 = 3^m,171$$

$$\eta_5 = 0,3543 + \frac{20000 \times 8,20}{54170} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta_5 = 3^m,382$$

$$\eta_6 = 0,3543 + \frac{20000 \times 8,38}{54170} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta_6 = 3^m,448$$

Componiendo el peso total $P_1 + P_2 + \ldots + P_6$ con el empuje horizontal Q, se ha encontrado la magnitud de la resultante que obra en la junta vertical AD′; y componiendo á su vez esta resultante (no dibujada en la figura 78) con el peso del macizo AJHD, se ha obtenido la magnitud, dirección y punto de aplicación de la resultante R_1 que se desarrolla en la junta de arranques AD; habiendo encontrado por último, que la componente normal P_n de la expresada fuerza R_1 vale $P_n = 73280$ kilogramos, y que su punto de aplicación dista del intrados y trasdos las cantidades

$$An = 0^m,29 = \text{distancia al intrados}$$
$$Dn = 0^m,71 = \quad \text{»} \quad \text{al trasdos.}$$

En la clave, el punto de paso m, del empuje horizontal, ha resultado á las distancias siguientes:

$$mB = 0^m,45 = \text{distancia al intrados}$$
$$mC = 0^m,35 = \quad \text{»} \quad \text{al trasdos.}$$

Estos resultados nos dicen:

1.° Que las compresiones máximas corresponden á la arista A del intrados en los arranques, y á la C del trasdos en la junta de clave.

2.° Que por hallarse situado el punto m en el núcleo central ó tercio medio del espesor de la bóveda en la clave, la junta BC resultará toda ella comprimida, más en C que en B .

3.° Que por haber resultado el punto n fuera del núcleo central en la junta de arranques, ésta sufrirá una compresión máxima en A y una tracción máxima en D .

4.° Que habiendo resultado toda la curva de presiones dentro del espesor de la bóveda, la rotación alrededor de las aristas de trasdos ó de intrados, será imposible; y esto aunque se prescinda de la influencia del mortero.

5.° Que por la pequeñez de los ángulos que forman las tangentes á la curva de presiones con las juntas normales respectivas, el deslizamiento á lo largo de aquellas es también imposible.

El máximo de dichos ángulos pudiera fijarse en unos 35° á 37°.

Falta sólo calcular las tensiones unitarias en B, C, A y D para adquirir noción completa de las condiciones mecánicas de la bóveda que se estudia; pues en todas las demás juntas la curva de presiones se separa relativamente menos de la línea media, que en la clave y en los arranques.

La fórmula general que hay que aplicar es (núm. **15**)

$$R = \frac{P}{b}\left(1 + \frac{12\left(\frac{b}{2} - d\right)x}{b^2}\right)$$

haciendo en ella $x = +\frac{b}{2}$ para la presión máxima y $x = -\frac{b}{2}$ para la presión mínima.

Según vimos oportunamente, dicha fórmula se convierte para tales límites en los que á continuación se expresan

$$\text{Para } x = +\frac{6}{2} \quad (a) \quad R = \frac{2P}{b}\left(2 - \frac{3d}{b}\right) = \text{Presión máxima.}$$

$$\text{»} \quad x = -\frac{6}{2} \quad (b) \quad R = \frac{2P}{b}\left(\frac{3d}{b} - 1\right) = \quad \text{» mínima.}$$

Claro es, que cuando la fórmula (b) dé un valor negativo, la fuerza desarrollada será una tracción.

Ha resultado

$$\text{En la clave..}\left\{\begin{array}{l} P = Q = 54170 \text{ kg.} \\ b = 0{,}80 \\ d = 0{,}35 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{2P}{b} = 135425 \\ \frac{3d}{b} = 1{,}3125 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2 - \frac{3d}{b} = +0{,}6875 \\ \frac{3d}{b} - 1 = +0{,}3125 \end{array}\right.$$

Presión máxima por metro cuadrado. $R_t = +93105$ kg.
Idem mínima » » $R_i = +42320$ kg.

$$\text{En los arranques.....}\left\{\begin{array}{l} P = 73280 \text{ kg.} \\ b = 1 \\ d = 0{,}29 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{2P}{b} = 146560 \\ \frac{3d}{b} = 0{,}87 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2 - \frac{3d}{b} = +1{,}13 \\ \frac{3d}{b} - 1 = -0{,}13 \end{array}\right.$$

Presión máxima por metro cuadrado. $R_i = +165613$ kg.
Idem mínima negativa. . (tracción) $R_t = -19053$ kg.

Si, como suele hacerse, referimos las tensiones unitarias al centímetro cuadrado, para lo cual no habrá más que dividir por 10000 los valores anteriores, tendremos:

En la clave......	Compresión máxima, por centímetro cuadrado, en el trasdos............	$R_t = + 9{,}31$ kg.
	Compresión mínima, por centímetro cuadrado, en el intrados...........	$R_i = + 4{,}23$ kg.
En los arranques.	Compresión máxima, por centímetro cuadrado, en el intrados...........	$R_i = + 16{,}56$ kg.
	Tracción máxima, por centímetro cuadrado, en el trasdos............	$-R_t = + 1{,}90$ kg.

De aquí resulta que el coeficiente de trabajo máximo por compresión es de 16,56 kg. por centímetro cuadrado, y el correspondiente á la tracción es de 1,90 kg. por la misma unidad superficial.

El primero pudiera aceptarse tratándose de una fábrica de piedra ó ladrillo de regular dureza y mortero hidráulico; pero el segundo es algo excesivo; porque en general, no es prudente que exceda de 1,50 kg. por centímetro cuadrado, aun tratándose de morteros de cemento.

CIMIENTOS

281. Generalidades.—Reciben el nombre de *cimientos*, los macizos de fábrica que se establecen á cierta profundidad de la superficie del suelo, sirven de fundamento á los muros y tienen por objeto principal repartir la carga que estos transmiten, sobre una superficie bastante extensa, de manera que la presión unitaria máxima á que resulte sometida la masa de tierra, no exceda del límite conveniente de seguridad.

Para lograr este fin, se da á tales macizos un ancho proporcionado, mayor que el del muro en su base; y aun en los terrenos de roca, en que por su gran resistencia pudieran aquellos suprimirse, no suele excusarse su construcción, porque el replanteo del muro resulta así más fácil y más exacto.

En los casos más usuales, los cimientos pueden construirse sobre terreno firme, situado á cierta profundidad de la superficie, practicando la excavación necesaria, llamada *caja de cimientos,* sobre *macizos de arena* ó sobre *pilotes.*

282. Carga unitaria de seguridad que el terreno puede soportar.—Con objeto de evitar asientos desiguales, y, por lo tanto, movimientos perjudiciales en los muros, que podrían provocar su ruina, es absolutamente necesario que la presión unitaria máxima transmitida al terreno no exceda de ciertos límites.

Este dato fundamental es difícil de fijar sin el conocimiento previo de la naturaleza, situación y condiciones del terreno.

Experiencias directas hechas en el lugar de que se trate, para apreciar el grado de compresibilidad de la masa de tierra, bajo cargas mayores que la que ha de soportar, y el estudio de cimentaciones ejecutadas en terrenos análogos, pueden servir de base para fijar la carga unitaria máxima que con toda seguridad puede admitirse.

A falta de datos más exactos pueden aceptarse los valores que se indican en el siguiente cuadro.

Clase de terrenos.	Carga de seguridad en kg. que puede soportar por cm.:
Terrenos muy flojos........................	0,27
Idem flojos..................................	0,50
Idem de resistencia media..................	1 á 1,50
Idem duros y coherentes....................	2 á 3
Grava y arena al abrigo de corrientes subterráneas..................	4 á 5
Roca................	La misma que en la base del muro.

283. Principios generales.—Para que una cimentación responda al objeto importante de proporcionar al muro una base de sustentación invariable, es necesario que, por su disposición forma y dimensiones, satisfaga á las condiciones siguientes:

1.ª La resultante de las presiones en el fondo de la caja de cimientos debe ser perpendicular á la base de la fundación, y conviene que pase por el centro de gravedad de esta, ó, por lo menos, que caiga dentro del núcleo central ó tercio medio de su anchura.

2.ª Si el terreno es homogéneo y, por tanto, de la misma resistencia, debe verificarse que para una porción cualquiera de la construcción, la carga unitaria máxima transmitida al terreno en la base de la fundación, sea la misma. Si el terreno no es homogéneo, es necesario que la carga unitaria máxima en cada región distinta sea proporcionada á su resistencia.

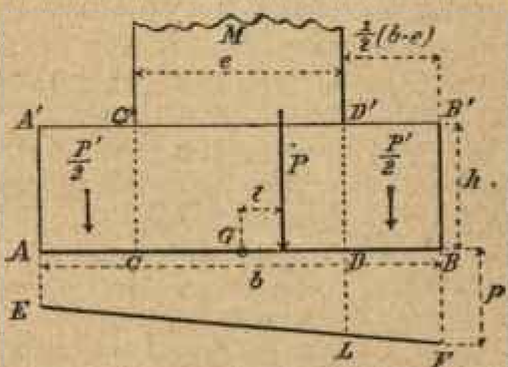
3.ª Siempre que sea posible, conviene que la base de la fundación, es decir, el fondo de la caja de cimientos, se halle en el mismo plano horizontal, á fin de evitar asientos desiguales en macizos de altura distinta, que podrían originar quiebras en la fábrica; pues los asientos uniformes no comprometen la estabilidad de la misma.

4.ª La sección recta del macizo de cimentación será rectangular; pero cuando sus dimensiones sean demasiado grandes, comparadas con las del muro que ha de sustentar, las caras laterales se dispondrán en escalones ó retallos.

284. Cálculo de un macizo de cimentación.—Consideraremos dos casos, según que la resultante de las presiones no pase por el centro de gravedad de la base de la fundación, ó pase por dicho punto ó muy cerca de él.

285. I.er CASO.—**Cuando la resultante de las presiones no pase por el centro de gravedad de la base del cimiento.**—Sea (M) (figura 80) la proyección vertical de una

Fig. 80.



zona de muro, de longitud igual á la unidad, medida perpendicularmente al plano de la figura, y ABB′A′ el macizo correspondiente de cimentación.

La situación del fondo AB de la caja de cimientos se supone conocida, puesto que al escavarla hay que llegar hasta el terreno firme; por consiguiente, el valor de P se calculará sin dificultad.

Sea P la resultante de las presiones verticales transmitidas al plano AB por el muro (M), supuesto prolongado hasta dicho plano, es decir, comprendiendo el macizo CDD′C′;

P′ el peso de los macizos laterales correspondientes á las bermas ó zarpas iguales A′C′ y D′B′;
e el espesor del muro en su base C′D′;
l la distancia entre el punto medio G de la base AB de la fundación y el punto de aplicación de la resultante P;
b ancho AB del macizo de cimentación;
h altura del mismo;
δ' peso de la unidad de volumen de la fábrica;
p_m presión por unidad de superficie que, como máximo, puede soportar con toda seguridad el fondo de la caja de cimientos;
K coeficiente de seguridad á la extensión del mortero, en la fábrica del macizo de cimentación.

La base AB está sometida á una fuerza de compresión igual á P + P′ y á un momento de flexión Pl.

La presión máxima unitaria se desarrollará, en el caso de la figura 80, en la arista proyectada en B, y tendrá por expresión

$$p = \frac{P + P'}{b} + \frac{6Pl}{b^2} \quad \ldots . \quad (1)$$

En la región BD, la presión unitaria decrece de B á D; pero en beneficio de la resistencia, admitiremos que en dicha región la presión unitaria es constante é igual á p; de suerte que la resultante de las reacciones elementales desarrolladas por el terreno en la expresada región será $\frac{1}{2} p\,(b - e)$, y su brazo de palanca con relación al plano proyectado en DD′ será $\frac{1}{4}(b-e)$.

El macizo BDD′B′ podemos, pues, considerarlo como un prisma empotrado en DD′ y sometido á una carga unitaria, p, uniformemente repartida en toda su longitud. Tiene, por tanto, que resistir al momento máximo de flexión

$$M' = \frac{1}{8} p (b-e)^2;$$

pero como la sección de dicho prisma tiene por módulo

$$Z' = \frac{1}{6} h^2,$$

la ecuación de resistencia será

$$\frac{1}{6} h^2 K = \frac{1}{8} p (b-e)^2$$

de donde

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3p}{K}} (b-e) \quad \ldots . \quad (2)$$

Por otra parte, el peso de los dos macizos laterales será evidentemente

$$P' = \delta' h (b-e) \quad \ldots . \quad (3)$$

Si entre las ecuaciones (1), (2) y (3) eliminamos P′ y h, resultará la siguiente ecuación en b, que resuelve el problema que nos ocupa, dando á p su valor límite p_m.

$$b^3 - 2\left(\frac{p_m}{\delta' \sqrt{\frac{3p_m}{K}}} + e\right) b^2 + \left(\frac{2P}{\delta' \sqrt{\frac{3p_m}{K}}} + e^2\right) b + \frac{12Pl}{\delta' \sqrt{\frac{3p_m}{K}}} = 0 \quad \ldots . \quad (4)$$

Si esta ecuación tiene sus tres raíces reales, dos de ellas serán positivas y la otra negativa, puesto que presenta dos variaciones y una permanencia, y un límite superior de las primeras será seguramente el coeficiente del segundo término tomado con signo positivo.

La raíz real negativa no corresponde á la cuestión; pero de las positivas se tomará la menor si ambas son mayores que e, espesor del muro en la base.

Si se quiere evitar la resolución de la ecuación (4), que es un tanto laboriosa, se puede proceder del modo siguiente:

Se asigna á b un valor arbitrario, pero naturalmente mayor que e, sin gran exceso. Se calculan h y P′ por las expresiones (2) y (3) y se halla el valor de p mediante la ecuación (1). Si resulta para p un valor mayor que el que se haya fijado como límite de seguridad, hay que aumentar b en el ensayo siguiente. En el caso contrario, hay que disminuir b.

Al cabo de algunos tanteos, que son fáciles y bastante rápidos, se hallará un valor de b que, con el correspondiente de h, dará para el segundo miembro de la ecuación (1) un valor igual ó algo inferior á la carga de seguridad p_m.

Si por haber asignado á b en el primer ensayo un valor mayor que la menor de las raíces positivas, nos fuéramos alejando en los ensayos siguientes de la solución admisible y llegáramos á determinar un valor aproximado de la mayor de dichas raíces, creyendo haber resuelto el problema, se conocerá que hemos empezado mal por las dimensiones exageradas y anómalas con que resulte el macizo calculado.

286. Ejemplo.—Supongamos que se quiere determinar las dimensiones de un macizo de cimiento para un muro que transmite al fondo de la caja, por centímetro lineal contado perpendicularmente al plano de la figura 80, una carga de

$$P = 320 \text{ kg.}$$

siendo además:

$$e = 200 \text{ cm.} \qquad p_m = 1,5 \text{ kg.}$$
$$l = 20 \text{ cm.} \qquad K = 0,7 \text{ kg.}$$

Empleemos el procedimiento de ensayos sucesivos:

Para $b = 300$ cm., tendremos en números redondos:

$$b - e = 300 - 200 = 100 \text{ cm.}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 \times 1,5}{0,7}} \times 100 = 127 \text{ cm.}$$

$$P' = 0,002 \times 127 \times 100 = 25,4 \text{ kg.}$$

de donde

$$p = \frac{320 + 25,4}{300} + \frac{6 \times 320 \times 20}{300^2} = \frac{3,454}{3} + \frac{3,84}{9} = 1,578 \text{ kg. por cm.}^2$$

Este valor de p es algo grande, puesto que debe ser $p = 1,50$. Hay que aumentar b.

Hagamos $b = 350$ cm., y resultará:

$$b - e = 350 - 200 = 150 \text{ cm.}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 \times 1,5}{0,7}} \times 150 = 190 \text{ cm.}$$

$$P' = 0,002 \times 190 \times 150 = 57 \text{ kg.}$$

de donde

$$p = \frac{320 + 57}{350} + \frac{38400}{122500} = \frac{37,7}{35} + \frac{384}{1225} = 1,39 \text{ kg. por cm.}^2$$

Habiendo resultado demasiado pequeño el valor de p, hay que disminuir el de b en el nuevo ensayo.

Si hacemos $b = 320$ cm., tendremos:

$$b - e = 320 - 200 = 120 \text{ cm.}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 \times 1,5}{0,7}} \times 120 = 152 \text{ cm.}$$

$$P' = 0,002 \times 152 \times 120 = 36,5 \text{ kg.}$$

y

$$p = \frac{320 + 36,5}{320} + \frac{38400}{320^2} = \frac{35,65}{32} + \frac{384}{1024} = 1,49 \text{ kg. por cm.}^2$$

Este valor de p, que tan poco difiere por defecto de 1,50 que habíamos fijado como límite, nos dice que puede considerarse el problema prácticamente resuelto, aceptando para dimensiones del macizo que queríamos calcular:

$$b = 3^{\text{m}},20$$

$$h = 1^{\text{m}},52$$

287. Apliquemos á este mismo ejemplo el procedimiento general, acudiendo á la ecuación (4).

Los coeficientes tienen los siguientes valores:

$$2\left(\frac{p_m}{\delta'\sqrt{\frac{3p_m}{K}}} + e\right) = 2\left(\frac{1,5}{0,002\sqrt{\frac{3 \times 1,5}{0,7}}} + 200\right) = 991,6$$

$$\frac{2P}{\delta'\sqrt{\frac{3p_m}{K}}} + e^2 = \frac{2 \times 320}{0,002\sqrt{\frac{3 \times 1,5}{0,7}}} + 200^2 = 166212,8$$

$$\frac{12Pl}{\delta'\sqrt{\frac{3p_m}{K}}} = \frac{12 \times 320 \times 20}{0,002\sqrt{\frac{3 \times 1,5}{0,7}}} \ldots\ldots = 15.145539$$

Por consiguiente, la ecuación (4) será en el caso actual:

$$f(b) = b^3 - 991,6\, b^2 + 166212,8\, b + 15.145539 = 0.$$

Veamos, ante todo, si esta ecuación tiene raíces imaginarias. No puede tenerlas, porque si las tuviera, como estas figuran siempre en número par (pues á la existencia de una corresponde la de su conjugada) y tiene una raíz real negativa por ser positivo el término independiente; dicha ecuación no tendría ninguna raíz real positiva, lo que es absurdo si el problema no está mal planteado.

Para confirmar que las tres raíces son reales y para separarlas, podemos en este caso aplicar el teorema de Rolle, que dice que dos raíces reales consecutivas de un polinomio entero comprenden al menos una raíz real dc la derivada, y además que dos raíces reales consecutivas de la derivada no comprenden más de una raíz real de la ecuación propuesta, aunque no siempre, porque hay casos en que no comprenden ninguna.

La ecuación que resulta de igualar á o la primera derivada de $f(b)$ es la siguiente:

$$f'(b) = 3b^2 - 1983{,}2\, b + 166212{,}8 = 0$$

de donde

$$b = \frac{1983{,}2 \pm \sqrt{1983{,}2^2 - 4 \times 3 \times 166212{,}8}}{2 \times 3}.$$

Llamaudo b' y b'' á las dos raíces de la derivada, y haciendo el cálculo indicado, tendremos, en menos de una unidad,

$$b' = 562{,}5$$
$$b'' = 98{,}5$$

Si en la función propuesta $f(b)$, sustituímos

$$-\infty\ , 0, +b'', +b', +\infty$$

tendremos

$$f(-\infty) = -\infty$$
$$f(0) = +15.145539$$
$$f(+b'') = +22.852420{,}3$$
$$f(+b') = -27.129682{,}9$$
$$f(+\infty) = +\infty$$

Los tres cambios de signo que ofrecen estos resultados indican que la ecuación propuesta tiene las tres raíces reales: una negativa, que desde luego no interesa, porque no corresponde á la cuestión de que se trata, y las otras positivas, que llamaremos b_1 y b_2, pudiendo afirmar que la menor b_1 está comprendida entre $b'' = 98{,}5$ y $b' = 562{,}5$; y la mayor b_2 lo está entre $b' = 562{,}5$ y $+ \infty$.

Pero un límite superior de las raíces positivas es en este caso, como ya hemos dicho, el coeficiente del segundo término tomado con signo positivo. Así, pues, podemos afirmar también que

$$b_1 \begin{matrix} > 98{,}5 \\ < 562{,}5 \end{matrix} \quad \text{y} \quad b_2 \begin{matrix} > 562{,}5 \\ < 991{,}6 \end{matrix}$$

Estos resultados nos dicen que la solución hallada por el método anterior es la conveniente. Y en efecto, tenemos:

$$\begin{array}{llll} \text{Para} & b = 317 & \ldots\ldots & f(b) = + \;\; 45117{,}2 \\ \text{»} & b = 318 & \ldots\ldots & f(b) = - \;\; 115917 \\ \text{»} & b = 738 & \ldots\ldots & f(b) = - \;\; 311133 \\ \text{»} & b = 739 & \ldots\ldots & f(b) = + \;\; 26633{,}6 \end{array}$$

lo que prueba que

$$b_1 \begin{matrix} > 317 \\ < 318 \end{matrix} \quad \text{y} \quad b_2 \begin{matrix} > 738 \\ < 739 \end{matrix}$$

Como $b_1 > e$, claro es que el valor conveniente de b será

$$b = 318 \text{ cm.} = 3^{m},18.$$

Antes habíamos hallado como valor aproximado $b = 320$ cm.

La diferencia es tan escasa, que en la práctica cualquiera de aquellas dimensiones puede aceptarse indistintamente.

288. La solución $b_2 = 738$, da para h el valor

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \times 1{,}5}{0{,}7}} \times (738 - 200) = 683 \text{ cm.} = 6^{m},83$$

Con estas dimensiones anómalas, el macizo invadiría una gran parte del espacio que debe ocupar el muro, sin que esto signifique que no se cumplieran las condiciones impuestas de que $p \leqq 1{,}5$ y $K \leqq 0{,}7$. De suerte que, en realidad, el problema tiene dos soluciones: una, inadmisible por las dimensiones extraordinarias del macizo resultante, y la otra, que es la que hay que aceptar, porque dentro de las expresadas condiciones reduce el macizo rectangular á las menores dimensiones posibles.

289. Observación.—Cuando la distancia l no es grande (figura 80) puede lograrse fácilmente que la resultante total $P + P'$ en el fondo de la caja de cimientos, pase por el punto medio de la base de la fundación. Para ello basta, una vez calculado el valor de b, como pronto veremos, descentrar lo necesario el macizo hacia el lado conveniente, de manera que aquella condición quede satisfecha. Si la zarpa mayor resultara demasiado saliente, se escalonaría el macizo, como ya hemos dicho, del lado correspondiente (figura 81).

290. 2.º CASO.—**Cuando la resultante de las presiones pasa por el centro de gravedad de la base de la**

Fig. 81.

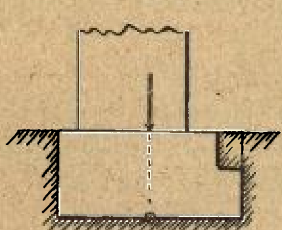
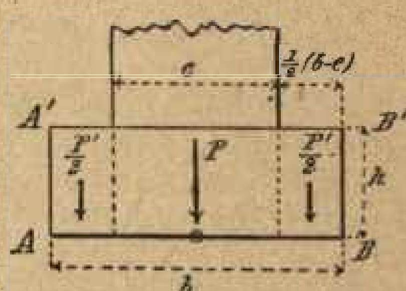


Fig. 82.



fundación.—En el plano AB (figura 82), obra una carga total uniformemente repartida, igual á $P + P'$, sobre la superficie b, y siendo p_m la carga unitaria que puede aceptarse como límite, tendremos

$$p_m b = \mathrm{P} + \mathrm{P}'.$$

Pero como en el caso que nos ocupa las zarpas tienen menos valor, pudiera prescindirse del peso P′ de los macizos laterales, en cuyo caso la ecuación de resistencia se reduce á la forma más sencilla,

$$p_m b = \mathrm{P},$$

de donde

$$b = \frac{\mathrm{P}}{p_m}$$

El valor de h se calculará, como en el caso anterior, por la expresión (2), haciendo $p = p_m$.

Si no se quiere prescindir de la influencia del peso P′, entonces las ecuaciones que resuelven el problema serán las que resulten de hacer $l = 0$ en las del caso que precede, á saber:

$$p = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{P}'}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3p}{\mathrm{K}}}\,(b - e) \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\mathrm{P}' = \delta' h\,(b - e) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Si entre estas ecuaciones eliminamos P′ y h y hacemos $p = p_m$, obtendremos la ecuación de segundo grado en b, que resuelve el problema. El mismo resultado se halla haciendo en la ecuación general (4), $l = 0$ y suprimiendo el factor común b.

De cualquier modo resultará:

$$b^2 - 2\left(\frac{p_m}{\delta'\sqrt{\frac{3p_m}{\mathrm{K}}}} + e\right)b + \left(\frac{2\mathrm{P}}{\delta'\sqrt{\frac{3p_m}{\mathrm{K}}}} + e^2\right) = 0 \ldots \quad (5)$$

291. Ejemplo.—Supongamos que los datos sean los mismos que los del ejemplo del caso que precede, sin otra diferencia que la de ser $l = 0$.

Tendremos

$$b^2 - 991,6\,b + 166212,8 = 0$$

de donde

$$b = 495,8 \pm \sqrt{495,8^2 - 166212,8}$$

Hecho el cálculo, los dos valores de b, que llamaremos b_1 y b_2 serán, forzando la última cifra;

$$b_1 = 214$$
$$b_2 = 778$$

El problema, pues, tiene dos soluciones. La aceptable es

$$b = 214 \text{ cm.} = 2^{m},14.$$

El mismo resultado se obtiene en este caso, prescindiendo del peso P′ por su escaso valor, como es fácil comprobar.

En efecto, el valor de b sería:

$$b = \frac{\text{P}}{p_m} = \frac{330}{1,5} = 213,3 \text{ cm.}$$

Como vemos, la diferencia es despreciable.

Aceptando, pues, $b = 214$ cm., tendremos en números redondos

$$b - e = 14 \text{ cm. y } h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 \times 1,5}{0,7}} \times 14 = 18 \text{ cm.}$$

Si por tratarse de un terreno menos resistente y de una fábrica hecha con mortero ordinario, fuera conveniente aceptar, por ejemplo,

$$p_m = 1 \quad \text{y} \quad \text{K} = 0,3,$$

tendríamos entonces

$$b = \frac{320}{1} = 320 \text{ cm.}$$

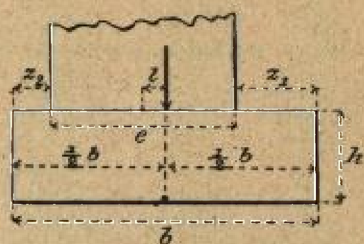
$$b - e = 320 - 200 = 120 \text{ cm.}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 \times 1}{0,3}} \times 120 = 190 \text{ cm.}$$

Estos resultados, comparados con los que poco ha hemos obtenido, demuestran que no debe descuidarse el estudio de las cimentaciones, por lo mucho que varían las dimensiones de los macizos necesarios, á poco que se modifiquen los valores da p_m y de K.

292. Caso particular.—Consideremos, por último, el caso en que la resultante de las presiones en la base del muro caiga fuera del centro de gravedad de la misma, debiendo pasar, sin embargo, la resultante final en la base de la fundación, por su punto medio (figura 83).

Fig. 83.



Supongamos determinado el ancho b del macizo por la expresión $b = \frac{P}{p_m}$. (1)

Desde luego, podemos establecer las relaciones siguientes entre las zarpas desiguales z_1 y z_2 y las magnitudes conocidas b, e y l.

$$z_1 + \frac{1}{2} e - l = \frac{1}{2} b$$

$$z_2 + \frac{1}{2} e + l = \frac{1}{2} b$$

de las que se deduce

$$z_1 = \frac{1}{2} (b - e) + l \quad \ldots. \quad (2)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} (b - e) - l \quad \ldots. \quad (3)$$

Calculadas las zarpas, el valor de h será, como desde luego se comprende,

$$h = \sqrt{\frac{3p_m}{K}}\, z_1 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Aplicando las fórmulas que preceden al caso anterior, tendremos:

$$b = \frac{320}{1} = 320 \text{ cm.}$$

$$b - e = 120 \text{ cm.}$$

$$z_1 = 60 + 20 = 80 \text{ cm.}$$

$$z_2 = 60 - 20 = 40 \text{ cm.}$$

$$h = \sqrt{\frac{3 \times 1}{0,3}} \times 80 = 253 \text{ cm.}$$

293. **Observación.**—Habrá casos en que resulte para la zarpa menor z_2, un valor negativo; pues puede muy bien suceder que

$$\frac{1}{2}(b - e) < l.$$

Si así ocurre, se hará en la práctica $z_2 = 0$.

Puede también suceder, como en el ejemplo que precede, que resulte para h un valor inconveniente, por demasiado grande. En rigor, dicho valor puede reducirse sin peligro alguno, porque en su cálculo hemos prescindido de la influencia favorable que en la resistencia del macizo saliente ejerce su propio peso, cuya expresión es $\delta' z_1 h$ y cuyo brazo de palanca con relación á la sección de empotramiento es $\frac{1}{2} z_1$.

En efecto; la reacción total de la base de la fundación sobre el macizo lateral vale $p z_1$ y engendra un momento igual á $\frac{1}{2} p z_1^2$; pero en sentido contrario obra el peso $\delta' z_1 h$, cuyo momento es $\frac{1}{2} \delta' z_1^2 h$, luego el momento resultante será

$$M' = \frac{1}{2}(p - \delta' h) z_1^2$$

y por tanto la ecuación de resistencia, más exacta que la que habíamos establecido anteriormente, será

$$\frac{1}{6} h^2 K = \frac{1}{2} (p - \delta' h) \zeta_1^2 \qquad (5)$$

que se reduce á la siguiente forma:

$$h^2 + \frac{3\delta' \zeta_1^2}{K} h - \frac{3p\zeta_1^2}{K} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Pero como en el caso supuesto tenemos

$$\zeta_1 = 80 , \ \delta' = 0{,}002 , \ p = 1 , \ K = 0{,}3$$

la ecuación (6) se convierte en

$$h^2 + 128\, h - 64000 = 0$$

de donde

$$h = -64 \pm \sqrt{64^2 + 64000} .$$

y como el valor negativo de h no corresponde á la cuestión, tendremos finalmente en números redondos

$$h = 197 \text{ cm.}$$

límite mínimo de h, que permite asignarle en la práctica el valor que se estime más conveniente, dentro de la condición $h \geqq 197$ cm.

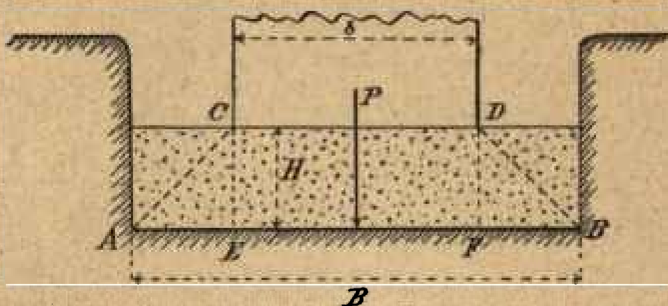
La misma observación es aplicable á los valores de h, calculados en los demás casos que preceden.

294. Fundación sobre macizo de arena.— Cuando el terreno sobre que se ha de fundar es compresible, puede apoyarse el cimiento sobre un macizo de arena (figura 84) de dimensiones tales que, una vez alojado este en su correspondiente caja y sometido al peso de la construcción, resulte invariable, y además, que la presión unitaria transmitida al terreno no exceda del límite de seguridad que se señale.

El problema que hay que resolver es el siguiente:

Conociendo el ancho b del cimiento, (figura 84) y la carga total P (que se hará pasar necesariamente por el punto medio de CD), calcular las dimensiones B y H del macizo de arena que

Fig. 84.



se necesita, de manera que en el plano AB la presión unitaria no exceda de la carga de seguridad p_m .

Desde luego el valor de B se calculará por la expresión

$$B = \frac{P}{p_m} \quad \ldots . \quad (1)$$

En cuanto á H, se calcula fácilmente, admitiendo, como es práctica usual, que las presiones verticales se transmiten en la arena de una capa á otra, por planos inclinados á 45°; de suerte que si la presión P, que obra en el plano CD, ha de repartirse uniformemente sobre el plano AB, será necesario que los ángulos CAE y DBF sean de 45°, lo que exige que

$$H = \frac{1}{2}(B - b) \quad \ldots . \quad (2)$$

La fórmulas (1) y (2) resuelven el problema, bajo el supuesto de que se trata de arena limpia, que no ha de ser invadida por las aguas, y preparada convenientemente, humedeciéndola y apisonándola por tongadas de poco espesor.

295. Ejemplo.—Supongamos que se tiene

Ancho del macizo de cimiento..............	b	= 120	cm.
Carga total por cm. lineal de muro..........	P	= 140	kg.
Carga de seguridad sobre el fondo de la caja.	p_m	= 0,5	kg.

Las fórmulas anteriores darán inmediatamente

$$B = \frac{140}{0{,}5} = 280 \text{ cm.}$$

$$H = \frac{1}{2} (280 - 120) = 80 \text{ cm.}$$

296. Fundación sobre pilotes.—Los pilotes son maderos rollizos, rectos y sanos, labrados en punta por uno de sus extremos y reforzados por el otro con un cincho de hierro, que se hincan por medio de aparatos especiales llamados martinetes, hasta alcanzar el buen terreno, y sobre cuyas cabezas se reparte la carga total de una construcción.

Una maza, cuyo peso varía de 300 á 600 kg. en los martinetes de brazo y llega hasta 1000 kg. en los de escape, cae repetidas veces sobre la cabeza del pilote, desde una altura que no suele exceder de $1^m{,}20$ para los primeros, ni de 5^m para los segundos, y determina la hinca, hasta que al cabo de una *andanada* de 30 *golpes*, sólo penetra aquel una cierta cantidad, que se fija de antemano y se llama *rechazo*.

Cuando al fin de una andanada la penetración es insensible ó nula, se dice que el pilote está hincado al *rechazo absoluto*.

El conjunto de pilotes, dispuestos de la manera que se estudia en otro lugar, recibe el nombre de *pilotaje* y constituye un medio importante de establecer ciertas fundaciones hidráulicas.

Aquí, sólo nos interesa saber cuál es la carga permanente que puede soportar un pilote, conociendo el rechazo de su hinca, su naturaleza y sus dimensiones.

297. Dimensiones de los pilotes.—Por regla general, no se emplean pilotes cuyo diámetro en la punta sea menor de 15 centímetros.

El diámetro D, de la cabeza, debe variar con la longitud L del pilote, y puede fijarse por medio de la siguiente fórmula práctica, tomando como unidad el metro:

$$D = 0{,}24 + 0{,}015\ (L - 4)$$

Para longitudes que no lleguen á 4 metros, se aceptará

$$D = 0^{m}{,}24$$

En cualquier caso, el diámetro calculado ha de ser el de una sección recta, situada á 1 metro de distancia del extremo más grueso.

298. Carga que puede soportar un pilote. — Analicemos brevemente la acción de la maza sobre el pilote.

El fenómeno de la hinca en cada golpe de maza podemos considerarlo dividido en tres períodos, á saber:

1.° La maza de peso P cae de la altura h y almacena un trabajo total Ph. En el momento de llegar á la cabeza del pilote y antes de que el choque produzca su efecto, la presión sobre aquel es nula.

2.° El choque de la maza determina sobre la cabeza del pilote una compresión que en brevísimo tiempo crece desde 0 hasta alcanzar el valor R de la resistencia que el terreno ofrece á la hinca, tanto por los obstáculos que la punta encuentra para abrirse paso, como por el rozamiento engendrado entre la superficie del pilote y las paredes del taladro.

Durante este período el extremo inferior permanece inmóvil, y el pilote sufre un acortamiento total l, quedando anulada una parte del trabajo exterior por el trabajo molecular Rl desarrollado á virtud de tal acortamiento.

3.° Finalmente, vencida la resistencia R, la parte no anulada del trabajo exterior se transforma en trabajo útil, y el pilote se hinca ó penetra una cierta cantidad que llamaremos ε. Claro es que este trabajo tendrá por expresión $R\varepsilon$.

Como el trabajo exterior Ph se transforma en los Rl y $R\varepsilon$ tendremos la ecuación fundamental

$$Ph = Rl + R\varepsilon \quad .... \quad (1)$$

299. Pero el acortamiento l es función de R.

En efecto; tomemos como origen de distancias la cabeza a del pilote (figura 85) y consideremos una porción cualquiera an de longitud y.

Admitiendo que la fuerza R se reparte uniformemente en toda la longitud L, la compresión por unidad será $\frac{R}{L}$; para la longitud y, valdrá $\frac{R}{L}y$, y para el elemento dy será $\frac{R}{L}dy$.

Fig. 85.

Bajo la acción de la fuerza $\frac{R}{L}y$, la parte an experimentará un acortamiento total λ.

El acortamiento elemental $d\lambda$ debido á la carga $\frac{R}{L}dy$ que obra sobre el elemento dy, tendrá por expresión (núm. **166**, tomo I)

$$d\lambda = \frac{\frac{R}{L}ydy}{E\omega},$$

llamando ω al área de la sección transversal del pilote, de donde

$$\lambda = \frac{R}{LE\omega}\int_0^y ydy$$

ó bien

$$\lambda = \frac{Ry^2}{2LE\omega},$$

y si consideramos la longitud total, en cuyo caso será $y = L$ y $\lambda = l$, tendremos

$$l = \frac{RL}{2E\omega};$$

y por tanto

$$Rl = \frac{L}{2E\omega} R^2 .$$

Así, la ecuación (1) toma la forma siguiente:

$$R^2 + \frac{2E\omega}{L} \varepsilon R - \frac{2E\omega}{L} Ph = 0 .$$

Si llamamos α al factor constante $\frac{E\omega}{L}$, que, como vemos, sólo depende de la naturaleza y dimensiones del pilote, la ecuación anterior tomará la forma

$$R^2 + 2\alpha\varepsilon R - 2\alpha Ph = 0 \quad \ldots . \quad (2)$$

de donde

$$R = \alpha \left[\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2Ph}{\alpha}} - \varepsilon \right] \quad \ldots . \quad (3)$$

expresión por la cual se calculará la carga máxima que teóricamente puede soportar un pilote, conociendo la penetración ε, correspondiente al último golpe.

El valor de ε se obtiene dividiendo por 30 la penetración c, en la última andanada.

En la práctica, se tomará como carga permanente P′, la fracción $\frac{R}{n}$, siendo $n \geqq 5$. , de suerte que ha de ser

$$P' \leqq \frac{R}{5} \quad \ldots . \quad (4)$$

El número de pilotes necesario para soportar el peso total de una construcción será el cociente de dividir dicha carga por P'.

300. Ejemplo.—Determinar la carga permanente que puede soportar un pilote de encina, de 6^m de largo y de $0^m,27$ de diámetro, cuyo rechazo *c* en la última andanada de 30 golpes se fija en $0^m,01$. La maza del martinete pesa 600 kg. y cae de una altura igual á $1^m,10$.

Admitiendo que el coeficiente de elasticidad de la madera de que se trata sea de 120000 kg. por centímetro cuadrado, tendremos, tomando el centímetro por unidad,

$$E = 120000 \text{ kg.}$$

$$\omega = \frac{3,14 \times 27^2}{4} = 572,3$$

$$L = 600 \text{ cm.}$$

$$P = 600 \text{ kg.}$$

$$h = 110 \text{ cm.}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{30} = \frac{1}{30} = 0,033 \text{ cm.}$$

$$\alpha = \frac{120000 \times 572,3}{600} = 114460$$

$$\varepsilon^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,001089$$

$$\frac{2Ph}{\alpha} = \frac{2 \times 600 \times 110}{114460} = 1,153241$$

El valor de la carga máxima total R será, sustituyendo en la fórmula (3)

$$R = 114460 \times \left(\sqrt{0,001089 + 1,153241} - 0,033\right)$$

ó bien

$$R = 119152 \text{ kg.}$$

La carga permanente total, será

$$P' = \frac{R}{5} = \frac{119152}{5} = 23830 \text{ kg.}$$

y la carga permanente por centímetro cuadrado de sección recta de pilote, ó lo que es lo mismo, el coeficiente de trabajo K será

$$K = \frac{P'}{\omega} = \frac{23830}{572,3} = 41,6 \text{ kg.}$$

Si la hinca se llevara hasta el rechazo absoluto, en cuyo caso $\varepsilon = 0$, la expresión de R sería

$$R = \sqrt{2\alpha P h}$$

y para R, P′, y K resultarían los valores siguientes:

$$R = 122917 \text{ kg.}$$
$$P' = 24583 \text{ kg.}$$
$$K = 42,95 \text{ kg.}$$

Como vemos, el coeficiente de trabajo resulta, aun en el caso del rechazo absoluto, menor que 60 kg. por $cm.^2$, que podría aceptarse como límite de seguridad á la compresión en obras ordinarias; pero hay que observar lo mucho que padece el material del pilote con la hinca, como lo prueba la importancia que alcanzan los valores de R.

Por este motivo, en la práctica, suele tomarse para P′ valores que oscilan entre 30 y 40 kg. por $cm.^2$; y si se fijara de antemano el valor de P′, no habría ninguna dificultad en calcular el de R, y por tanto, el correspondiente de ε y de $30\,\varepsilon = c$; sirviendo este último valor de guía para poner término al trabajo del martinete, cuando se llegase á un rechazo igual ó menor que c.

SOPORTES, PIES DERECHOS Y COLUMNAS

301. Preliminares.—Nos ocuparemos aquí solamente de las piezas largas de madera, fundición y hierro, que están comprimidas según su eje, y en las cuales no es posible aplicar la condición de resistencia por compresión simple, en atención al peligro de que se inicie la flexión de las mismas, y por lo tanto su rotura.

Vimos en el tomo I, número **345**, que estas piezas pueden encontrarse en cuatro casos distintos; pero como el primero de los allí estudiados no suele presentarse en las aplicaciones ordinarias, consideraremos ahora los tres restantes por el orden que á continuación se establece:

Caso I. —Piezas empotradas por sus dos extremos.
» II. —Idem empotradas por un extremo y articuladas por el otro.
» III.—Idem articuladas por los dos extremos.

Los empotramientos perfectos que suponen las fórmulas encontradas en el lugar oportuno, no pueden realizarse en la práctica de una manera completa, porque aquellos se reducen, por lo común, á que las bases planas de la pieza queden convenientemente sujetas ó amarradas á las superficies en que se apoyan.

Por este motivo, y por las circunstancias de que la resultante de las fuerzas exteriores no suele pasar exactamente por el centro de gravedad de la base de la pieza, sucede, como la experiencia confirma, que las cargas efectivas de fractura son bastante menores que las que dan aquellas fórmulas, respecto de las cuales ya dijimos que sólo ofrecían un interés puramente especulativo.

Las experiencias de Rondelet en Francia y de Hodgkinson en Inglaterra, han demostrado, de acuerdo con las fórmulas expresadas, que á medida que aumenta la relación $\frac{L}{B}$, entre la longitud de la pieza y el lado menor B de su sección recta, disminuye el valor del coeficiente de fractura, es decir, la carga por centímetro cuadrado que origina la rotura del prisma; pero al propio tiempo han hecho ver que la ley de variación de las cargas de fractura es distinta de la que tales fórmulas indican, por cuya razón no pueden estas aplicarse sin cometer errores de importancia, sobre todo para determinados valores de la relación $\frac{L}{B}$, y aun cuando aquellas se afectaran de un coeficiente fraccionario $\frac{1}{c}$, cuyo denominador fuera de cierta consideración.

302. Demuestra además la experiencia, que la relación de resistencias de una misma pieza, en los tres casos que hemos establecido, es la siguiente, tomando la del caso I como unidad:

Caso I	.....	1
» II	.....	$\frac{4}{7}$
» III	.....	$\frac{2}{7}$

Esto quiere decir, que si las cargas de fractura para cada caso se representan respectivamente por P′, P″, P‴, tendremos

$$P'' = \frac{4}{7} P' \qquad P''' = \frac{2}{7} P',$$

y también

$$P' = \frac{7}{4} P'' \qquad P' = \frac{7}{2} P'''.$$

Estas relaciones nos servirán para reducir al caso I los problemas relativos al II y al III.

303. En cuanto sigue aceptaremos la siguiente notación:

L longitud de la pieza, en centímetros;

H lado mayor de la sección rectangular, en centímetros;

B lado menor de la sección rectangular, ó lado de la sección cuadrada, en centímetros;

D diámetro de la sección circular, en centímetros;

P_r carga total de fractura, en kilogramos;

P carga permanente, en kilogramos;

ω área de la sección recta de la pieza, en centímetros cuadrados;

K_r coeficiente de fractura, en kilogramos por centímetro cuadrado, cuando $\frac{L}{B} = 1$ y la flexión, por lo tanto, no interviene;

K_r' coeficiente de fractura, en kilogramos por centímetro cuadrado, cuando $\frac{L}{B}$ es mayor que un cierto límite, y la flexión interviene en la rotura;

K coeficiente de seguridad, cuando $\frac{L}{B} = 1$;

K′ coeficiente de seguridad, teniendo en cuenta el valor de la relación $\frac{L}{B}$, y por lo tanto la flexión lateral de la pieza.

304. Claro es que conocidos los valores del coeficiente de fracutra K_r', correspondientes á los de la relación $\frac{L}{B}$, se tomará como coeficiente de seguridad la fracción $\frac{1}{n}$ de K_r', siendo n un número variable con el grado de seguridad que se quiera obtener; en cuyo caso, la ecuación general de resistencia de las piezas que consideramos, será

$$(1) \qquad P = \frac{1}{n} K_r'\omega$$

ó bien

$$(2) \qquad P = K'\omega$$

siendo, como hemos dicho, $K' = \dfrac{K_r'}{n}$.

PIEZAS DE MADERA

La sección recta de las piezas de madera que estudiamos puede ser rectangular, cuadrada, circular ó poligonal.

Emplearemos las ecuaciones (1) ó (2) siempre que la relación $\dfrac{L}{B}$ sea mayor que 6, para las piezas de sección rectangular ó cuadrada, y mayor que 5,4 para las de sección circular. En el caso contrario, es decir, cuando $\dfrac{L}{B}$ sea menor que los límites indicados, emplearemos la ecuación de resistencia por compresión simple $P = KS$.

305. Expériencias de Rondelet.—Los ejemplares ensayados fueron de encina y de pino, en los que el coeficiente de fractura K_r, para piezas de forma cúbica, era, por término medio, de 420 kilogramos por centímetro cuadrado.

La relación $\dfrac{L}{B}$ varió entre 12 y 72.

Los resultados son los siguientes:

Relación $\dfrac{L}{B}$	1	12	24	36	48	60	72
	$K_r = K_r'$	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'
Coeficiente de fractura en kilogramos.......	420	350	210	140	70	35	17,5
Relación de resistencias. Valores de $\dfrac{K_r'}{K_r}$	1	$\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{24}$

306. Tabla de M. Morin.—Fundándose en las experiencias de Rondelet, propone M. Morin el uso de la siguiente tabla, obtenida mediante la representación gráfica de los resultados anteriores. En ella se consignan mayor número de valores intermedios de la relación $\frac{L}{B}$ y se corrigen los resultados que creyó anómalos.

Los coeficientes de trabajo, ó lo que es lo mismo, los coeficientes de seguridad son $\frac{1}{7}$ de los de fractura.

Relación $\frac{L}{B}$..	1	12	14	16	18	20	22	24	28	32	36	40	48	60	72
	K_r	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'	K_r'
Coeficiente de fractura en kg.	420	310	292	276	258	243	227	212	183	156	132	108	72	38	17,5
	K	K'	K'	K'	K'	K'	K'	K'	K'	K'	K'	K'	K'	K'	K'
Coeficiente de seguridad....	60	44,3	42	39,4	37	35	32,7	30	26	22	19,1	15,4	10,2	5,4	2,5
Relación $\frac{K'}{K}$..	1	0,74	0,70	0,66	0,62	0,58	0 545	0,50	0,43	0,37	0,32	0,28	0,17	0,09	0,04

307. Tabla italiana.—En Italia es frecuente el uso de la siguiente tabla, en la cual *c* es el número por quien hay que dividir el coeficiente de fractura K_r, en ejemplares de forma cúbica, para que el cociente represente el coeficiente de fractura K_r', que corresponde al valor particular de la relación $\frac{L}{B}$, comprendido entre los límites 10 y 60.

Relación $\frac{L}{B}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60
Coeficiente c	1	1,2	1,5	1,9	2,4	3,1	4	5	6,8	12

Si el coeficiente K_r de fractura, en ejemplares cortos, para la madera que hubiera de emplearse, fuera de 460 kilogramos por centímetro cuadrado y se tratara, por ejemplo, de una pieza prismática cuya longitud fuese 35 veces mayor que el lado menor de su sección recta, el coeficiente de fractura aplicable, K_r', sería

$$K_r' = \frac{K_r}{c} = \frac{460}{3,1} = 148,4 \text{ kg.}$$

Y tomando para coeficiente de seguridad K', la fracción $\frac{1}{7}$ de K_r', resultaría

$$K' = 21,2 \text{ kg.}$$

308. Observación.—En el caso en que la relación $\frac{L}{B}$ no figurase exactamente en las tablas que preceden, y si en vez de considerar el valor superior inmediato en favor de la resistencia de la pieza, se quisiera proceder con más rigor, el valor correspondiente del término desconocido se hallará mediante una sencilla interpolación por medias diferenciales.

309. Fórmulas empíricas de Hodgkinson.—Partiendo del principio de que la resistencia á la rotura de las piezas largas comprimidas según su eje, de sección rectangular ó cuadrada, sea directamente proporcional al producto ωB^2, de la sección por el cuadrado de su lado menor, é inversamente proporcional al cuadrado L^2 de la longitud, el célebre experimentador inglés Eaton Hodgkinson propone el empleo de la fómula general

$$(a) \qquad P_r = \alpha \frac{\omega B^2}{L^2}$$

en la que P_r representa la carga de fractura y α un coeficiente deducido de sus experiencias, y que varía con la calidad de la madera empleada.

Refiriendo al centímetro todas las dimensiones de la pieza, los valores de α, cuando la sección es rectangular ó cuadrada, son los siguientes:

Para la	encina fuerte......	$\alpha = 256500$
»	encina débil.......	$\alpha = 180000$
»	pino fuerte.......	$\alpha = 214200$
»	pino flojo.........	$\alpha = 160000$

310. Piezas de sección rectangular.—Tomando como cargas permanentes $\frac{1}{10}$ de las de fractura, es decir, aceptando que $P = \frac{1}{10} P_r$, las fórmulas que dan los valores de las cargas que con seguridad pueden soportar las piezas prismáticas bajo la hipótesis de que se hallen en el caso I, cuando tienen sus bases planas, ó se consideran empotradas por sus extremos, se obtendrán reemplazando en la ecuación general (a), $\frac{1}{10}$ de los valores de α que quedan consignados. Son las siguientes:

(A) Sección rectangular...

Encina fuerte...	$P = 25650 \frac{HB^3}{L^2}$	....	(1)
Encina débil....	$P = 18000 \frac{HB^3}{L^2}$	....	(2)
Pino fuerte.....	$P = 21420 \frac{HB^3}{L^2}$	....	(3)
Pino flojo......	$P = 16000 \frac{HB^3}{L^2}$	....	(4)

Para piezas de sección cuadrada se hará en las fórmulas (A), $B = H$.

311. Piezas de sección circular.—Las fórmulas de aplicación directa á las secciones circulares se deducen fácilmente de las expresiones (A).

En efecto, estas fórmulas se hallan comprendidas dentro de la fórmula general

$$P = m \frac{ZEB}{L^2} \quad \ldots\ldots \quad (b) \qquad (^a)$$

análoga á las que figuran en el núm. 3·5 del tomo I, siendo m un cierto coeficiente que depende sólo del caso en que se halle la pieza.

Es claro que dos piezas de la misma naturaleza, igual longitud y colocadas en el mismo caso, pero cuyas secciones sean de forma distinta, serán igualmente resistentes, si para ambas el área de la sección es la misma y el producto ZB tiene el mismo valor.

De modo que considerando dos secciones, una rectangular y otra circular, las condiciones de equivalencia serán

$$BH = \pi \frac{D^2}{4}$$

y

$$\frac{1}{6} HB^3 = \frac{1}{32} \pi D^4$$

las cuales se reducen, dividiendo miembro á miembro, á la condición única

$$\frac{1}{6} B^2 = \frac{1}{8} D^2$$

de donde

$$B^2 = \frac{3}{4} D^2$$

(a) Siendo ahora, como es natural, $Z = \frac{1}{6} HB^2$.

Por consiguiente, si en las fórmulas (A) sustituímos en vez de BH, $\omega = \frac{\pi D^2}{4}$ y en lugar de B^4, $\frac{3}{4} D^4$, resultarán las expresiones que conciernen al caso que consideramos, y son como sigue:

(B) Sección circular.	Encina fuerte...	$P = 15109 \frac{D^4}{L^2}$ ...	(5)
	Encina débil....	$P = 10603 \frac{D^4}{L^2}$ ...	(6)
	Pino fuerte.....	$P = 12617 \frac{D^4}{L^2}$ ...	(7)
	Pino flojo......	$P = 9425 \frac{D^4}{L^2}$ ...	(8)

312. Observaciones.—Las fórmulas que anteceden, grupos (A) y (B), suponen:

1.° Que para la encina fuerte y el pino fuerte, el coeficiente de fractura, en ejemplares de forma cúbica, es de 543 kilogramos por centímetro cuadrado.

2.° Que para la encina débil y el pino flojo dicho coeficiente de fractura es de 462 kilogramos por centímetro cuadrado.

3.° Que teniendo en cuenta que las experiencias de Hodgkinson variaron entre los límites 30 y 80 de la relación $\frac{L}{B}$, y además que para valores de ésta, menores que 30, resultan con las fórmulas (A) y (B) valores de P demasiado grandes, y tanto mayores cuanto más se acerca á la unidad la relación $\frac{L}{B}$, *se considerarán aplicables las fórmulas de Hodgkinson, únicamente en el caso de que*

$$\left(\frac{L}{B}\right) \begin{matrix} > 28 \\ < 72 \end{matrix}$$

313. Fórmulas de Mr. Barré.—Mr. Barré propone las siguientes fórmulas:

Para piezas de sección rectangular ó cuadrada:

$$(1) \qquad P = \frac{K\omega}{0{,}93 + 0{,}00185 \left(\frac{L}{B}\right)^2}$$

Para piezas de sección circular

$$(2) \qquad P = \frac{K\omega}{0{,}93 + 0{,}0024 \left(\frac{L}{D}\right)^2}$$

En las fórmulas anteriores, representan:

P, la carga que con seguridad puede soportar la pieza de que se trate;

K, el coeficiente de seguridad por compresión en ejemplares de forma cúbica;

ω, el área de la sección recta de la pieza;

B, el lado menor de la sección rectangular ó el lado de la sección cuadrada;

D, el diámetro de la sección circular.

Como las fracciones $\frac{L}{B}$ y $\frac{L}{D}$ son números abstractos, sus términos podrán referirse lo mismo al metro que al centímetro.

Las cantidades K y ω deberán referirse ambas á la misma unidad superficial, bien al metro cuadrado ó al centímetro cuadrado, por ejemplo; pues en ambos casos su producto será el mismo.

314. Expresión general de la relación $\frac{K'_r}{K_r} = m$.— Una expresión de m que conduce á valores admisibles dentro de los límites 10 y 70 de $\frac{L}{B}$, puede ser, como luego veremos,

$$m = 0{,}000225 \left(\frac{L}{B}\right)^2 - 0{,}031 \left(\frac{L}{B}\right) + 1{,}137. \qquad (\alpha)$$

315. Comparación de las fórmulas y tablas que preceden.—Si de las fórmulas y tablas que anteceden, deducimos los valores de $\frac{K_r'}{K_r} = m$, correspondientes á diversos de $\frac{L}{B}$, considerando que la sección es rectangular, obtendremos los resultados que se consignan en el siguiente cuadro.

K_r' representa el coeficiente de fractura para piezas largas, en que la flexión lateral interviene; y K_r el que corresponde á piezas de forma cúbica.

316. El uso de la tabla obtenida con la fórmula (α), lo mismo que el de las demás que la preceden en el cuadro referido, es muy sencillo y permite calcular rápidamente el valor del coeficiente de fractura K_r' que debe emplearse, cuando se conoce la relación $\frac{L}{B}$ y el valor de K_r es decir, el coeficiente de fractura de la madera de que se trate, para piezas de forma cúbica.

317. Ejemplo. Sea $K_r = 400$ kg. y $\frac{L}{B} = 47$, y empleemos la tabla de la formula (α).

Como para $\frac{L}{B} = 45$, $m = 0{,}197$ y para $\frac{L}{B} = 50$, $m = 0{,}149$, la interpolación por medias diferenciales dará inmediatamente

$$\text{Para } \frac{L}{B} = 47 \text{ , } m = 0{,}1778.$$

Por lo tanto, tendremos $K_r' = 0{,}1778 \times 400 = 71{,}12$ kg.

FORMULAS Y TABLAS.	$\frac{L}{B} =$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Rondelet I	$m =$	0,805	0,750	0,611	0,486	0,416	0,345	0,277	0,208	0,152	0,118	0,083	0,065	0,048
Morin II	$m =$	0,784	0,720	0,580	0,482	0,400	0,332	0,280	0,211	0,157	0,123	0,090	0,070	0,049
Tabla italiana III	$m =$	1,000	0,833	0,666	0,526	0,416	0,322	0,250	0,200	0,147	0,115	0,083	»	»
Hodgkinson... IV Encina floja	$m =$	3,896	1,731	0,974	0,623	0,432	0,318	0,243	0,192	0,155	0,128	0,108	0,092	0,079
Hodgkinson... V Pino flojo	$m =$	3,463	1,539	0,865	0,554	0,384	0,282	0,216	0,171	0,138	0,114	0,096	0,081	0,070
Hodgkinson... VI Encina fuerte	$m =$	4,723	2,099	1,180	0,755	0,524	0,367	0,295	0,233	0,188	0,156	0,131	0,111	0,096
Hodgkinson... VII Pino fuerte	$m =$	3,944	1,753	0,986	0,631	0,438	0,322	0,246	0,194	0,157	0,130	0,109	0,093	0,080
Barré VIII	$m =$	0,896	0,742	0,598	0,479	0,385	0,312	0,257	0,213	0,180	0,153	0,131	0,114	0,100
(α) $m = 0{,}000225\left(\frac{L}{B}\right)^2 - 0{,}031\left(\frac{L}{B}\right) + 1{,}137$... IX	$m =$	0,849	0,723	0,607	0,503	0,409	0,327	0,257	0,197	0,149	0,112	0,087	0,072	0,069

318. Problemas que hay que resolver. — Como la naturaleza y longitud de la pieza son datos, de ordinario impuestos por las circunstancias, los problemas que hay que resolver son dos, á saber:

1.° Dada la forma y dimensiones de la sección recta, calcular la carga máxima que la pieza puede soportar.

2.° Dada la carga máxima que ha de actuar sobre la pieza y la forma de la sección recta, determinar las dimensiones que la definen.

319. Ejemplos del problema 1.°—CASO I.—Determinar la carga que podrá soportar un poste ó pie derecho de encina, empotrado por sus extremos, ó lo que es lo mismo, de bases planas, cuyas dimensiones son:

Longitud.	....	$L = 3^m,60 = 360$ cm.
Sección..	Lado mayor.	$H = 0^m,18 = 18$ cm.
	Lado menor.	$B = 0^m,12 = 12$ cm.

Supongamos conocido el coeficiente de fractura y sea $K_r = 500$ kg.

La relación $\frac{L}{B}$ vale, $\frac{L}{B} = \frac{360}{12} = 30$.

La manera más breve de resolver este problema, es valiéndonos de las tablas que contiene el cuadro de la pág. 272.

Con cualquiera de ellas se procederá del mismo modo; pero debe advertirse que en el caso actual no debe hacerse uso de las tablas V y VII, por corresponder á las fórmulas de Hodgkinson, aplicables al pino flojo y fuerte; pudiendo, en cambio, aceptar un valor medio para m de los que se deduzcan de las tablas IV y VI de Hodgkinson, que corresponden á la encina y á coeficientes de fractura de 462 y 543 kilogramos por centímetro cuadrado respectivamente, entre cuyos valores está comprendido el de $K_r = 500$ kg. que hemos supuesto, y el cual, como se ve, difiere poco de la semisuma de los primeros.

Si representamos por n un número entero, proporcional al grado de seguridad que se quiera obtener (comprendido de ordinario entre 7 y 10), la expresión de P, cualquiera que sea la tabla que se emplee, será

$$P = m \frac{K_r \omega}{n}, \qquad (a)$$

Aceptando para n el valor $n = 7$, y siendo además

$$K_r = 500 \quad y \quad \omega = 18 \times 12 = 216$$

obtendremos los siguientes resultados, en números redondos.

De la tabla	I	(Rondelet).......	P = 6418 kg.
»	II	(Morin).........	P = 6171 »
»	III	(Italiana)........	P = 6418 »
»	IV y VI	(Hodgkinson)....	P = 7374 »
»	VIII	(Barré)..........	P = 5940 »
»	IX	(fórmula α).......	P = 6310 »

Prescindiendo del valor medio P = 7374, que dan las tablas IV y VI de las fórmulas de Hodgkinson, el cual supera bastante á todos los demás, vemos que el empleo de la tabla IX, de la fórmula (α) es muy aceptable, puesto que conduce á un valor de P, comprendido entre los restantes, que no resulta exagerado ni por exceso ni por defecto.

320. Caso II.—Determinar la carga que podrá soportar una mangueta de pino, de viga armada, empotrada por un extremo y articulada por el otro, ó lo que es lo mismo, con una base plana y la otra articulada ó redondeada, cuyas dimensiones son:

Sección..	Lado mayor ..	$H = 0^m,20 =$	20 cm.
	Lado menor...	$B = 0^m,14 =$	14 cm.
Longitud.	....	$L = 2^m,45 =$	245 cm.

Supongamos que el coeficiente de fractura en ejemplares de forma cúbica sea $K_r = 400$ kilogramos, y deseando obtener una gran seguridad, hagamos $n = 10$.

Siendo $\omega = 20 \times 14 = 280$ centímetros cuadrados, y teniendo presente que hay que tomar los $\frac{4}{7}$ de la carga correspondiente al caso I, la fórmula aplicable será:

$$P = \frac{4}{7} m \frac{400 \times 280}{10} = 6400\, m.$$

La relación $\frac{L}{B}$ es, en el caso actual,

$$\frac{L}{B} = \frac{245}{14} = 17{,}5\,;$$

está comprendida entre las consecutivas de las tablas, 15 y 20, y es, además, igual á la semisuma ó media aritmética de éstas; por consiguiente, cualquiera que sea la tabla que se use, el valor de m se obtendrá tomando la semisuma de los correspondientes á $\frac{L}{B} = 15$ y $\frac{L}{B} = 20$.

Claro es que por ser $\frac{L}{B} < 28$, las tablas de Hodgkinson no deberán emplearse, porque conducirían á resultados inadmisibles.

Tendremos, por lo tanto, en números redondos:

De la tabla	I	(Rondelet)..	$m = 0{,}6805$.	$P = 4355$ kg.
»	II	(Morin).....	$m = 0{,}65$....	$P = 4160$ »
»	III	(Italiana)....	$m = 0{,}7495$.	$P = 4796$ »
»	VIII	(Barré).....	$m = 0{,}67$.....	$P = 4288$ »
»	IX	(Fórmula α)..	$m = 0{,}665$...	$P = 4256$ »

Estos resultados confirman que la fórmula (α), ó su correspondiente tabla IX, pueden emplearse sin inconveniente alguno.

321. Caso III.—Calcular la carga que podrá soportar por compresión una pieza prismática, de pino, articulada por sus dos extremos, cuyas dimensiones son:

Sección..	Lado mayor ..	$H = 0^m,15 =$	15 cm.
	Lado menor ..	$B = 0^m,10 =$	10 cm.
Longitud................		$L = 2^m,00 =$	200 cm.

Se supone que el coeficiente de fractura en ejemplares de forma cúbica es $K_r = 460$ kilogramos por centímetro cuadrado, y para obtener una gran seguridad, haremos $n = 10$.

Como la carga, en el caso actual, sabemos que es igual á los $\frac{2}{7}$ de la que la pieza podría soportar si se encontrara en el caso I, y además se tiene

$$\omega = 15 \times 10 = 150 \text{ cm. cuadrados}$$

$$\frac{L}{B} = \frac{200}{10} = 20$$

$$K_r = 460 \text{ kg.}$$

$$n = 10,$$

la fórmula será

$$P = \frac{2}{7} \times \frac{460 \times 150}{10} m = 1971,4\, m$$

La tabla V no podrá aplicarse, puesto que $\frac{L}{B} < 28$. Tampoco pueden emplearse las IV, VI y VII de Hodgkinson, por el mismo motivo, y además porque se refieren las dos primeras á la encina y la última al pino fuerte.

La aplicación de las demás tablas, conduce á los resultados siguientes:

De la tabla	I	(Rondelet).....	$m = 0,611$	$P = 1204$ kg.
»	II	(Morin)..........	$m = 0,580$	$P = 1143$ »
»	III	(Italiana).......	$m = 0,666$	$P = 1313$ »
»	VIII	(Barré)..........	$m = 0,598$	$P = 1179$ »
»	IX	(Fórmula α)..	$m = 0,607$	$P = 1196$ »

Como se ve, el valor obtenido mediante la tabla IX, fórmula (α), es perfectamente aceptable, puesto que de los otros cuatro valores de P, dos son mayores y los otros dos menores que aquel.

322. Ejemplos del problema 2.°—CASO I.—Determinar las dimensiones de la sección recta de un pie derecho de madera de encina, que ha de soportar una carga por compresión de 4000 kilogramos, siendo:

Altura del pie derecho.. $L = 5^m = 500$ cm.
Coeficiente de fractura.. $K_r = 540$ kg.
Relación entre B y H... $\frac{B}{H} = \frac{2}{3}$, de donde $H = \frac{3}{2} B$
Grado de seguridad..... $\frac{1}{n} = \frac{1}{10}$
El área de la sección, será $\omega = \frac{3}{2} B^2$

La expresión de la carga es, como sabemos,

$$P = \frac{K_r \omega}{n} m = \frac{540 \times 3 \times B^2 \times m}{2 \times 10} = 27 \times 3mB^2$$

ó bien

$$4000 = 81\, mB^2 \qquad (a)$$

El problema quedará resuelto, dando á B y á m valores correspondientes que reduzcan la ecuación (a) á una identidad, ó que den para el 2.º miembro un valor numérico algo superior á 4000, pues esto probaría que dicho valor de B corresponde á una sección capaz de soportar una carga algo mayor que la propuesta.

Hagamos, por ejemplo, $\frac{L}{B} = 50$, de donde $B = 10$, y acudamos á una cualquiera de las tablas, á la IX (fórmula α).

Para $\frac{L}{B} = 50$, corresponde $m = 0{,}149$; por lo tanto, el segundo miembro tomará el siguiente valor:

$$81\, mB^2 = 81 \times 0,149 \times 10^2 = 1206,9 < 4000.$$

Prueba este resultado que hemos atribuído un valor demasiado grande á la relación $\frac{L}{B}$.

Tomemos $\frac{L}{B} = 30$, de donde $B = 16,6$

Para $\frac{L}{B} = 30$, corresponde $m = 0,409$; y por tanto tendremos

$$81\, mB^2 = 81 \times 0,409 \times 16,6^2 = 9129 > 4000$$

Esto nos dice que el valor 30 atribuído á la relación $\frac{L}{B}$ es demasiado pequeño, de donde $\left(\frac{L}{B}\right) \begin{matrix} > 30 \\ < 50 \end{matrix}$

Hagamos $\frac{L}{B} = 40$, y como consecuencia $B = 12,5$. Sera $m = 0,257$, y

$$81\, mB^2 = 81 \times 0,257 \times 12,5^2 = 3252,6 < 4000$$

lo que nos dice que $\left(\frac{L}{B}\right) \begin{matrix} > 30 \\ < 40 \end{matrix}$

Si tomamos $\frac{L}{B} = 35$, de donde $B = 14,28$ y $m = 0,327$, resultará;

$$81\, mB^2 = 81 \times 0,327 \times 14,28^2 = 5401 > 4000$$

Indican los dos últimos resultados que $\left(\frac{L}{B}\right) \begin{matrix} > 35 \\ < 40 \end{matrix}$.

Probemos $\frac{L}{B} = 37,5$, y como consecuencia $B = 13,3$ y $m = \frac{0,327 + 0,257}{2} = 0,292$; y tendremos:

$$81\, mB^2 = 81 \times 0,292 \times 13,3^2 = 4183,8 > 4000$$

Estando comprendido el valor de la relación $\frac{L}{B}$ entre 37,5 y 40, y por consiguiente, el de B entre 13,3 y 12,5 puede considerarse el problema prácticamente resuelto, aceptando para lado menor de la sección, B = 13,3 centímetros, puesto que la pieza resultante, en vez de 4000 kg. podrá soportar 4183 kg.

Si ensayáramos los valores B = 13,2 y B = 13,1, se obtendrían:

Para B 13,2. P = 4048 kg.
» B 13,1. P = 3930 »

lo que demuestra que el valor exacto de B, según la tabla IX, está comprendido entre 13,2 y 13,1 centímetros.

Si aceptáramos el primer valor, tendríamos en definitiva, para las dimensiones de la sección recta de la pieza:

$$B = 0^{m},132$$
$$H = 0^{m},198.$$

Lo mismo se procedería con cualquiera de las tablas del cuadro correspondiente, si su empleo se juzgara preferible.

323. Resolución directa del problema 2.º—De una manera directa y sin necesidad de los tanteos que lleva consigo el uso de las tablas, puede procederse para calcular la menor dimensión B, de la sección recta, quedando ésta definida por la relación $\frac{H}{B} = q$.

Como en la fórmula (1), representa m la relación $\frac{K_r'}{K_r}$, entre el coeficiente de fractura K_r' de la pieza larga de que se trate y el K_r correspondiente á ejemplares cúbicos, podremos escribir:

$$\frac{K_r'}{K_r} = 0,000225 \frac{L^2}{B^2} - 0,031 \frac{L}{B} + 1,137 \quad (1)$$

Por otra parte; siendo P la carga que ha de soportar la pieza, supuesta en el caso I, y n el grado de seguridad que se quiera obtener, la carga de fractura será nP, y siendo además $\omega = q\mathrm{B}^2$, tendremos:

$$n\mathrm{P} = \mathrm{K}_r' q \mathrm{B}^2 \qquad (2)$$

Si eliminamos K_r' entre las ecuaciones (1) y (2), resultará

$$\mathrm{B}^2 - 0{,}02726\ \mathrm{LB} + 0{,}0001978\ \mathrm{L}^2 - 0{,}88\ \frac{n\mathrm{P}}{q\mathrm{K}_r} = 0$$

de donde

$$\mathrm{B} = 0{,}01363\ \mathrm{L} + \sqrt{0{,}88\ \frac{n\mathrm{P}}{q\mathrm{K}_r} - 0{,}000012\ \mathrm{L}^2} \qquad (\mathrm{A})$$

En el problema últimamente resuelto tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = 500 \\ \mathrm{P} = 4000 \\ \mathrm{K}_r = 540 \\ n = 10 \\ q = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

por consiguiente, sustituyendo en (A) el valor de B, será:

$$\mathrm{B} = 6{,}815 + \sqrt{0{,}88\ \frac{4000}{81} - 3} = 6{,}815 + \sqrt{43{,}45 - 3}$$

ó finalmente

$$\mathrm{B} = 6{,}815 + \sqrt{40{,}45} = 6{,}815 + 6{,}36 = 13{,}175 \text{ centímetros,}$$

ó bien, en números redondos

$$\mathrm{B} = 13{,}2 \text{ centímetros;}$$

resultado igual al que ya habíamos obtenido.

324. Caso II.—Si la pieza tuviera un extremo plano y el otro redondeado ó articulado, se procedería lo mismo que en el ejemplo anterior; pero tomando para valor de la carga los $\frac{7}{4}$ de la que aquella había de soportar. De manera que sería ahora

$$P = \frac{7}{4} \times 4000 = 7000 \text{ kg.}$$

325. Caso III.—Si la pieza hubiera de tener sus dos extremos redondeados ó articulados, se procedería como en el citado ejemplo; pero dando á la carga P el valor

$$P = \frac{7}{2} \times 4000 = 14000 \text{ kg.}$$

es decir, los $\frac{7}{2}$ de su valor efectivo.

COLUMNAS

326. Columnas de fundición.—Las columnas de fundición son de uso muy frecuente y pueden ser macizas y huecas.

327. Coeficiente de fractura. — Cuando la relación $\frac{L}{D}$, entre la altura L de la columna y el diámetro D de su sección recta, referidas ambas dimensiones á la misma unidad lineal, no pasa de 5, ó, lo que es igual, cuando $\left(\frac{L}{D}\right) \begin{matrix} > 1 \\ < 5 \end{matrix}$, las experiencias de Hodgkinson han demostrado que el coeficiente de fractura es sensiblemente el mismo; pero como, según la calidad de la fundición, dicho coeficiente puede variar entre 4000 y 11000 kilogramos por centímetro cuadrado, aceptaremos como término medio usual para ejemplares cortos, $K_r = 7500$ kilogramos por centímetro cuadrado.

328. Columnas macizas de fundición.—El cálculo de estas columnas suele hacerse tomando como base las experiencias de Hodgkinson, para lo cual se emplean las fórmulas de este autor; ó bien las que M. Gordon y M. Love han deducido de los resultados experimentales que el primero obtuvo.

329. Fórmulas de Hodgkinson. — Caso I. — *Bases planas*:

$$P_r = 10320 \frac{D^{3,6}}{L^{1,7}} \qquad (a)$$

En esta fórmula representan:

P_r carga de fractura en kilogramos;
D diámetro de la sección recta, *en centímetros;*
L altura de la columna, *en decímetros.*

Dicha fórmula es aplicable siempre que $\left(\frac{L}{D}\right) \begin{matrix} > 25 \\ < 120 \end{matrix}$, referidas ahora las dimensiones L y D á la misma unidad lineal.

Supone, además, que para ejemplares cortos, $K_r = 8133$ kilogramos por centímetro cuadrado.

La carga P de seguridad se obtendrá multiplicando P_r por un coeficiente menor que 1, que puede variar de $\frac{1}{4}$ á $\frac{1}{8}$, y que generalmente se toma igual á $\frac{1}{6}$.

Las fórmulas correspondientes á los casos II y III se deducen fácilmente multiplicando el segundo miembro de la fórmula (a) por $\frac{4}{7}$ para el caso II y por $\frac{2}{7}$ para el III.

La carga de seguridad ó de trabajo ordinario se obtendrá, como antes dijimos, tomando, de los resultados obtenidos que representan las cargas de fractura, de la cuarta á la octava parte, generalmente la sexta parte, para los casos usuales.

Cuando la relación $\frac{L}{D}$, referidos sus dos términos á la misma unidad de longitud, esté comprendida entre 5 y 25, entonces

Hodgkinson propone el empleo de la siguiente fórmula

$$P_r = \frac{BC}{B + \frac{3}{4} C} \qquad (b)$$

que corresponde al caso I, cuando la columna es de bases planas, siendo:

$B = 10320 \frac{D^{3,6}}{L^{1,7}}$ = carga de fractura obtenida por la fórmula (*a*).

$C = K_r\, \omega$ = carga de rotura, cuando la flexión lateral no interviene; K_r el coeficiente de fractura en ejemplares cortos, y ω el área de la sección recta, es decir, $\frac{\pi D^2}{4}$.

330. Fórmula de M. Gordon.—Fundándose en las experiencias de Hodgkinson, propone M. Gordon, para calcular la carga de fractura en las columnas macizas de fundición, la siguiente fórmula:

$$P_r = \frac{5630\ \omega}{1 + 0.0025\ \alpha \left(\frac{L}{D}\right)^2}$$

en la cual representan

P_r carga de fractura;

$\omega = \frac{\pi D^2}{4}$ área de la sección recta, en centímetros cuadrados.

L altura de la columna, en centímetros;

D diámetro de la sección transversal, en centímetros;

α coeficiente correspondiente al caso en que se halle la columna y cuyos valores son los siguientes:

Caso	I.	Las dos bases planas.................	$\alpha = 1$
»	II.	Una plana y otra articulada............	$\alpha = 2$
»	III.	Las dos articuladas ó redondeadas......	$\alpha = 4$

Las cargas de seguridad se obtendrán, como siempre, tomando una fracción de las de fractura, de ordinario la sexta parte; es decir, que por lo común se tomará $P = \frac{1}{6} P_r$.

331. Fórmulas de Love.—Fundándose asimismo M. Love en las experiencias de Hodgkinson, propone las fórmnlas siguientes para determinar la carga de fractura en las columnas macizas de fundición:

$$P_r = \alpha \frac{7500\,\omega}{1{,}45 + 0{,}00337 \left(\frac{L}{D}\right)^2} \qquad (a)$$

$$P_r = \alpha \frac{7500\,\omega}{0{,}68 + 0{,}10 \frac{L}{D}} \qquad (b)$$

La fórmula (*a*), con aplicación á los casos en que la relación $\frac{L}{D}$ esté comprendida entre 4 y 120.

La fórmula (*b*), aplicable solamente cuando $\left(\frac{L}{D}\right) \begin{matrix} > 5 \\ < 30 \end{matrix}$

En ambas representan:

P_r la carga de fractura, en kilogramos;
L altura de la columna, en centímetros;
D diámetro de la sección recta, en centímetros;
ω área de dicha sección, en centímetros cuadrados;
α coeficiente que varía según el caso en que se halle la columna, y cuyos valores son los siguientes:

CASO I. Los dos extremos empotrados ó las dos bases planas........................ $\alpha = 1$

CASO II. Una base plana y la otra redondeada.... $\alpha = \frac{4}{7}$

CASO III. Las dos bases redondeadas ó articuladas. $\alpha = \frac{2}{7}$

La carga de seguridad se obtendrá en los casos ordinarios tomando $P = \frac{1}{6} P_r$.

332. Observación.—Comparando las fórmulas que preceden, resulta que las de Hodgkinson son de aplicación más complicada que las de Gordon y Love; y como de estas últimas, la de Gordon da valores más grandes para la carga de fractura, juzgamos que las de Love deben preferirse.

333. Problemas que hay que resolver.—Como la altura de la columna es un dato forzosamente impuesto por las circunstancias, los problemas que hay que resolver son los dos siguientes:

1.º Dado el diámetro y altura de la columna, calcular la carga máxima que con toda seguridad puede soportar.

2.º Dada la carga que la columna ha de sostener, así como la altura, calcular el diámetro de la sección transversal.

La resolución del problema primero no ofrece ninguna dificultad, porque sustitnyendo en la fórmula que se quisiera emplear los valores dados de L y D, se obtendrá inmediatamente la carga de fractura P_r; y la carga P de seguridad se deducirá por la expresión $P = \frac{1}{n} P_r$; dando á n el valor 4, 5, 6, 7, 8, según el grado de solidez de que se quiera dotar á la pieza.

334. La resolución del problema segundo exige el empleo del cálculo logarítmico con las fórmulas de Hodgkinson, y conduce con las de Gordon y Love á una ecuación bicuadrada, lo que origina cálculos, si no difíciles, por lo menos algo laboriosos.

Por tal motivo, la manera más sencilla y suficientemente exacta de resolver ambos problemas, consiste en el empleo de la fórmula

$$P = \frac{1}{n}\, m\, K_r\, \omega \qquad (A)$$

en la que representan

P carga que con toda seguridad puede soportar la columna, en kilogramos;

ω área de la sección recta de la columna, en centímetros cuadrados;

K_r coeficiente de fractura de la fundición de que se trate, para ejemplares cortos, en kilogramos, por centímetro cuadrado;

m valor de la relación $\frac{K_r'}{K_r}$, entre el coeficiente de fractura K_r' que corresponde á la que valga $\frac{L}{D}$ y el coeficiente de fractura K_r para ejemplares cortos.

n grado de seguridad que se quiere obtener, haciéndose por lo común, como ya se ha dicho, $n = 6$.

335. Las tablas que más adelante se consignan y que hemos calculado partiendo de las fórmulas generales de Love, permiten resolver fácilmente los problemas que nos ocupan, atribuyendo al coeficiente de fractura K_r el verdadero valor que corresponda á la fundición que haya de emplearse, si por acaso aquel fuera diferente de los 7500 kilogramos que suponen las referidas fórmulas de Love, y la diferencia mereciera tenerse en cuenta.

336. Ejemplos del problema 1.°—CASO I.—Determinar la carga que con seguridad podrá soportar una columna maciza de fundición de bases planas, cuyas dimensiones son:

$L = 4^m,00 = 40$ decímetros $= 400$ centímetros.

$D = 0^m,16 = 16$ centímetros.

Supongamos conocido el coeficiente de fractura en ejemplares cortos, y sea

$$K_r = 6000 \text{ kilogramos por centímetro cuadrado.}$$

Hagamos, por último

$n = 6$, admitiendo que se trata de una construcción ordinaria.

La relación $\frac{L}{D}$ es en el caso actual.

$$\frac{L}{D} = \frac{400}{16} = 25$$

Este valor no se encuentra en la tabla 2.ª (núm. **373**), pero como en ella vemos que corresponde:

$$\text{Para } \frac{L}{D} = 24 \ldots\ldots m = 0{,}295$$

$$\text{»} \quad \frac{L}{D} = 26 \ldots\ldots m = 0{,}268$$

la interpolación por medias diferenciales conduce á

$$m = \frac{0{,}295 + 0{,}268}{2} = 0{,}2815$$

Por consiguiente, haciendo en la fórmula A,

$$m = 0{,}2815$$
$$K_r = 6000$$
$$\omega = \frac{\pi (16)^2}{4} = 201{,}06$$
$$n = 6$$

tendremos

$$P = \frac{1}{6} \times 0{,}2815 \times 6000 \times 201{,}06,$$

ó bien

$$P = 56598 \text{ kg.}$$

337. Caso II.—Determinar la carga que con seguridad puede soportar una columna maciza de fundición con una base plana y la otra articulada; siendo aceptable para coeficiente de fractura en ejemplares cortos, $K_r = 7500$ kilogramos; para grado de seguridad $n = 6$; y teniendo la pieza las dimensiones siguientes:

$L = 3^m,50 = 350$ centímetros.
$D = 0^m,11 = 11$ centímetros.
$\omega = 95,033$ centímetros cuadrados.

Para este caso acudiremos á la tabla 1.ª, donde, para diferentes valores de $\frac{L}{D}$, se consignan los correspondientes de K'; bajo el supuesto de que $K_r = 7500$ kilogramos y $n = 6$, pues que la fórmula ahora se reduce á la forma más sencilla

$$P = \frac{4}{7} K' \omega,$$

en la cual K' representa el coeficiente de fractura correspondiente al caso de las dos bases planas y al valor particular de $\frac{L}{D} = \frac{350}{11} = 31,81$.

De la tabla 1.ª (núm. **373**) resulta:

Para	$\frac{L}{D} = 30$	.....	$K' = 279$
»	$\frac{L}{D} = 32$	.....	$K' = 255$
Diferencias.....	2	....	24

Admitiendo, como es perfectamente aceptable, que para los valores de $\frac{L}{D}$ y de K', comprendidos entre dos cualesquiera de las tablas, las diferencias de $\frac{L}{D}$ son proporcionales á las correspondientes de K', tendremos

$$\frac{2}{24} = \frac{1,81}{x}$$

de donde

$$x = \frac{1,81 \times 24}{2} = 21,72,$$

que es la diferencia entre el valor de K′, mayor de la tabla y el que buscamos; luego el coeficiente de seguridad aplicable al caso que nos ocupa, será

$$K' = 279 - 21,72 = 257,28 \text{ kg.}$$

Por consiguiente, la carga de seguridad será

$$P = \frac{4}{7} \times 257,28 \times 95,033 = 13971,4$$

ó, en números redondos,

$$P = 13970 \text{ kg.}$$

338. Caso III.—Calcular la carga que con seguridad podrá soportar una pieza cilíndrica maciza de fundición, comprimida según su eje, cuyos dos extremos han de estar articulados.

Las dimensiones son:

$$L = 2^m = 200 \text{ centímetros.}$$
$$D = 0^m,045 = 4,5 \text{ centímetros.}$$
$$\omega = 15,904 \text{ centímetros cuadrados.}$$

Conocido el coeficiente de fractura en ejemplares cortos, y queriendo dotar á la pieza de mayor seguridad que la ordinaria, sean

$$K_r = 6500 \text{ kg.}$$
$$n = 7$$

La expresión de P, en este caso, será

$$P = \frac{2}{7} \times \frac{1}{n} m K_r \omega,$$

quedando la cuestión reducida á determinar el valor que hay que atribuir á m mediante la tabla 2.ª (núm. **373**).

La relación $\frac{L}{D}$, vale ahora

$$\frac{L}{D} = \frac{200}{4,5} = 44,44.$$

En la tabla se ve que corresponde

$$\text{á } \frac{L}{D} = 44 \ldots\ldots m = 0,125$$

$$\text{»} \quad \frac{L}{D} = 46 \ldots\ldots m = 0,116$$

y la interpolación correspondiente da enseguida

$$\text{para } \frac{L}{D} = 44,44 \ldots\ldots m = 0,123.$$

Por lo tanto, resultará

$$P = \frac{2}{7} \times \frac{1}{7} \times 0,123 \times 6500 \times 15,904 = 518,88$$

ó en números redondos

$$P = 519 \text{ kg.}$$

339. Ejemplos del problema 2.º—Caso I.—Calcular el diámetro que debe tener una columna maciza de fundición, de bases planas, de $4^m,5$ de altura, para poder soportar con toda seguridad una carga de 12500 kilogramos.

Supongamos que el coeficiente de fractura de la fundición sea de 6500 kilogramos por centímetro cuadrado, para ejemplares cortos; y que el grado de seguridad lo fijamos en $n = 6$.

Los datos del problema que corresponde al caso I, serán

$$P = 12500 \text{ kilogramos.}$$
$$L = 4^m,5 = 450 \text{ centímetros.}$$
$$F_r = 6500 \text{ kilogramos.}$$
$$n = 6.$$

Si en la ecuación (A), pág. 286, reemplazamos á ω por su expresión en función del diámetro, tendremos

$$P = \frac{1}{n}\, m\, K_r \frac{\pi D^2}{4}.$$

Del segundo miembro es conocido el factor $\frac{1}{n} K_r \frac{\pi}{4}$ cuyo valor es

$$\frac{1}{n} K_r \frac{\pi}{4} = \frac{1}{6} \times 6500 \times \frac{3,1416}{4} = 850,8$$

y puesto que $P = 12500$, tendremos también

$$12500 = 850,8\, m\, D^2. \qquad (a)$$

Como á cada valor de D corresponde otro de m, al cabo de algunos tanteos se logrará dar á D uno conveniente que reduzca la ecuación (a) á una identidad, ó que origine para la expresión $850,8\, mD^2$ un valor ligeramente superior á 12500, en cnyo caso se considerará el problema prácticamente resuelto.

En efecto; hagamos $D = 10$. Será entonces

$$\frac{L}{D} = \frac{450}{10} = 45.$$

Acudiendo á la tabla 2.ª y mediante una sencilla interpolación encontramos que el valor de m que corresponde al de $\frac{L}{D} = 45$ es,

$$m = 0,1205$$

y por tanto será

$$850,8\, m\, D^2 = 850,8 \times 0,1205 \times 100 = 10252 < P.$$

El valor 10, atribuido al diámetro, es menor que el verdadero.

Ensayemos $D = 11$; en cuyo caso, procediendo como antes, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{L}{D} = \frac{450}{11} = 40,9 \\ m = 0,141 \end{array}\right\} \; 850,8\, m\, D^2 = 14515 > P.$$

Prueba este resultado que $D \begin{matrix} > 10 \\ < 11 \end{matrix}$

Hagamos $D = 10{,}5$ y tendremos:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{L}{D} = \dfrac{450}{10{,}5} = 42{,}86 \\ m = 0{,}131 \end{matrix}\right\} 850{,}8\, m\, D^2 = 13251 \text{ kg.}$$

En vista de que este resultado excede en poco á la carga dada de 12500 kg., podemos considerar el problema resuelto y aceptar como diámetro de la columna, $D = 10{,}5$ centímetros.

340. Si en vez de tratarse de una columna de bases planas, como la que acabamos de considerar, aquella hubiera de encontrarse en cualquiera de los casos II y III, la investigación del diámetro se haría siguiendo la misma marcha; pero atribuiríamos á la carga los siguientes valores:

$$\text{Para el caso II} \ldots\ P = \frac{7}{4} \times 12000 = 21000 \text{ kg.}$$

$$\text{» caso III} \ldots\ P = \frac{7}{2} \times 12000 = 42000 \text{ kg.}$$

341. CASO II.—Supongamos que la columna del ejemplo que precede hubiera de tener una base plana y la otra redondeada, ó lo que es lo mismo, un extremo empotrado y el otro articulado.

Conforme á lo que ya sabemos acerca de la manera de reducir los problemas de los casos II y III al caso I, bastará calcular el diámetro que la columna debe tener, supuesta de bases planas y sometida á una carga igual á los $\frac{7}{4}$ de la que realmente debe soportar.

Por consiguiente, la ecuación que por tanteos hay que resolver, es

$$P = \frac{7}{4} \times 12000 = 21000 = 850{,}8\, m\, D^2$$

Empezaremos por ensayar un valor de D mayor que el del ejemplo que procede. Sea $D = 12$ centímetros.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{L}{D} = 37{,}5 \\ m = 0{,}1615 \end{array}\right\} 850{,}8\, m\, D^2 = 19786 < P$$

Para $D = 13$ centímetros, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} D = 13 \\ \dfrac{L}{D} = 34{,}61 \\ m = 0{,}1824 \\ D^2 = 169 \end{array}\right\} 850{,}8\, m\, D^2 = 26226 > P$$

Por último, si ensayamos $D = 12{,}3$ centímetros, obtendremos

$$\left.\begin{array}{l} D = 12{,}3 \\ \dfrac{L}{D} = 36{,}58 \\ m = 0{,}1679 \\ D^2 = 151{,}29 \end{array}\right\} 850{,}8\, m\, D^2 = 21611 \text{ kg.}$$

En vista de la escasa diferencia por exceso que ofrece este resultado aceptaremos el valor

$$D = 12{,}3 \text{ centímetros.}$$

Análogamente se procedería si la columna hubiera de hallarse en el caso III.

342. Columnas huecas de fundición.—Dos procedimientos pueden seguirse para resolver los problemas relativos á las columnas huecas, á saber:

1.º Partiendo, como base, de que la resistencia de una columna hueca es igual á la diferencia entre las resistencias de las columnas macizas de la misma altura que la primera y cuyos diámetros sean respectivamente, el exterior D y el interior *d* de la propuesta.

2.º Admitiendo que el coeficiente de fractura K_r' en las columnas huecas, depende únicamente de la relación $\frac{L}{D}$ entre la altura de la pieza y el diámetro exterior; obedeciendo las variaciones del expresado coeficiente á la misma ley que en las columnas macizas.

Nosotros seguiremos el segundo procedimiento, porque conduce para las cargas de fractura y seguridad á valores inferiores que los que se obtienen por el primero; y porque así están hechas la mayor parte de las tablas relativas á este género de columnas, siquiera en muchas obras se consigne, como base, la que el primer método indica.

Dejando, pues, aparte la enunciación de las fórmulas relativas á las columnas huecas, que se deducen fácilmente aplicando el principio del procedimiento primero, la ecuación fundamental que habremos de emplear será, como para las columnas macizas,

$$P = K' \omega$$

en la cual representan:

P la carga que con seguridad podrá soportar la columna;
K' el coeficiente de seguridad correspondiente á lo que valga la relación $\frac{L}{D}$, con arreglo á la ley de Love;

$\omega = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ área de la sección transversal, siendo
D diámetro exterior de la misma;
d diámetro interior de dicha sección.

Ahora bien, como el coeficiente de seguridad K' depende del de fractura K_r y del grado de solidez de que se quiera dotar á la pieza, es decir, del valor asignado al número n, la ecuación anterior la escribiremos bajo la siguiente forma:

$$P = \frac{1}{n} m K_r \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \qquad (A)$$

Y si á la cantidad, siempre conocida, $\frac{\pi K_r}{4n}$ la representamos por α, tendremos

$$P = \alpha m (D^2 - d^2) \qquad (a)$$

Llamando e al espesor de las paredes de la columna, tendremos también la siguiente ecuación:

$$e = \frac{D - d}{2} \qquad (b).$$

Las ecuaciones (a) y (b), con el auxilio de las tablas del núm. **373**, serán las que hemos de utilizar para resolver los problemas relativos á las columnas huecas.

343. Resolución del problema 1.º—Calcular la carga que con toda seguridad podrá soportar una columna hueca de fundición, conociendo sus dimensiones L, D y d, el coeficiente de fractura K_r, y el grado de solidez n que ha de ofrecer.

El valor particular de la relación $\frac{L}{D}$ permitirá calcular enseguida el correspondiente de m, y sustituyendo en la fórmula (A) los valores de n, m, K_r, D y d, se obtendrá inmediatamente el valor de la carga P, si la columna estuviese, en cuanto á la disposición de sus extremos, en el caso I.

Si estuviese en el caso II, el resultado obtenido se multiplicaría por $\frac{4}{7}$ y si en el III, por $\frac{2}{7}$.

En el caso particular en que $K_r = 7500$ y $n = 6$, como supone la tabla 1.ª, se determinaría el valor de K′ correspondiente á la relación $\frac{L}{D}$, y sustituído en la expresión

$$P = K'\omega = K' \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

tendríamos el valor de la carga de seguridad.

344. Ejemplos.—Determinar la carga de seguridad para una columna hueca (caso I) cuyas dimensiones son:

$$L = 5^m, 40 = 540 \text{ cm.}$$
$$D = 0^m, 16 = 16 \text{ cm.}$$
$$d = 0^m,116 = 11,6 \text{ cm.}$$

siendo además

$$K_r = 6500 \text{ kg.} \qquad \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 95,38 \text{ cm}^2.$$

$$n = 6 \qquad \frac{L}{D} = \frac{540}{16} = 33,75.$$

Determinemos el valor de m, acudiendo á la tabla 2.ª En ella encontramos

$$\text{Para } \frac{D}{L} = 32 \text{ .... } m = 0,204$$
$$\text{» } \frac{L}{D} = 34 \text{ .... } m = 0,187$$

$$\text{Diferencias; } \Delta\frac{L}{D} = 2 \text{ .... } \Delta m = 0,017$$

$$\text{Resulta: para } \Delta\frac{L}{D} = 1 \text{ ... } \Delta m = 0,0085$$

por lo tanto,

$$\text{para } \Delta\frac{L}{D} = 1,75 \text{ ..... } \Delta m = 1,75 \times 0,0085 = 0,014875;$$

de donde $m = 0,204 - 0,014875 = 0,189$, próximamente.

La expresión de la carga será, por lo tanto:

$$P = \frac{1}{6} \times 0,189 \times 6500 \times 95,38 = 19529 \text{ kg.}$$

Esto en el supuesto de que la columna fuera de bases planas.

Si una base hubiera de ser plana y la otra articulada (caso II) ó las dos articuladas (caso III), entonces las cargas respectivas de seguridad serían:

$$\text{Para el caso II}\ldots\ P = \frac{4}{7} \times 19529 = 11159 \text{ kg.}$$

$$\text{» » III}\ldots\ P = \frac{2}{7} \times 19529 = 5579 \text{ kg.}$$

345. Supongamos que para la columna del ejemplo que precede, la naturaleza de la fundición y el objeto de aquella permitieran aceptar

$$K_r = 7500 \text{ kg.}$$

$$n = 6.$$

Entonces la expresión de la carga correspondiente al caso I, sería $P = K'\omega$, y acudiríamos á la tabla 1.ª para determinar el valor de K' que corresponde á $\frac{L}{D} = 33{,}75$.

En dicha tabla se ve que

$$\text{para } \frac{L}{D} = 32 \ldots\ldots K' = 255 \text{ kg.}$$

$$\text{» } \frac{L}{D} = 34 \ldots\ldots K' = 234 \text{ kg.}$$

Y una sencilla interpolación nos dará

$$\text{para } \frac{L}{D} = 33{,}75 \ldots\ldots K' = 236{,}62 \text{ kg.}$$

de donde resulta:

$$P = 236{,}62 \times 95{,}38 = 22568{,}8 \text{ kg.}$$

Si la columna debiera hallarse en el caso II, la carga que podría soportar sería

$$P = \frac{4}{7} \times 22568 = 12896 \text{ kg.;}$$

y si hubiera de encontrarse en el caso III, dicha carga alcanzaría sólo el valor

$$P = \frac{2}{7} \times 22568 = 6448 \text{ kg.}$$

346. Resolución del problema II.—Cuando se da la altura de la columna, la carga que debe soportar, la calidad de la fundición y el grado de seguridad de que quiera dotarse á la obra, entonces el problema de calcular los diámetros de la sección transversal admite una infinidad de soluciones.

En efecto; si al diámetro exterior D atribuímos un valor cualquiera, con tal que sea mayor que el correspondiente á la columna maciza de igual altura, capaz de soportar la carga dada, es evidente que corresponderá para el diámetro interior d otro valor particular mayor que cero, y ambos valores formarán una solución. Claro es que el valor del diámetro d se hallaría fácilmente, determinando ante todo, como ya sabemos, m, y por lo tanto K′, según lo que valiera la relación $\frac{L}{D}$, sustituyendo m en la expresión

$$P = \frac{1}{n} m \, K_r \omega \; ,$$

ó bien K′ en la

$$P = K'\omega,$$

sacando el valor de ω de cualquiera de las expresiones que anteceden y por último despejando d en la ecuación

$$\omega = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

Como á cada valor de D corresponderán otros distintos de $\frac{L}{D}$, de m y de K′ y por tanto de d, resulta que el problema así planteado presenta infinitas soluciones.

A cada solución corresponderá, por otra parte, un espesor diferente de las paredes de la columna, dado por la expresión $e = \frac{D - d}{2}$, que podrá ser inaceptable por dos razones:

1.ª Por resultar demasiado pequeño, y por lo tanto imposible de realizar en el acto de fundir la columna.

2.ª Porque resulte demasiado grande, originando un volumen excesivo de materia, de cuya suerte se perdería en gran parte la ventaja que bajo el punto de vista de la economía deben presentar las columnas huecas respecto de las macizas, á igualdad de resistencia.

347. Para salvar ambos inconvenientes y llegar á una solución práctica ó realizable, no hay más que atenerse á las indicaciones del siguiente cuadro, en que se consignan los valores que como mínimun debe tener e, segun la altura de la columna, conforme se admite en la práctica del fundidor.

Altura de las columnas en metros..... $\left(\frac{L}{100}\right)$	2 á 3	3 á 4	4 á 6	6 á 8	8 á 10
Espesor mínimo en centímetros...... (e)	1 á 1,2	1,2 á 1,5	1,5 á 2,0	2 á 2,5	2,5 á 3

De esta suerte será fácil corregir de modo conveniente el valor atribuído al diámetro exterior, para llegar á una solución satisfactoria.

Pero también puede precederse, como luego veremos, fijando de antemano el valor de e, en una cantidad que sea igual ó algo mayor que la que indique el cuadro que precede.

348. **Ejemplo.**—Determinar los diámetros de una columna hueca de fundición, de 5 metros de altura, que ha de soportar una carga de 10000 kilogramos, siendo el coeficiente de fractura en ejemplares cortos, $K_r = 7500$ kilogramos y fijando en $n = 6$ el grado de solidez.

Demos un valor cualquiera al diámetro exterior y sea, por ejemplo, $D = 10$.

Como en este supuesto tenemos $\frac{L}{D} = \frac{500}{10} = 50$, la tabla 1.ª nos dice que el valor correspondiente de K' es $K' = 127$ y tendremos

$$10000 = 127 \times \omega$$

de donde
$$\omega = \frac{10000}{127} = 78{,}75, \text{ próximamente:}$$

ó bien

$$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 78{,}75$$

de donde

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4 \times 78{,}75}{3{,}14}},$$

y puesto que hemos hecho $D = 10$, resultará

$$d = \sqrt{100 - \frac{315}{3{,}14}} = \sqrt{-\frac{1}{3{,}14}},$$

valor imaginario; lo que prueba que el valor atribuído á D no es superior, como debe ser, al de la columna maciza, capaz de soportar la carga dada de 10000 kilogramos.

Y en efecto; una columna maciza de 5^m de altura y 10 centímetros de diámetro, en las condiciónes de la propuesta, resistiría solamente una carga de

$$P = \frac{\pi}{4} \times 10^2 \times 127 = 9969 \text{ kg.}$$

Hagamos $D = 13$ centímetros, y tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{L}{D} = 38{,}46 \\ K' = 194{,}55 \end{array}\right\} 10000 = 194{,}55 \times \frac{3{,}14}{4}(13^2 - d^2), \text{ de donde}$$

$$d = 10{,}17$$
$$e = 1{,}415$$

Como ha resultado e menor que 1,5 prueba esto que D = 13 es demasiado grande.

Ensayemos D = 12 centímetros, y resultará:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{L}{D} = 41{,}66 \\ K' = 171{,}38\end{array}\right\} 10000 = 171{,}38 \times \frac{3{,}14}{4}(12^2 - d^2), \text{ de donde}$$

$$d = 8{,}34 \text{ cm.}$$
$$e = 1{,}83 \text{ íd.}$$

ó en números redondos y como valor aceptable,

$$e = 1{,}9 \text{ cm.}$$

A este espesor correspondería en realidad una carga de 10332 kilogramos.

349. En la resolución de este problema hemos supuesto que la columna era de bases planas, es decir, que se hallaba en el caso I. Si se hallase en cualquiera de los otros dos, procediendo, por lo demás, como antes, bastaría tomar para la carga P los siguientes valores:

$$\text{Para el caso II} \ldots P = \frac{7}{4} \times 10000 = 17500 \text{ kg.}$$

$$\text{» caso III} \ldots P = \frac{7}{2} \times 10000 = 35000 \text{ kg.}$$

350. Resolución del problema, fijando el espesor e.—Aceptando la ley de Love para todo valor del coeficiente de fractura K_r, aunque difiera de los 7500 kilogramos que suponen las fórmulas de aquel autor, podremos escribir:

Carga de fractura

$$P_r = \frac{K_r\, \omega}{1{,}45 + 0{,}00337\left(\frac{L}{D}\right)^2} \qquad (1)$$

Carga de seguridad

$$P = \frac{\frac{1}{n} K_r \, \omega}{1{,}45 + 0{,}00337 \left(\frac{L}{D}\right)^2} \qquad (2)$$

Tratándose de una columna hueca, la expresión de ω es

$$\omega = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2):$$

pero como se supone fijado de antemano el espesor, la expresión de d en función de D y de e, será

$$d = D - 2e;$$

y siendo

$$d^2 = D^2 - 4eD + 4e^2 = D^2 - 4e(D - e),$$

la expresión de ω tomará la forma

$$\omega = \pi e (D - e) \qquad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) se obtiene la siguiente, que resuelta por sustituciones intermedias, dará el valor conveniente del diámetro exterior, que es la incógnita principal.

$$D^2 \left[D - \left(e + \frac{1{,}45}{\pi \left(\frac{K_r}{n}\right)} \cdot \frac{P}{e} \right) \right] = \frac{0{,}00337}{\pi \left(\frac{K_r}{n}\right)} \cdot \frac{P}{e} \cdot L^2. \qquad (A)$$

351. Ejemplo.—Supongamos los siguientes datos:

$$L = 5^m = 500 \text{ cm.} \qquad n = 6$$
$$K_r = 6000 \text{ kg.} \qquad e = 2 \text{ cm.}$$
$$P = 10000 \text{ íd.}$$

Sustituyendo en la ecuación (A) tendremos

$$D^2 \left[D - \left(2 + \frac{1{,}45 \times 10000 \times 6}{3{,}14 \times 6000 \times 2} \right) \right] = \frac{0{,}00337 \times 10000 \times 250000 \times 6}{3{,}14 \times 6000 \times 2},$$

y simplificando,

$$D^2\,[D - 4{,}3] = 1341{,}5 = C \text{ [a]}$$

Dando, por ejemplo, á D el valor 12, el primer miembro resulta igual á $1108{,}8 < C$.

Para $D = 13$, corresponde $D^2\,(D - 4{,}3) = 1470{,}3 > C$

Resulta, por lo tanto, que $D \begin{matrix} > 12 \\ < 13 \end{matrix}$

Si hacemos $D = 12{,}5$, será $D^2\,(D - 4{,}3) = 1281{,}2 < C$

Y por último, ensayando $D = 12{,}7$ y $D = 12{,}6$, resulta:

Para $D = 12{,}7$ .... $D^2\,(D - 4{,}3) = 1354{,}8 > C$

» $D = 12{,}6$ .... $D^2\,(D - 4{,}3) = 1317{,}7 < C$,

lo que nos dice que el diámetro exterior debe ser mayor que 12,6 y menor que 12, 7 centímetros; pudiendo en consecuencia aceptar como valor conveniente

$$D = 12{,}7 \text{ cm.}$$

y dar por resuelto el problema con la necesaria exactitud; pues á tal diámetro y al espesor fijado, $e = 2$, corresponde una carga de

$$P = \frac{\pi}{4}\,(12{,}7^2 - 8{,}7^2) \times 149{,}78 = 10065 \text{ kg.}$$

El factor 149, 78 no es otra cosa que el valor de K′, correspondiente á la relación $\frac{L}{D} = \frac{500}{12{,}7} = 39{,}37$, y calculado con el auxilio de la tabla 2.ª del núm. **373**.

352. Piezas de sección cruciforme.—Cuando la sección recta de la pieza es cruciforme (figura 86), se pueden tambien resolver los dos problemas generales, valiéndose de la ecuación $P = K'\omega$, siendo la expresión de la sección transversal

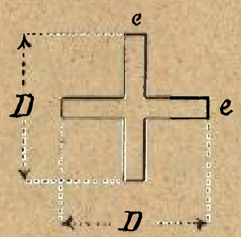
$$\omega = e\,(2D - e).$$

(a) Esta ecuación sólo tiene una raíz real positiva. Las otras dos son imaginarias, como es fácil demostrar.

Por lo demás, la manera de proceder es la misma que hemos seguido para las columnas.

353. Ejemplo del problema 1.°—Dada la sección cruciforme y la altura de la pieza de fundición, determinar la carga que con seguridad podrá soportar, suponiendo que aquella sea de bases planas.

Fig. 86.



Sean:

$L = 400$ cm. $\quad K_r = 7{,}500$ kg.
$D = 15$ íd.
$e = 2$ íd. $\quad n = 6$

La expresión de P será

$$P = K'e\,(2D - e)$$

La relación $\frac{L}{D}$ vale en este caso $\frac{L}{D} = \frac{400}{15} = 26,66$; y de la tabla 1.ª se deduce que $K' = 325{,}1$. Así, pues, la carga será

$$P = 325,1 \times 2\,(2 \times 15 - 2) = 18206 \text{ kg.}$$

354. Ejemplo del problema 2.°—Dada la carga P y la altura L de la pieza, determinar las dimensiones de la sección cruciforme.

Fijemos el espesor de la fundición, y sean

$$P = 20000 \text{ kg.} \qquad L = 500 \text{ cm.} \qquad e = 2 \text{ cm.}$$

Admitamos además el mismo coeficiente de fractura en ejemplares cortos y el mismo grado de seguridad, que en el ejemplo anterior.

La ecuación general es ahora

$$20000 = K' \times 2 \times (2D - 2)$$

ó bien

$$5000 = K'\,(D - 1) \qquad (a)$$

Pero, como sabemos que K′ depende de D, será necesario hallar por medio de algunos tanteos dos valores de estas cantidades que reduzcan la ecuación (*a*) á una identidad, ó por lo menos que den para el segundo miembro K′ (D — 1) un valor ligeramente superior á 5000, en cuyo caso se considerará el problema prácticamente resuelto.

Los resultados de algunos ensayos son los siguientes:

D	$\frac{L}{D}$	K′	K′ (D — 1)	Consecuencia
18	27,77	308,45	5243	D < 18
17	29,41	286,67	4586	D > 17
17,6	28,4	299,8	4976	D > 17,6
17,7	28,25	301,75	5039	D < 17,7

Podrá tomarse, en vista de los resultados anteriores, como valor conveniente para D, aunque ligeramente erróneo por exceso, D = 17,7 centímetros, ó en números redondos

$$D = 18 \text{ cm.},$$

suponiendo que la pieza sea de bases planas.

355. Columnas de hierro.—Nos ocuparemos aquí de las columnas de hierro macizas y huecas y de las piezas de este material, de sección cruciforme.

Admitiremos la ley de Love para estas piezas, cualquiera que sea el valor del coeficiente de fractura K_r en ejemplares cortos; y para la resolución de los dos problemas generales que hay que considerar, seguiremos la misma marcha que hemos indicado para las columnas de fundición.

356. Coeficiente de fractura.—Aunque el coeficiente de fractura del hierro, en ejemplares cortos, es distinto según la naturaleza particular del material y la forma y dimensiones de las piezas, suelen admitirse los valores siguientes de K_r por centímetro cuadrado.

Para el hierro laminado en barras...$K_r = 4000$ kg.
» » en columnas.........$K_r = 3600$ íd.
» palastros de buena calidad.....$K_r = 3800$ íd.

Como término medio usual aceptaremos, para las piezas que nos ocupan, $K_r = 3600$ kilogramos.

357. **Fórmulas de Love.**—La ley según la cual varía la carga de fractura en las columnas y soportes de hierro, la traduce M. Love, fundándose en las experiencias de Hodgkinson, en las siguientes fórmulas:

1.ª—Cuando $\left(\frac{L}{D}\right) \begin{matrix} > 10 \\ < 180 \end{matrix}$

$$P_r = \frac{3600\ \omega}{1{,}55 + 0{,}0005 \left(\frac{L}{D}\right)^2}$$

2.ª—Cuando $\left(\frac{L}{D}\right) \begin{matrix} > 5 \\ < 30 \end{matrix}$, es decir, para piezas cuya altura no exceda de 30 veces el diámetro, ó menor dimensión de la sección transversal,

$$P_r = \frac{3600\ \omega}{0{,}85 + 0{,}04 \left(\frac{L}{D}\right)}.$$

358. **Coeficiente de seguridad.**—Siendo K_r' el coeficiente de fractura que corresponde al valor de la relación $\frac{L}{D}$, y el cual se deducirá fácilmente acudiendo á las tablas que más adelante se consignan, la expresión del coeficiente de seguri-

dad K′ será

$$K' = \frac{1}{n} K_r' \qquad \text{ó bien} \qquad K' = \frac{1}{n} m K_r$$

El valor de n que mide, por decirlo así, el grado de solidez de que se quiera dotar á la pieza, suele variar de 4 á 8, tomándolo generalmente y como término medio usual, igual á 6.

359. Comparación de las columnas de hierro y de fundición.—Desde el punto de vista de la resistencia, la tabla 1.ª del núm. **373** nos indica que cuando la altura de la columna es menor que 30 veces el diámetro, las columnas de fundición son más resistentes que las de hierro; pero que, por el contrario, cuando la altura es superior á 30 D, la resistencia en las de hierro va siendo mayor que en las fundidas, y tanto más relativamente, cuanto mayor sea el valor de la relación $\frac{L}{D}$.

360. Resolución de los problemas 1.° y 2.°—Como hemos dicho, se procederá del mismo modo que en las columnas de fundición, con la única diferencia de dar á K′ y á m los valores correspondientes consignados en las tablas respectivas, ó deducidos por interpolaciones, cuando el valor de $\frac{L}{D}$ no figure exactamente en aquellas.

361. Ejemplos del problema 1.°—(a) Determinar la carga de seguridad que podrá soportar una columna maciza de hierro, con un extremo empotrado y el otro articulado (caso II), siendo

$$L = 3^m,50 = 350 \text{ cm.} \qquad K_r = 3600 \text{ kg.}$$
$$D = 0^m,08 = 8 \text{ íd.} \qquad n = 6.$$

El valor de K′ se determinará con el auxilio de la tabla 1.ª, calculada bajo los supuestos que aquí se establecen en cuanto á los valores de K_r y de n.

Al valor de la relación $\frac{L}{D}$, que es en ete caso

$$\frac{L}{D} = \frac{350}{8} = 43,75,$$

corresponde, según se deduce de la referida tabla,

$$K' = 239,12 \text{ kg.}$$

Por cosiguiente, como la columna se halla en el caso II, el valor de la carga será

$$P = \frac{4}{7} K'\omega = \frac{4}{7} \times 239,12 \times \frac{\pi}{4} \times 8^2 = 6868 \text{ kg.}$$

362. (*b*) Calcular la carga de seguridad correspondiente á una columna hueca de hierro, de bases planas (caso I), cuyas dimensiones son:

$$L = 6^m = 600 \text{ cm.} \qquad d = 0^m,14 = 14 \text{ cm.}$$

$$D = 0^m,17 = 17 \text{ íd.} \qquad e = 0^m,015 = 1,5 \text{ íd.}$$

siendo además, $K_r = 3600$ kg. y $n = 6$.

Para el valor actual de la relación $\frac{L}{D}$, que vale

$$\frac{L}{D} \frac{600}{17} = 35,29,$$

corresponde, según se deduce de la tabla 1.ª,

$$K' = 276,2 \text{ kg.};$$

y como el área de la sección transversal es

$$\omega = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(17^2 - 14^2) = 73,04 \text{ cm.}^2,$$

resultará para la carga de seguridad

$$P = 276,2 \times 73,04 = 20173 \text{ kg.}$$

363. (*c*) Hallar la carga que con toda seguridad puede sostener una pieza de hierro de sección cruciforme y bases planas, cuyas dimensiones son:

$$L = 5^m = 500 \text{ cm.}, \quad D = 0^m,15 = 15 \text{ cm.}, \quad e = 0^m,01 = 1 \text{ cm.}$$

Si aceptamos los mismos valores para K_r y n, que en el ejemplo anterior; acudiendo á la tabla 1.ª, veremos que á la relación $\frac{L}{D} = \frac{500}{15} = 33,33$, corresponde un coeficiente de seguridad $K' = 285$ kilogramos; por lo tanto, si en la ecuación

$$P = K' \omega = K' e (2D - e),$$

sustituímos los valores de las cantidades que figuran en el 2.º miembro, resultará finalmente

$$P = 285 \times 29 = 8265 \text{ kg.}$$

364. Ejemplos del problema 2.º — (*a*) Calcular el diámetro de una columna maciza de hierro, de 4^m de altura, que debe soportar una carga de seguridad de 10000 kilogramos; suponiendo la pieza en el caso II.

Tenemos

$$\left.\begin{array}{ll} L = 400 & \text{cm.} \\ P = 10000 & \text{kg.} \\ K_r = 3600 & \text{íd.} \\ n = 6 & \end{array}\right| \begin{array}{l} P = \frac{4}{7} K' \omega = 10000 \\ \text{ó bien} \\ K' \omega = 17500 \end{array}$$

Procediendo lo mismo que para las columnas de fundición, encontraremos que el diámetro aceptable será

$$D = 9,5 \text{ cm.}$$

Realmente, como para K' y ω, se encontrará

$$K' = 246,55 \text{ kg.},$$
$$\omega = 70,882 \text{ cm.}^2,$$

la carga correspondiente á tal diámetro es de

$$P = \frac{4}{7} \times 17476 = 9986 \text{ kg.},$$

cantidad que, aunque inferior á la carga dada, sólo se diferencia de ella en la exigua cantidad de 14 kilogramos, lo que no tiene verdadera importancia.

365. (*b*) Determinar el diámetro exterior de una columna hueca, de hierro, supuesta en el caso II, de 4^m de altura, cuyas paredes tengan 1 centímetro de grueso y que ha de soportar una carga de seguridad de 10000 kilogramos.

Son aceptables para K_r y n los valores medios que figuran en el ejemplo anterior.

La ecuación fundamental es, como sabemos (puesto que estamos en el caso II),

$$\frac{7}{4} P = K'\omega = K'\pi e (D - e) \qquad (1)$$

De la fórmula de Love (piezas de hierro) se deduce que

$$K' = \frac{600}{1{,}55 + 0{,}0005 \frac{L^2}{D^2}}; \qquad (2)$$

por consiguiente, tendremos

$$\frac{7}{4} P = \frac{600 \pi e (D - e)}{1{,}55 + 0{,}0005 \frac{L^2}{D^2}},$$

ó bien

$$\frac{7}{4} P = \frac{600 \pi e D^2 (D - e)}{1{,}55 D^2 + 0{,}0005 L^2};$$

y quitando denominadores, dividiendo por el coeficiente de D^3 y dejando en el segundo miembro el término independiente, resultará

$$D^2\left[D-\left(e+0{,}00144\,\frac{P}{e}\right)\right]=0{,}0000004642\,\frac{P}{e}\,L^2 \qquad \text{(A)}.$$

En el caso actual tenemos

$$P = 10000, \qquad e = 1, \qquad L^2 = 160000;$$

por lo tanto, la ecuación (A) tomará la siguiente forma

$$\text{(B)} \qquad D^2\,(D - 15{,}4) = 743 \qquad \text{(a)}$$

El valor de D que reduzca el primer miembro á un número igual ó ligeramente superior á 743, resolverá la cuestión que nos proponemos.

366. Desde luego se observa que no se debe ensayar ningún valor de D menor que 15,4; porque el primer miembro resultaría negativo, siendo así que debe ser positivo como el segundo.

Supongamos $D = 20$ cm. Resultará

$$D^2\,(D - 15{,}4) = 1840 > 743.$$

Para $D = 18$, corresponde

$$D^2\,(D - 15{,}4) = 842 > 743.$$

Para $D = 17$, resulta

$$D^2\,(D - 15{,}4) = 462{,}4 < 743$$

Prueban los dos resultados últimos que $D \begin{matrix} > 17 \\ < 18. \end{matrix}$

Ensayemos, por ejemplo, $D = 17{,}8$, puesto que el valor exacto de D estará más cerca de 18 que de 17, como se ve inspeccionando los resultados últimos.

Tendremos

$$D^2\,(D - 15{,}4) = 760{,}4 > 743$$

(a) Esta ecuación de tercer grado tiene solamente una raíz real positiva. Las otras dos son imaginarias.

Finalmente, haciendo $D = 17{,}7$, encontramos

$$D^2 (D - 15{,}4) = 720{,}6 < 743$$

De suerte que $D \begin{matrix} > 17{,}7 \\ < 17{,}8 \end{matrix}$; y como tales valores se diferencian solamente en un décimo de centímetro, es decir, en un milímetro, tomando como valor conveniente el mayor, resultará por último

$$D = 17{,}8 \text{ cm.} \qquad d = 15{,}8 \text{ cm.} \qquad e = 1 \text{ cm.}$$

367. No es necesario formar de antemano la ecuación (B), para resolver el problema mediante algunos tanteos.

En efecto; acudamos á la ecuación fundamental (núm. **365**).

$$\frac{7}{4} P = K' \pi e (D - e). \qquad (1)$$

Dividiendo ambos miembros por πe, y reemplazando los valores que tienen las cantidades conocidas, tendremos la ecuación siguiente, que hay que resolver:

$$(D - 1) K' = 5570{,}4 \qquad (2)$$

Ahora bien, como K' depende del valor de la relación $\frac{L}{D}$; para cada valor de D que se ensaye, será necesario determinar antes el que corresponde á K', acudiendo á la tabla correspondiente, y procediendo de la manera que hemos visto en ejemplos anteriores.

368. También puede procederse, teniendo sólo á la vista la ecuación fundamental $\frac{7}{4} P = K' \omega$, que en este caso se reduce á

$$K' \omega = 17500, \qquad (3)$$

y hallando para cada valor de D el correspondiente de K', como ya sabemos, y el de ω, por la diferencia de las áreas de dos círculos, el mayor de diámetro D y el menor cuyo diámetro será $D - 2e$.

369. Para economizar tiempo en este género de cálculos, son utilísimas las tablas de cuadrados, cubos, circunferencias y áreas de círculo; de los números enteros, considerados en los dos últimos casos como diámetros, y las cuales figuran en muchos manuales.

370. Comprobemos el resultado obtenido, $D = 17{,}8$, por medio de las ecuaciodes (2) y (3), ensayando los valores $D = 17{,}7$ y $D = 17{,}8$.

Ecuación (2):

Haciendo $D = 17{,}7$, resulta

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{L}{D} = 22{,}6 \\ K' = 332{,}3 \end{array}\right\} \quad (D - 1)\,K' = 5549{,}4 < 5570{,}4$$

Para $D = 17{,}8$ tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{L}{D} = 22{,}47 \\ K' = 332{,}88 \end{array}\right\} \quad (D - 1)\,K' = 5592{,}4 > 5570{,}4$$

Por lo tanto, podremos afirmar que,

$$D \begin{array}{l} > 17{,}7 \\ < 17{,}8 \end{array}$$

como antes habíamos encontrado.

Ecuación (3):

Utilizaremos los valores de K', antes calculados, y por tanto sólo habrá que hallar ahora los de ω que corresponden á los de D que ensayamos.

Representando por ω' y ω'' las áreas de los círculos cuyos diámetros son respectivamente D y $d = D - 2e$, recordando que $e = 1$, y puesto que $\omega = \omega' - \omega''$, los resultados serán los siguientes; para lo que nos valdremos de las tablas á que antes nos hemos referido:

Para $D = 17{,}7$ y $d = 15{,}7$ corresponde

$$\left.\begin{array}{rcr} \omega' & = & 246{,}06 \\ \omega'' & = & 193{,}59 \\ \hline \omega & = & 52{,}47 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K' = 332{,}3 \\ K'\omega = 17435{,}78 < 17500 \end{array}$$

Este resultado nos dice que $D > 17{,}7$.

Para $D = 17{,}8$ y $d = 15{,}8$ corresponde

$$\left.\begin{array}{rcr} \omega' & = & 248{,}85 \\ \omega'' & = & 196{,}07 \\ \hline \omega & = & 52{,}78 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K' = 532{,}88 \\ K'\omega = 17569{,}4 < 17500, \end{array}$$

Esto prueba que $D < 17{,}8$; por lo tanto resulta lo mismo que ya sabíamos; es decir que

$$D \begin{array}{l} > 17{,}7 \\ < 17{,}8. \end{array}$$

371. (*c*) Supongamos finalmente que se trata de un soporte de hierro, de sección cruciforme, de 4^m de altura, con un extremo empotrado y el otro articulado, es decir en el caso II, que ha de soportar la carga de 10000 kilogramos, como en los dos ejemplos que preceden, y cuyas paredes tengan 1 centímetro de grueso. Se quiere calcular la dimensión D, longitud de los brazos iguales de la cruz (figura 86) K_r y n tienen los mismos valores que antes.

La expresión de ω, en este caso, es, como sabemos

$$\omega = e\,(2\,D - e).$$

Utilicemos la ecuación (3)

$$K'\,\omega = 17500,$$

que tomará la siguiente forma, puesto que $e = 1$.

$$K'\,(2\,D - 1) = 17500.$$

Demos á D un valor cualquiera, por ejemplo D = 20 y tendremos

$$D = 20 \qquad K' = 343 \qquad K' = 13377 < 17500$$

$$\frac{L}{D} = 20 \qquad \omega = 39 \qquad \text{luego } D > 20$$

Hagamos D = 25 y resultará

$$D = 25 \qquad K' = 258 \qquad K' = 17542 > 17500$$

$$\frac{L}{D} = 16 \qquad \omega = 49 \qquad \text{luego } D < 25.$$

Pero, como la diferencia entre este último resultado y 17500 es sólo de 42 kilogramos, aceptaremos como valor conveniente de D

$$D = 25 \text{ centímetros.}$$

372. **Observación.**—Las piezas de hierro que en los tres últimos problemas hemos considerado, se hallan en el caso II, tienen igual altura y resisten en igualdad de condiciones á la misma carga: por lo tanto, podemos considerarlas como equivalentes, desde el punto de vista de su resistencia.

Veamos cual de ellas es la que exige menor cantidad de material, para lo que bastará hallar sus volúmenes correspondientes:

Los resultados se consignan en el siguiente cuadro

DESIGNACIÓN	DIMENSIONES D *mets.*	DIMENSIONES *e* *mets.*	AREA de la sección en m^2	ALTURA en *m*	YOLUMEN en m^3	PESO en *kg.*
Columna maciza.	0,095	»	0,007088	4,00	0,028352	220,86
Idem hueca.....	0,178	0,01	0,005278	4,00	0,021112	164,46
Soporte, sección cruciforme...	0,25	0,01	0,004900	4,00	0,019600	152,68

Hemos supuesto que el peso del hierro es de 7790 kilogramos el metro cúbico y se ha prescindido del aumento que en las columnas corresponde al mayor grueso y dimensiones especiales de la base y el capitel.

Se deduce de los resultados que preceden que el soporte de sección cruciforme será el más económico.

Tablas relativas al cálculo de columnas y soportes de fundición y de hierro

373. La tabla 1.ª contiene, para los valores de la relación $\frac{L}{D}$, comprendidos entre 8 y 70 y los cuales crecen de dos en dos unidades, los correspondientes del coeficiente de seguridad K' para la fundición y para el hierro, bajo los supuestos que se explican más adelante, en la *observación* correspondiente.

La tabla 2.ª contiene á su vez, para iguales valores de la relación $\frac{L}{D}$, los correspondientes de $m = \frac{K_r'}{K_r}$, es decir los de la relación entre el coeficiente K_r' de fractura cuando la flexión interviene, y el de fractura K_r para ejemplares cortos.

Se empleará la primera cuando deba aceptarse

$$\text{Para la fundición} \ldots \begin{cases} K_r = 7500 \text{ kg. por cm.}^2 \\ n = 6 \end{cases}$$

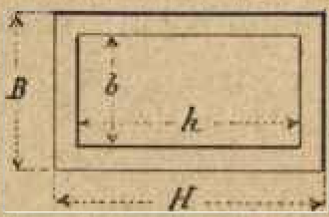
$$\text{Para el hierro} \ldots \begin{cases} K_r = 3600 \text{ kg. por cm.}^2 \\ n = 6 \end{cases}$$

Y se empleará la segunda en los casos en que K_r tenga valores diferentes de los anteriores y n sea igual, mayor ó menor que 6; pues, como al principio hemos dicho, la expresión de K' es

$$K' = \frac{1}{n} m K_r.$$

Finalmente, si la sección transversal del soporte hueco fuera rectangular (figura 87) se puede seguir sin inconveniente la marcha indicada para las formas consideradas, utilizando la ecuación

Fig. 87.



$$P = K'\omega$$

siendo $\omega = BH - bh$; ó bien, si el espesor fuera el mismo en las cuatro paredes de la pieza,

$$\omega = 2e\,(H + B - 2e),$$

y representando B el lado menor y H el lado mayor del rectángulo exterior.

Observación. Los valores de K′, consignados en la tabla, 1.ª suponen:

1.° Que el coeficiente de fractura en ejemplares cortos vale:

para la fundición. $K_r = 7500$ kg. por cm.²
« el hierro. . . . $K_r = 3600$ kg. » »

2.° Que el coeficiente de seguridad es igual á $\frac{1}{6}$ del coeficiente de fractura, cualquiera que sea el valor de la relación $\frac{L}{D}$, lo que quiere decir que

para ejemplares cortos . . . $K = \frac{1}{6} K_r$

» » largos . . . $K' = \frac{1}{6} K_r'$

TABLA 1.ª

COLUMNAS DE BASES PLANAS, DE FUNDICIÓN Y DE HIERRO

Tabla de coeficientes de seguridad, por centímetro cuadrado, correspondientes á diversos valores de la relación $\frac{L}{D}$, deducidos de las fórmulas de Love.

VALORES de $\frac{L}{D}$	FUNDICIÓN — Coeficientes de seguridad. K'	HIERRO — Coeficientes de seguridad. K'	VALORES de $\frac{L}{D}$	FUNDICIÓN — Coeficientes de seguridad. K'	HIERRO — Coeficientes de seguridad. K'
8	750	»	40	183	255
10	700	375	42	169	247
12	646	370	44	157	238
14	592	364	46	146	230
16	540	358	48	136	222
18	492	350	50	127	214
20	446	343	52	118	207
22	405	335	54	111	199
24	368	326	56	104	192
26	335	318	58	98	186
28	305	309	60	92	179
30	279	300	62	87	173
32	255	291	64	82	167
34	234	282	66	77	161
36	215	273	68	73	155
38	198	264	70	70	150

TABLA 2.ª

COLUMNAS DE BASES PLANAS, DE FUNDICIÓN Y DE HIERRO

Tabla de valores de la relación $m = \frac{K_r'}{K_r}$, *entre el coeficiente de fractura* K'_r *en ejemplares largos, y el* K_r *para ejemplares cortos; deducidos de las fórmulas de Love, y correspondientes á diversos valores de la relación* $\frac{L}{D}$.

VALORES de $\frac{L}{D}$	FUNDICIÓN — Valores de $m = \frac{K_r'}{K_r}$	HIERRO — Valores de $m = \frac{K_r'}{K_r}$	VALORES de $\frac{L}{D}$	FUNDICIÓN — Valores de $m = \frac{K_r'}{K_r}$	HIERRO — Valores de $m = \frac{K_r'}{K_r}$
8	0,600	»	40	0,146	0,425
10	0,560	0,625	42	0,135	0,411
12	0,517	0,616	44	0,125	0,397
14	0,474	0,607	46	0,116	0,383
16	0,432	0,596	48	0,108	0,370
18	0,393	0,584	50	0,101	0,357
20	0,357	0,571	52	0,095	0,345
22	0,324	0,558	54	0,089	0,332
24	0,295	0,544	56	0,083	0,320
26	0,268	0,530	58	0,078	0,310
28	0,244	0,515	60	0,074	0,298
30	0,223	0,500	62	0,069	0,288
32	0,204	0,485	64	0,065	0,278
34	0,187	0,470	66	0,062	0,268
36	0,172	0,455	68	0,059	0,259
38	0,158	0,440	70	0,056	0,250

ENTRAMADOS

374. Preliminares.—La red de piezas que forman, si asi puede decirse, el esqueleto de ciertas construcciones, recibe el nombre de *entramado*. Estos pueden dividirse en verticales, horizontales é inclinados. Los primeros, rellenos sus claros con materiales de naturaleza diversa, constituyen en algunos casos las paredes de los edificios. Los horizontales forman la base de los suelos y los inclinados el armazón de las cubiertas.

Como en estas dos últimas construcciones las *vigas* forman el elemento fundamental; antes de proceder al cálculo de su resistencia hay que desarrollar algunas ideas que sirvan de complemento al estudio de la flexión, y las cuales han de encontrar en breve su aplicación correspondiente.

Vimos en el tomo I que cuando un prisma está sometido á la flexión se originaba en cualquiera de sus secciones un esfuerzo cortante, y además un par que determinaba la compresión de las fibras situadas á un lado del eje neutro y la extensión de las del lado opuesto.

Encontramos también las expresiones del módulo de flexión Z, para algunas secciones ó perfiles usuales, cuyo conocimiento es de la mayor importancia; porque como se deduce de la ecuación general $KZ = M$, dicho módulo sirve de medida á la resistencia que una sección dada es capaz de oponer á la acción de un momento exterior M.

Ahora es necesario demostrar que en la flexión se desarrolla otro esfuerzo particular que se llama *esfuerzo rasante* ó de *desgarramiento longitudinal*, y además que cualquiera que sea la sección de que se trate, el cálculo de Z es fácil, puesto que depende del momento de inercia I.

DESGARRAMIENTO LONGITUDINAL.

375. Los materiales, como la madera y el hierro, cuya estructura puede compararse á una agrupación de fibras unidas entre sí por una especie de cemento, pueden romperse por desgarramiento longitudinal, cuando dos capas de fibras se desprenden, resbalando á lo largo de la superficie común que las separa.

Para que un haz de fibras se desprenda por desgarramiento, es necesario que las tensiones totales desarrolladas en sus extremos, por extensión ó por compresión, den una resultante diferente de cero, lo que exige que aquellas sean de valor distinto. Esta circunstancia se presenta en los empalmes ó ensambladuras de las piezas, en ciertos casos, como hemos de ver más adelante, y también en la flexión de las vigas.

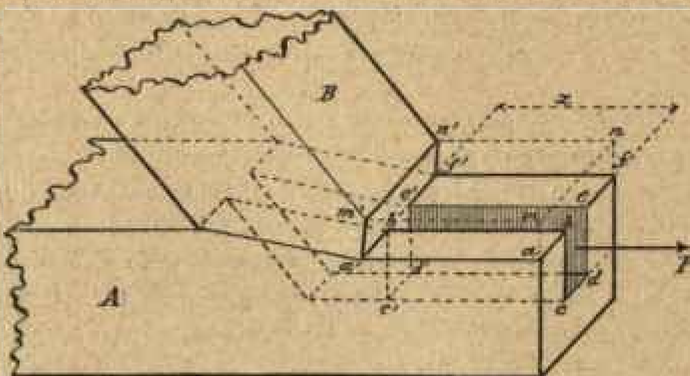
376. La fuerza que tiende á producir el modo de fractura que nos ocupa se llama *esfuerzo rasante* ó *fuerza de desgarramiento*. La superficie total que rodea al haz de fibras que tiende á desprenderse, ó que divide á las capas que se separan, constituye la superficie resistente, y es necesario que si en toda ella no se reparte aquel esfuerzo de modo uniforme, el máximo esfuerzo rasante que se desarrolle por unidad superficial, sea menor que el coeficiente de fractura, y por consiguiente igual al coeficiente de seguridad que se señale.

377. En la figura 88 se indica la ensambladura de un tirante de madera A con un par B del mismo material.

La compresión oblicua que el par transmite, se descompone en dos fuerzas, una vertical, que por el momento no nos interesa, y otra horizontal P, que tiende á separar del extremo derecho del tirante, el prisma cuya base vertical de la derecha es *mabcdefn* y cuya altura es x. La superficie resistente será igual á $(af + 2bc)x$, siendo x la distancia del extremo libre de la pieza A al origen de la ensambladura.

La fuerza P constituye en este caso una fuerza de desgarramiento longitudinal, y la superficie resistente es, como la figura

Fig. 88.



indica, la suma de las cinco caras longitudinales del prisma referido, á lo largo de las cuales tiende á efectuarse el desgarramiento.

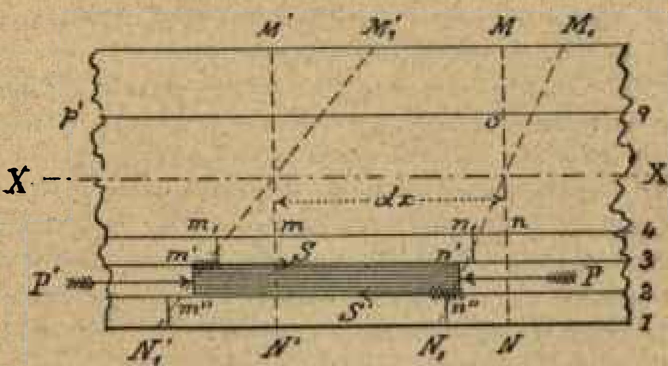
Si llamamos ω al área de la superficie resistente y K al coeficiente de seguridad al desgarramiento, la ecuación de resistencia será $P = K\,\omega$, de la cual se deducirá ω, y por consecuencia x, conociendo P y K.

378. Fuerza de desgarramiento originada por la flexión.—Es necesario determinar el valor de esta fuerza, que origina la flexión, para proceder al estudio de las vigas compuestas de dos ó más vigas sencillas que se ensamblan ó enlazan convenientemente, á fin de obtener un prisma cuya sección transversal tenga la altura necesaria.

Como es preciso que la viga resultante se porte, en cuanto sea posible, como si fuera de una sola pieza, el objeto de los enlaces ó ensambladuras ha de ser impedir el resbalamiento de las piezas entre sí, que tiende á producir el esfuerzo rasante desarrollado en las superficies de contacto.

379. Consideremos una viga sencilla, sometida á la flexión, y veamos como, en una sección longitudinal cualquiera, paralela

Fig. 89.



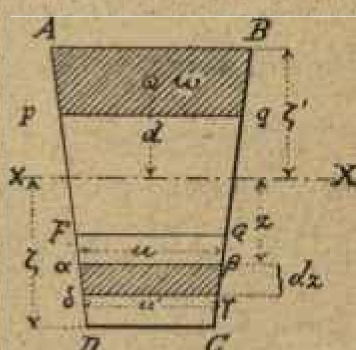
á la capa de fibras neutras, se desarrolla el esfuerzo rasante para determinar en seguida su valor.

Sean MN, M′N′ (figura 89) dos secciones rectas de la viga, infinitamente próximas y situadas, por tanto, á la distancia dx, y ABCD (figura 90) la forma de aquellas secciones.

Consideremos los planos 1, 2, 3, 4, infinitamente próximos también y paralelos á la capa de fibras neutras proyectada en XX.

Entre dichos planos, los MN, M′N′ y las caras laterales de la viga, quedan li-

Fig. 90.



mitados tres haces de fibras, cuyo conjunto, antes de la flexión, se proyecta según m N'N n (figura 89) y según FGCD (figura 90).

Después de la flexión, las secciones MN y M'N' habrán efectuado rotaciones distintas, con arreglo á lo que en ellas valga el momento de fuerzas exteriores, y el conjunto de los tres haces de fibras ocupará la posición $m_1\ n_1\ N_1\ N_1'$.

Con respecto al haz intermedio, se ve que el inferior ha tenido que efectuar un resbalamiento relativo hacia la izquierda, y el superior ha efectuado otro resbalamiento relativo hacia la derecha, es decir, en sentido contrario al primero.

Estos resbalamientos corresponden á las fuerzas S' y S que, para engendrarlos, ha sido necesario que se desarrollen, la primera S', en el plano 2 y la segunda S, en el 3.

Por otra parte, si consideramos el haz intermedio, que, en último término, es un prisma cuyas bases son $m'm''$ y $n'n''$ (figura 89), ó bien $\alpha\beta\gamma\delta$ (figura 90), y cuya altura es dx; y suponemos que dicho haz corresponda, por ejemplo, á las fibras comprimidas, claro es que las compresiones totales P' y P, desarrolladas en las bases $m'm''$ y $n'n''$, no sólo serán fuerzas de sentido contrario, sino de valor distinto, de fácil medida.

En efecto, si z es la distancia del haz intermedio á la capa de fibras neutras, M el momento de flexión en la sección MN, K la tensión unitaria máxima, correspondiente á la deformación NN_1 de las fibras más alejadas del eje neutro, que distan de dicho eje la cantidad ζ, y k la tensión unitaria desarrollada en la base $n'n''$, sabemos que se verifica la relación $\frac{k}{K} = \frac{z}{\zeta}$, de donde $k = K\frac{z}{\zeta}$; y como $K = \frac{M}{Z}$, siendo Z el módulo de flexión de la sección ABCD (figura 90), tendremos

$$k = \frac{Mz}{Z\zeta}.$$

Si representamos por ω el área de la base proyectada en $n'n''$ (figura 89) ó en $\alpha\beta\gamma\delta$ (figura 90), será $\omega = u\,dz$; por lo tanto, la compresión total P tendrá por expresión $P = k\omega$, ó bien

$$P = \frac{M}{Z\zeta} uzdz.$$

Del mismo modo veríamos que la compresión total que obra en la base $m'm''$ es

$$P' = \frac{M'}{Z\zeta} uzdz.$$

Pero como el momento de flexión cambia de valor al pasar de una sección de la viga á la inmediata; siendo diferentes M y M', P y P' también lo serán, como habíamos indicado.

Ahora bien; como el haz intermedio que consideramos está en equilibrio bajo la acción simultánea de las cuatro fuerzas horizontales P, P', S, S', y de otras que son verticales (1) la suma algebráica de las primeras será nula; de donde se deduce que $P' - P = S' - S$.

La expresión de la primera diferencia es

$$P' - P = \frac{1}{Z\zeta}(M' - M)\, uzdz.$$

Pero como M y M' son funciones de x (distancia de la sección al origen de la viga) y las secciones correspondientes están infinitamente próximas, podremos escribir que

$$M' = M + dM \quad \text{ó} \quad M' = M + \frac{dM}{dx}dx;$$

de donde

$$M' - M = \frac{dM}{dx}dx \quad \text{y} \quad P' - P = \frac{1}{Z\zeta} \cdot \frac{dM}{dx} dxuzdz.$$

380. Demostramos en el tomo I, pág. 198, que el momento de flexión en un punto cualquiera de un prisma está represen-

(1) Esfuerzos cortantes en los extremos del haz y cargas directamente aplicadas al prisma en el intervalo dx.

tado por el área del diagrama del esfuerzo cortante, comprendido entre dicho punto y uno de los extremos del prisma; por consiguiente tendremos, llamando T á dicho esfuerzo,

$$dM = Tdx \qquad y \qquad T = \frac{dM}{dx}.$$

Sustituyendo en la expresión de P′ — P, resultará

$$P' - P = \frac{T}{\zeta Z}\, dxuzdz \qquad (1)$$

Hemos visto que en el plano $m'n'$ se desarrolla una fuerza total de desgarramiento S, y como obra sobre una superficie, cuya área es udx, llamando s al esfuerzo rasante unitario, tendremos

$$S = sudx.$$

Para la superficie proyectada según $m'n'$, tendremos también

$$S' = s'u'dx.$$

Ahora bien, s' y u' varían con z; por lo tanto, podremos establecer que

$$s' = s + \frac{ds}{dz}dz \qquad u' = u + \frac{du}{dz}dz.$$

Multiplicando estas expresiones y despreciando los infinitamente pequeños de segundo orden, resulta

$$s'u' = su + \frac{sdu}{dz}dz + \frac{uds}{dz}dz = su + \frac{d(su)}{dz}dz,$$

de donde

$$s'u'dx - sudx = dx\,\frac{d(su)}{dz}dz = S' - S. \qquad (2)$$

Pero demostramos que P′ — P = S′ — S; por consiguiente, tendremos, igualando las expresiones (1) y (2) de estas diferencias, después de suprimir el factor común dx,

$$\frac{d(su)}{dz}dz = \frac{T}{\zeta Z}uzdz.$$

Integrando con relación á z y teniendo presente que el esfuerzo cortante no depende de esta variable, sino de x, será

$$su = \frac{T}{\zeta Z}\int_0^z uzdz + C.$$

381. Para determinar la constante C, basta observar que en las fibras más alejadas del eje neutro el esfuerzo de desgarramiento es necesariamente nulo; y para $z = \zeta$, corresponderá $s = 0$; luego

$$\frac{T}{\zeta Z}\int_0^\zeta uzdz + C = 0;$$

de donde

$$C = -\frac{T}{\zeta Z}\int_0^\zeta uzdz.$$

La expresión de su será, por lo tanto,

$$su = \frac{T}{\zeta Z}\left(\int_0^z uzdz - \int_0^\zeta uzdz\right)$$

ó puesto que la integral sustraendo es la de mayor valor absoluto,

$$su = -\frac{T}{\zeta Z}\left(\int_0^\zeta uzdz - \int_0^z uzdz\right)$$

ó finalmente

$$su = -\frac{T}{\zeta Z}\int_z^\zeta uzdz.$$

Pero udz es el elemento $\alpha\beta\gamma\delta$, de sección transversal, definido por su distancia z al eje neutro, y $uzdz$ será el momento de aquel área elemental, con relación á dicho eje; por consiguiente, la integral $\int_{z}^{\zeta} uz\,dz$, no representa otra cosa que el momento del área αβDC, con relación al eje neutro; debiendo observar que dicha área es la que limita el plano $m'n'$ (en el cual se calcula el esfuerzo rasante) y la parte de contorno αDCβ de la sección recta, que queda, respecto del eje neutro, al mismo lado que el referido plano.

382. Si se tratara, por ejemplo, de calcular el esfuerzo unitario de desgarramiento longitudinal en las inmediaciones del punto o del plano pq, $p'q'$, el valor de la integral sería en este caso

$$\int_{z}^{\zeta'} uz\,dz = \omega d$$

y la expresión de su, siendo ahora $u = pq$, será

$$su = -\frac{\mathrm{T}}{\zeta \mathrm{Z}}\,\omega d;$$

de donde

$$s = -\frac{\mathrm{T}\omega d}{u\zeta \mathrm{Z}} \qquad (a)$$

Esta es, pues, la expresión del esfuerzo unitario de desgarramiento longitudinal, que por efecto de la flexión se desarrolla en un plano paralelo á la capa de fibras neutras, de la cual dista la cantidad z y en aquella región de la viga en que el esfuerzo cortante vale T y el ancho de la sección recta, en el referido plano, es u.

La expresión (a) nos dice que para un mismo valor de T, el valor absoluto del esfuerzo rasante crece á medida que el plano en que se considera se acerca á la capa de fibras ueutras, puesto que entonces el momento ωd aumenta y que el máximo de su valor absoluto corresponde precisamente á dicha capa.

383. Sección rectangular llena.—Supongamos que se trate de una viga de sección rectangular, de base B y altura H (figura 91); y llamemos S al máximo de *s*.

Tendremos entonces

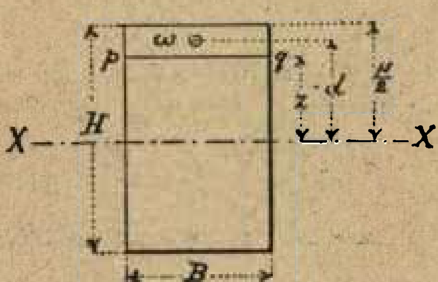
$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\,BH \\ d &= \frac{1}{4}\,H \end{aligned}\right\}\ \omega d = \frac{1}{8}\,BH^2$$

$$\left.\begin{aligned} u &= B \\ \zeta &= \frac{1}{2}\,H \\ Z &= \frac{1}{6}\,BH^2 \end{aligned}\right\}\ u\zeta Z = \frac{1}{12}\,B^2H^3$$

Y prescindiendo del signo de S,

$$S = \frac{\frac{1}{8}\,BH^2}{\frac{1}{12}\,B^2H^3}\,T = \frac{3}{2}\,\frac{T}{BH} \qquad (b)$$

Fig. 91.



Si consideramos, no la capa neutra, sino otra *pq* que diste z de aquella, tendremos

$$\left.\begin{aligned} \omega &= B\left(\frac{H}{2} - z\right) \\ d &= z + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} - z\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} + z\right) \end{aligned}\right\}\ \omega d = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{H^2}{4} - z^2\right);$$

y como antes,

$$u\zeta Z = \frac{1}{12} B^2H^3 .$$

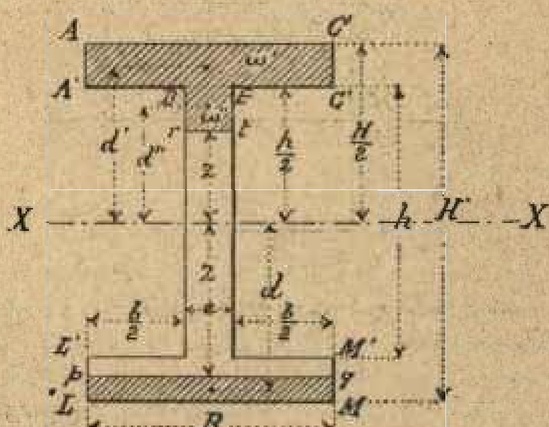
Sustituyendo en la expresión (a) resultará, prescindiendo del signo,

$$s = \frac{T\left(\frac{3}{2}H^2 - 6z^2\right)}{BH^3} \qquad (c)$$

la cual se convierte en la (b), haciendo $z = 0$.

384. Sección en doble T de alas iguales.—Con arreglo á las notaciones que marca la figura 92, tendremos que la sección presenta una anchura constante, igual á e, para el alma, desde DE hasta L'M', y otra anchura, también constante, igual á B, para las alas ó tablas, es decir, de AC á A'C' y de LM á L'M'; no variando el ancho de la sección por grados insensibles, como supusimos en el cálculo de s (fórmula a), sino pasando, como queda dicho, bruscamente del valor e al B.

Fig. 92.



Por esta circunstancia se encontrarán ahora dos valores diferentes para s en la capa de fibras DE, según se considere que pertenece á la inferior del ala ó á la superior del alma. Lo mismo puede decirse de la capa contenida en el plano L′M′.

385. Consideremos primero la capa de fibras pq, perteneciente á una de las alas.

Será:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \mathrm{LM} \times \mathrm{M}q = \mathrm{B}\left(\frac{\mathrm{H}}{2} - z\right) \ldots\ldots \\ d &= z + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{H}}{2} - z\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{H}}{2} + z\right) \end{aligned}\right\} \quad \omega d = \frac{\mathrm{B}}{2}\left(\frac{\mathrm{H}^2}{4} - z^2\right)$$

$$z = \frac{\mathrm{H}}{2}, \qquad u = \mathrm{B};$$

y sustituyendo en la fórmula (a) número **382**, resultará

$$s = -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{ZH}}\left(\frac{\mathrm{H}^2}{4} - z^2\right) \qquad (1)$$

386. Para una capa de fibras, tal como la rt, que pertenece al alma, el área ω se compone de la suma de las áreas de los rectángulos ACC′A′ y DEtr; por consiguiente, el momento ωd será igual á la suma de los momentos de dichos rectángulos con relación al eje neutro.

Será, por lo tanto, $\omega\, d = \omega'\, d' + \omega''\, d''$

Pero de la figura se deduce;

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \mathrm{B}\left(\frac{\mathrm{H}}{2} - \frac{h}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d' &= \frac{h}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{H}}{2} - \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{H}}{2} + \frac{h}{2}\right) \end{aligned}\right| \quad \omega' d' = \frac{\mathrm{B}}{2}\left(\frac{\mathrm{H}^2}{4} - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega'' &= e\left(\frac{h}{2} - z\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d'' &= z + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - z\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) \end{aligned}\right| \quad \omega'' d'' = \frac{e}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z\right)$$

de donde

$$\omega d = \frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4}\right) + \frac{e}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

ó bien

$$\omega d = \frac{1}{8}\left(BH^2 - (B - e)\,h^2\right) - \frac{ez^2}{2}$$

y observando que

$$B - e = b,$$

será

$$\omega d = \frac{1}{8}\left(BH^2 - bh^2\right) - \frac{ez^2}{2}.$$

Además, ahora se tiene $\zeta = \frac{H}{2}$, y $u =$ ancho de la sección $= e$.

Sustituyendo en la fórmula (a), resultará

$$s = -\frac{T}{ZH}\left(\frac{BH^2 - bh^2}{4e} - z^2\right); \quad (2)$$

y para las fibras neutras, en las cuales $z = 0$,

$$s = -\frac{T}{4eZH}(BH^2 - bh^2) \quad (3)$$

387. Para la capa A'C' del ala, será aplicable la fórmula (1), y para la DE del alma, lo será la fórmula (2). En ambos casos puede hacerse $z = \frac{h}{2}$, puesto que se trata de capas contiguas ó en contacto, pudiendo considerarse que se hallan situadas en el mismo plano.

Resulta de la fórmula (1):

$$s = -\frac{1}{4}\frac{T}{ZH}(H^2 - h^2) \quad (4)$$

y de la (2) se obtiene:

$$s = -\frac{1}{4}\frac{T}{ZH}(H^2 - h^2)\frac{B}{e} \qquad (5)$$

La expresión (4) da el valor del esfuerzo rasante en la capa de fibras del ala, inmediata al alma; y la (5) el que corresponde á las fibras del alma inmediatas á la tabla ó ala, y como la expresión (5) resulta de multiplicar la (4) por la relación $\frac{B}{e}$, que es mayor que la unidad, vemos, como habíamos indicado, que para las capas inmediatas, separadas por el plano DE, que divide el alma de la tabla, experimenta el esfuerzo rasante unitario una variación brusca, pasando del valor (4) al (5) cuando ζ varía de $\frac{h}{2}$ á 0, ó al contrario, si ζ varía á la inversa, es decir, de 0 á $\frac{h}{2}$.

Tratándose del esfuerzo rasante unitario que se desarrolla en la superficie de unión del ala con el alma, se empleará siempre la expresión (5): porque da el mayor valor absoluto para s, que es el que se debe tener en cuenta, en beneficio de la resistencia.

387. De modo análogo se haría el estudio de las expresiones del esfuerzo rasante, correspondientes á secciones más complicadas de las vigas de hierro, compuestas de escuadras y palastros. No es, sin embargo, indispensable hallar las respectivas fórmulas; porque, dibujado el perfil de que se trate, cualquiera que sea, en escala bastante grande, y con la exactitud necesaria, una vez conocido el valor del esfuerzo cortante, la cuestión queda reducida á determinar:

1.º El centro de gravedad de la sección propuesta, y como consecuencia la distancia ζ entre el eje neutro y las fibras más lejanas.

2.º El centro de gravedad del área ω y el valor de ésta, y como consecuencia la distancia *d* entre aquel punto y el eje neutro.

3.º El valor del módulo de flexión Z.

La determinación de los centros de gravedad no ofrece ninguna dificultad.

En cuanto á Z, pronto veremos como puede calcularse, si no se trata de un perfil ya estudiado.

389. Coeficiente de fractura por desgarramiento longitudinal.—En los materiales pétreos y metálicos se admite que la resistencia al desgarramiento es la misma que al esfuerzo cortante, al cual equivale, y cuyas deformaciones y fractura se verifican del mismo modo; pero respecto de las maderas no sucede lo mismo, como lo prueban las experiencias practicadas con tal objeto.

De las ejecutadas por el Teniente Coronel de Ingenieros Sr. Marvá resultan los valores siguientes:

COEFICIENTE DE FRACTURA POR DESGARRAMIENTO, EN KILOGRAMOS POR CENTÍMETRO CUADRADO

Maderas.	Kilogrs.	Maderas.	Kilogrs.
Encina.......	116	Nogal...	90
Fresno.......	112	Olmo........	73
Haya........	93	Roble........	70
Acacia.......	90	Pino.........	40 á 60

Para coeficiente de seguridad, que garantice la imposibilidad de la rotura por desgarramiento, se tomará la fracción $\frac{1}{6}$ á $\frac{1}{10}$ de los resultados anteriores.

DETERMINACIÓN DE Z EN EL CASO GENERAL.

390. Hemos adoptado como forma de la ecuación general de resistencia á la flexión, $M = KZ$; pero por otros procedimientos, según hemos visto en el tomo I, se llega á la forma $M = \frac{KI}{v}$, en la cual representan: I el momento de inercia de la sección con relación al eje neutro y v la distancia entre dicho eje y las fibras más lejanas. En ambas fórmulas M y K tienen significación idéntica, de donde resulta que la relación que liga á las cantidades Z, I, y v, es

$$Z = \frac{I}{v};$$

por donde vemos que conociendo v, el cálculo de Z queda reducido al de I.

391. No hay para qué recordar que el momento de inercia de una superficie con respecto á un eje situado en su plano, no es otra cosa que la suma integral de los productos que resultan de multiplicar cada elemento superficial, por el cuadrado de su distancia al eje.

Refiriendo la figura á dos ejes rectangulares, de los cuales el de abscisas sea el eje de momentos, la expresión general del momento de inercia será, como sabemos

$$I = \iint y^2 dxdy,$$

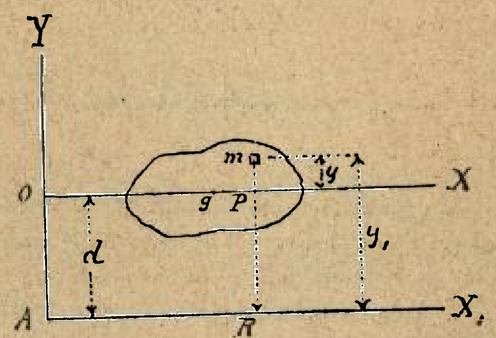
en la que y representa la distancia al eje de momentos del elemento superficial $dxdy$.

Para facilitar el cálculo de I en muchos casos, convendrá considerar la figura de que se trate, bien como la suma de aquellas en que se descomponga, ó como la diferencia de otras varias, si así fuera conveniente; pues entonces el momento de inercia que se busca será la suma ó diferencia de momentos cuyas expresiones serán conocidas.

392. Problemas preliminares. —Dos problemas hay que resolver, relativos al cálculo de I.

393. Problema 1.° — Conociendo el momento de inercia I_a, de una figura de área ω, con relación á un eje AX_1, calcular el que corresponde á otro eje OX paralelo al primero, del cual dista la cantidad d, y pasa por el centro de gravedad de la figura.

Fig. 93.



Sea m un elemento superficial cualquiera; $x = \text{AR}, y_1 = m\text{R}$ las coordenadas del mismo con relación á los ejes X_1 Y.

$x = \text{OP}; y = m\text{P}$ las coordenadas con respecto á los ejes XY.

Tendremos

$$I_a = \iint y_1^2 \, dx dy_1;$$

y puesto que $\quad y_1 = d + y, \qquad dy_1 = dy,$

será

$$I_a = \iint (d + y)^2 \, dx dy$$

ó bien

$$I_a = d^2 \int\int dxdy + 2d \int\int dxdyy + \int\int dxdyy^2.$$

Pero

$$\int\int dxdy = \omega;$$

Además

$$\int\int dxdy\, y = 0;$$

porque la suma de los momentos de las áreas elementales con relación á una recta que pasa por el centro de gravedad, sabemos que es igual á 0. Por lo tanto será

$$I_a = \omega d^2 + I_x,$$

ó bien

$$I_x = I_a - \omega d^2,$$

Esta fórmula resuelve el problema y nos dice que el momento de inercia I_x se determina restando de I_a, momento conocido, el producto ωd^2, que resulta de multiplicar el área de la figura por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

394. Problema 2.º—Conociendo los momentos de inercia de una figura, con relación á dos ejes rectangulares XY, que pasan por su centro de gravedad (figura 94), calcular el correspondiente á otro eje OA, de distinta dirección y trazado por dicho centro.

Sea M un elemento de superficie de área $d\omega$, x su distancia al eje Y, y su distancia al eje X, h su distancia al eje A, y α el ángulo que define la orientación de este último eje.

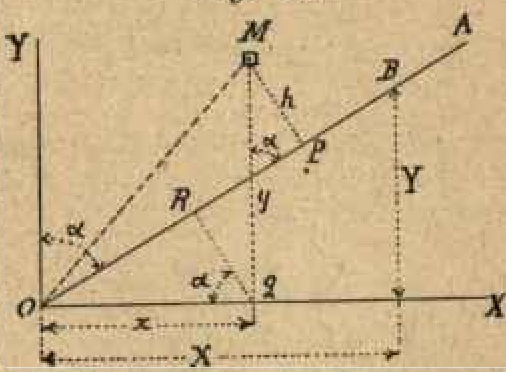
Las expresiones del momento de inercia, respecto á cada uno de los ejes, serán

Para el eje X .....$I_x = \int d\omega\, y^2$

Id. « Y .....$I_y = \int d\omega\, x^2$

Id. « A .....$I_a = \int d\omega\, h^2$

Fig. 94.



Ahora bien; tenemos

$$h^2 = OM^2 - OP^2 \quad ; \quad OM^2 = x^2 + y^2$$

$$OP^2 = (OR + RP)^2 \ldots\ldots \begin{cases} OR = x\, sen\, \alpha \\ RP = y\, cos\, \alpha \end{cases}$$

de donde

$$h^2 = x^2 cos^2 \alpha + y^2 sen^2 \alpha - 2xy\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha$$

Por tanto

$$\int d\omega\, h^2 = cos^2 \alpha \int d\omega\, x^2 + sen^2 \alpha \int d\omega\, y^2 - 2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha \int d\omega x y.$$

ó bien

$$I_a = I_y\, cos^2 \alpha + I_x\, sen^2 \alpha - 2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha \int d\omega x y. \qquad (1)$$

Tomemos sobre el nuevo eje el punto B, á una distancia del origen

$$OB = \frac{1}{\sqrt{I_\alpha}};$$

y sean X, Y las coordenadas de dicho punto

Tendremos

$$X = \frac{1}{\sqrt{I_\alpha}} sen\, \alpha \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I_\alpha}} cos\, \alpha$$

$$sen\, \alpha = X \sqrt{I_\alpha} \qquad cos\, \alpha = Y \sqrt{I_\alpha}$$

Sustituyendo en (1) y suprimiendo I_α, como factor común, resultará

$$1 = I_y Y^2 + I_x X^2 - XY.\, 2\int d\omega\, xy \qquad (2).$$

Esta ecuación representa una elipse referida á su centro; puesto que carece de los términos lineales, es de segundo grado y el radio vector OB no es nunca infinito, por ser I_α diferente de cero; pero como hemos supuesto que los ejes X Y pasan por el centro de gravedad, será $\int d\omega xy = 0$; puesto que separadamente ha de ser $\int d\omega\ x = 0$, $\int d\omega y = 0$: de suerte que la ecuación (2) se reduce á

$$1 = I_y Y^2 + I_x X^2 \qquad (3)$$

que es la ecuación de una elipse referida á sus ejes.

Si ahora, en esta ecuación, sustituímos los valores de Y^2 y de X^2, en función de α, que son:

$$X^2 = \frac{sen^2\alpha}{I_\alpha} \qquad Y^2 = \frac{cos^2\alpha}{I_\alpha}$$

tendremos

$$1 = I_y \frac{\cos^2\alpha}{I_a} + I_x \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{I_a}$$

ó finalmente

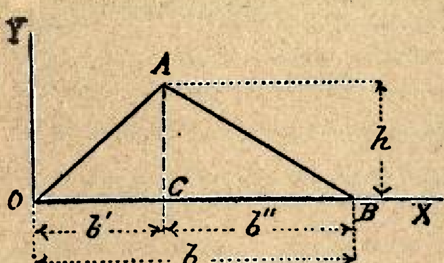
$$I_a = I_x \operatorname{sen}^2\alpha + I_y \cos^2\alpha, \qquad (4)$$

fórmula que resuelve el problema.

395. **Ejemplos.**—Los que se indican á continuación darán idea de la manera de calcular el momento de inercia, para deducir enseguida el módulo Z.

396. **Triángulos.**—(*a*) *El eje de momentos* OX *coincide con uno de los lados del triángulo.*

Fig. 95.



El momento de inercia I que se busca es la suma I′ + I″ de los momentos de inercia de los triángulos rectángulos O C A y C A B (figura 95), en que se descompone el propuesto por la perpendicular AC á la base OB.

La ecuación de la recta OA es

$$y = \frac{h}{b'} x;$$

por consiguiente, para el triángulo OAC, tendremos

$$I' = \int_0^{b'} dx \int_0^{y} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{b'} y^3 dx$$

pero como $y^3 = \frac{h^3}{b'^3} x^3$, será

$$I' = \frac{1}{3} \frac{h^3}{b'^3} \int_0^{b'} x^3 dx = \frac{1}{3} \frac{h^3}{b'^3} \cdot \frac{b'^4}{4}$$

ó finalmente

$$I' = \frac{1}{12} b' h^3$$

De manera análoga, tomando por eje de las y la recta CA, en cuyo caso la ecuación de la recta AB será $y = h - \frac{h}{b''} x$ y la expresión de I'', $I'' = \int_0^{b''} dx \int_0^y y^2 dy$, se deduce inmediatamente

$$I'' = \frac{1}{12} b'' h^3;$$

por consiguiente, resultará

$$I = \frac{1}{12} (b' + b'') h^3 \quad \text{ó} \quad I = \frac{1}{12} bh^3$$

y puesto que $v = h$, será

$$Z = \frac{I}{v} = \frac{1}{12} bh^2.$$

397. (*b*) *Eje de momentos paralelo á la base del triángulo y trazado por el centro de gravedad* (figura 96).

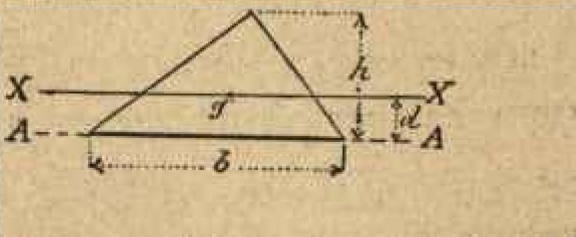
Apliquemos la fórmula

$$I_z = I_x - \omega d^2$$

Será

$$I_0 = \frac{1}{12} bh^3 \quad \left| \begin{array}{l} \omega = \dfrac{1}{2} bh \\ d^2 = \left(\dfrac{1}{3} h\right)^2 \end{array} \right| \quad \omega d^2 = \frac{1}{18} bh^3$$

Fig. 96.



Por tanto, con respecto al eje X, el valor de I será

$$I = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right) bh^3$$

ó bien $$I = \frac{1}{36} bh^3;$$

y puesto que ahora $v = \dfrac{2}{3} h$, será

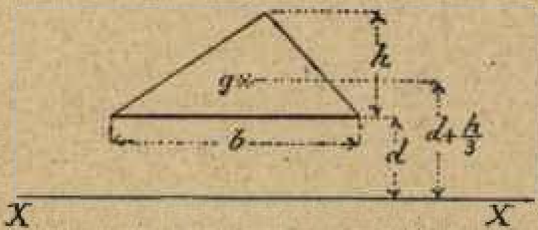
$$Z = \frac{1}{24} bh^2.$$

398. (*c*) *Eje de momentos exterior al triángulo y paralelo á uno de sus lados* (figura 97).

El momento de inercia relativo á la paralela al eje dado, trazada por el centro de gravedad es, según hemos visto, $\frac{1}{36} bh^3$;

la distancia entre el centro de gravedad g y el eje X es $d + \frac{h}{3}$;

Fig. 97.



por tanto, la expresión de I con relación al eje propuesto XX, será

$$I = \frac{1}{36} bh^3 + \frac{1}{2} bh \left(d + \frac{h}{3}\right)^2$$

ó bien

$$I = \frac{1}{12} bh^3 + bhd \left(\frac{h}{3} + \frac{d}{2}\right);$$

y como en este caso, $v = h + d$, será

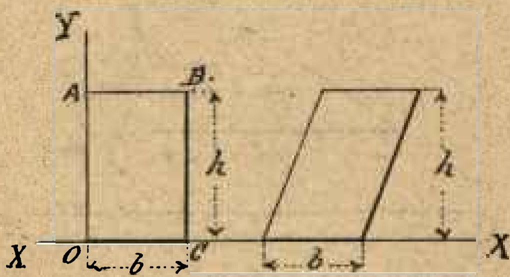
$$Z = \frac{\frac{1}{12} bh^3 + bhd \left(\frac{h}{3} + \frac{d}{2}\right)}{h + d}.$$

399. **Rectángulos y paralelógramos.**—(a) *El eje coincide con uno de los lados* (figura 98).

Basta hallar el momento de inercia del rectángulo; porque el paralelógramo de igual base, de igual altura y por lo tanto de la misma área, tendrá, con respecto al mismo eje, idéntico momento de inercia; puesto que no han variado, ni la distribución de las áreas elementales paralelamente al eje y en consecuencia sus distancias al mismo, ni el área total.

Consideremos, pues, el rectángulo limitado por los ejes XY, por la recta AB, cuya ecuación es $y = h$, y por la ordenada de

Fig. 98.



esta recta correspondiente á la abscisa $x = b$.

Tendremos, por tanto,

$$I = \int_0^b dx \int_0^y y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^b y^3 dx$$

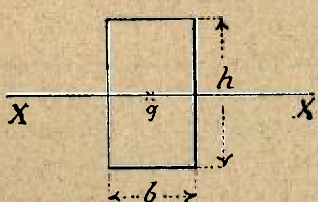
y puesto que $y = h$, tendremos

$$I = \frac{1}{3} \int_0^b h^3 dx = \frac{1}{3} bh^3$$

y siendo $v = h$, será

$$Z = \frac{1}{3} bh^2.$$

Fig. 99.



400. (*b*) *El eje pasa por el centro de gravedad y es paralelo á uno de los lados* (figura 99).

El momento de inercia del rectángulo es igual á la suma de los de las dos mitades en que queda dividido por el eje; rectángulos parciales que se encuentran en el caso anterior.

Así resulta $$I = 2 \times \frac{1}{3} b \left(\frac{h}{2}\right)^3$$

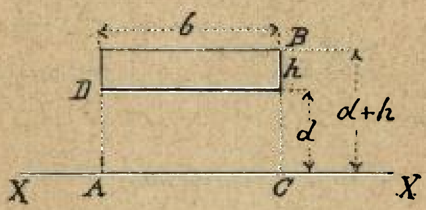
ó bien $$I = \frac{1}{12} bh^3;$$

y puesto que $v = \frac{h}{2}$, el módulo Z será

$$Z = \frac{1}{6} bh^2$$

401. (*c*) *El eje es exterior á la figura y paralelo á uno de sus lados* (figura 100). — Considerando el rectángulo pro-

Fig. 100.



puesto como la diferencia de los AB y CD, que se encuentran en el caso (*a*), tendremos

$$I = \frac{1}{3} b(d+h)^3 - \frac{1}{3} bd^3$$

ó

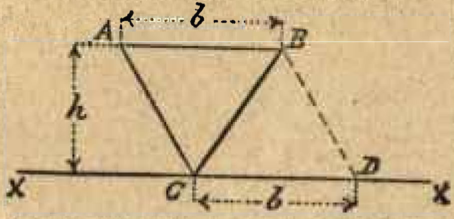
$$I = \frac{1}{3} bh^3 + bhd\,(d+h).$$

Pero $v = d + h$; luego

$$Z = \frac{1}{3} \frac{bh^3}{d+h} + bhd\,.$$

402. Triángulo *pasando el eje por un vértice y siendo paralelo al lado opuesto* (figura 101).—Análogamente á lo hecho en la figura que precede, podemos considerar el triángulo ABC como la diferencia entre el paralelógramo AD y el triángulo BCD.

Fig. 101.



Si llamamos I′, I″ á los momentos de inercia del paralelógramo AD y triángulo BCD, hemos visto que

$$\left.\begin{aligned} I' &= \frac{1}{3}\, bh^3 \\ I'' &= \frac{1}{12}\, bh^3 \end{aligned}\right\} \text{pero } I = I' - I''$$

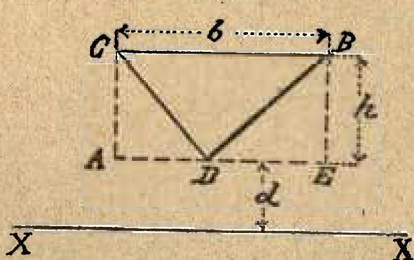
uego resultará

$$I = \frac{1}{4}\, bh^3$$

y como $v = h$, será

$$Z = \frac{1}{4}\, bh^2$$

Fig. 102.



403. Triángulo, *siendo el eje paralelo á la base, situado del lado del vértice y distante de este la cantidad d* (figura 102).

Consideraremos el triángulo como la diferencia entre el rectángulo AB y la suma de los triángulos ACD y BDE, entre los cuales componen un triángulo de base b y altura h.

Así tenemos:

$$(a) \qquad \mathrm{I} = \mathrm{I}' - \mathrm{I}'' \ldots \left| \begin{array}{l} \mathrm{I}' = \dfrac{1}{3} bh^3 + bhd\,(d+h) \\ \mathrm{I}'' = \dfrac{1}{12} bh^3 - bhd\left(\dfrac{h}{3} + \dfrac{d}{2}\right) \end{array} \right.$$

y sustituyendo en (a) resultará

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4} bh^3 + bhd\left(\frac{2h}{3} + \frac{d}{2}\right);$$

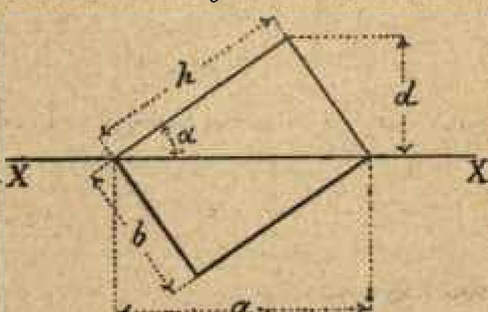
y puesto que $v = d + h$, se obtendrá también

$$\mathrm{Z} = \frac{\dfrac{1}{4} bh^3 + bhd\left(\dfrac{2h}{3} + \dfrac{d}{2}\right)}{d+h}$$

404. **Rectángulo,** *referido á una de sus diagonales.*

Llamando a á la longitud de la diagonal y d á la distancia

Fig. 103.



entre esta y los vértices opuestos (figura 103), el momento de inercia del rectángulo será igual al doble del que corresponde á uno de los dos triángulos adyacentes.

Por tanto resultará

$$I = \frac{1}{6} ad^3$$

y

$$Z = \frac{1}{6} ad^2$$

Las expresiones de I y de Z en función de los lados b y h del rectángulo se deducen con facilidad.

En efecto, tenemos

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} \alpha}, \qquad d = h \operatorname{sen} \alpha$$

de donde

$$I = \frac{1}{6} bh^3 \operatorname{sen}^2 \alpha .$$

Además

$$\frac{b}{h} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{y} \quad \frac{b^2}{b^2 + h^2} = \operatorname{sen}^2 \alpha ;$$

y sustituyendo en la expresión de I tendremos

$$I = \frac{1}{6} \cdot \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2} ;$$

pero se tiene $v = d = h \operatorname{sen} \alpha$; por tanto, para Z resultará

$$Z = \frac{1}{6} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}}$$

405. **Rectángulo,** *referido á un eje que pasa por el centro de gravedad y no coincide con ninguna de las diagonales; formando un ángulo* α *con uno de sus lados* (figura 104).

Hemos demostrado que

$$I_\alpha = I_x \operatorname{sen}^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha ;$$

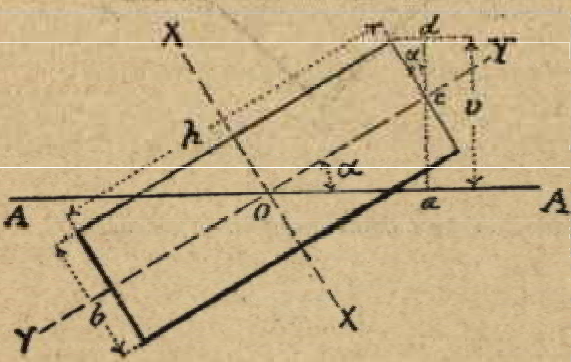
pero como tenemos

$$I_x = \frac{1}{12} bh^3, \qquad I_y = \frac{1}{12} hb^3$$

resultará

$$I = \frac{1}{12} bh\,(h^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)$$

Fig. 104.



La distancia al eje neutro de las fibras más lejanas es

$$v = ac + cd\,;$$

pero

$$\left.\begin{aligned} ac &= \frac{1}{2}\, h \operatorname{sen}\alpha \\ cd &= \frac{1}{2}\, b \cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{ y } \quad v = \frac{1}{2}(h \operatorname{sen}\alpha + b \cos\alpha);$$

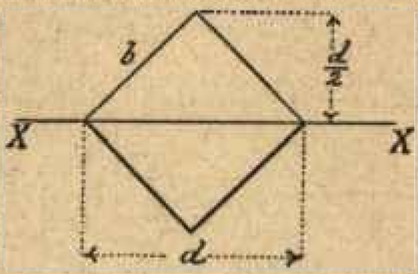
por lo tanto resultará para el módulo Z, la expresión

$$Z = \frac{1}{6}\,\frac{bh\,(h^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)}{h \operatorname{sen}\alpha + b \cos\alpha}.$$

406. Cuadrado, *siendo el eje una de sus diagonales.*

El momento de inercia de uno de los triángulos que componen el cuadrado (figura 105) es $\frac{1}{12} d \times \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{96} d^4 = \frac{1}{96} d^4$;

Fig. 105.



el momento total será doble; y por tanto resultará

$$I = \frac{1}{48} d^4$$

y

$$Z = \frac{1}{24} d^3$$

expresiones ambas en función de la diagonal.

Para obtenerlas en función del lado b, basta recordar que $d = b\sqrt{2}$; y sustituyendo resultará

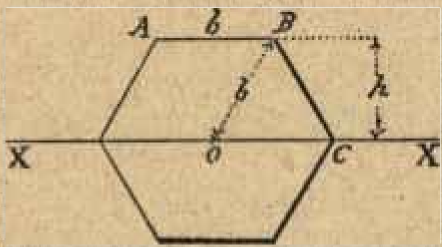
$$I = \frac{1}{12} b^4$$

$$Z = \frac{1}{12} b^3 \sqrt{2}$$

407. Exágono regular. (a) *Posición de mayor resistencia* (figura 106).

El momento de inercia total se hallará multiplicando por 2 la suma de los correspondientes al paralelógramo OA y al tri-

Fig. 106.



ángulo OBC; que valen respectivamente, $\frac{1}{3}\,bh^3$ y $\frac{1}{12}\,bh^3$; de donde

$$I = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) bh^3$$

ó

$$I = \frac{5}{6}\,bh^3$$

y

$$Z = \frac{5}{6}\,bh^2$$

Recordando que $h = \frac{1}{2}\,b\sqrt{3}$, resultará finalmente

$$I = \frac{5}{16}\,b^4\sqrt{3}$$

$$Z = \frac{5}{8}\,b^3$$

408. (*b*) *Posición de menor resistencia* (figura 107).—Sea I′ el momento de inercia del rectángulo AB, I″ el del triángulo

BCD. El del exágono será

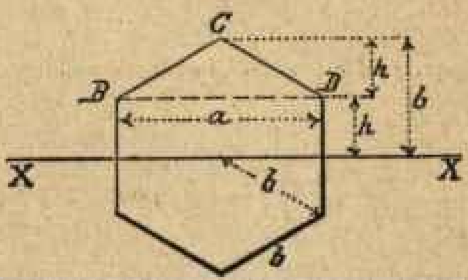
$$I = 2\,(I' + I'')$$

Ahora bien

$$I' = \frac{1}{3}\,ah^3$$

$$I'' = \frac{1}{12}\,ah^3 + ah^2\left(\frac{h}{3} + \frac{h}{2}\right) = \frac{11}{12}\,ah^3$$

Fig. 107.



Por lo tanto

$$I = \frac{5}{2}\,ah^3,$$

y puesto que $h = \dfrac{b}{2}$, y $a = b\sqrt{3}$, resultará

$$I = \frac{5}{16}\,b^4\sqrt{3}$$

y

$$Z = \frac{5}{16}\,b^3\sqrt{3}$$

409. Octógono regular. (*a*) *Posición de mayor resistencia* (figura 108).

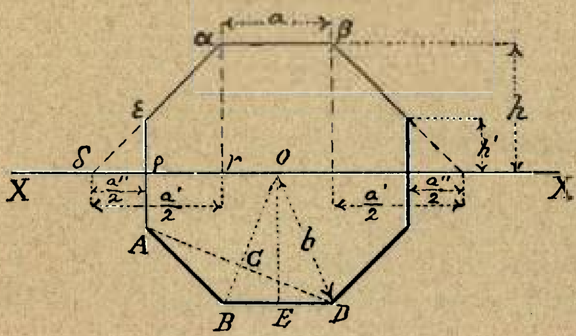
Llamemos

I′ al momento de inercia del rectángulo βγ

$\frac{1}{2}$ I″ al del triángulo αδγ

$\frac{1}{2}$ I‴ al del triángulo εδρ

Fig. 108.



Como á cada uno de estos triángulos de la izquierda corresponden á la derecha otros simétricos y respectivamente iguales, al duplo del primero podremos considerarlo como un solo triángulo de base a' y altura h, y al duplo del segundo como otro triángulo de altura h' y base a''.

Como el semioctógono superior, según indica la figura, es igual al rectángulo βγ, más el duplo del triángulo αδγ menos el duplo del εδρ, podremos establecer que

$$I = 2(I' + I'' - I''')$$

Pero

$$I' = \frac{1}{3} ah^3 \quad , \quad I'' = \frac{1}{12} a'h^3 \quad , \quad I''' = \frac{1}{12} a''h'^3.$$

Además

$$a' = 2h \quad , \quad h' = \frac{a}{2} \quad , \quad a'' = 2h' = a.$$

La expresión de I tomará la siguiente forma:

$$I = \frac{2}{3} a h^3 + \frac{1}{3} h^4 - \frac{1}{48} a^4$$

Siendo b el radio del círculo circunscrito al octógono, se tiene, como es fácil deducir directamente, para el lado a y la apotema h, ([a])

$$a = b\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$h = \frac{1}{2} b \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

por lo tanto resultará

$$I = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} b^4$$

y por ser $v = h$,

$$Z = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2 + \sqrt{2}}} b^3$$

410. (a) *Posición de menor resistencia* (figura 109).— Consideraremos ahora la figura formada por la suma de dos triángulos iguales á (A), dos iguales á (B) y cuatro iguales á (C).

Si designamos por I_a, I_b, I_c los momentos de inercia de los referidos triángulos (A) (B) y (C) con relación al eje XX, ten-

---

(a) $a = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ $\qquad$ $AC = OC = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} b\sqrt{2}$

$h = OE = \sqrt{OD^2 - ED^2}$ $\qquad$ $BC = OB - OC = b\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

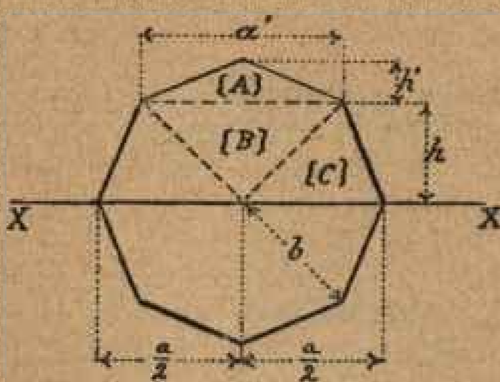
$$a = \sqrt{\frac{1}{2} b^2 + b^2\left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)} = b\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2} a\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4} a^2} = \frac{1}{2} b\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

dremos, llamando como siempre I al momento de inercia total,

$$I = 2\left(I_a + I_b + 2\, I_c\right)$$

Fig. 109.



Pero á virtud de las fórmulas anteriormente halladas, tenemos

$$I_a = \frac{1}{12}\, a' h'^3 + a' h' h \left(\frac{h'}{3} + \frac{h}{2}\right)$$

$$I_b = \frac{1}{4}\, a' h^3$$

$$I_c = \frac{1}{12}\, \frac{a}{2}\, h^3$$

Además, se deduce fácilmente de la figura, que

$$a' = b\sqrt{2} \qquad h' = b\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$h = \frac{1}{2}\, b\sqrt{2} \qquad a = 2b$$

Por lo tanto resultará

$$I_a = \frac{1}{24}\, b^4 \left(3\sqrt{2} - 1\right)$$

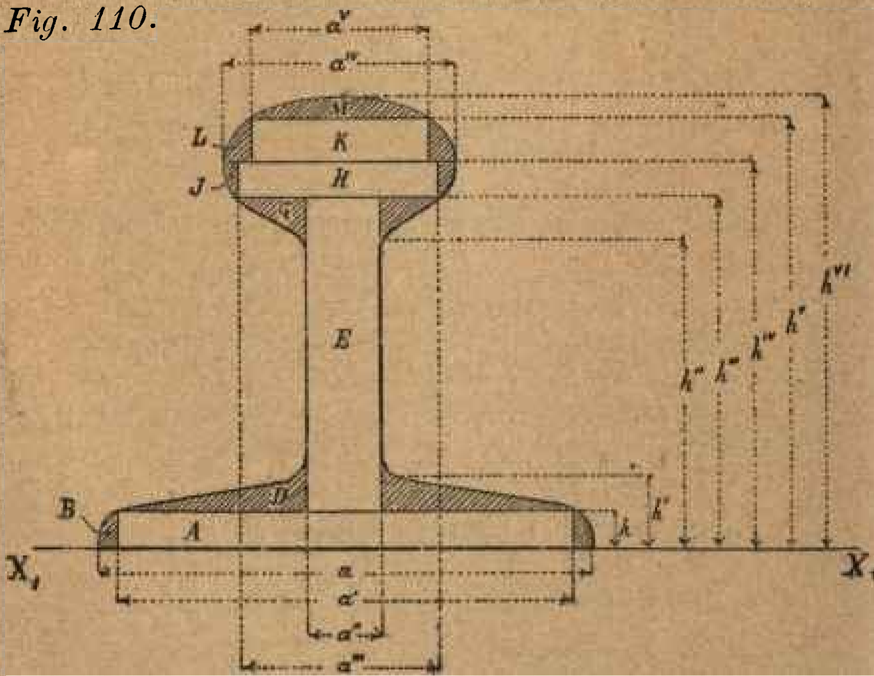
$$I_b = \frac{3}{24} b^4, \qquad 2I_c = \frac{1}{24} b^4 \sqrt{2},$$

y finalmente, teniendo en cuenta que $v = b$,

$$I = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} b^4 \qquad Z = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} b^3.$$

411. Sección cualquiera. —Para hallar el momento de inercia de una figura cualquiera, no hay más que trazar una serie de paralelas y perpendiculares al eje de momentos, á tal distan-

Fig. 110.



cia que puedan considerarse como rectilíneas las porciones de contorno comprendido entre paralelas, y resulte la figura descompuesta en rectángulos y triángulos, cuyos momentos de inercia se calcularán por las fórmulas halladas, y se hará su suma.

Si se toma como eje primitivo una recta exterior á la figura, bastará enseguida aplicar la fórmula

$$\mathrm{I}_x = \mathrm{I}_a - \omega d^2$$

para tener el momento de inercia con relación al eje neutro; lo que exige la determinación del centro de gravedad de la superficie propuesta y el área de la misma.

412. Ejemplo.—Supongamos que se trata de un carril Decauville, de uso corriente en las grandes explotaciones agrícolas; y sean las dimensiones que definen las superficies parciales que indica la figura, las siguientes; tomando el centímetro por unidad:

a	$= 6{,}50$ cm.	h	$= 0{,}55$ cm.
a^{I}	$= 6{,}10$ »	h^{I}	$= 1{,}00$ »
a^{II}	$= 1{,}00$ »	h^{II}	$= 4{,}15$ »
a^{III}	$= 2{,}65$ »	h^{III}	$= 4{,}70$ »
a^{IV}	$= 3{,}00$ »	h^{IV}	$= 5{,}20$ »
a^{V}	$= 2{,}40$ »	h^{V}	$= 5{,}75$ »
		h^{VI}	$= 6{,}00$ »

Las expresiones de los momentos de inercia de las superficies parciales, con respecto al eje X_1X_1 serán las siguientes:

A.... $\mathrm{I}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3} a' h^3$

2 B.... $2\,\mathrm{I}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{12} (a - a') h^3$

2 D.... $2\,\mathrm{I}_{\mathrm{D}} = \frac{1}{12} (a' - a'') (h' - h)^3 + (a' - a'') (h' - h)\, h \left(\frac{h' - h}{3} + \frac{h}{2}\right)$

E.... $\mathrm{I}_{\mathrm{E}} = \frac{1}{3} a'' (h''' - h)^3 + a'' (h''' - h)\, h h'''$

2 G.... $2\,\mathrm{I}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{4} (a''' - a'')(h''' - h'')^3 + (a''' - a'')(h''' - h'')\, h'' \left(\frac{2}{3} (h''' - h'') + \frac{h''}{2}\right)$

H.... $\mathrm{I}_{\mathrm{H}} = \frac{1}{3} a''' (h^{\mathrm{IV}} - h''')^3 + a''' (h^{\mathrm{IV}} - h''')\, h''' h^{\mathrm{IV}}$

2 J.... $2\,\mathrm{I}_{\mathrm{J}} = \frac{1}{4} (a^{\mathrm{IV}} - a''')(h^{\mathrm{IV}} - h''')^3 + (a^{\mathrm{IV}} - a''')(h^{\mathrm{IV}} - h''')\, h''' \left(\frac{2}{3} (h^{\mathrm{IV}} - h''') + \frac{h'''}{2}\right)$

$$\text{K} \ldots\ldots \quad I_K = \frac{1}{3} a^v (h^v - h^{iv})^3 + a^v (h^v - h^{iv}) h^{iv} h^v$$

$$2\,\text{L} \ldots\ldots 2\,I_L = \frac{1}{12}(a^{iv} - a^v)(h^v - h^{iv})^3 + (a^{iv} - a^v)(h^v - h^{iv}) h^{iv} \left(\frac{h^v - h^{iv}}{3} + \frac{h^{iv}}{2}\right)$$

$$\text{M} \ldots\ldots \quad I_M = \frac{1}{12} a^v (h^{vi} - h^v)^3 + a^v (h^{vi} - h^v) h^v \left(\frac{h^{vi} - h^v}{3} + \frac{h^v}{2}\right)$$

Sustituyendo los valores numéricos de las longitudes que entran en estas expresiones, resultará:

Superficies	Momentos de inercia.	
A	$I_A = \frac{1}{3} \times 6{,}1 \times 0{,}55^3$ .... =	0,3382958
2 B	$2\,I_B = \frac{1}{12} \times 0{,}4 \times 0{,}55^3$ .... =	0,0055458
2 D	$2\,I_D = \frac{1}{12} \times 5{,}1 \times 0{,}45^3 + 5{,}1 \times 0{,}45 \times 0{,}55 \times \left(\frac{0{,}45}{3} + \frac{0{,}55}{2}\right)$ ... =	0,5751843
E	$I_E = \frac{1}{3} \times 1 \times 4{,}15^3 + 1 \times 4{,}15 \times 0{,}55 \times 4{,}7$ .... =	34,5522083
2 G	$2\,I_G = \frac{1}{4} \times 1{,}65 \times 0{,}55^3 + 1{,}65 \times 0{,}55 \times 4{,}15 \left(\frac{2}{3} \times 0{,}55 + \frac{4{,}15}{2}\right) =$	9,2642515
H	$I_H = \frac{1}{3} \times 2{,}65 \times 0{,}5^3 + 2{,}65 \times 0{,}5 \times 4{,}7 \times 5{,}2$ .... =	32,4934166
2 J	$2\,I_J = \frac{1}{4} \times 0{,}35 \times 0{,}5^3 + 0{,}35 \times 0{,}5 \times 4{,}7 \left(\frac{2}{3} \times 0{,}5 + \frac{4{,}7}{2}\right)$ ... =	2,2179791
K	$I_K = \frac{1}{3} \times 2{,}4 \times 0{,}55^3 + 2{,}4 \times 0{,}55 \times 5{,}2 \times 5{,}75$ .... =	39,6011000
2 L	$2\,I_L = \frac{1}{12} \times 0{,}6 \times 0{,}55^3 + 0{,}6 \times 0{,}55 \times 5{,}2 \times \left(\frac{0{,}55}{3} + \frac{5{,}2}{2}\right)$ ... =	4,7845187
M	$I_M = \frac{1}{12} \times 2{,}4 \times 0{,}25^3 + 2{,}4 \times 0{,}25 \times 5{,}75 \times \left(\frac{0{,}25}{3} + \frac{5{,}75}{2}\right)$ .. =	10,2093750
	Momento de inercia total $I =$	134,0418751

Como la figura propuesta ha quedado dividida en rectángulos y triángulos, la determinación del área y de su centro de gravedad puede hacerse como sigue, tomando los momentos con relación al eje X_1X_1.

Superficie.	ÁREAS		BRAZOS DE PALANCA		Momentos.
	Expresión.	Valor.	Expresión.	Valor.	Valor.
(A)	$a'h$	3,3550	$\frac{1}{2}h$	0,275	0,922625
2 (B)	$\frac{1}{2}(a-a')h$.	0,1100	$\frac{1}{3}h$	0,183	0,020130
2 (D)	$\frac{1}{2}(a'-a'')(h'-h)$....	1,1475	$h+\frac{1}{3}(h'-h)$......	0,700	0,803250
(E)	$a''(h'''-h)$............	4,1500	$h+\frac{1}{2}(h'''-h)$....	2,625	10,893750
2 (G)	$\frac{1}{2}(a'''-a'')(h'''-h'')$	0,4537	$h''+\frac{2}{3}(h'''-h'')$..	4,516	2,049135
(H)	$a'''(h^{iv}-h''')$...........	1,3250	$h'''+\frac{1}{2}(h^{iv}-h''')$..	4,950	6,558750
2 (J)	$\frac{1}{2}(a^{iv}-a''')(h^{iv}-h''')$	0,0875	$h'''+\frac{2}{3}(h^{iv}-h''')$.	5,033	0,440387
(K)	$a^{v}(h^{v}-h^{iv})$............	1,3200	$h^{iv}+\frac{1}{2}(h^{v}-h^{iv})$. .	5,475	7,227000
2 (L)	$\frac{1}{2}(a^{iv}-a^{v})(h^{v}-h^{iv})$	0,1650	$h^{iv}+\frac{1}{3}(h^{v}-h^{iv})$..	5,383	0,888195
(M)	$\frac{1}{2}a^{v}(h^{vi}-h^{v})$..	0,3000	$h^{v}+\frac{3}{3}(h^{iv}-h^{v})$...	5,833	1,749900
	Sumas.... ...... $\Omega=$	12.4137	....		$\Omega\zeta$=31,553122

Si llamamos ζ al brazo de palanca del área total Ω, con relación al mismo eje X_1X_1, tendremos

$$\zeta = \frac{31,553122}{12,4137} = 2,5418$$

de donde

$$v = H - \zeta = 6 - 2,5418 = 3,4582.$$

Si ahora sustituímos el valor de ζ en la expresión del momento de inercia referido al eje neutro, que es, como sabemos,

$$I = I_a - \omega \zeta^2$$

resultará

$$I = 134,0418751 - 12,4137 \times 2,5418^2$$

ó bien

$$I = 53,8401$$

y

$$Z = \frac{I}{v} = \frac{53,8401}{3,4582}$$

ó bien

$$Z = 15,5688$$

413. Observación.—Como acabamos de ver, por el ejemplo que precede, el cálculo del momento de inercia resulta bastante laborioso, cuando la forma de la sección no responde á un contorno de generación geométrica definida y sencilla, caso frecuente en numerosas piezas de hierro y de fundición usadas en las construcciones.

Por este motivo debe preferirse el empleo de los integrómetros, por ejemplo el de Amsler, cuyos resultados son suficientemente exactos en la práctica. Tan ingeniosos aparatos son de manejo sencillísimo y presentan la inmensa ventaja de la rapidez con que se halla el resultado que se busca y de que los errores son harto improbables, si, como debe hacerse, se repite la operación por lo menos tres veces, para tomar la media de los resultados obtenidos.

A semejanza de lo que se hace con el planimetro, basta recorrer con el estilete el contorno de la figura, para que mediante tres lecturas iniciales y tres finales, en las respectivas ruedas contadoras, se deduzca con la mayor facilidad: 1.º el área de la figura, 2.º su momento estático, y 3.º su momento de inercia, con relación á un eje trazado de antemano.

Al integrómetro de Amsler acompaña una clara exposición de su teoría y las instrucciones necesarias para su manejo, siendo su precio algo elevado el único inconveniente que ofrece este aparato verdaderamente admirable.

414. Calculo del momento de inercia, por la medida de una cierta área.—Otro procedimiento muy sencillo puede seguirse para calcular el momento de inercia de una sección cualquiera. Sea esta, por ejemplo, la OABCH (figura 111), y OX el eje de momentos.

Si dividimos aquella en superficies elementales, por medio de rectas suficientemente próximas y perpendiculares al eje de momentos, dichas superficies podrán considerarse como rectángulos de altura y y de base Δx. El momento de inercia de cualquiera de ellos tendrá por expresión $\frac{1}{3}\Delta x y^3$, y el de la sección dada será $I = \frac{1}{3}\Sigma \Delta x y^3$.

Supongamos trazada una curva cuyas ordenadas, que representaremos por y_1, sean, para los mismos valores de la abscisa, respectivamente iguales á los cubos de las ordenadas de la propuesta, pudiendo, por tanto, establecer que $y_1 = y^3$. La expresión de I será

$$I = \frac{1}{3}\Sigma y_1 \Delta x;$$

pero $\Sigma y_1 \Delta x$ representa el área limitada por la curva $y_1 = f(x)$,

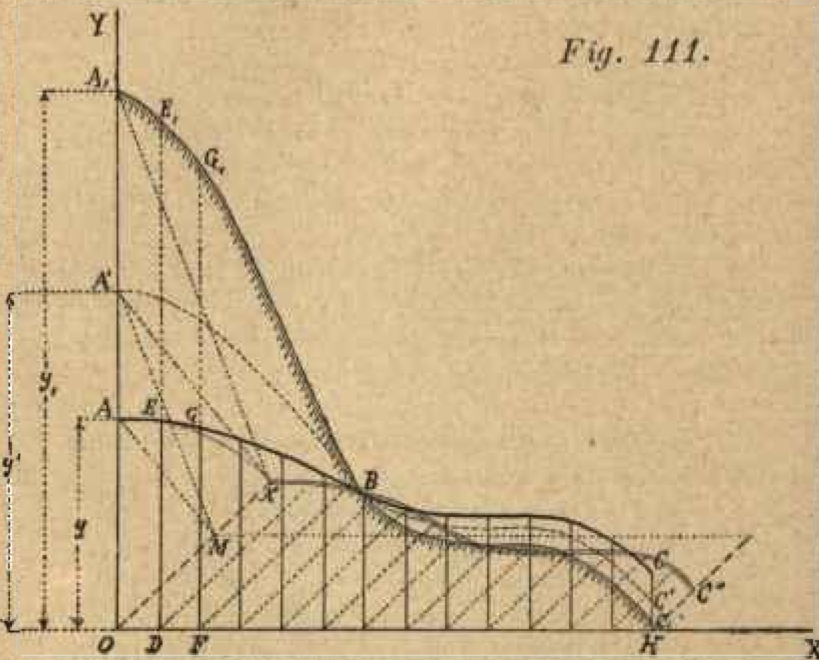


Fig. 111.

el eje de momentos y las ordenadas extremas; de donde resulta que el momento de inercia de la sección propuesta es igual al tercio del área de la curva transformada. Construída ésta, la cuestión queda reducida al cálculo de una superficie, que se hará con el planimetro ó por cualquiera de los medios usuales.

415. Veamos cómo, de la sección propuesta, se deduce la transformada, cuya área ω_1, según acabamos de ver, tiene por expresión numérica el triplo del momento de inercia de la primera.

Sea (figura 111) ABC la curva que limita la sección dada, y OA $= y$, una de sus ordenadas. Tracemos por su pie una oblícua y sobre ella tomemos OM $= 1$, y OA″ $= y$. Si unimos los puntos M y A por la recta MA ; por A″ trazamos A″A′, paralela á

MA; y además $A''A_1$ paralela á MA', se formarán los triángulos semejantes OMA y OA''A', así como los OMA' y $OA''A_1$.

De los primeros se deduce

$$\frac{OA'}{OA''=y} = \frac{OA=y}{OM=1},$$

de donde

$$OA' = y^2.$$

Y comparando los segundos se tendrá

$$\frac{OA_1 = y_1}{OA' = y^2} = \frac{OA''=y}{OM=1},$$

de donde

$$OA_1 = y_1 = y^3.$$

Si lo que hemos hecho para el punto A de la curva propuesta, se repite para los puntos E, G,...etc., obtendremos los correspondientes E_1, G_1 .....etc., de la curva transformada, que resultará uniendo estos últimos por medio de una línea continua, y será, por tanto, la A_1BC_1.

El tercio de la superficie O A_1 B C_1 N será igual al momento de inercia de la sección OABCH, con respecto al eje OX.

416. La curva A'BC', en la cual se verifica que sus ordenadas y', son respectivamente iguales á los cuadrados de las de la propuesta, permite determinar el eje neutro de la sección dada que pasa por su centro de gravedad y es paralelo al eje OX.

En efecto; el área elemental de dicha curva A'BC' tiene por expresión $y'\Delta x = y^2 \Delta x$. El área total será, por tanto,

$$\Sigma y^2 \Delta x = 2 \Sigma y \cdot \Delta x \times \frac{y}{2}.$$

Pero $y \Delta x \times \frac{y}{2}$ no es otra cosa que el momento de uno de los rectángulos elementales de la sección propuesta, con relación al eje OX; luego $\Sigma y \Delta x \times \frac{y}{2}$ representará el momento de dicha sección con respecto al mismo eje; de donde resulta que el área limitada por la curva A'BC' es igual al duplo del momento estático de la sección propuesta con relación al eje OX.

Si, pues, llamamos ω al área OABCH, ζ á su brazo de palanca con respecto al eje OX, y ω' al área OA'BC'H, tendremos

$$\omega' = 2\,\omega\,\zeta$$

de donde

$$\zeta = \frac{1}{2}\,\frac{\omega'}{\omega},$$

expresión de la distancia del centro de gravedad del área dada al eje OX.

417. Conocido el valor de ζ, el momento de inercia con relación al nuevo eje que pasa por el centro de gravedad y es paralelo al antiguo, se calculará por la fórmula establecida en el número **393**.

418. Si la magnitud OM, tomada como unidad en las construcciones gráficas, no coincide con aquella á que ha de referirse el momento de inercia, se tendrá en cuenta la relación entre ambas para deducir el verdadero valor de aquél.

Supongamos que el momento de inercia y el momento estático hayan de referirse al centímetro, y hubiéramos tomado OM = 3 centímetros. Las ordenadas de la curva A'BC' resultarán 3^1 veces menores y las de la curva A_1BC_1 $3^2 = 9$ veces menores que si hubiéramos hecho OM = 1 centímetro; por consiguiente, si al calcular las áreas respectivas ω' y ω_1 se toma el centímetro lineal por unidad y como consecuencia el centímetro cuadrado por unidad de superficie, habremos de multiplicar el área ω' por 3 y el área $\omega_1 = O\ A_1B\ C_1H$, ó bien los momentos respectivos á los cuales dichas áreas son proporcionales.

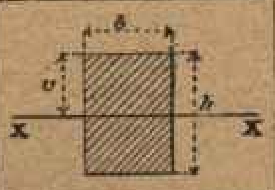
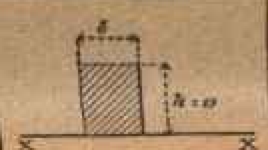
La aplicación de este procedimiento exige gran esmero en las construcciones gráficas. Por este motivo resulta más rápido y exacto el empleo de los integrómetros; medio que cuando sea posible, debe preferirse.

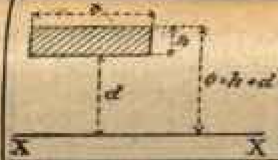
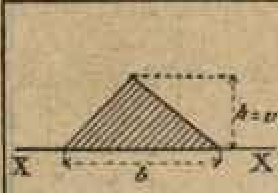
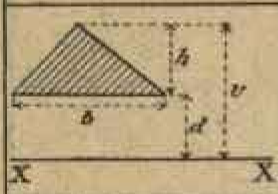
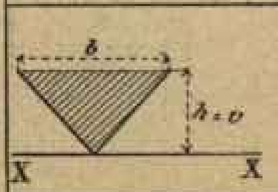
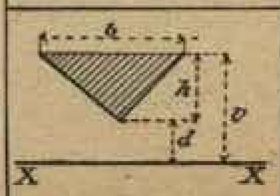
419. En el siguiente cuadro se consignan las expresiones del momento de inercia I, de la distancia v del eje neutro á las fibras más fatigadas, y del módulo de flexión Z, que corresponden á algunos perfiles ó secciones usuales.

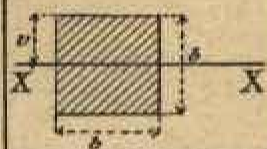
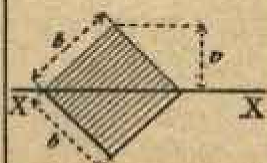
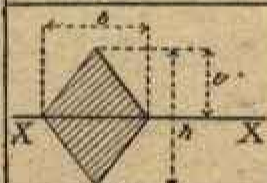
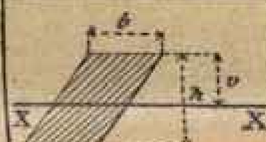
CUADRO DE EXPRESIONES

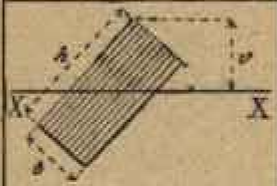
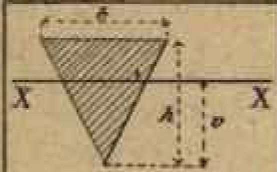
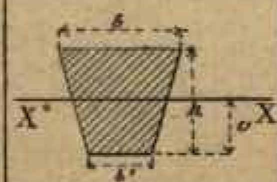
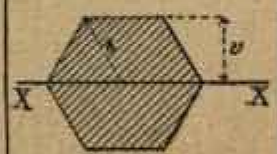
DE I Y DE Z, PARA LOS PERFILES USUALES

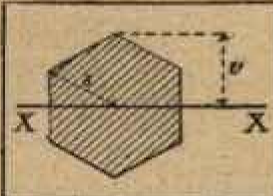
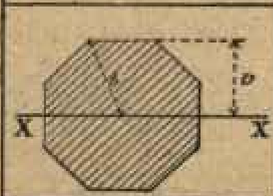
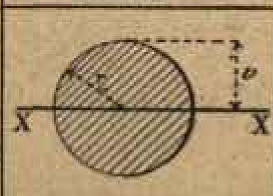
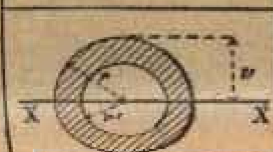
I = momento de inercia.
Z = módulo de flexión.
v = distancia al eje de las fibras más lejanas.

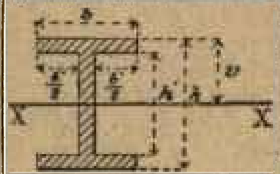
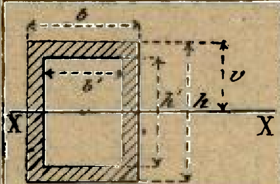
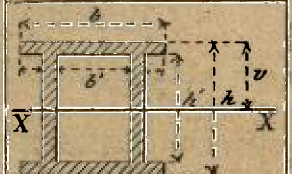
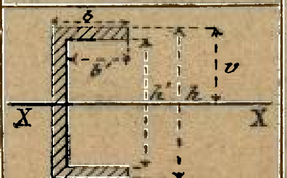
Figuras.	SECCIONES	Momento de inercia. I	Distancia del eje neutro á las fibras más lejanas. v	Módulo de flexión. Z
112		$\frac{1}{12} bh^3$	$\frac{1}{2} h$	$\frac{1}{6} bh^2$
113		$\frac{1}{3} bh^3$	h	$\frac{1}{3} bh^2$

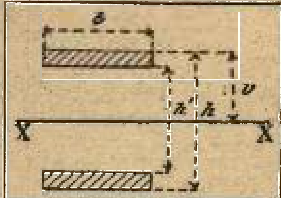
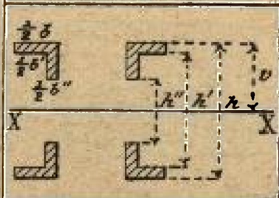
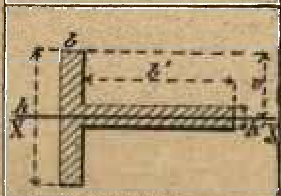
114		$\frac{1}{3}\,bh^3 + bhd\,(h+d)$	$h+d$	$\frac{1}{3}\,\frac{bh^3}{h+d} + bhd$
115		$\frac{1}{12}\,bh^3$	h	$\frac{1}{12}\,bh^3$
116		$\frac{1}{12}\,bh^3 + bhd\left(\frac{h}{3} + \frac{d}{2}\right)$	$h+d$	$\dfrac{\frac{1}{12}\,bh^3 + bhd\left(\frac{h}{3} + \frac{d}{2}\right)}{h+d}$
117		$\frac{1}{4}\,bh^3$	h	$\frac{1}{4}\,bh^3$
118		$\frac{1}{4}\,bh^3 + bhd\left(\frac{2h}{3} + \frac{d}{2}\right)$	$h+d$	$\dfrac{\frac{1}{4}\,bh^3 + bhd\left(\frac{2h}{3} + \frac{d}{2}\right)}{h+d}$

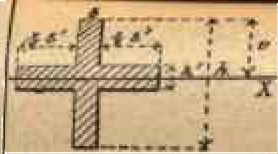
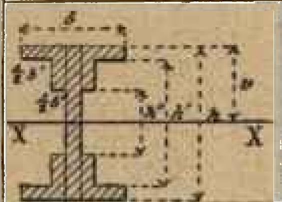
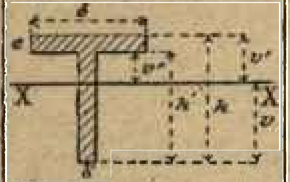
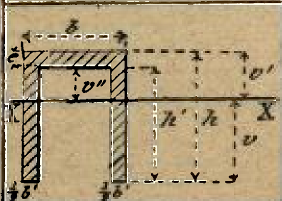
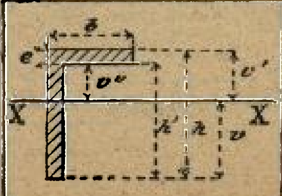
Figuras.	SECCIONES	Momento de inercia. I	Distancia del eje neutro á las fibras más lejanas. v	Módulo de flexión. Z
119		$\frac{1}{12}\,b^4$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{6}\,b^3$.
120		$\frac{1}{12}\,b^4$	$\frac{1}{2}\,b\sqrt{2}$	$\frac{1}{12}\,b^3\sqrt{2}$
121		$\frac{1}{48}\,bh^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{24}\,bh^2$
122		$\frac{1}{12}\,bh^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\,bh^2$

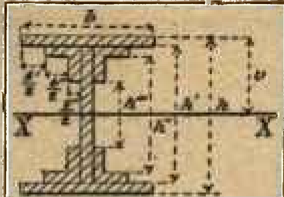
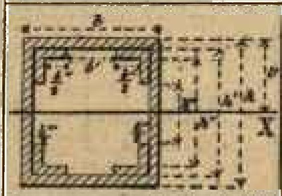
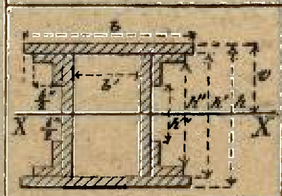
123		$\frac{1}{6}\,\frac{b^3h^3}{b^2+h^2}$	$\frac{bh}{\sqrt{b^2+h^2}}$	$\frac{1}{6}\,\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}$
124		$\frac{1}{12}\,bh\,(h^2\,\text{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)$	$\frac{1}{2}\,(h\,\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)$	$\frac{1}{6}\,\frac{bh\,(h^2\,\text{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)}{h\,\text{sen}\,\alpha+b\cos\alpha}$
125		$\frac{1}{36}\,bh^3$	$\frac{2}{3}\,h$	$\frac{1}{24}\,bh^3$
126		$\frac{1}{36}\,h^3\,\frac{2bb'+(b+b')^2}{b+b'}$	$\frac{(2b+b')\,h}{3\,(b+b')}$	$\frac{1}{12}\,h^3\,\frac{2bb'+(b+b')^2}{2b+b'}$
127		$\frac{5\sqrt{3}}{16}\,b^4$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,b$	$\frac{5}{8}\,b^3$

Figuras.	SECCIONES	Momento de inercia. I	Distancia del eje neutro de las fibras más lejanas. v	Módulo de flexión Z
128		$\frac{5\sqrt{3}}{16}\,b^4$	b	$\frac{5\sqrt{3}}{16}\,b^3$
129		$\frac{1+2\sqrt{2}}{6}\,b^4$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,b$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,b^3$
130		$\frac{1}{4}\,\pi r^4$	r	$\frac{1}{4}\,\pi r^3$
131		$\frac{1}{4}\,\pi\,(r^4-r'^4)$	r	$\frac{1}{4}\,\pi\,\frac{r^4-r'^4}{r}$

132		$\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 = 0{,}11\, r^4$	$r\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) =$ 0,5756 . r	$0{,}1907\, r^3$
133		$\frac{1}{12}(bh^3 - b'h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\,\frac{bh^3 - b'h'^3}{h}$
134		$\frac{1}{12}(bh^3 - b'h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\,\frac{bh^3 - b'h'^3}{h}$
135		$\frac{1}{12}(bh^3 - b'h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\,\frac{bh^3 - b'h'^3}{h}$
136		$\frac{1}{12}(bh^3 - b'h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\,\frac{bh^3 - b'h'^3}{h}$

Figuras.	SECCIONES	Momento de inercia. I	Distancia del eje neutro á las fibras más lejana. v	Módulo de flexión Z
137		$\frac{1}{12} b(h^3 - h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{b(h^3 - h'^3)}{h}$
138		$\frac{1}{12} \left[bh^3 - (b'h'^3 + b''h''^3) \right]$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{bh^3 - (b'h'^3 + b''h''^3)}{h}$
139		$\frac{1}{12} (bh^3 + b'h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{bh^3 + b'h'^3}{h}$
140		$\frac{1}{12} (bh^3 + b'h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{bh^3 + b'h'^3}{h}$

141		$\frac{1}{12}(bh^3+b'h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\,\frac{bb^3+b'h'^3}{h}$
142		$\frac{1}{12}\left[\,bh^3-(b'h'^3+b''h''^3)\,\right]$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\,\frac{bh^3-(b'h'^3+b''h''^3)}{h}$
143		$\frac{1}{3}\left[b(\nu'^3-\nu''^3)+b'(\nu''^3+\nu^3)\right]$ $\nu'=h-\nu\quad;\quad\nu''=h'-\nu$	$\frac{be(h+h')+b'h'^2}{2(be+b'h')}$	$\frac{1}{3}\,\frac{b(\nu'^3-\nu''^3)+b'(\nu''^3+\nu^3)}{\nu}$
144		$\frac{1}{3}\left[b(\nu'^3-\nu''^3)+b'(\nu''^3+\nu^3)\right]$ $\nu'=h-\nu\quad;\quad\nu''=h'-\nu$	$\frac{be(h+h')+b'h'^2}{2(be+b'h')}$	$\frac{1}{3}\,\frac{b(\nu'^3-\nu''^3)+b'(\nu''^3+\nu^3)}{\nu}$
145		$\frac{1}{3}\left[b(\nu'^3-\nu''^3)+b'(\nu''^3+\nu^3)\right]$ $\nu'=h-\nu\quad;\quad\nu''=h'-\nu$	$\frac{be(h+h')+b'h'^2}{2(be+b'h')}$	$\frac{1}{3}\,\frac{b(\nu'^3-\nu''^3)+b'(\nu''^3+\nu^3)}{\nu}$

Figuras.	SECCIONES	Momento de inercia. I	Distancia del eje neutro á las fibras más lejanas. y	Módulo de flexión. Z
146		$\frac{1}{12}\left[bh^3-(b'h'^3+b''h''^3+b'''h'''^3)\right]$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\ \frac{bh^3-(b'h'^3+b''h''^3+b'''h'''^3)}{h}$
147		$\frac{1}{12}\left[bh^3-(b'h'^3+b''h''^3+b'''h'''^3)\right]$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\ \frac{bh^3-(b'h'^3+b''h''^3+b'''h'''^3)}{h}$
148		$\frac{1}{12}\left[bh^3-(b'h'^3+b''h''^3+b'''h'''^3)\right]$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6}\ \frac{bh^3-(b'h'^3+b''h''^3+b'''h'''^3)}{h}$
149		$\frac{1+2\sqrt{2}}{6}\ b^4$	b	$\frac{1+2\sqrt{2}}{6}\ b^3.$

RESUMEN DE LAS FÓRMULAS DE FLEXIÓN

420. Como en el estudio de los entramados hay que hacer uso frecuente de diversas fórmulas relativas á la flexión, según el caso en que se halle la pieza, hemos reunido en el siguiente cuadro las más usuales, para tenerlas á la vista y disponer de ellas con más facilidad.

A cada caso corresponden tres figuras. En la primera se indica la manera cómo están distribuídas las cargas; la segunda pone de manifiesto la forma de los diagramas de momentos de flexión (rayado oblicuo) y de esfuerzos cortantes (rayado vertical), y la tercera denota la forma que toma la línea elástica.

Representan además:

M, M' momentos máximos de flexión, en valor absoluto;
T, T' esfuerzos cortantes máximos,
R, R' reacciones en los apoyos;
f flecha máxima de flexión ó flecha en el punto de aplicación de la carga, según los casos;
x abscisa del punto de la viga en que el momento intermedio es máximo;
x' abscisa del punto de inflexión;
x'' abscisa del punto de la viga en que la flecha es máxima.

421. Observación. — Las fórmulas consignadas para calcular las flechas de flexión, suponen que la sección recta de la pieza es simétrica con relación al eje neutro. Para las secciones no simétricas con respecto á dicho eje, tales fórmulas no son aplicables.

En efecto, cuando la sección es simétrica, y para los casos más usuales de flexión, la flecha puede escribirse, como sabemos, bajo la forma

$$(1) \qquad f = \beta \frac{PL^3}{ZEh}$$

Poniendo de manifiesto la distancia $v = \frac{h}{2}$, entre el eje neutro y las fibras más fatigadas, resultará

$$f = \beta \frac{PL^3}{2ZE \frac{h}{2}}$$

ó bien

$$(2) \qquad f = \beta \frac{PL^3}{2EZv} = \beta \frac{PL^3}{2EI}.$$

La fórmula (1) podrá aplicarse para las secciones simétricas, porque entonces se verifica que $h = 2v$; pero no se podrá aplicar para las no simétricas, porque en tal caso $h \gtrless 2v$.

La expresión más general de la flecha será por tanto

$$f = n \frac{PL^3}{EZv} = n \frac{PL^3}{EI},$$

aplicable lo mismo á las secciones simétricas que á las no simétricas con respecto al eje neutro.

CUADRO

DE LAS EXPRESIONES MÁS USUALES RELATIVAS Á DIVERSOS CASOS DE FLEXIÓN.

CASO

1

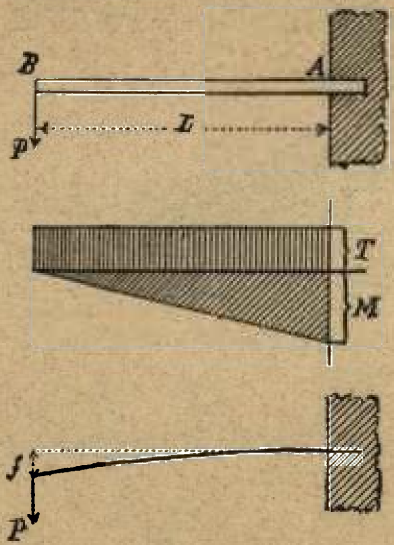


Fig. 150.

$$M = - PL$$

$$T = P$$

$$f = - \frac{2}{3} \frac{PL^3}{ZEh} = - \frac{2}{3} \frac{KL^2}{Eh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = PL$$

CASO

2

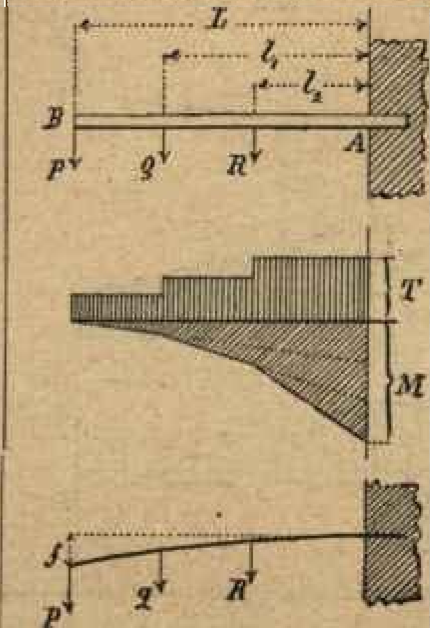


Fig. 151.

$$M = -(PL + Ql_1 + Rl_2)$$

$$T = P + Q + R$$

$$f = -\frac{2PL^3 + Ql_1^2(3L - l_1) + Rl_2^2(3L - l_2)}{3ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = PL + Ql_1 + Rl_2$$

CASO

3

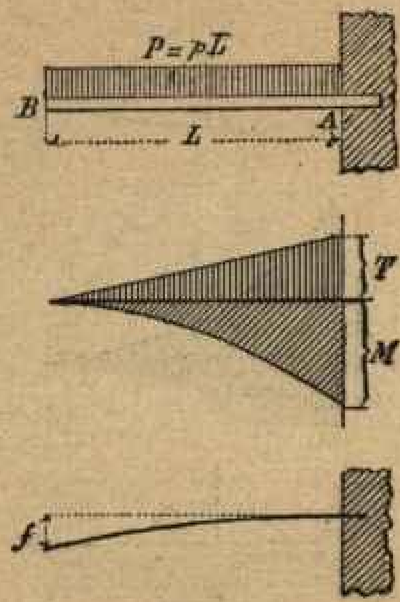


Fig. 152.

$$M = -\frac{1}{2}\,pL^2 = -\frac{1}{2}\,PL$$

$$T = pL = P$$

$$f = -\frac{1}{4}\,\frac{pL^4}{ZEh} = -\frac{1}{4}\,\frac{PL^3}{ZEh} = -\frac{1}{2}\,\frac{KL^2}{Eh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{2}\,pL^2$$

ó

$$KZ = \frac{1}{2}\,PL.$$

CASO 4

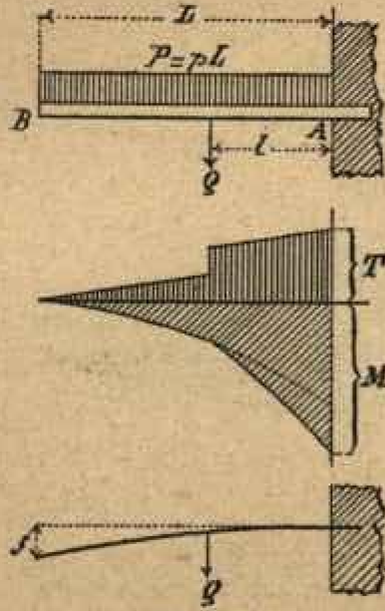


Fig. 153.

$$M = -\left(\frac{1}{2}pL^2 + Ql\right) = -\left(\frac{1}{2}PL + Ql\right)$$

$$T = pL + Q = P + Q$$

$$f = -\frac{1}{12}\,\frac{3PL^3 + 4Ql^2(3L - l)}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{2}pL^2 + Ql$$

ó

$$KZ = \frac{1}{2}PL + Ql$$

CASO 5

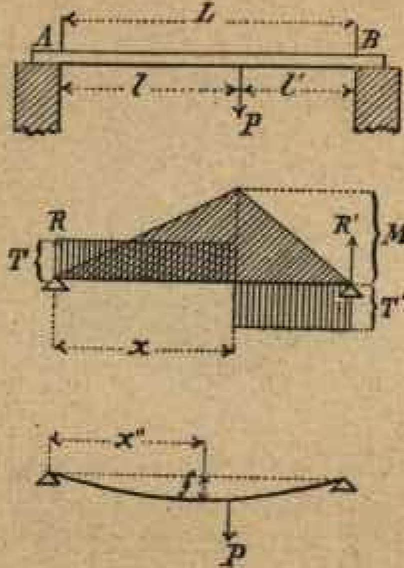


Fig. 154.

$$M = \frac{Pll'}{L}$$

$$T = \frac{Pl'}{L} = R$$

$$T' = \frac{Pl}{L} = R'$$

$$x'' = \sqrt{\frac{l(l+2l')}{3}} \quad ; \quad x = l$$

$$f_m = -\frac{2}{9}\,\frac{Pll'(l+2l')}{LZEh}\sqrt{\frac{l(l+2l')}{3}}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{Pll'}{L}.$$

Para $x = l$, $f_r = -\dfrac{2}{3}\,\dfrac{Pl^2l'^2}{LZEh}$

CASO 6

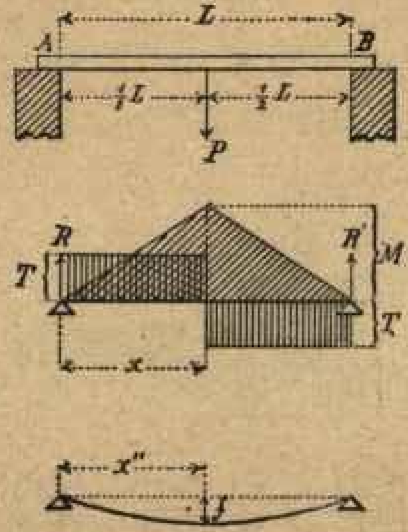


Fig. 155.

$$M = \frac{1}{4} PL$$

$$T = T' = \frac{1}{2} P = R = R'$$

$$x = \frac{1}{2} L \quad ; \quad x'' = \frac{1}{2} L$$

$$f = -\frac{1}{24} \frac{PL^3}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{4} PL$$

CASO 7

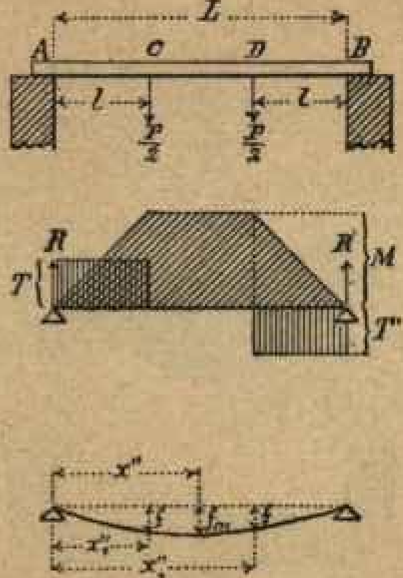


Fig. 156.

$$M = \frac{1}{2} Pl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(De C á D)}$$

$$R = R' = T = T' = \frac{1}{2} P \quad \text{(Para AC y DB)}$$

$$T = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(De C á D)}$$

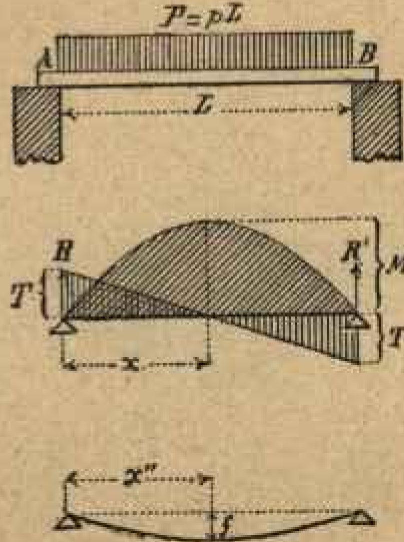
$$x'' = \frac{1}{2} L$$

$$f_m = -\frac{1}{24} \frac{Pl(3L^2 - 4l^2)}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{2} Pl$$

$$\left.\begin{array}{l} x''_1 = l \\ x''_2 = L - l \end{array}\right\} f = -\frac{1}{6} \frac{Pl^2(3L - 4l)}{ZEh}$$

CASO 8	 *Fig. 157.*	$M = \frac{1}{8} pL^2 = \frac{1}{8} PL$ $T = T' = \frac{1}{2} pL = \frac{1}{2} P = R = R'$ $x = \frac{1}{2} L \quad ; \quad x'' = \frac{1}{2} L$ $f = -\frac{5}{192} \frac{PL^3}{ZEH}$ ECUACIÓN DE RESISTENCIA. $KZ = \frac{1}{8} PL$

CASO 9

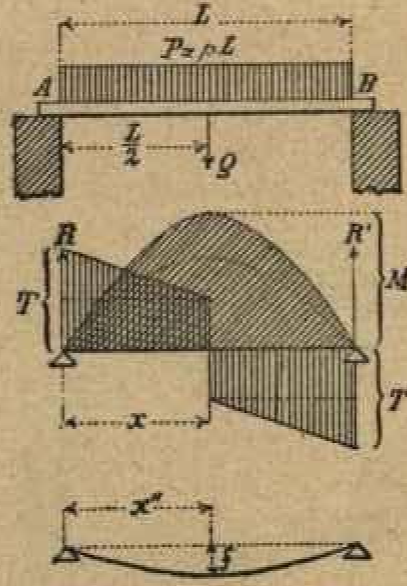


Fig. 158.

$$M = \frac{1}{8}(P + 2Q)L$$

$$T = T' = R = R' = \frac{1}{2}(P + Q)$$

$$x = \frac{1}{2}L$$

$$x'' = \frac{1}{2}L$$

$$f = -\frac{1}{192}\,\frac{(5P + 8Q)L^3}{ZEh}.$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{8}(P + 2Q)L$$

CASO 10

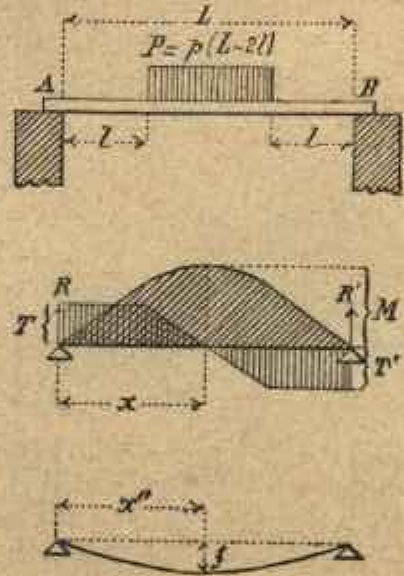


Fig. 159.

$$M = \frac{1}{8} p (L^2 - 4l^2) = \frac{1}{8} P(L + 2l)$$

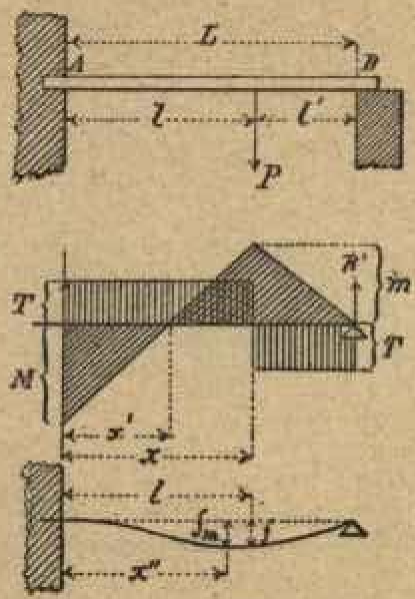
$$T = T' = R = R' = \frac{1}{2} P$$

$$x = x'' = \frac{1}{2} L$$

$$f = -\frac{1}{192} \frac{p[5L^4 - 8l^2(3L^2 - 2l^2)]}{ZEh}.$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{8} P(L + 2l).$$

CASO 11		
	 *Fig. 160.*	$$M = -\frac{Pll'(l+2l')}{2L^2}$$ $$m = +\frac{Pl^2l'(2l+3l')}{2L^3} \quad ; \quad x = l$$ $$T = \frac{P(2L^3+l^3-3l^2L)}{2L^3}$$ $$T' = \frac{Pl^2(3L-l)}{2L^3}$$ $$x' = \frac{l^3+3l^2l'+2ll'^2}{3l^2+6ll'+2l'^2} = \frac{(L^2-l'^2)L}{3L^2-l'^2}$$ $$f = -\frac{1}{6}\,\frac{Pl^2l'^3(3l+4l')}{L^3ZEh}.$$ ECUACIÓN DE RESISTENCIA. $$KZ = \frac{Pll'(l+2l')}{2L^2}.$$

CASO
12

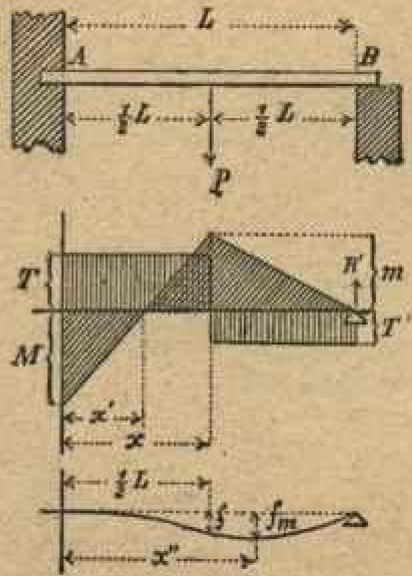


Fig. 161.

$$M = -\frac{3}{16}\ PL$$

$$m = +\frac{5}{32}\ PL \ \ldots\ x = \frac{1}{2}\ L$$

$$T = \frac{11}{16}\ P$$

$$T' = \frac{5}{16}\ P$$

$$x' = \frac{3}{11}\ L$$

$$x'' = L\left(1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$$

$$f = -\frac{7}{384}\ \frac{PL^3}{ZEh}$$

$$f_m = -\frac{1}{120}\sqrt{5}\ \frac{PL^3}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{3}{16}\ PL.$$

CASO 13

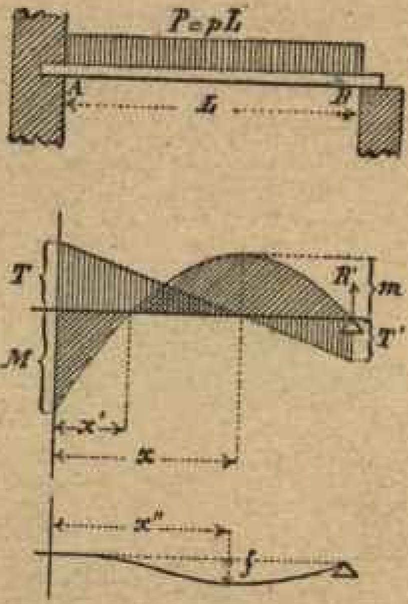


Fig. 162.

$$M = -\frac{1}{8}\,pL^2 = -\frac{1}{8}\,PL$$

$$m = +\frac{9}{128}\,pL^2 = \frac{9}{128}\,PL$$

$$T = \frac{5}{8}\,P \quad ; \quad T' = \frac{3}{8}\,P$$

$$x = \frac{5}{8}\,L$$

$$x' = \frac{1}{4}\,L$$

$$x'' = \frac{1}{16}\,L\left(15 - \sqrt{33}\right) = 0{,}578\,L$$

$$f = -\frac{1}{92}\,\frac{PL^3}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA

$$KZ = \frac{1}{8}\,pL^2.$$

CASO 14

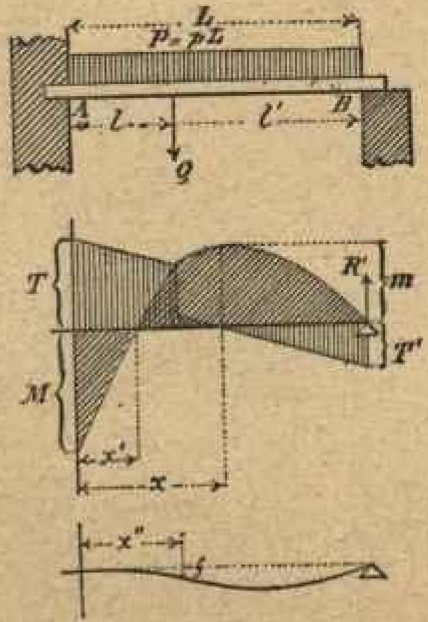


Fig: 163.

$$M = -\left(\frac{1}{8} pL^2 + \frac{Qll'(l+2l')}{2L^2}\right)$$

$$T = \frac{5}{8} P + \frac{Q(2L^3 - 3Ll'^2 + l'^3)}{2L^3}$$

$$T' = \frac{3}{8} P + \frac{Ql^2(3L - l)}{2L^3}$$

$$x'' = l$$

$$f = -\frac{1}{24} \frac{pl'^3 l'(3l' + l) + 4Q\frac{l^2 l'^2}{L^2}(3l + 4l')}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA

$$KZ = \frac{1}{8} pL^2 + \frac{Qll'(l+2l')}{2L^2}$$

Los valores de x', x y m se determinan gráficamente de la manera más sencilla.

CASO 15

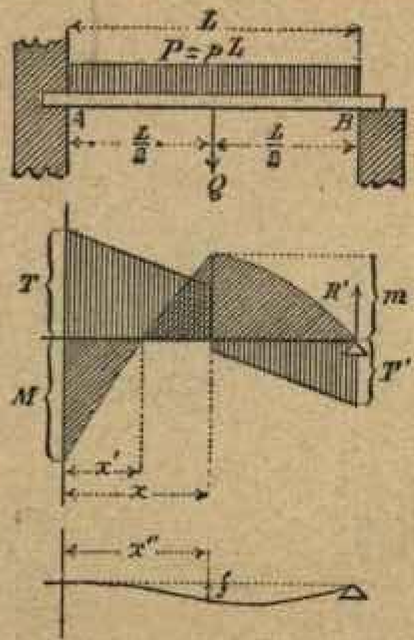


Fig. 164.

$$M = -\frac{1}{16}(2P + 3Q)\,L$$

$$m = +\frac{(2P + 5Q)\,L}{32}$$

$$T = \frac{10P + 11Q}{16}$$

$$T' = \frac{6P + 5Q}{16}$$

$$x = x'' = \frac{1}{2}\,L$$

$$f = -\frac{1}{384}\,\frac{(4P + 7Q)\,L^3}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA

$$KZ = \frac{1}{16}(2P + 3Q)\,L$$

El valor de x' se determina gráficamente al construir el diagrama general de momentos.

CASO

16

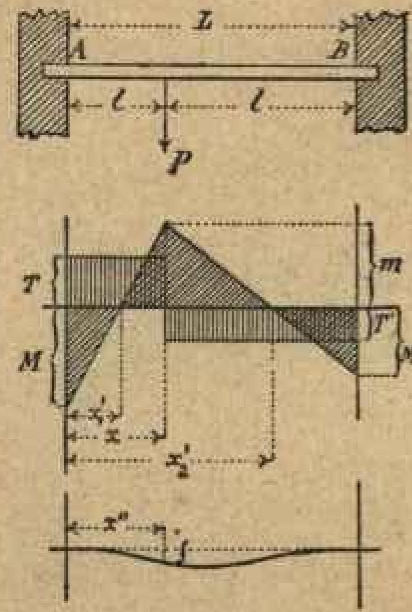


Fig. 165.

$$\left.\begin{array}{l} M = -P\dfrac{l l'^2}{L^2} \\ M' = -P\dfrac{l^2 l'}{L^2} \end{array}\right\} m = +P\,\frac{2l^2 l'^2}{L^3}$$

$$T = P\,\frac{l'^2(l'+3l)}{L^3}$$

$$T' = P\,\frac{l^2(l+3l')}{L^3}$$

Flecha en el punto de aplicación de la carga

$$f = -\frac{2}{3}\,\frac{P\,l^3 l'^3}{L^3 ZEh}$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{lL}{2l+L} \\ x_1' = \dfrac{(l'+L)\,L}{2l'+L} \end{array}\right\} x = l$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA

$$KZ = P\,\frac{l l'^2}{L^2} \quad ; \quad l' > l$$

CASO

17

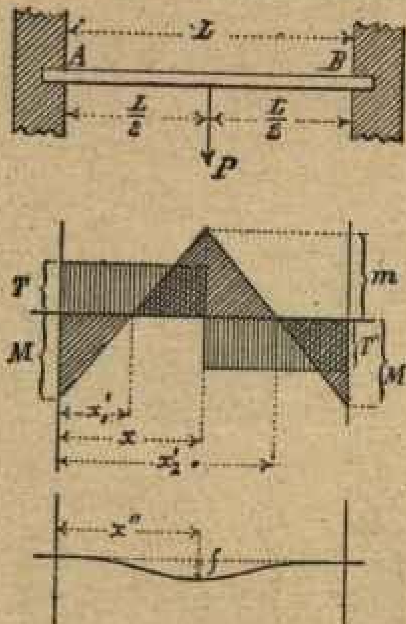


Fig. 166.

$$M = M' = -\frac{1}{8}\,PL$$

$$m = +\frac{1}{8}\,PL$$

$$T = T' = \frac{1}{2}\,L$$

$$x = \frac{1}{2}\,L$$

$$x_1' = \frac{1}{4}\,L \qquad x_2' = \frac{3}{4}\,L$$

$$x'' = \frac{1}{2}\,L$$

$$f = -\frac{1}{96}\,\frac{PL^3}{ZEh}\,.$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA

$$KZ = \frac{1}{8}\,PL\,.$$

CASO

18

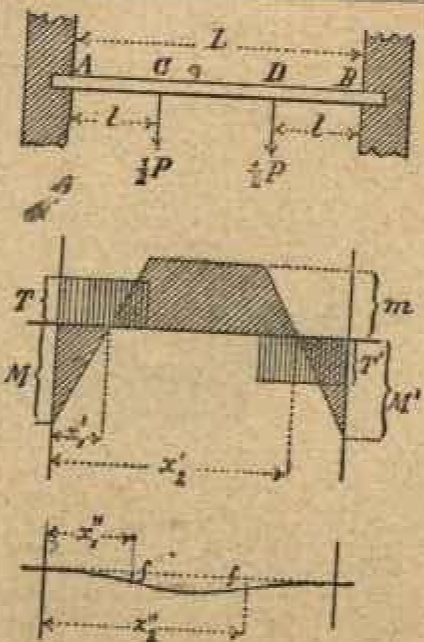


Fig. 167.

$$M = M' = -\frac{1}{2}\ \frac{Pl(L-l)}{L}$$

$$m = +\frac{1}{2}\ \frac{Pl^2}{L}\ \ldots \text{(De C á D)}$$

$$T = T' = \frac{1}{2}P$$

$$x_1' = \frac{l(L-l)}{L}$$

$$x_2' = \frac{L^2 - l(L-l)}{L}$$

$$x_1'' = l\ ;\ \ x_2'' = L - l$$

$$f = -\frac{1}{6}\ \frac{Pl^2\left(2 - \frac{3l}{L}\right)}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA

$$KZ = \frac{1}{2}\ \frac{P\,l(L-l)}{L}$$

CASO

19

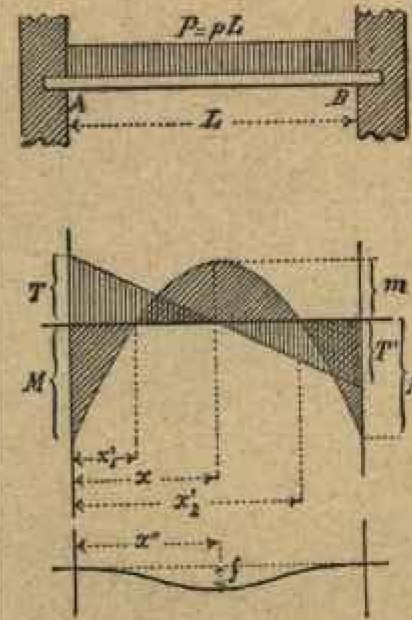


Fig. 168.

$$M = M' = -\frac{1}{12}pL^2 = -\frac{1}{12}PL$$

$$m = +\frac{1}{24}pL^2 = +\frac{1}{24}PL$$

$$T = T' = \frac{1}{2}pL = \frac{1}{2}P$$

$$x = \frac{1}{2}L$$

$$x'_1 = \frac{1}{6}L\left(3-\sqrt{3}\right) = 0{,}21\,L$$

$$x'_2 = \frac{1}{6}L\left(3+\sqrt{3}\right) = 0{,}79\,L$$

$$x' = \frac{1}{2}L$$

$$f = -\frac{1}{192}\,\frac{PL^3}{ZEh} = -\frac{1}{16}\,\frac{KL^2}{Eh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{12}PL$$

CASO

20

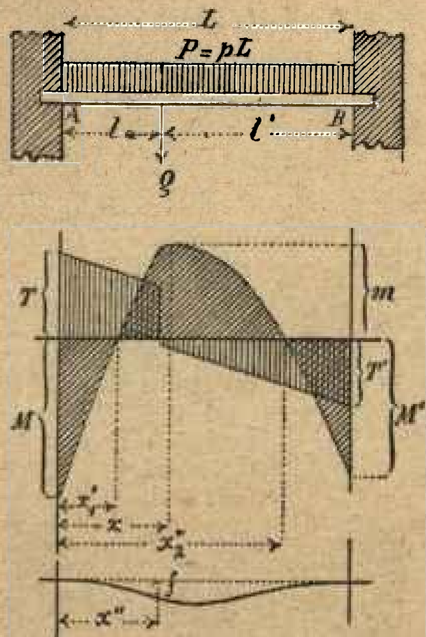


Fig. 169.

$$M = -\left(\frac{1}{12}\,PL + Q\,\frac{ll'^2}{L^2}\right)$$

$$M' = -\left(\frac{1}{2}\,PL + Q\,\frac{l^2 l'}{L^2}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\,P + Q\,\frac{l'^2(l' + 3l)}{L^3}$$

$$T' = \frac{1}{2}\,P + Q\,\frac{l^2(l + 3l')}{L^3}$$

$$x'' = l; \quad f = -\,\frac{\frac{1}{12}\,P\,\frac{l^2 l'^2}{L} + \frac{3}{2}\,Q\,\frac{l^3 l'^3}{L^5}}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{12}\,PL + Q\,\frac{ll'^2}{L^2} \qquad (\text{si } l < l')$$

$$KZ = \frac{1}{12}\,PL + Q\,\frac{l^2 l'}{L^2} \qquad (\text{si } l > l')$$

Los valores de x'_1, x'_2, x y m se determinan gráficamente con la necesaria exactitud.

CASO 21

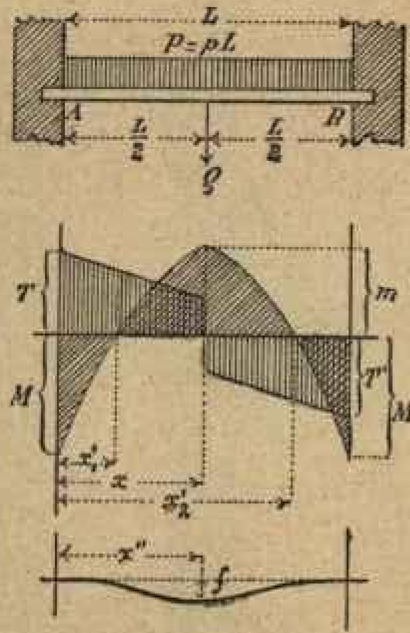


Fig. 170.

$$M = M' = -\frac{1}{24}(2P + 3Q)\,L$$

$$m = \frac{1}{24}(P + 3Q)\,L$$

$$T = T' = \frac{1}{2}(P + Q)$$

$$x = \frac{1}{2}\,L$$

$$x_1' = \frac{\left(P + Q - \sqrt{\tfrac{1}{3}P^2 + PQ + Q^2}\right)L}{2P}$$

$$x_2' = \frac{\left(P - Q + \sqrt{\tfrac{1}{3}P^2 + PQ + Q^2}\right)L}{2P}$$

$$x'' = \frac{1}{2}\,L$$

$$f = -\frac{1}{192}\,\frac{(P + 2Q)\,L^3}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA.

$$KZ = \frac{1}{24}(2P + 3Q)\,L.$$

CASO 22

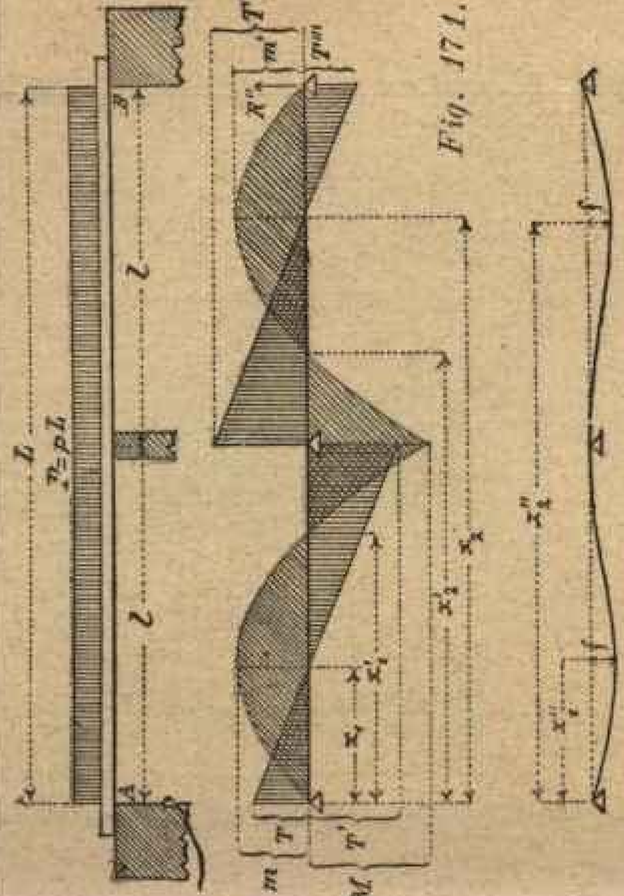


Fig. 171.

$$M = -\frac{1}{8} pl^2 = -\frac{1}{32} pL^2$$

$$m = m' = +\frac{9}{128} pl^2 = +\frac{9}{512} pL^2$$

$$T = T''' = \frac{3}{8} pl = \frac{3}{16} pL$$

$$T' = T'' = \frac{5}{8} pl = \frac{5}{16} pL$$

$$R = T' + T'' = \frac{5}{4} pl = \frac{5}{8} pL$$

$$x_1 = \frac{3}{16} L, \qquad x_2 = \frac{13}{16} L$$

$$x'_1 = \frac{3}{8} L, \qquad x'_2 = \frac{5}{8} L$$

$$x''_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{32} L, \quad x''_2 = \frac{31-\sqrt{33}}{32} L$$

$$f = f' = -\frac{1}{92} \frac{pl^4}{ZEh} = -\frac{1}{1472} \frac{PL^3}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA

$$\left.\begin{array}{l} KZ = \frac{1}{8} pl^2 \\ \text{ó} \quad KZ = \frac{1}{32} pL^2 \end{array}\right\} l = \frac{1}{2} L.$$

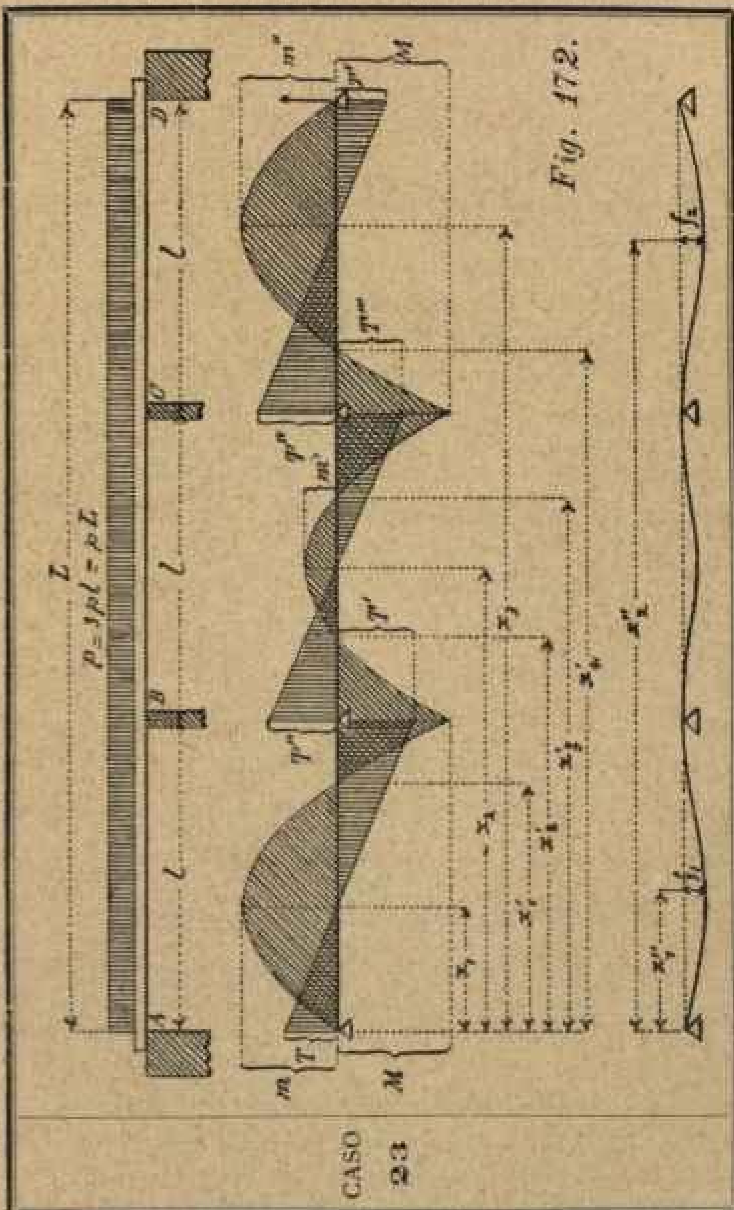


Fig. 172.

$$M = M' = -\frac{1}{10}\,pl^2$$

$$m = m'' = +\frac{2}{25}\,pl^2$$

$$m' = +\frac{1}{40}\,pl^2$$

—

$$T = T^{v} = \frac{4}{10}\,pl$$

$$T' = T^{iv} = \frac{6}{10}\,pl$$

$$T'' = T''' = \frac{5}{10}\,pl$$

—

$$R = T = \frac{4}{10}\,pl \quad \ldots\ldots \quad (\text{en A})$$

$$R' = T' + T'' = \frac{11}{10}\,pl \quad \ldots\ldots \quad (\text{en B})$$

$$R'' = T''' + T^{iv} = \frac{11}{10}\,pl \quad \ldots\ldots \quad (\text{en C})$$

$$R''' = T^{v} = \frac{4}{10}\,pl \quad \ldots\ldots \quad (\text{en D})$$

$$\Sigma(R) = 3pl = P$$

$$x_1 = \frac{2}{5}\,l$$

$$x_2 = \frac{3}{2}\,l = \frac{1}{2}\,L$$

$$x_3 = \frac{13}{5}\,l$$

$$x'_1 = \frac{4}{5}\,l$$

$$x'_2 = \frac{15 - \sqrt{5}}{10}\,l$$

$$x'_3 = \frac{15 + \sqrt{5}}{10}\,l$$

$$x'_4 = \frac{11}{5}\,l$$

$$x''_1 = 0{,}446\,l$$

$$x''_2 = 2{,}554\,l = 0{,}851\,L$$

$$f_1 = f_2 = -\frac{1}{73}\,\frac{pl^4}{ZEh}$$

ECUACIÓN DE RESISTENCIA

$$KZ = \frac{1}{10}\,pl^2$$

RESISTENCIA DE LAS VIGAS

422. Destinadas á trabajar por flexión, sosteniendo cargas fijas ó móviles más ó menos importantes, las vigas las clasificaremos, atendiendo á su naturaleza, en dos clases: *vigas de madera* y *vigas de hierro.* Cada una de estas clases la dividiremos en dos grupos: 1.º, *vigas sencillas* ó de una sola pieza, y 2.º, *vigas compuestas* ó de varias piezas. Las sencillas constituyen los cabios ó viguetas y aun las vigas maestras de los entramados horizontales, cuando lo consiente la luz de la crujía. Las compuestas se aplican á mayores luces, cualquiera que sea el objeto del entramado horizontal.

Aun cuando las cerchas ó formas de armadura pudieran clasificarse entre las vigas compuestas, formaremos con ellas un grupo aparte, cuyo estudio se hará más adelante.

VIGAS DE MADERA

423. Vigas sencillas de madera.—Afectan, por lo común, un perfil rectangular, en que la relación $\frac{B}{H}$, siendo B el lado horizontal y H el vertical de la sección recta ó escuadría, suele variar entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$; pero como las piezas rollizas son también de uso frecuente, y las de sección cuadrada pueden emplearse en ciertos casos, consideraremos además los perfiles de forma cuadrada y circular.

424. Para facilitar en algunos casos la resolución de los problemas de resistencia y rigidez de las piezas prismáticas de madera sometidas á flexión, se consignan cuatro tablas. En las tres primeras se dan á conocer las dimensiones de la escuadría de las piezas del marco de Guadarrama, del marco de Cuenca y de las maderas de los Pirineos, y los valores del módulo de flexión Z, así como los del momento ZK á que cada una puede resistir, en el supuesto de que al coeficiente de seguridad ó de trabajo ordinario K se asigne el valor corriente de 60 kilogramos por centímetro cuadrado. En la última, se establecen, para diversos valores de ZK, las escuadrías correspondientes de las piezas de sección cuadrada, circular y rectangular, asignando á K el mismo valor medio de 60 kilogramos, que antes hemos indicado.

Como luego veremos, esta tabla es también aplicable á las piezas de hierro, con sólo tomar para ZK, momento á que la pieza ha de resistir, el décimo de su valor.

Suponen las tres primeras tablas que á continuación se insertan:

1.° Que los valores de Z se refieren al centímetro.

2.° Que el coeficiente de seguridad es: $K = 60$ kilogramos.

Núm. 1.—MARCO DE GUADARRAMA (SEGOVIA).

DESIGNACION DE LAS PIEZAS	Largo de las piezas. Mets.	SECCION RECTA — LADOS — Horizontal. B Cm.	Vertical. H Cm.	AREA ω Cm.	VALORES DEL — Módulo de flexión. Z	Momento de flexión. ZK
Media vara doble....	8,36	41,8	57,5	2403,5	23033,5	1.382010
Media vara sencilla..	8,36	27,9	41,8	1166,2	8124,6	487760
Pié y cuarto doble...	8,36	34,8	50,5	1757,4	14791,4	887384
Pie y cuarto sencillo.	8,36	24,4	34,8	849,1	4924,8	295488
Tercia..............	8,36	20,9	27,9	583,1	2711,4	162684
Sesma..............	6,97	15,7	22,6	354,8	1336,4	80184
Vigueta.............	6,13	15,7	22,6	354,8	1336,4	80184
Media vigueta.......	3,34	15,7	22,6	354,8	1336,4	80184
Madero de á 6.......	5,02	13,9	17,4	241,8	701,3	42078
Medio madero de á 6	2,79	13,9	17,4	241,8	701,3	42078
Madero de á 8......	4,46	10,4	15,7	163,2	427,2	25632
Madero de á 8......	4,46	10,4	13,9	144,5	334,8	20088
Madero de á 10......	3,90	8,7	13,9	120,9	280,1	16806
Madero de á 10......	3,90	8,7	12,1	105,2	212,2	12732
Troza de tercia de á 9	2,51	20,9	27,9	583,1	2711,4	162684
Troza de tercia de á 7	1,95	20,9	27,9	583,1	2711,4	162684
Troza de ripia.......	1,95	20,9	20,9	436,8	1521,5	91290
Alfarjía.............	1,67	10,4	13,9	144,5	334,8	20088
Media alfarjía.......	1,67	7,0	10,4	72,8	126,1	7569
Terciado...........	1,67	5,2	10,4	54,0	93,7	5622
Portada.............	2,51	41,8	34,8	217,3	188,3	11298
Portadilla...........	2,51	5,2	5,2	180,9	156,8	9408
Tabla de á gordo....	1,95	27,9	3,5	97,6	56,9	3414
Tabla de pulgada....	1,95	27,9	2,6	72,5	31,4	1884
Camera..............	1,95	24,4	2.6	63,4	27,4	1644
Tableta.............	2,51	27,9	1,7	47,4	13,4	804
Hoja................	2,51	27,9	1,3	36,2	7,85	471
Ripia................	3,34	20,9	1,3	27,1	5,88	352

Núm. 2.—MARCO CASTELLANO (CUENCA).

DESIGNACION DE LAS PIEZAS	Largo de las piezas.	SECCION RECTA			VALORES DEL	
		LADOS		AREA		
		Horizontal. B	Vertical. H	ω	Módulo de flexión. Z	Momento de flexión. ZK
	Mets.	Cm.	Cm.	Cm.		
Media vara..........	8,36	35	42	1470	10290	617400
Pié y cuarto.........	8,36	28	35	980	5716,6	342906
Tercia..............	8,36	21	28	588	2744	164640
Cuarta..............	8,36	21	21	441	1543,5	92610
Sesma	8,36	15	21	315	1102,5	66150
Vigueta.............	6,13	14	19	266	842,3	50538
Media vigueta.......	3,34	14	19	266	842,3	50538
Doblero de 18.......	5,02	14	17	238	674,3	40458
Doblero de 16.......	4,46	10	14	140	326,6	19596
Doblero de 14.......	3,90	8	12	96	192	11520
Medio doblero	2,79	14	17	238	674,3	40458
Tirante de 18.......	5,02	8	12	96	192	11520
Tirante de 15.......	4,18	8	12	96	192	11520
Tirante de 12.......	3,34	8	12	96	192	11520
Medio tirante	2,09	8	12	96	192	11520
Tabla alcaceña......	2,51	42	5	210	175	10500
Tabla portaleña.....	2,51	35	4	140	93,3	5598
Tabla chilla.........	2,09	28	3	84	42	2520
Tabla ripia..........	1,76	21	2	42	14	840

Núm. 3.—MADERAS DE LOS PIRINEOS (PINO Y ABETO).

Serrería mecánica de Nicolau.—(Tortosa).

Número de orden en el Catálogo.	Largo de las piezas.	SECCION RECTA			VALORES DEL	
		LADOS		AREA		
		Horizontal. B Cm.	Vertical. H Cm.	ω Cm.	Módulo de flexión. Z	Momento de flexión. ZK
1	12	38	48	1824	14592	875520
2	12	31	42	1302	9114	546840
3	10	38	48	1824	14592	875520
4	10	30	42	1260	8820	529200
5	8,30	38	48	1824	14592	875520
6	8,30	34	44	1496	10970	658200
7	8,30	30	41	1230	8405	504300
8	7,90	38	48	1824	14592	875520
9	7,90	34	44	1496	10970	658200
10	7,90	30	40	1200	8000	480000
11	7,90	28	38	1064	6738	404280
12	7,90	26	36	936	5616	336960
13	7,90	24	30	720	3600	216000
14	7,50	30	40	1200	8000	480000
15	7,50	28	38	1064	6738	404280
16	7,50	26	36	936	5616	336960
17	7,50	24	30	720	3600	216000
18	7	28	38	1064	6738	404280
19	7	26	36	936	5616	336960
20	7	24	30	720	3600	216000
21	6,70	26	35	910	5308	318480
22	6,70	24	32	768	4096	245760
23	6,70	23	30	690	3450	207000
24	6,70	20	25	500	2083	124980
25	6	38	48	1824	14592	875520
26	6	34	44	1496	10970	658200

Número de orden en el Catálogo.	Largo de las piezas.	SECCION RECTA			VALORES DEL	
		LADOS		AREA		
		Horizontal. B Cm.	Vertical. H Cm.	ω Cm.	Módulo de flexión. Z	Momento de flexión. ZK
27	6	26	35	910	5308	318480
28	6	24	32	768	4096	245760
29	6	23	30	690	3450	207000
30	6	21	27	567	2551	153060
31	6	19	24	456	1824	109440
32	6	16	22	352	1290	77400
33	4,70	38	48	1824	14592	875520
34	4,70	34	44	1496	10970	658200
35	4,70	32	42	1344	9408	564480
36	4,70	30	40	1200	8000	480000
37	4,70	28	38	1064	6738	404280
38	4,70	26	35	910	5308	318480
39	4,70	24	32	768	4096	245760
40	4,70	23	30	690	3450	207000
41	4,70	21	27	567	2551	153060
42	4,70	19	24	456	1824	109440
43	4,70	16	22	352	1290	77400
44	4,70	14	18	252	756	45360
45	6	16	25	400	1666	99960
46	6	14	23	322	1234	74040
47	6	13	21	273	955	57300
48	6	12	20	240	800	48000
49	6	10	16	160	426	25560
50	4,70	16	25	400	1666	99960
51	4,70	14	23	322	1234	74040
52	4,70	10	23	230	881	52860
53	4,70	13	21	273	955	57300
54	4,70	12	20	240	800	48000
55	4,70	11	18	198	594	35640
56	4,70	10	16	160	426	25560
57	4	14	23	322	1234	74040

Número de orden en el Catálogo.	Largo de las piezas.	SECCION RECTA LADOS Horizontal. B Cm.	Vertical. H Cm.	AREA ω Cm.	VALORES DEL Módulo de flexión. Z	Momento de flexión. ZK
58	4	10	22	220	806	48360
59	4	12	20	240	800	48000
60	4	11	18	198	594	35640
61	4	10	16	160	426	25560
62	4	9	14	126	294	17640
63	4	6	14	84	196	11760

TABLA

DE ESCUADRÍAS DE PRISMAS DE MADERA Y DE HIERRO, SOMETIDOS Á FLEXIÓN, PARA DIVERSOS VALORES DEL MOMENTO MÁXIMO Á QUE DEBEN RESISTIR, M = KZ.

Observaciones.—Los valores de KZ consignados en la primera columna de esta tabla suponen:

1.º Que la unidad de longitud es el centímetro y la de fuerza el kilogramo.

2.º Que el coeficiente de seguridad es, para la madera, K = 60 kilogramos; y para el hierro K = 600 kilógramos, por centímetro cuadrado de sección recta.

Además, dichos valores son:

Para la madera, los verdaderos.

Para el hierro, $\frac{1}{10}$ de los verdaderos.

VALORES de M (madera). $\frac{M}{10}$ hierro).	Sección cuadrada. — Lado en Cm.	Sección circular. — Diámetro en Cm.	SECCION RECTANGULAR, SIENDO $\frac{B}{H}=\frac{2}{3}$ Lado horizontal. B Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{2}{3}$ Lado vertical. H Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{5}{7}$ Lado horizontal. B Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{5}{7}$ Lado vertical. H Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{3}{4}$ Lado horizontal. B Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{3}{4}$ Lado vertical. H Cm.
10	1,00	1,20	0,76	1,15	0,80	1,12	0,83	1,10
34	1,50	1,80	1,15	1,72	1,21	1,68	1,24	1,65
80	2,00	2,39	1,53	2,29	1,60	2,24	1,65	2,20
156	2,50	2,99	1,91	2,86	2.00	2,80	2,06	2,75
270	3,00	3,59	2,29	3,44	2,40	3,36	2,48	3,30
429	3,50	4,18	2,67	4,01	2,80	3,92	2,89	3,85
640	4,00	4,78	3,05	4,58	3,20	4,48	3,30	4,40

VALORES de M (madera). $\frac{M}{10}$ (hierro).	Sección cuadrada. — Lado en Cm.	Sección circular. — Diámetro en Cm.	SECCION RECTANGULAR, SIENDO $\frac{B}{H}=\frac{2}{3}$ Lado horizontal. B Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{2}{3}$ Lado vertical. H Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{5}{7}$ Lado horizontal. B Cm	$\frac{B}{H}=\frac{5}{7}$ Lado vertical H Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{3}{4}$ Lado horizontal. B Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{3}{4}$ Lado vertical. H Cm
911	4,50	5,38	3,44	5,15	3,60	5,03	3,72	4,95
1250	5,00	5,97	3,82	5,72	4,00	5,59	4,13	5,50
1664	5,50	6,57	4,20	6,30	4,40	6,15	4,54	6,06
2160	6,00	7,17	4,58	6,87	4,80	6,71	4,96	6,60
2746	6,50	7,76	4,96	7,44	5,20	7,27	5,37	7,15
3430	7,00	8,36	5,34	8,01	5,60	7,83	5,78	7,71
4219	7,50	8,96	5,73	8,58	6,00	8,39	6,19	8,26
5120	8,00	9,55	6,11	9,15	6,40	8,95	6,60	8,81
6141	8,50	10,20	6,49	9,73	6,79	9,51	7,02	9,36
7290	9,00	10,80	6,87	10,30	7,19	10,07	7,43	9,91
8574	9,50	11,40	7,25	10,88	7,59	10,63	7,84	10,46
10000	10,00	12,00	7 64	11,46	7,99	11,19	8,25	11,01
11576	10,50	12,60	8,02	12,02	8,39	11,75	8,66	11,56
13310	11,00	13,20	8,40	12,59	8,79	12,31	9,08	12,11
15209	11,50	13,80	8,78	13,17	9,19	12,87	9,49	12,66
17280	12,00	14,40	9,16	13,74	9,59	13,43	9,91	13,21
19531	12,50	15,00	9,54	14,31	9,99	13,99	10,32	13,76
21970	13,00	15,60	9,92	14,88	10,39	14,55	10,73	14,31
24604	13,50	16,20	10,31	15,45	10,79	15,10	11,14	14,86
27440	14,00	16,80	10,69	16,02	11,19	15,66	11,56	15,41
30486	14,50	17,40	11,06	16,60	11,59	16,22	11,97	15,96
33750	15,00	17,90	11,45	17,17	11,99	16,78	12,38	16,51
37239	15,50	18,50	11,83	17,74	12,39	17,34	12,80	17,06
40960	16,00	19,10	12,21	18,31	12.79	17,90	13,21	17,61
44921	16,50	19,70	12,60	18,89	13,19	18,46	13,62	18,16
49130	17,00	20,30	12,98	19,47	13,58	19,02	14,04	18,71
53594	17,50	20,90	13,35	20,03	13,98	19,58	14,45	19,26
58320	18,00	21,50	13,74	20,61	14,38	20,14	14,86	19,81
63316	18,50	22.10	14,12	21,18	14,78	20,70	15,28	20,36
68590	19,00	22,70	14,50	21,75	15,18	21,26	15,69	20,91

VALORES de M (madera). $\frac{M}{10}$ hierro).	Sección cuadrada. — Lado en Cm.	Sección circular. — Diámetro en Cm.	SECCION RECTANGULAR, SIENDO $\frac{B}{H} = \frac{2}{3}$ Lado horizontal. B Cm.	Lado vortical. H Cm.	$\frac{B}{H} = \frac{5}{7}$ Lado horizontal. B Cm.	Lado vertical. H Cm.	$\frac{B}{H} = \frac{3}{4}$ Lado horizontal. B Cm.	Lado vertical. H Cm.
74149	19,50	23,30	14,89	22,32	15,58	21,82	16,10	21,46
80000	20,00	23,90	15,27	22,89	15,98	22,38	16,52	22,01
86151	20,50	24,50	15,65	23,47	16,38	22,94	16,93	22,56
92610	21,00	25,10	16,03	24,04	16,78	23,50	17,34	23,11
99384	21,50	25,70	16,41	24,62	17,18	24,06	17,76	23,66
106480	22,00	26,30	16,78	25,19	17,58	24,61	18,17	24,21
113906	22,50	26,90	17,17	25,76	17,98	25,17	18,58	24,76
121670	23,00	27,50	17,56	26,33	18,38	25,73	18,99	25,31
129779	23,50	28,10	17,94	26,90	18,78	26,29	19,40	25,87
138240	24,00	28,70	18,31	27,48	19,18	26,85	19,81	26,42
147061	24,50	29,30	18,70	28,05	19,58	27,41	20,22	26,97
156250	25,00	29,90	19,08	28,62	19,98	27,97	20,63	27,52
165814	25,50	30,50	19,46	29,19	20,37	28,53	21,05	28,07
175760	26,00	31,10	19,85	29,76	20,77	29,09	21,46	28,62
186096	26,50	31,70	20,23	30,33	21,17	29,65	21,87	29,17
196830	27,00	32,20	20,61	30,91	21,57	30,21	22,29	29,72
207969	27,50	32,80	20,99	31,48	21,97	30,77	22,70	30,27
219520	28,00	33,40	21,37	32,05	22,37	31,33	23,11	30,82
231491	28,50	34,00	21,75	32,63	22,77	31,89	23,53	31,37
243890	29,00	34,60	22,13	33,20	23,17	32,45	23,94	31,92
256724	29,50	35,20	22,52	33,77	23,57	33,61	24,35	32,47
270000	30,00	35,80	22,89	34,35	23,97	33,56	24,77	33,02
283726	30.50	36,40	23,28	34,92	24,37	34,12	25,18	33,57
297910	31,00	37,00	23,66	35,49	24,77	34,68	25,59	34,12
312559	31,50	37,60	24,04	36,06	25,17	35,24	26,01	34,67
327680	32,00	38,20	24,42	35,63	25,57	35,80	26,42	35,22
343281	32,50	38,80	24,81	37,20	25,97	36,36	26,83	3[illegible],77
359370	33,00	39,40	25,19	37,78	26,37	36,92	27,25	36,32
375954	33,50	40,00	25,57	38,35	26,77	37,48	27,66	36,87
393040	34,00	40,60	25,95	38,92	27,17	38,04	28,07	37,42

VACORES de M (madera). $\frac{M}{10}$ (hierro).	Sección cua-drada. — Lado en Cm.	Sección circular. — Diámetro en Cm.	SECCION RECTANGULAR. SIENDO $\frac{B}{H}=\frac{2}{3}$ Lado horizontal. B Cm.	Lado vertical. H Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{5}{7}$ Lado horizontal. B Cm.	Lado vertical. H Cm.	$\frac{B}{H}=\frac{3}{4}$ Lado horizontal. B Cm.	Lado vertical. H Cm.
410636	34,50	41,20	26,33	39,49	27,57	38,60	28,48	37,97
428750	35,00	41,80	26,72	40,06	27,97	39,16	28,89	38,52
447389	35,50	42,40	27,09	40,64	28,37	39,72	29,31	39,07
466560	36,00	43,00	27,47	41,21	28,77	40,27	29,72	39,62
486271	36,50	43,60	27,86	41,78	29,17	40,83	30,13	40,18
506530	37,00	44,20	28,24	42,36	29,57	41,39	30,54	40,73
527344	37,50	44,80	28,62	42,93	29,97	41,95	30,95	41,28
548720	38,00	45,40	29,00	43,50	30,37	42,51	31,36	41,83
570666	38,50	46,00	29,38	44,07	30,77	43,07	31,78	42,38
593190	39,00	46,60	29,77	44,64	31,17	43,63	32,19	42,93
616299	39,50	47,20	30,15	45,22	31,56	44,19	32,61	43,48
640000	40,00	47,80	30,53	45,79	31,96	44,75	33,02	44,03

425. Uso de la tabla precedente.—Como en el caso general puede aceptarse que los coeficientes de seguridad, por centímetro cuadrado de sección recta, sean: $K = 60$ kilogramos para las piezas de madera y $K = 600$ kilogramos para las de hierro, cabe reunir en una misma tabla escuadrías para prismas de cualquiera de dichos materiales; porque siendo de $\frac{1}{10}$ la relación de los coeficientes de seguridad, los valores de $ZK = M$ guardarán también la misma sencilla relación.

Así, pues, si se trata de un prisma de madera y se conoce el valor del momento máximo de flexión $M = KZ$ á que ha de resistir, cualquiera que sea el caso de flexión en que aquél se halle, se buscará en la primera columna el valor conocido de M, y en la misma fila horizontal se encontrará la escuadría que el prisma debe tener, ya sea de sección cuadrada, circular ó rectangular, cuando en este último caso la relación $\frac{B}{H}$, entre el lado horizontal B y el vertical H, haya de ser de $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ ó $\frac{3}{4}$.

Pero si se tratara de un prisma de hierro, entonces en la primera columna vertical no buscaríamos el valor dado de M, sino el de su décima parte, $\frac{1}{10}$ M; procediendo, por lo demás, como en el caso anterior.

En cualquiera de estos casos, si M ó $\frac{M}{10}$ no se encontrara exactamente en las tablas, aceptaríamos la escuadría correspondiente al valor inmediato mayor.

426. Ejemplo 1.º Escuadría de un prisma de madera de sección cuadrada, de 4 metros de longitud, apoyado por sus extremos y sometido en su punto medio á una carga de 500 kilogramos.

La expresión de M es, como sabemos,

$$M = \frac{1}{4} PL,$$

y como

$$\left.\begin{array}{l} P = 500 \text{ kg.} \\ L = 400 \text{ cm.} \end{array}\right\} \text{será } M = \frac{1}{4} \times 500 \times 400 = 50000.$$

El valor de M superior inmediato á 50000 que se halla en la tabla es 53594, y á él corresponde una escuadría de $0^m 175 \times 0^m 175$.

427. Ejemplo 2.º Pieza de hierro, de sección circular, colocada sobre dos apoyos que distan 2^m y que ha de resistir una carga de 1800 kilogramos aplicada en el punto medio.

Tendremos

$$\left.\begin{array}{l} L = 200 \text{ cm.} \\ P = 1800 \text{ kg.} \end{array}\right\} M = \frac{1}{4}\, PL = \frac{1}{4} \times 1800 \times 200 = 90000$$

$$\frac{M}{10} = 9000.$$

El valor superior inmediato á 9000 que se halla en la primera columna de la tabla es 10000; y por lo tanto aceptaremos para diámetro de la sección circular

$$d = 12 \text{ cm}^2 = 0^{\text{m}}12.$$

428. Ejemplo 3.º Prisma de madera, de 5^{m} de longitud, empotrado por sus extremos y sometido á una carga total uniformemente repartida en todo él, de 2500 kilogramos, debiendo ser rectangular la sección y $\frac{B}{H} = \frac{2}{3}$.

Tendremos

$$\left.\begin{array}{l} L = 500 \text{ cm.} \\ P = 2500 \text{ kg.} \end{array}\right\} M = \frac{1}{12}\, PL = \frac{1}{12} \times 2500 \times 500 = 104166.$$

El valor superior inmediato á 104166 que encontramos en la primera columna de la tabla es 106480; al cual corresponde una escuadría, cuyos elementos son

$$\begin{array}{l} B = 16{,}78 \text{ cm.} = 0^{\text{m}}{,}1678 \\ H = 25{,}19 \quad » \quad = 0^{\text{m}}{,}2519. \end{array}$$

No hay para qué decir que en la práctica no ha de llevarse la apreciación de los lados de la escuadría hasta diezmilímetros; sino que bastará, á lo sumo, apreciar hasta milímetros.

Así en el caso que precede pudiera aceptarse

$$\begin{array}{l} B = 0^{\text{m}}{,}168 \\ H = 0^{\text{m}}{,}252. \end{array}$$

429. Observación. Las escuadrías que se consignan en esta tabla corresponden á secciones ó perfiles de la misma resistencia, lo que equivale á decir que para todas las de una misma fila ó línea horizontal, el valor de Z es sensiblemente el mismo.

Dicha tabla se ha calculado de la manera siguiente:

Si llamamos

h al lado de la sección cuadrada;

d al diámetro de la sección circular;

B al lado horizontal de la sección rectangular;

H al lado vertical de íd., íd., íd.,

la expresión del módulo Z será, como sabemos:

Para el cuadrado........ $Z = \frac{1}{6} h^3$

» el círculo........... $Z = \frac{1}{32} \pi d^3$

» el rectángulo..... $Z = \frac{1}{6} BH^2$.

Dando á h valores sucesivos, desde 1 hasta 40 centímetros, que se diferencien en medio centímetro, y teniendo en cuenta que $M = KZ$, y que para la madera y secciones cuadradas

$$M = 60Z = 60 \times \frac{1}{6} h^3 = 10h^3;$$

se han calculado los valores de M que figuran en la primera columna, los cuales corresponden á los indicados de h que aparecen inmediatamente á su derecha.

Para deducir los valores de d (diámetros que figuran en la 3.ª columna) la condición de igualdad de resistencia nos da

$$\frac{1}{6} h^3 = \frac{1}{32} \pi d^3$$

de donde

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}} \times h$$

fórmula por la cual se han calculado los expresados diámetros.

Finalmente, para calcular B y H, en los tres casos considerados, es decir, cuando

$$\frac{B}{H}=\frac{2}{3}, \quad \frac{B}{H}=\frac{5}{7} \quad \text{y} \quad \frac{B}{H}=\frac{3}{4};$$

llamando en general m á la relación $\frac{B}{H}$, tendremos también

$$B = mH \quad \text{y} \quad H=\frac{1}{m}B;$$

por consiguiente

$$\frac{1}{6}\, mH^3=\frac{1}{6}\, h^3 \quad \text{ó} \quad mH^3 = h^3$$

y

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{m^2}B^3=\frac{1}{6}\, h^3 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{m^2}B^3=h^3$$

de donde

$$B = h\sqrt[3]{m^2} \quad \text{y} \quad H = h\sqrt[3]{\frac{1}{m}}$$

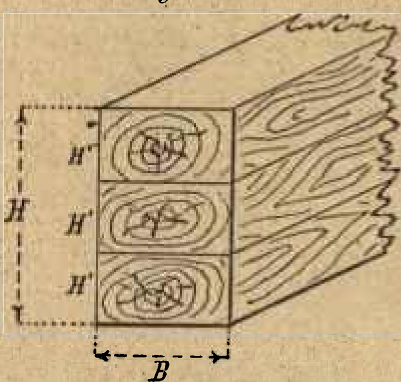
fórmulas por las cuales se han calculado los valores de B y H que figuran en las columnas restantes.

Conviene advertir que hemos preferido que las escuadrías respondan mejor á la posible igualdad de resistencia (más bien por exceso que por defecto) que á la condición de que los lados de aquella ofrezcan rigurosamente las relaciones indicadas de $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{4}$. Por lo demás, los errores aceptados en este punto no tienen ninguna importancia.

430. Vigas compuestas de madera.—Entre los numerosos tipos de vigas compuestas de madera, sólo nos ocuparemos con la posible brevedad de los siguientes:

431. Vigas superpuestas.—Si dos ó más vigas sencillas de madera, cuyas escuadrías tengan el mismo lado horizontal B, se superponen simplemente, como indica la figura 173, se obtiene una viga compuesta que no se portará como si fuera de una sola pieza; porque las vigas sencillas de que consta, al encorvarse bajo las cargas exteriores de flexión, resbalan entre sí á lo largo de las superficies comunes ó caras de contacto.

Fig. 173.



Supongamos el caso de una viga compuesta por la superposición de otras tres sencillas, cuyas escuadrías sean respectivamente $B \times H'$, $B \times H''$, $B \times H'''$, siendo sus módulos de flexión Z', Z'' y Z''', y la altura total $H' + H'' + H''' = H$.

Sea P la carga total y P', P'', P''' aquellas en que se distribuye P entre las tres vigas sencillas; siendo por tanto

$$P = P' + P'' + P'''.$$

Como las tres vigas elementales toman al fin la misma flecha; y por otra parte acredita la experiencia que tales vigas se portan en la flexión como piezas independientes, tendremos, llamando f á la flecha común (tomo I, pág. 182, núm. **220**), y L á la longitud de la viga propuesta:

$$f = \beta \frac{P'L^3}{Z'EH'} = \beta \frac{P''L^3}{Z''EH''} = \beta \frac{P'''L^3}{Z'''EH'''}.$$

De estas relaciones se deduce:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{P'}{P''} = \dfrac{Z'H'}{Z''H''} \\[2ex] (2) & \dfrac{P'}{P'''} = \dfrac{Z'H'}{Z'''H'''}\end{array}\right\} \text{ y como consecuencia } \frac{P''}{P'''} = \frac{Z''H''}{Z'''H'''}$$

Además tenemos

$$(3) \quad P = P' + P'' + P'''$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3), se obtiene

$$P' = \frac{Z'H'}{Z'H' + Z''H'' + Z'''H'''} P$$

$$P'' = \frac{Z''H''}{Z'H' + Z''H'' + Z'''H'''} P$$

$$P''' = \frac{Z'''H'''}{Z'H' + Z''H'' + Z'''H'''} P$$

Si las vigas elementales, además de ser de igual naturaleza, tuvieran sus secciones rectas, no sólo de igual base B, sino de la misma altura, tendríamos entonces, $H' = H'' = H''' = \dfrac{H}{3}$.

En tal caso, como $Z' = Z'' = Z'''$, los valores de P', P'' y P''' serían idénticos y á cada viga elemental correspondería $\dfrac{1}{3}$ de la carga total P.

En general, si la viga compuesta lo estuviera por otras n iguales entre sí, cada una soportaría la fracción $\dfrac{1}{n}$ de la carga total P, siendo la altura de cada una de ellas $H' = \dfrac{H}{n}$.

Ahora bien, como para cualquier caso de flexión y una misma longitud L, el valor del momento máximo M es directamente proporcional á la carga total P, es claro que cada una de las n vigas elementales habrá de resistir la misma fracción $\frac{1}{n}$ de dicho momento máximo, es decir $\frac{M}{n}$.

Por lo tanto, la ecuación de resistencia para cualquiera de las vigas sencillas será

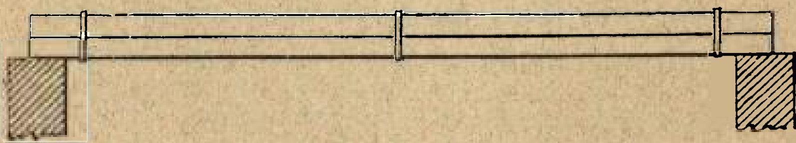
$$\frac{M}{n} = \frac{1}{6} BH'^2K$$

ó en función de la altura total H de la viga compuesta, puesto que $H' = \frac{H}{n}$ y $H'^2 = \frac{H^2}{n^2}$;

$$M = \frac{1}{6n} BH^2K \qquad (a).$$

432. Ejemplo.—Calcular la escuadría de una viga compuesta, de madera, constituída por otras dos sencillas superpuestas, iguales entre sí (figura 174), apoyada por sus extremos,

Fig. 174.



que distan entre sí $7^m,80$ y sometida á una carga total P, uniformemente repartida, de 2400 kilogramos; debiendo guardar los lados de la escuadría total la relación $\frac{B}{H} = \frac{2}{3}$.

Tenemos

$$M = \frac{1}{8} PL = \frac{1}{8} \times 2400 \times 780 = 234000$$

$$n = 2 \quad ; \quad K = 60 \; ;$$

$$B = \frac{2}{3} H \text{ y por tanto } BH^2 = \frac{2}{3} H^3$$

Sustituyendo en la ecuación (a), resulta

$$234000 = \frac{1}{6 \times 2} \times \frac{2}{3} H^3 \times 60 = \frac{10}{3} H^3 ;$$

de donde

$$H^3 = \frac{234000 \times 3}{10} = 23400 \times 3 = 70200$$

y

$$H = \sqrt[3]{70200} = 41{,}3 \text{ centímetros}$$

de donde

$$B = \frac{2}{3} \times 41{,}3 = 21{,}6 \quad »$$

Esta escuadría viene á corresponder á dos *tercias* superpuestas por sus tablas.

En efecto: siendo la escuadría de la tercia, 20,9 × 27,9 centímetros, tendremos

Lado B de la viga compuesta, canto de la tercia = 27,9 cm.
» H » » , 2 veces la tabla de íd. = 41,8 »

Como se ve, esta escuadría difiere muy poco por exceso de la obtenida por el cálculo que precede, y por tanto puede aceptarse como solución práctica, puesto que supone el empleo de dos piezas iguales, corrientes en el comercio de maderas, cuyas dimensiones no necesitan rectificación alguna.

Una viga sencilla ó de una sola pieza, cuya escuadría fuera igual á la calculada, 27,6 × 41,3 centímetros, de la misma longitud, es decir, para la misma luz ó distancia entre apoyos, podría soportar bajo igual tensión máxima de 60 kilogramos por centímetro cuadrado, una carga total uniformemente repartida de unos 4800 kilogramos, es decir, una carga doble que la viga compuesta, como es fácil deducir.

En cambio la flecha de la viga única sería la mitad que la de la viga compuesta. En efecto, llamando f_1 á la flecha de la viga única, y f_2 á la de la viga compuesta, tendremos (tomo I, número **219**)

$$f_1 = \alpha \frac{KL^3}{EH}$$

$$f_2 = \alpha \frac{KL^3}{EH'}$$

de donde

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{H'}{H} = \frac{1}{2}$$

y

$$f_1 = \frac{1}{2} f_2$$

como habíamos indicado.

433. Vigas ensambladas.—Para lograr en lo posible que las vigas superpuestas se porten como si fueran de una sola pieza, evitando el resbalamiento de las vigas elementales á lo largo de las caras de contacto, y aumentando, en consecuencia, sus condiciones de resistencia y rigidez, se procura por diferentes modos que las vigas elementales se hagan solidarias, ensamblándolas entre sí por medio de cinchos, llaves de madera dura, pasadores ó pernos, etc.

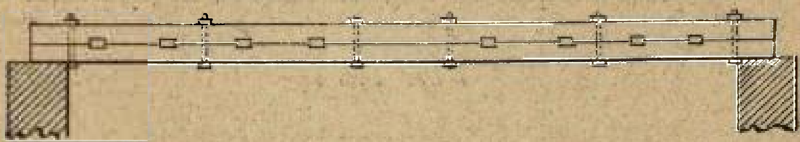
El empleo exclusivo de cinchos de hierro (figura 174), tiene poca influencia, y en la práctica debe considerarse que ésta es nula, calculando la viga como en el caso que precede relativo á las vigas superpuestas.

El empleo simultáneo de llaves y pasadores ó pernos, como indican las figuras 175 y 176, si bien no evita del todo el resbalamiento, aun tomando la precaución de que al ensamblar las piezas presente la viga cierta convexidad hacia arriba, es mucho más eficaz; y en la práctica se admite que la resistencia de la viga ensamblada es sólo una fracción $\frac{1}{m}$ de la que correspondería al caso de ser aquella de una sola pieza, variando, como es natural, el valor de m con el sistema de ensambladura y esmero en la mano de obra.

Para los casos representados en las figuras 175 y 176 suele aceptarse que $\frac{1}{m} = 0,75$; la flecha que deben presentar una vez construídas, debe ser de $\frac{1}{60}$ á $\frac{1}{100}$ de la longitud, y generalmente se da á tales vigas una altura H que varia de $\frac{1}{12}$ á $\frac{1}{15}$ de la longitud, ó mejor dicho de la luz salvada.

Como la tendencia al resbalamiento es nula en el punto me-

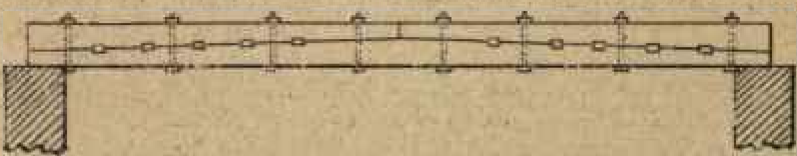
Fig. 175.



dio y crece hacia los extremos, las llaves deben estar más cerca en éstos que en la parte central.

La disposición representada en la figura 176 tiene la ventaja de ser algo más resistente, porque en la parte media la altura

Fig. 176.



de la viga inferior es mayor que la de la superior, sucediendo lo contrario en los extremos, lo que disminuye la flecha y, por tanto, la tendencia al resbalamiento de las vigas elementales; pero en cambio tiene el inconveniente de llevar consigo más mano de obra y mayor desperdicio de material, al labrar las caras de contacto.

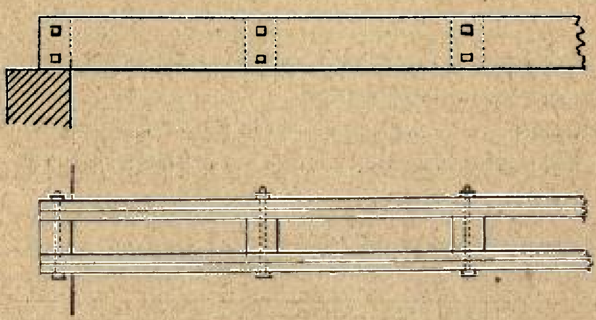
Las cuñas deben ser de madera dura, y la forma de su sección recta puede ser cuadrada, rectangular ó en doble cola de milano.

Las tuercas de los pasadores deben ajustarse bien, para que por la presión que engendran aprieten fuertemente las caras de contacto y eviten la rotación de las llaves en las cajas en que se alojan.

434. **Vigas hechas con tablas.**—Cuando no se dispone de piezas enterizas á propósito, se pueden formar vigas de gran resistencia compuestas únicamente de tablas, de la manera que indican las figuras 177 y 178.

La primera disposición conviene cuando la longitud de las

Fig. 177.



tablas es suficiente para salvar la luz de que se trate; la segunda, cuando dicha longitud sea menor que la luz que ha de salvarse. En ambos casos, el enzoquetado que forman los tacos de madera, á los cuales se cosen las filas sencillas ó múltiples de tablas, impiden el alabeo lateral, que, sin esta disposición indispensable, se engendraría seguramente en perjuicio de la resistencia de la viga.

La distancia entre las caras interiores de los tacos ó zoquetes, no debe pasar de unos $0^m,70$ y las cubrejuntas necesarias que lleva consigo la disposición representada en la figura 178, no deben ser inferiores á $0^m,60$ de largo.

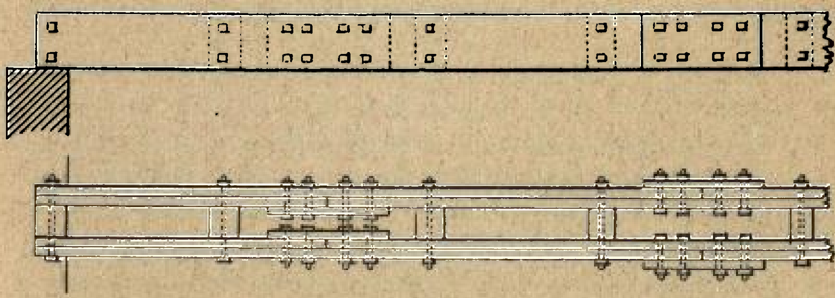
La unión de los zoquetes con las filas de tablas se hace en buenas condiciones con pernos delgados; pero el cosido de las cubrejuntas debe hacerse por medio de alfileres pequeños, bastante repartidos para no debilitar la madera ni originar en ella hendiduras.

Si llamamos b al grueso de las tablas empleadas, es decir, al canto, y h á la altura de la sección de aquellas, y para formar la viga se emplean $2n$ tablas, la sección recta para el cálculo será:

Lado horizontal....... $B = 2nb$.
Lado vertical........... $H = h$.

De las importantes experiencias efectuadas por el ingeniero militar Sr. Marvá, y de las cuales hace mérito en su ya citada obra *Mecánica aplicada á las construcciones,* resulta que la resistencia de una viga hecha con tablas, conforme á las disposiciones indicadas en las figuras 177 y 178, varía entre 0,70 y 0,80

Fig. 178.



de la resistencia de una viga enteriza de la misma escuadría é igual longitud.

Resulta de aquí que en la ecuación de resistencia $M = KZ$, habrá que dar á K los 0,7 á 0,8 de su verdadero valor, para hacerla aplicable al caso que nos ocupa.

435. Ejemplo.—Calcular la carga total, uniformemente repartida, que podrá resistir con toda seguridad una viga organizada como indica la figura 177, cuyas dimensiones son:

Luz salvada. $L = 6^m$...	$=$	600 cm.
Grueso de los tablones...	$b =$	5 »
Ancho de los tablones....	$H = h =$	20 »
Número de tablones......	$2n =$	4 »
Ancho de la sección.....	$B = 4b =$	20 »

Admitamos un coeficiente de resistencia igual á 0,75 ó, lo que es lo mismo, á $\frac{3}{4}$ del de la viga enteriza.

La ecuación de resistencia será:

$$\frac{1}{8} PL = \frac{3}{4} K \times \frac{1}{6} BH^2 = \frac{1}{8} KBH^2$$

de donde

$$P = \frac{KBH^2}{L} = \frac{60 \times 20 \times 400}{600}$$

ó bien

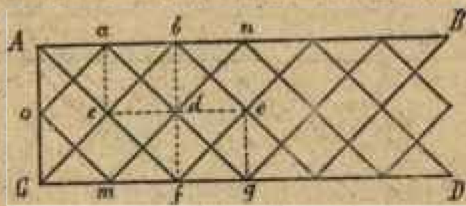
$$P = 800 \text{ kilogramos.}$$

Como con excelente criterio aconseja el Sr. Marvá, «es del »mayor interés nivelar los extremos sobre sus asientos, á fin de »que las cargas actúen paralelamente á las caras de las tablas, »y colocar aquellas convenientemente para que se distribuyan »por igual en éstas».

Las precauciones indicadas son indispensables para que este género de vigas den todo el resultado que de ellas puede obtenerse respecto á su notable resistencia.

436. Vigas de celosía.—Constan esencialmente estas vigas de madera, llamadas también americanas, de cuatro piezas A', B', C', D' (figura 181), formando dos cepos, el superior AB, y el inferior CD (figura 180), que reciben el nombre de cabezas ó cordones. El claro que dejan las cabezas se rellena con otras piezas A*f*, *ag*, ... C*b*, *mn* ..... (figura 179), llamadas *barras*, que quedan encepadas por sus extremos, se cruzan formando celosía y su conjunto forma el alma de la viga.

Fig. 179.



La inclinación más conveniente de las barras con la vertical corresponde al ángulo de 45°, de cuya suerte aquellas resultan perpendiculares entre sí.

Los extremos de las barras se cruzan en el eje de las cabezas; y tanto en estas regiones como en los demás puntos intermedios de cruzamiento, se consolida la unión por medio de pernos ó pasadores, cuyas tuercas se aprietan fuertemente.

Dos cepos perpendiculares á las cabezas (uno de los cuales se proyecta según AC, figura 180), en los extremos de estas y con las cuales se ensamblan á media madera, limitan el contorno aparente de la viga, que así resulta rectangular y sujetan, por el medio indicado de pernos, aquellas barras como la *mo* (figura 179) que, partiendo de una de las cabezas, no llegan á la opuesta, cuando la celosía no es simple.

Los cuadrados *abcd*, *defg*, se llaman *mallas*. Cuando el alma no comprende más que una serie horizontal de mallas, la celosía es simple; si comprende dos series horizontales de mallas, se llama doble, etc.

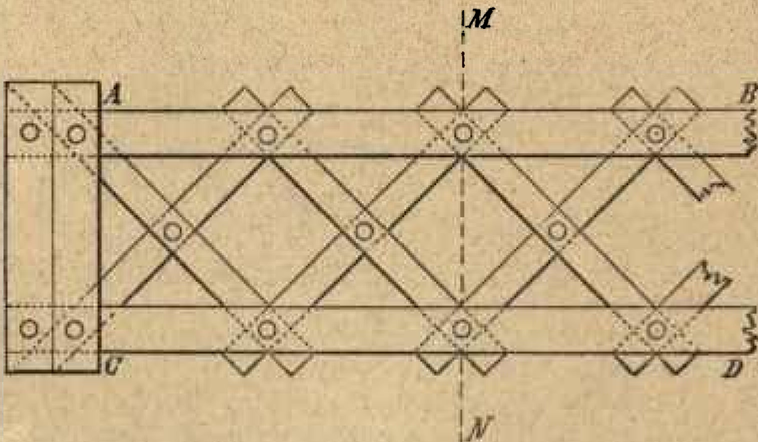
Para facilitar el cálculo de este género de vigas admitiremos las siguientes hipótesis, favorables á la resistencia.

1.° Las cabezas deben poder resistir por sí solas al momento máximo de flexión.

2.º Las barras de la celosía, por sí solas, deben resistir al esfuerzo cortante máximo.

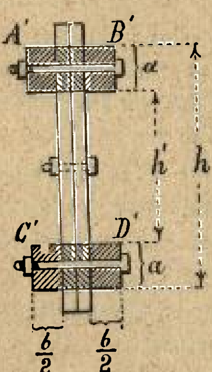
3.º En cualquier región de la viga, el esfuerzo cortante se

Fig. 180.



distribuye de modo uniforme dentro del área de la sección vertical del alma.

Fig. 181.



437. Cálculo de las cabezas.— Si llamamos a al lado vertical y $\frac{1}{2}b$ al lado horizontal de la escuadría de las piezas que constituyen las cabezas, la sección resistente de una de estas será un rectángulo que tendrá a por altura y b por base. Su área será $\omega = ab$.

Sea h la altura de la viga y h' la del alma (figura 181); tendremos

$$h' = h - 2a.$$

El módulo de flexión de la sección resistente tiene, como sabemos, por expresión exacta:

$$Z = \frac{1}{6}\, b\, \frac{h^3 - h'^3}{h};$$

y sustituyendo el valor de $h' = h - 2a$, será

$$Z = \frac{1}{6}\, b\, \frac{h^3 - (h - 2a)^3}{h}$$

ó bien efectuando y reduciendo,

$$Z = abh - 2a^2 b\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{a}{h}\right) = \omega h - 2a^2 b\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{a}{h}\right).$$

El segundo término es tanto más pequeño con relación al primero, cuanto menor es a y mayor es h. No hay inconveniente alguno en despreciarlo, aceptando para el módulo Z el valor aproximado, erróneo por exceso

$$Z = \omega h,$$

lo que en cambio tiene la ventaja de simplificar el cálculo de las cabezas, sin que el error que de tal suerte se comete tenga verdadera importancia.

La ecuación de resistencia será, por tanto,

$$M = \omega h K$$

de donde

$$\omega = \frac{M}{hK}, \qquad (1)$$

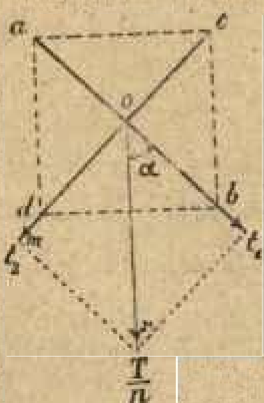
expresión por la cual, una vez conocido el valor de h, que suele hacerse en la práctica de $\frac{1}{8}$ á $\frac{1}{12}$ de la longitud L, se calculará el área de la sección recta de cualquiera de las cabezas. Su mitad corresponderá, por tanto, á la de cada uno de los maderos que la constituyen.

Calculada la sección resistente ω, para hallar la sección efectiva de la cabeza se añadirá el área de la sección diametral del taladro que ha de atravesar el perno; lo que equivale á aumentar la altura de la sección calculada en tanto cuanto valga el diámetro de los pernos; de ordinario 2 ó 3 centímetros.

438. Cálculo de las barras de la celosía.—Suponiendo, como acontece de ordinario, que la carga de la viga está uniformemente repartida en toda su longitud, sabemos que el esfuerzo cortante es máximo en los apoyos, donde vale la mitad de la carga total, y nulo en el punto medio.

Si en las vigas de madera fuera necesario atender á la mayor economía de material, deberían aceptarse barras de sección distinta, dividiendo el largo de la viga en varias zonas, como se hace con las de hierro, para adoptar varios tipos diferentes; pero en el caso que nos ocupa, todas las barras son iguales y capaces de resistir al esfuerzo cortante máximo; siendo su sección recta igual á la sección resistente obtenida por el cálculo, más la ocupada por el taladro que ha de ser atravesado por el perno.

Fig. 182.



439. Esfuerzos que obran sobre las barras.—Sea *abcd* (figura 182) una de las *n* mallas de que la viga se componga en sentido vertical, y T el esfuerzo cortante máximo. Este se distribuirá por igual entre los *n* nudos, y en el *o* actuará un esfuerzo cortante igual á $\frac{T}{n}$.

Esta fuerza se descompone en las t_1 y t_2, según las direcciones de las barras. Como $\frac{T}{n}$ es una fuerza vertical que forma con aquellas el mismo ángulo α, los valores de t_1 y t_2 serán iguales. Llamemos t á dicho valor común. Tendremos

$$\frac{1}{2}\frac{T}{n} = t \cos \alpha \quad (^a)$$

de donde

$$t = \frac{T}{2n \cos \alpha};$$

siendo $n = 1$, para las celosías simples; $n = 2$ para las dobles, etcétera.

Representando por ω la sección resistente de las barras, la ecuación de resistencia será

$$K\omega = \frac{T}{2n \cos \alpha}, \quad \text{de donde} \quad \omega = \frac{T}{2nK \cos \alpha} \quad (2)$$

Por esta fórmula se calculará la sección resistente de las barras, cuya sección definitiva se obtendrá añadiendo á ω el área de la sección diametral del taladro ocupado por el pasador.

440. Naturaleza de las tensiones desarrolladas por las barras.—Suponiendo la carga uniformemente repartida y concentrada en los nudos de cualquiera de las cabezas, según el modo de aplicación de las cargas ó fuerzas exteriores, unas barras trabajan por compresión y otras por extensión.

Para distinguir ambos grupos basta aplicar la siguiente regla práctica:

Todas las barras simétricas que, prolongadas si es necesario, se cruzan por encima del eje de la viga ó sobre dicho eje, resultan comprimidas. Todas las demás extendidas.

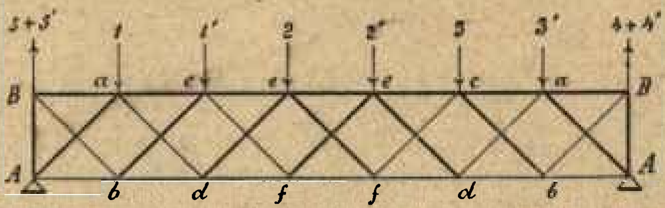
Para comprobar esta regla, basta considerar una viga de celosía del orden n como la *yuxtaposición* de $n + 1$ vigas de igual altura, siendo sus mallas triángulos rectángulos isósceles, cuyos catetos son iguales á las barras respectivas; y estando cada

---

(a) Porque siendo $om = mr = t$, la semidiagonal $\frac{1}{2}\frac{T}{n}$ es igual á la proyección de om ó de mr sobre Or.

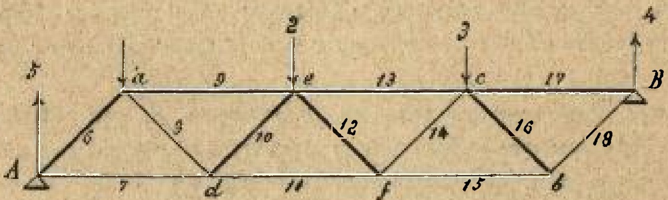
una de aquellas sometida á las cargas correspondientes á los nudos exteriores que pertenecen á la propuesta.

Fig. 183.



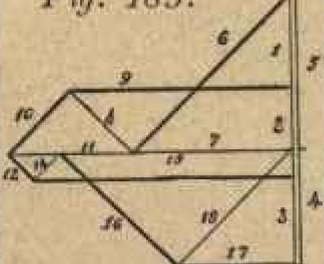
La construcción de la figura recíproca de cada uno de los

Fig. 184.



sistemas reticulares, sometidos á cargas conocidas, y en los que se descompone la viga dada, hace ver cuáles son las barras extendidas y cuáles las comprimidas, confirmando la regla establecida.

Fig. 185.

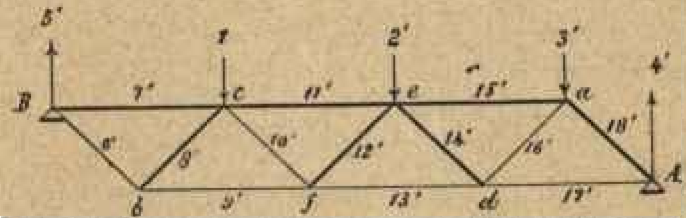


En las figuras 184 y 185, 186 y 187 se indican las construcciones necesarias propias del caso representado por la figura 183 para hallar gráficamente las tensiones desarrolladas por cada una de las barras. Como se ve, la viga de celosía simple ABBA (figura 183) se descompone en otras dos; la A*ad*..... *cb*B (figura 184) y la B*bc*..... *da*A (figura 186); y los resultados comprueban la exactitud de la regla anterior.

En el caso supuesto, los montantes extremos que limitan la viga sólo trabajan por compresión, resistiendo á las reacciones desarrolladas por los apoyos correspondientes.

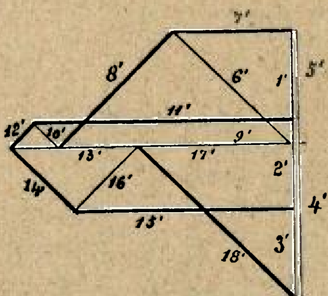
Si la celosía no fuera simple, entonces los montantes podrían trabajar por compresión y flexión, si por diversas causas alguna de las barras cortadas transmitiera la reacción que desenvuelve sin ser contrarrestada totalmente por aquella con quien se cruza en el montante. Para precaver este caso pudiera tenerse en cuenta la componente normal á aquél, calculándolo como

Fig. 186.



pieza apoyada en dos puntos y sometida á una fuerza de compresión y á una ó varias de flexión, según el orden de la celosía; pero generalmente la robustez que se da á los montantes hace innecesario calcularlos como acabamos de indicar, limitándose á comprobar si ofrecen la resistencia necesaria á la compresión que determina el esfuerzo cortante máximo.

Fig. 187.



441. Ejemplo.—Calcular una viga de madera de celosía simple con los siguientes datos:

Luz salvada por la viga................ $L = 7^m,5 = 750$ cm.
Carga unitaria (por centímetro)......... $p = 15$ kilogramos.
Altura de la viga (entre ejes de las cabezas) $h = 0^m,75 = 75$ cm.

Tendremos
Momento máximo de flexión

$$M = \frac{1}{8} pL^2 = \frac{1}{8} \times 15 \times 750^2 = 1.054688 \text{ kg. cm.}$$

Esfuerzo cortante máximo

$$T = \frac{1}{2} pL = \frac{1}{2} \times 15 \times 750 = 5625 \text{ kg.}$$

Tensión máxima (por extensión ó compresión) desarrollada por las barras; siendo $\alpha = 45^\circ$ y $n = 1$.

$$t = \frac{T}{2 \cos \alpha} = \frac{5625}{2 \times 0{,}707} = 3978 \text{ kg.}$$

442. Cálculo de los pernos.—Los pernos han de resistir al esfuerzo cortante desarrollado en los puntos de cruzamiento de las barras. Considerando el máximo de dicho esfuerzo y llamando ω á la sección recta del perno, la ecuación de resistencia será $\omega K = T$, de donde

$$\omega = \frac{T}{K}$$

Aceptando para coeficiente de seguridad, $K = 700$ kilogramos, tendremos

$$\omega = \frac{5625}{700} = 8{,}04 \text{ cm}^2.$$

A esta sección circular corresponde un diámetro

$$d = 3{,}2 \text{ centímetros.}$$

443. Cálculo de las cabezas —De la ecuación (1) (número **437**) resulta

$$\omega = \frac{M}{hK} = \frac{1.054688}{75 \times 60} = 234,4 \text{ cm}^2.$$

La sección resistente de cada una de las dos piezas que forman la cabeza sería, por tanto, la mitad, ó sea

$$\frac{\omega}{2} = 117,2 \text{ cm}^2.$$

Para obtener las piezas que constituyen cualquiera de las cabezas, bastará aserrar á lo largo y por el eje menor de la sección recta una sesma del largo necesario, por ejemplo, de $8^m 30$; en cuyo caso, teniendo en cuenta el desperdicio que ocasiona el hilo de sierra, resultará la siguiente sección efectiva:

Lado horizontal.........	$B =$	10,5 cm.
Lado vertical...........	$H =$	15,7 »
Area de la sección recta..	$\Omega =$	164,85 cm².

El área que hay que descontar, por ser ocupada por el perno, es $s = 3,2 \times 10,5 = 33,60$ cm²; por tanto resultará

Area de la sección aceptada..........	$\Omega =$	164,85	cm².
Idem ocupada por el pasador.........	$s =$	33,60	»
Queda una sección útil de...........	$\omega_1 =$	131,25	»
Pero como la sección calculada fue de.	$\frac{1}{2}\omega =$	117,20	»
Resulta la sección aceptada con un exceso de..........................		14,05	cm².

444. Cálculo de las barras.—Aplicando la ecuación (2) (número **439**), tendremos

$$\omega = \frac{T}{2K \cos \alpha} = \frac{5625}{2 \times 60 \times 0,707} = 66,3 \text{ cm.}^2$$

Las barras pueden ser maderos de á 10, cuya escuadría es

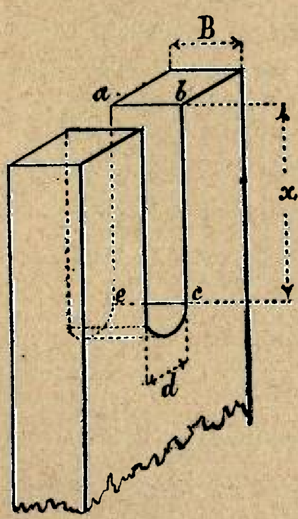
$$8{,}7 \times 12{,}1 \text{ centímetros.}$$

En efecto:

El área de la sección recta adoptada es....	$\Omega =$	105,27	cm².
La ocupada por el pasador es 3,2 × 8,7...	$s =$	27,84	»
Queda una sección útil de................		77,43	»
Y siendo la sección calculada de..........		66,30	»
Resultan las barras con un exceso de sección de............................		11,13	cm².

445. **Longitud de las barras.**—La longitud de las barras es evidentemente igual á la diagonal de la malla $\frac{h}{\cos\alpha}$, más dos veces la distancia que debe haber entre los puntos de cruzamiento de aquellas sobre las cabezas y los extremos respectivos. Esta distancia no puede ser arbitraria, porque de ella depende que las barras no se destruyan por desgarramiento longitudinal.

Fig. 188.



La superficie resistente es el doble del rectángulo *abce* (figura 188) cuya área es $2\text{B}x$, siendo B el lado menor de la escuadría de la barra: y como la fuerza que tiende á producir el desgarramiento es igual á la tensión máxima desarrollada por dicha barra, claro es que la ecuación de resistencia será

$$2BxK = \frac{T}{2 \cos \alpha}$$

de donde

$$x = \frac{T}{4BK \cos \alpha}$$

Admitiendo como coeficiente de seguridad al desgarramiento, K = 10 kilogramos por centímetro cuadrado; y puesto que en el caso actual es B = 8,7 cm., tendremos

$$x = \frac{5625}{4 \times 8,7 \times 10 \times 0,707} = 22,8$$

ó en números redondos

$$x = 23 \text{ centímetros.}$$

Por consiguiente, la longitud de las barras será

$$l = \frac{h}{\cos \alpha} + 2x = \frac{75}{0,707} + 46 = 152 \text{ cm.}$$

446. Peso propio de la viga.—Para luces pequeñas y vigas de madera no suele tenerse en cuenta el peso propio; y mucho más habiendo aceptado secciones mayores que las necesarias; pero si, con los datos establecidos, y asignando 600 kilogramos al peso del metro cúbico de madera y 7800 kilogramos al del metro cúbico de hierro, calculáramos el peso de las diferentes partes de la viga estudiada, resultaría, aproximadamente:

Peso de las cabezas....................	593,46	kg.
» de las 20 barras..................	192,01	»
» de los 32 pernos necesarios........	82,84	»
Peso total de la viga....	868,31	kg.

La carga unitaria sería, contando con este peso propio,

$p = 16{,}17$ kilogramos; y las secciones necesarias, las siguientes:

Cabezas... $\frac{1}{2}\omega = 126$ cm^2. $< 131{,}25$, área aceptada.

Barras..... $\omega = 71{,}4$ cm^2. $< 77{,}43$, área adoptada.

Vemos, pues, que, aun teniendo en cuenta el peso propio de la viga, las secciones adoptadas no necesitan rectificación alguna, puesto que son resistentes con exceso; presentando, además, la ventaja de que resultan de piezas corrientes en el comercio, sin desperdicio alguno en el caso supuesto.

447. Vigas armadas de madera. — Cuando una viga cualquiera, apoyada por sus extremos, no tiene la resistencia necesaria, bien por su gran longitud ó por la importancia de las cargas que ha de soportar, se enlaza con diversas piezas, las cuales tienen por objeto crear uno ó más puntos de apoyo intermedios. El conjunto que así resulta recibe el nombre de *viga armada.*

En general, estas vigas pueden dividirse en dos grupos: *armadas por la parte superior*, cuando las piezas de enlace se disponen por encima de la viga primitiva; y *armadas por la parte inferior*, cuando aquellas se sitúan por debajo de la misma.

En el primer caso, la viga que se arma queda suspendida por piezas verticales que trabajan por extensión y se llaman *péndolas.* En el segundo caso queda sustentada por piezas verticales ú oblicuas que trabajan por compresión, y se llaman *manguetas* ó *bielas.* Las piezas restantes, que entran en la organización de las vigas armadas, reciben diferentes nombres que se consignarán oportunamente.

Cada uno de los grupos indicados pueden clasificarse á su vez, atendiendo al número de apoyos intermedios que crean las piezas de enlace.

448. Determinación de las fuerzas interiores.—

Si las fuerzas exteriores están aplicadas á los nudos de la viga armada, la construcción de la figura recíproca no ofrecerá ninguna dificultad, y sus lados indicarán la magnitud y naturaleza de las tensiones ó fuerzas interiores desarrolladas en cada una de las piezas.

Pero con frecuencia sucederá que las fuerzas exteriores no estén directamente aplicadas á los nudos, sino en puntos determinados de los diversos tramos de la viga, ó uniformemente repartidas en toda ella. En cualquiera de estos casos se hallará la resultante que obra en cada tramo, y se descompondrá en dos componentes aplicadas á los nudos respectivos ([a]).

La suma de las componentes que obran sobre cada uno de estos, hará conocer cuales son las fuerzas que pueden suponerse aplicadas á ellos; con lo cual no habrá dificultad en construir la figura recíproca, que resolverá, como hemos dicho, la cuestión.

Claro es que esto exige que la figura de la viga armada sea indeformable. Si fuera deformable, para que las piezas que la constituyen puedan estar en equilibrio, es necesario y suficiente que el contorno poligonal coincida con uno cualquiera de los polígonos funiculares correspondientes á las fuerzas exteriores. Cuando esto no suceda, es imprescindible mediante la adición de las piezas necesarias, que la figura resulte estrictamente indeformable, es decir, compuesta de una serie de triángulos.

449. Cálculo de la viga primitiva.—Esta pieza estará sometida á un cierto esfuerzo de compresión ó de extensión, según los casos, y además á un momento máximo de flexión. El primero lo da á conocer la figura recíproca. El segundo se calculará por la fórmula que corresponda, suponiendo que la pieza de que se trata es un prisma apoyado en tres ó más pun-

---

([a]) Este es el procedimiento que suele seguirse para repartir entre los nudos las fuerzas exteriores; lo que equivale á suponer que los tramos de la viga son independientes: pero más adelante veremos que en beneficio de la resistencia cabe hacer otro reparto, teniendo en cuenta la solidaridad de los tramos.

tos de nivel; ó bien en dos puntos solamente cada uno de sus tramos si queremos favorecer la resistencia de la viga primitiva.

Claro es que llamando P á la fuerza de compresión ó extensión medida en la figura recíproca, ó diagrama de fuerzas; y M al momento máximo de flexión, la ecuación de resistencia de la viga primitiva será, como sabemos,

$$K = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{Z}:$$

siendo K el coeficiente de seguridad, ω el área de la sección recta de la pieza y Z su módulo de flexión.

450. Cálculo de las piezas restantes.—Como todas ellas resisten solamente á esfuerzos de compresión ó de extensión, el cálculo de las demás piezas no ofrecerá dificultad ninguna. Solamente habrá que tener en cuenta que las piezas comprimidas deben calcularse de modo que resulte imposible la flexión lateral, á virtud de lo que se dijo al tratar de las piezas comprimidas en el sentido de su eje (núm. **301**).

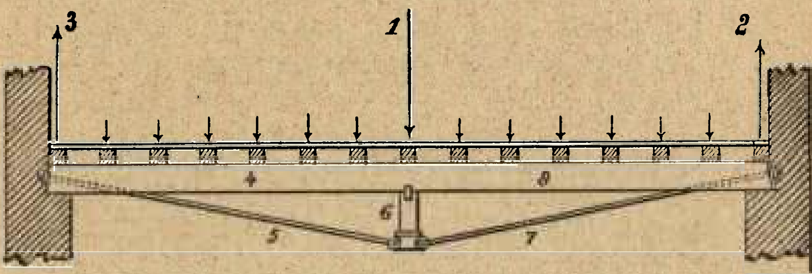
451. Observación.—Todo lo que precede es aplicable por completo á las vigas armadas de hierro, de las que hemos de ocuparnos más adelante, estudiando alguno de los tipos usuales.

452. Tipos de vigas armadas de madera. — Sólo consideraremos como ejemplo los sistemas representados por las figuras 189, 191 y 193; pues aun cuando el último no debiera en rigor agruparse entre las vigas armadas, al fin constituye un entramado vertical cuyo objeto es constituir una larga viga apoyada en los varios puntos que proporcionan los extremos superiores de los pies derechos y tornapuntas que se indican; disposición muy frecuente en ciertas dependencias agrícolas de importancia, como establos, grandes almacenes, etc.

453. Viga armada por la parte inferior con un

solo punto de apoyo intermedio.—En este caso (figura 189), las piezas necesarias de enlace se reducen á una mangueta situada en el punto medio de la viga, á la que puede unirse de

Fig. 189.



diferentes modos, y dos tirantes que, partiendo del extremo inferior de la mangueta, van á parar á los extremos de dicha viga. La mangueta puede ser de madera dura, fundición ó hierro. Los tirantes son barras de hierro que se fijan á la mangueta con pasadores; y atravesando oblicuamente los extremos de la viga, se sujetan á ésta por medio de tuercas.

454. **Ejemplo.**—Supongamos que se trata de calcular una viga armada de este tipo, bajo las condiciones siguientes:

Luz salvada por la viga.........	$L = 8^m$	$= 800$ cm.
Flecha ó longitud de la mangueta	$f = 0^m{,}8 =$	80 cm.
Carga unitaria (por centímetro)..	$p = 12$ kg.	
La carga total será.....	$P = pL =$	$12 \times 800 = 9600$ kg.

Como la carga la suponemos uniformemente repartida, la fuerza exterior **1** que podemos suponer aplicada al nudo intermedio, será la mitad de la carga total, ó sea $\mathbf{1} = \frac{1}{2} P = 4800$ kilogramos.

Las reacciones en los apoyos serán iguales entre sí, y como la suma ha de ser igual á **1**, tendremos

$$\mathbf{2} = \mathbf{3} = \frac{4800}{2} = 2400 \text{ kg.} \qquad (^{a})$$

Construída la figura recíproca, se ve que la mangueta trabaja por compresión, los tirantes por extensión y los dos tramos de la viga experimentan esfuerzos iguales de compresión.

El valor de estas fuerzas interiores puede hallarse de dos modos: ó midiendo los lados correspondientes de la figura recíproca con la escala que para su construcción se hubiera establecido, ó calculando tales fuerzas en función de las exteriores conocidas y de la magnitud de los elementos del sistema dado, mediante fórmulas sencillísimas que fácilmente se deducen de la figura recíproca.

En efecto, si llamamos

l á la longitud de los tramos iguales en que la viga queda dividida por la mangueta;
t á la longitud de los tirantes;
α al ángulo que forman éstos con la viga;
P_1 á la fuerza aplicada al nudo único intermedio, tendremos:

$$\mathbf{1} = P_1 \quad ; \quad \mathbf{2} = \mathbf{3} = \frac{1}{2} P_1 \quad ; \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{f}{t} \; ;$$

$$\cos \alpha = \frac{l}{t} \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{l} \quad ; \quad t = \sqrt{l^2 + f^2}$$

De la figura recíproca se deducen fácilmente las siguientes expresiones:

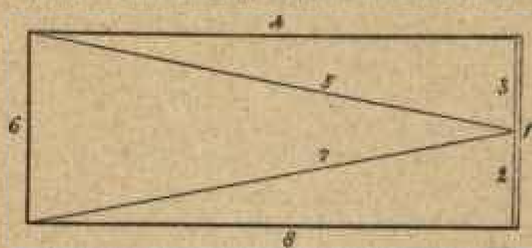
(a) Si tuviéramos en cuenta la solidaridad de los tramos (tomo I, página 269), sería $1 = \frac{5}{4} \cdot \frac{P}{2}$, y como consecuencia, $2 = 3 = \frac{5}{16} P$.

Compresión de la mangueta....... $6 = 1 = P_1$

Compresión de la viga............ $4 = 8 = \frac{1}{2}\,\frac{P_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{P_1 l}{2f}$

Extensión de los tirantes.......... $5 = 7 = \frac{1}{2}\,\frac{P_1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{P_1 t}{2f} = \frac{P_1\sqrt{l^2+f^2}}{2f}$

Fig. 190.



Sustituyendo en las fórmulas que preceden los valores de P, l y f, resulta:

Compresión de la mangueta..... $6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 4800$ kg.

Compresión de la viga.......... $4 = 8 = \frac{4800 \times 4}{2 \times 0{,}8} = 12000$ »

Extensión de los tirantes....... $5 = 7 = \frac{4800 \times \sqrt{4^2+0{,}8^2}}{2 \times 0{,}8} = 12237$ »

455. Cálculo de la viga ó cordón superior.—Considerando la viga como un prisma de tramos iguales, apoyado en tres puntos de nivel, el momento máximo de flexión se engendrará, como sabemos, en el apoyo central y tendrá por expresión (tomo I, núm. **316**,) $M = \frac{1}{8} pl^2$; y como la carga unitaria p es igual á 12 kilogramos y l vale 400 centímetros, tendremos

$$M = \frac{1}{8} \times 12 \times 400^2 = 240000 \text{ kilogramo-centímetros.}$$

Aceptando para coeficiente de seguridad, $K = 60$ kilogramos; como relación entre los lados de la sección recta, $\frac{B}{H} = \frac{3}{4}$, y recordando que además del momento de flexión M, la viga tiene que resistir á un esfuerzo de compresión de 12000 kilogramos, la ecuación de resistencia será:

$$60 = \frac{12000}{BH} + \frac{240000}{\frac{1}{6} BH^2};$$

pero como $B = \frac{3}{4} H$, resultará

$$60 = \frac{4 \times 12000}{3H^2} + \frac{8 \times 240000}{H^3}.$$

ó bien

$$H^3 - 266{,}6\, H - 32000 = 0\,.$$

La raíz real positiva de esta ecuación está comprendida entre 34 y 35. Tomaremos

$$H = 34{,}5 \text{ centímetros,}$$
$$B = 26 \quad \text{»}$$

Estas dimensiones que aceptamos en números redondos no son las exactas; pero en ello no hay inconveniente, porque guardando entre sí muy aproximadamente la relación de $\frac{3}{4}$ hacen que el coeficiente de trabajo sea de $K = 59{,}91$ kilogramos, resultado admisible en beneficio de la resistencia de la obra.

456. Cálculo de la mangueta.—Si no tuviéramos en cuenta la influencia de la flexión lateral posible, el área, de la sección recta de la mangueta, sería

$$\omega = \frac{4800}{60} = 80 \text{ cm.}^2$$

Suponiendo cuadrada esta sección, su lado valdría 8,9 centímetros próximamente: lo que hace ver que la relación $\frac{L}{B}$ entre la longitud de la pieza y el lado menor de la sección recta es $\frac{L}{B} = \frac{80}{8,9} = 9$, en números redondos. Esto nos dice que por ser $\frac{L}{B} > 5$ debe tenerse en cuenta la influencia de la flexión lateral. Si además, y para colocarnos en las condiciones más desfavorables, suponemos que se trata de una pieza de bases redondeadas ó articulada por sus extremos, será preciso:

1.º Reducir el coeficiente de seguridad K en cuanto lo exija el valor de la relación $\frac{L}{B}$.

2.º Sustituir en la expresión $\omega = \frac{P}{K}$, en vez de P, $\frac{7}{2}$ P, ó sea

$$\frac{7}{2} \times 4800 = 16800 \text{ kilogramos.}$$

En cuanto al valor de K, acudiremos á las tablas de la página 272, y allí veremos que para $\frac{L}{B} = 10$, que es el valor menor que aparece de dicha relación, corresponde á m el valor $m = 0,849$ (fórmula α), lo que quiere decir que en este caso el coeficiente de seguridad ha de tomarse igual á

$$K = 0,849 \times 60 = 50,9 \text{ kilogramos.}$$

Por lo tanto, el área de la sección de la mangueta será

$$\omega = \frac{16800}{50,9} = 330 \text{ centímetros cuadrados.}$$

Como las caras laterales de la mangueta no deben sobresalir respecto de las de la viga, sino que á lo más quedarán á los haces de ésta, el lado menor de dicha sección tendrá como valor mínimo, $B = \frac{330}{26} = 13$ centímetros, en números redondos, en cuyo caso sería $H = 25,4$ centímetros.

457. Cálculo de los tirantes.—Son piezas de hierro redondo que han de trabajar por extensión, resistiendo un esfuerzo de $P = 12237$ kilogramos.

La ecuación de resistencia sabemos que es

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{K}.$$

Si por la bondad del hierro ó empleando barras de acero no hubiese inconveniente en tomar para coeficiente de seguridad $K = 1000$ kilogramos, tendríamos:

$$\omega = \frac{12237}{1000} = 12,237 \text{ centímetros cuadrados,}$$

que corresponde á un diámetro aproximado por exceso de

$$d = 3,95 \text{ centímetros,}$$

ó en números redondos

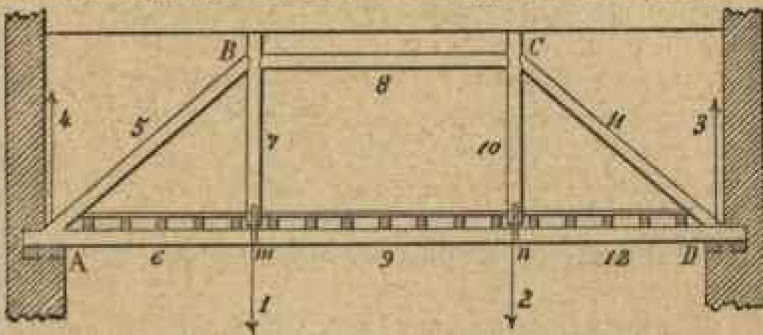
$$d = 4 \text{ centímetros.}$$

458. Viga armada por la parte superior, con dos puntos de apoyo intermedios.—Como indica la figura 191, las piezas de enlace ó adicionales se reducen á un cordón superior compuesto de dos pares y una sopanda, que se ensamblan á los extremos superiores de dos péndolas, de las cuales queda suspendida la viga propiamente dicha ó cordón inferior, mediante estribos de hierro.

La figura actual es deformable, porque se compone de 8 lados y 6 nudos, y si en la expresión

$$m = 2n - 3 + K$$

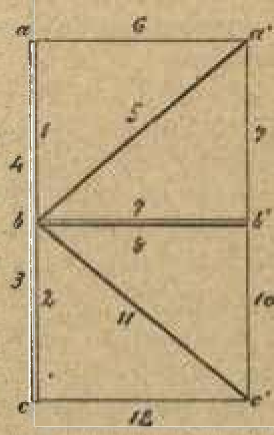
Fig. 191.



(tomo I, núm. **125**) hacemos $m = 8$, $n = 6$ y sacamos el valor de K, resultará

$$K = -1;$$

Fig. 192.



y ya sabemos que cuando $K < 0$, la figura es deformable.

Sabemos también que para que el sistema dado esté en equilibrio, se necesita que lo estén las fuerzas que concurren en cada nudo, y, por tanto, que sus polígonos sean cerrados.

Construyamos la figura recíproca, empezando por el nudo A.

Como el lado **6** está comprendido entre las fuerzas exteriores **1** y **4** (figura 191), la paralela á dicho lado habrá de trazarse por *a* (figura 192), punto del polígono de fuerzas exteriores en que aquellas concurren, y será la *aa'*. Trazando por *b* la *ba'* paralela al lado 5, el triángulo *aba'* será la figura recíproca del nudo A.

Pasemos al nudo *m*. En él concurren cuatro fuerzas en equilibrio; pero como son directamente opuestas dos á dos, serán asimismo iguales dos á dos. La figura recíproca será un rectángulo, del que se conocen ya los lados 1 y 6; luego *abb'a'* será la recíproca del nudo *m*.

Del triángulo recíproco del nudo B, conocemos dos lados: 5 y 7; luego el tercero será 8 = *bb'*.

Como la figura directa es simétrica respecto de un eje vertical, la recíproca lo será respecto de otro horizontal, que evidentemente pasa por *bb'*. De ésta se ha construído la mitad superior; la otra mitad será la simétrica de la primera y se deducirá, por tanto, con toda facilidad.

Si consideramos el punto *b* como polo y A como punto de partida, imaginando que el polígono de fuerzas exteriores se traslada al lugar *a'c'*, el polígono funicular resultante coincidirá con el contorno de la figura ABCDA; de donde resulta que estando en equilibrio y siendo deformable el sistema de que se trata, su contorno constituye uno de los polígonos funiculares correspondientes á las fuerzas exteriores, como habíamos indicado antes.

El sentido cíclico del triángulo recíproco del nudo A, es 1, 5, 6. Transportada la fuerza que representa el lado 5 á dicho nudo, cae en la prolongación de la línea 5, lo que prueba que ésta y su simétrica, es decir, los pares, son piezas comprimidas. La fuerza 6, transportada á A, cae sobre la línea 6, por consiguiente, el tirante ó cordón inferior, en esta región, sufre un esfuerzo de extensión.

El sentido del triángulo recíproco del nudo B es 5, 8, 7. Aplicando la misma regla veríamos que la sopanda es pieza sometida á compresión y la péndola á extensión.

Consideraciones análogas para los nudos restantes, pondrían claramente de manifiesto la naturaleza de las tensiones ó fuerzas interiores desarrolladas en las demás piezas de la viga armada.

Resulta, en conclusión, que las péndolas y el tirante son piezas extendidas y que los pares y la sopanda son piezas comprimidas.

Si por no ser iguales las fuerzas exteriores **1** y **2**, ó por ser diferente la inclinación de las piezas adicionales, resultara imposible la construcción de la figura recíproca, y, por tanto, el equilibrio del sistema, bastará añadir á éste el número de piezas ó lados necesarios para hacerlo estrictamente indeformable.

En el caso que consideramos, si aquella circunstancia ocurriera, sería necesario y suficiente añadir una cualquiera de las diagonales del cuadrilátero BC*mn*.

459. Determinación analítica de las fuerzas interiores.

Sea l la longitud de los tramos extremos del tirante;
l' la del tramo central;
f la flecha ó longitud de las péndolas;
t la longitud de los pares;
$P_1 = P_2$ las fuerzas exteriores que se suponen aplicadas á los nudos intermedios;
α el ángulo que forman los pares con el tirante.

Tenemos en la figura directa

$$f = t \operatorname{sen} \alpha \qquad l = t \cos \alpha$$

de donde

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{f}{t}, \quad \cos \alpha = \frac{l}{t}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{l},$$

y además

$$t = \sqrt{l^2 + f^2}$$

Se verifica en la figura recíproca que

$$P_1 = \mathbf{5}.\operatorname{sen} \alpha, \qquad P_1 = \mathbf{6}.\, tg\, \alpha, \qquad \mathbf{8} = \mathbf{6}.$$

de donde

Extensión de las péndolas....... $7 = 10 = 1 = 2 = P_1$

Compresión del par............. $5 = \dfrac{P_1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{P_1\sqrt{l^2+f^2}}{f}$

Extensión del tirante........... $6 = 9 = 12 = \dfrac{P_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{P_1 l}{f}$

Compresión de la sopanda....... $8 = 6 = \dfrac{P_1 l}{f}$

460. Momento máximo de flexión.—Como sobre el tirante cargan pesos uniformemente repartidos y podemos considerarlo como un prisma apoyado en cuatro puntos de nivel; llamando p á la carga unitaria (por centímetro), la expresión de M será (tomo I, núm. 336).

$$M = \frac{1}{4}\, p\, \frac{l^3 + l'^3}{2l + 3l'};$$

y si representamos por P la fuerza de extensión á que además resiste la pieza que nos ocupa, la ecuación de resistencia será

$$K = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{Z}.$$

Aplicando las fórmulas que preceden, el cálculo de una viga armada del tipo propuesto no puede ofrecer ninguna dificultad.

461. Ejemplo.—Calcular la escuadría de las piezas de la viga armada que representa la figura 191, con los siguientes datos:

Luz salvada........................	$L = 10^m = 1000$ cm.
Superficie cargada que gravita uniformemente sobre la viga	$S = 4^m \times 10^m = 40\ m^2$
Carga por metro cuadrado de piso...	400 kg.
Altura del tabique que rellena los claros que dejan las piezas adicionales.	$h = 3^m,20$.
Peso del metro cuadrado de tabique.	200 kg.
Longitud de las péndolas...........	$f = 3^m = 300$ cm.
Inclinación de los pares............	$\alpha = 45^\circ$.

Como consecuencia resulta:

Longitud de los tramos extremos del tirante.......................... $l = 3^m = 300$ cm.
Longitud del tramo central.......... $l' = 4^m = 400$ cm.
Carga debida al suelo...... $P_s = 40 \times 400 = 16000$ kg.
Carga debida al tabique..... $P_t = 10 \times 3{,}2 \times 200 = 6400$ »

Carga total uniformemente repartida.... 22400 kg.

Carga por centímetro lineal de viga.. $p = \dfrac{22400}{1000} = 22{,}4$ kg.

Las fuerzas exteriores aplicadas á los nudos intermedios serán

$$P_1 = P_2 = \frac{p\,(l + l')}{2} = \frac{22{,}4 \times (300 + 400)}{2} = 7840 \text{ kg.}$$

Tendremos, por tanto:

Extensión de las péndolas....... $P_1 = P_2 = \mathbf{1} ....= 7840$ kg.

Extensión del tirante... ...... $\mathbf{6} = \mathbf{9} = \mathbf{12} = \dfrac{7840 \times 3}{3} = 7840$ »

Compresión de los pares..... .... $\mathbf{5} = \mathbf{11} = \dfrac{7840 \times \sqrt{3^2 + 3^2}}{3} = 11087$ »

Compresión de la sopanda....... $\mathbf{8} = \mathbf{6} = ... = 7840$ »

462. Cálculo del tirante.—El momento máximo de flexión es

$$M = \frac{1}{4} \times 22{,}4 \times \frac{300^3 + 400^3}{2 \times 300 + 3 \times 400} = 283111.$$

Aceptando como coeficiente de seguridad $K = 60$ kg., la ecuación de resistencia será

$$60 = \frac{7840}{BH} + \frac{283111}{Z}$$

Si la relación $\frac{B}{H}$ ha de ser, $\frac{B}{H} = \frac{3}{4}$, resultará:

$$3 \times 60 = \frac{4 \times 7840}{H^2} + \frac{3 \times 8 \times 283111}{H^3},$$

ó finalmente

$$H^3 - 174{,}2\, H - 37748{,}1 = 0$$

La raíz real positiva de esta ecuación está comprendida entre 35,2 y 35,3; pero en números redondos y en beneficio de la resistencia, tomaremos

$$H = 35{,}5 \text{ centímetros}$$
$$B = 26{,}5 \quad \text{»}$$

dimensiones que guardan muy aproximadamente la relación establecida $\frac{H}{B} = \frac{3}{4}$ y conducen, como es fácil comprobar, á que el tirante trabaje por centímetro cuadrado, á razón de 59,2 kilogramos.

Si se adoptara para esta pieza la escuadría del *pie y cuarto* sencillo del marco de Guadarrama, entonces el coeficiente de trabajo efectivo resultaría próximamente de 66,5 kilogramos por centímetro cuadrado. Dicha escuadría es de 24,4 × 34,8 centímetros.

463. Cálculo de los pares.—Prescindiendo por el momento de la flexión lateral, el área de la sección recta de los pares sería

$$\omega = \frac{11087}{60} = 184{,}8 \text{ centímetros cuadrados.}$$

La pieza del marco de Guadarrama, cuya sección recta se aproxima más por exceso á la calculada, es el madero de á 6, cuya escuadría en centímetros es de 13,9 × 17,4.

Como la longitud del par es de

$$\sqrt{l^2 + f^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{81} = 4,^{m}24 = 424 \text{ cm.};$$

la relación $\frac{L}{B} = \frac{42,4}{13,9} = 30,5$ nos dice que debe tenerse en cuenta la influencia de la flexión lateral, si bien en el caso que nos ocupa el tabique se opondrá en gran parte á dicha flexión.

Tomando, pues, en cuenta tal influencia, y considerando á los pares como piezas de bases planas, á fin de no prescindir de la resistencia que el tabique ha de oponer á la flexión lateral, perpendicularmente al plano de la viga, y procediendo como en el ejemplo que precede, tendremos:

1.° Que el coeficiente de seguridad quedará reducido á

$$K' = mK = 0,409 \times 60 = 24,54 \text{ kg.}$$

2.° Que el área resistente ha de ser $\omega = \frac{11087}{24,54} = 452$ centímetros cuadrados, en números redondos.

Esto en el supuesto de que la tabla ó cara más ancha de la pieza se colocara en el plano de la viga.

Si por el contrario suponemos que se coloca la pieza de modo que el lado mayor de la sección recta resulte perpendicular al plano del entramado, entonces la relación que hay que considerar es $\frac{L}{H} = \frac{424}{17,4} = 24,5$, ó en números redondos, 25.

La Tabla de la pág. 271 (fórmula α), nos da para m el valor

$$m = 0,503,$$

de donde

$$K' = 0,503 \times 60 = 30,18$$

y

$$\omega = \frac{11087}{30,18} = 367 \text{ cm}^2.$$

Aserrando por la mitad un *pie y cuarto* se obtendrían dos piezas iguales, cuya escuadría será de 24,4 × 16,6.

Estas piezas son, por lo tanto aceptables para pares; porque el área de su sección recta resulta de 405 centímetros cuadrados, algo mayor que la calculada, con la ventaja de obtener aquellas de una de las piezas corrientes del comercio.

464. Cálculo de la sopanda.—Si calculáramos la escuadría de la sopanda, por consideraciones análogas á las que acabamos de exponer encontraríamos naturalmente un valor menor que para los pares, puesto que la compresión á que ha de resistir es sólo de 7840 kilogramos; pero aceptaremos la misma escuadría que para aquellos, lo cual tiene la ventaja de poder emplear hierros en ángulo para consolidar las ensambladuras; toda vez que las caras verticales del tirante, pares y sopandas, quedan de tal suerte á los haces, es decir, en un mismo plano vertical, lo mismo las anteriores que las posteriores.

465. Cálculo de las péndolas.—Por igual razón aceptaremos para estas piezas la misma escuadría que para los pares y sopandas, aun cuando resulten con un exceso de resistencia.

En efecto; suponiendo que al ensamblarse los pares penetren en las péndolas 4 centímetros, todavía qnedaría una sección resistente, ó útil de 24,4 × (16,6 — 8) = 209,8 centímetros cuadrados; siendo así que la sección necesaria para que el coeficiente de trabajo sea de 60 kilogramos, sólo es de unos 130 centímetros cuadrados.

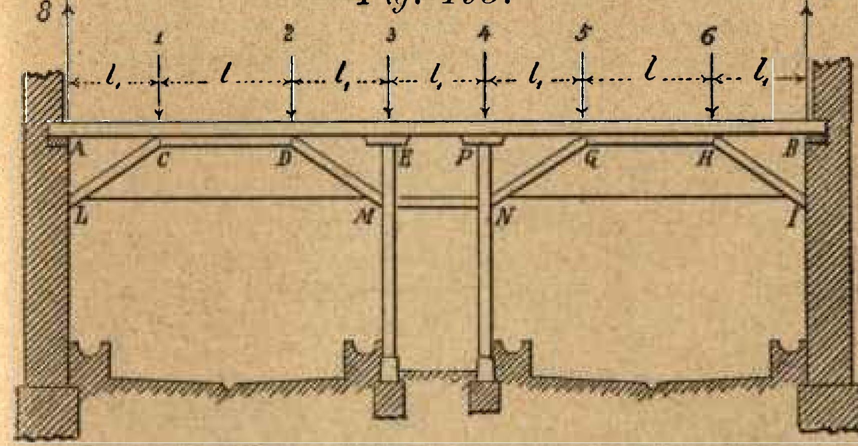
466. Viga de madera apoyada en 6 puntos intermedios.—Como indica la figura 193, los apoyos intermedios se obtienen mediante dos postes y cuatro jabalcones ó tornapuntas, quedando así la viga dividida en siete tramos, que podrán ser iguales ó desiguales. Lo general es que los tramos simétricos sean iguales, como manifiesta la figura indicada, la cual representa una disposíción propia de grandes establos.

467. Determinación de las fuerzas interiores.— Considerando al sistema propuesto como si fuera articulado, hipótesis que en la práctica puede aceptarse sin gran error, las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas en los diversos nudos del cordón superior AB, se calcularán por medio de la expresión

$$F_n = \frac{p\,(l_n + l_{n+1})}{2},$$

siendo F_n la fuerza que podemos suponer aplicada al nudo que

Fig. 193.



ocupa el lugar *n.*º, contando de izquierda á derecha, l_n, l_{n+1} las longitudes de los tramos que concurren en dicho nudo y p la carga unitaria que uniformemente carga sobre la viga. Este proceder equivale, como en otro lugar hemos dicho, á descomponer la resultante de las fuerzas exteriores que actúan en cada tramo, en dos componentes que pasen por los nudos contiguos.

Así, pues, si establecemos que entre los tramos cortos de longitud l_1 y los más largos de longitud l, se verifique la relación $\frac{l_1}{l} = \frac{2}{3}$, tendremos:

En los nudos 1.°, 2.°, 5.° y 6.°, las fuerzas exteriores serán: (figura 193).

$$1 = 2 = 5 = 6 = \frac{p\,(l_1 + l)}{2} = \frac{p\left(\frac{2}{3} + 1\right) l}{2} = \frac{5}{6}\,pl.$$

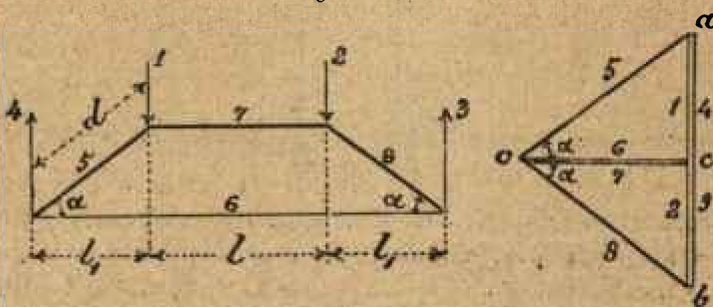
Y en los nudos restantes, 3.° y 4.°

$$3 = 4 = \frac{p\,(l_1 + l_1)}{2} = pl_1 = \frac{2}{3}\,pl\,.$$

Los entramados LCDM y su simétrico NGHI se apoyan en los puntos fijos L, M y N, I, respectivamente; y considerando el de la izquierda, por ejemplo, veamos cuales son las fuerzas interiores que se desarrollan en las diversas piezas de que se compone.

Construído el polígono de las fuerzas exteriores y la figura recíproca, como ya sabemos (figura 194), ésta nos dice que las

Fig. 194.



tornapuntas y la sopanda trabajan por compresión y el tirante por extensión.

Llamando α al ángulo que forman las tornapuntas con el tirante, f á la flecha del entramado y d á la longitud de las primeras, tendremos:

$$d = \sqrt{f^2 + l_1^2}\ , \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{f}{\sqrt{f^2 + l_1^2}}\ , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{l_1}\,.$$

En la figura recíproca se verifica que

$$\mathbf{8} = \mathbf{5} = \frac{\mathbf{1} = ac}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \text{y} \quad \mathbf{7} = \mathbf{6} = \frac{\mathbf{1} = ac}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Sustituyendo los valores de sen α y tg α, y teniendo además en cuenta que $l_1 = \frac{2}{3} l$, resultará:

Compresión de la sopanda.. $\mathbf{7} = \frac{5}{9} \frac{pl^2}{f}$

Compresión de las tornapuntas..................... $\mathbf{5} = \mathbf{8} = \frac{5}{18} \frac{pl \sqrt{9f^2 + 4l^2}}{f}$

Extensión del tirante .... $\mathbf{6} = \frac{5}{9} \frac{pl^2}{f}$

Las péndolas que suelen emplearse no son piezas esenciales, y sólo tienen por objeto evitar el pandeo del tirante.

El puente MN, en realidad, no trabaja cuando los tirantes LM y NI están tensos, como debe suponerse, pues en tal caso contrarrestan el empuje horizontal que las tornapuntas engendran en M y N; pero si aquellos se aflojaran, entonces el puente experimentaría una compresión igual á dicho empuje, y cuyo valor es el mismo que el de la extensión **6**, es decir, $\frac{5}{9} \frac{pl^2}{f}$.

En cuanto á los pies derechos, claro es que cada uno sufrirá un esfuerzo de compresión, que será la suma del que directamente recibe y del que le transmite la tornapunta correspondiente, y resultará:

Compresión del pie derecho...... $\mathbf{2} + \mathbf{3} = \mathbf{4} + \mathbf{5} = \frac{3}{2} pl$ (figura 193).

468. Momento máximo de flexión.—Admitamos que el cordón superior AB se encuentre en condiciones análogas á las de una viga de tramos solidarios, apoyada en 8 puntos de nivel. Recordando que, en tal concepto, los momentos en los apoyos extremos son nulos, y observando que para los apoyos simétricos ó equidistantes de los extremos, los momentos de flexión serán iguales entre sí, tanto por la simetría de la figura como por la repartición simétrica de las cargas, tendremos, aplicando el teorema de los tres momentos (tomo I, núm. **300**).

Tramos 1.º y 2.º.. $2M(l_1 + l) + M'l = \frac{1}{4} p(l_1^3 + l^3)$

» 2.º y 3.º.. $Ml + 2M'(l_1 + l) + M''l_1 = \frac{1}{4} p(l_1^3 + l^3)$

» 3.º y 4.º.. $M'l_1 + 5M''l_1 = \frac{1}{2} pl_1^3$

Pero hemos establecido antes que $l_1 = \frac{2}{3} l$, por consiguiente, estas ecuaciones se reducirán á las que siguen:

$$10M + 3M' = \frac{35}{36} pl^2$$

$$3M + 10M' + 2M'' = \frac{35}{36} pl^2$$

$$M' + 5M'' = \frac{2}{9} pl^2 .$$

Resolviéndolas, tendremos los siguientes valores aproximados de los momentos de flexión en los apoyos intermedios.

$M = 0{,}077\ pl^2$, $M' = 0{,}068\ pl^2$, $M'' = 0{,}031\ pl^2$.

Si con arreglo á lo establecido en el tomo I (núm. **305**) calculáramos las expresiones de los momentos máximos intermedios, m, m', m'', m''', correspondientes á los tramos 1.º, 2.º, 3.º y 4.º, veríamos que todos son menores que M ([a]) (considerando los valores absolutos), de donde resulta que el mayor de los momentos, en valor absoluto, que se desarrolla en toda la viga, es $M = 0{,}077\ pl^2$. Corresponde tanto al segundo apoyo como á su simétrico el séptimo.

(a) En efecto, se tiene $m = 0{,}024\ pl^2$; $m' = 0{,}053\ pl^2$; $m'' = 0{,}0076\ pl^2$ y $m''' = 0{,}024\ pl^2$.

469. Ejemplo.—Calcular las escuadrías de las piezas que componen el sistema representado en la figura 193, con los siguientes datos:

Luz salvada por la viga...............	$L = 16^m =$	1600 cm.
Longitud de los dos tramos largos.....	$l = 3^m =$	300 »
» de los cinco tramos cortos...	$l_1 = 2^m =$	200 »
Flecha del entramado................	$f = 1^m,5 =$	150 »
Carga total por metro cuadrado de piso...........		600 kg.
Distancia entre vigas maestras....................		$4^m,00$

De estos datos se deduce:

Superficie que pesa sobre la viga.	$S = 16 \times 4 = 64\ m^2$
Carga total sobre íd............	$P = 64 \times 600 = 38400$ kg.
Carga unitaria (por cm. lineal)....	$p = \dfrac{38400}{16 \times 100} = 24$ kg.

470. Cálculo del cordón superior.—Prescindiendo de la influencia de la sopanda, calculemos el cordón superior para que por sí solo sea capaz de resistir el momento máximo de flexión, que vale

$$M = 0{,}077\ pl^2 = 0{,}077 \times 24 \times 90000,$$

ó bien

$$M = 166320 \text{ kg.—cms.}$$

Si aceptamos para coeficiente de seguridad, $K = 60$ kilogramos, y entre los lados de la escuadría, la relación $\frac{B}{H} = \frac{3}{4}$, el módulo Z tendrá por expresión, $Z = \frac{1}{8} H^3$ y la ecuación de resistencia $ZK = M$, será en este caso

$$\frac{15}{2} H^3 = 166320$$

de donde

$$H = \sqrt[3]{\frac{2 \times 166320}{15}} \quad \text{ó} \quad H = 28,1 \text{ cm.}$$

y por tanto

$$B = \frac{3}{4} H \quad \text{ó} \quad B = 21,07 \text{ »}$$

A esta escuadría corresponde una sección ω y un módulo Z:

$$\omega = 592 \text{ cm}^2 \qquad Z = 2773.$$

La pieza del marco de Guadarrama que más se aproxima á la calculada es la tercia, para la cual se tiene (cuadro de la página 403)

$$\omega = 583,1, \quad Z = 2711,4, \quad B = 20,9, \quad H = 27,9.$$

La aceptamos como solución práctica, porque como fácilmente puede comprobarse, el coeficiente de trabajo efectivo resultaría igual á 61,3 kilogramos por centímetro cuadrado, el cual difiere tan poco del que habíamos fijado para el cálculo, que no hay inconveniente alguno en admitirlo.

471. Cálculo de la sopanda.—Para tener en cuenta la influencia que sobre esta pieza ejerce el cordón superior al flexarse, cuando entre ambos no se establecen enlaces que los hagan solidarios, observaremos que la sopanda ha de poder resistir al esfuerzo de compresión

$$P = \frac{5}{9} \frac{pl^2}{J} = \frac{5 \times 24 \times 90000}{9 \times 150} = 8000 \text{ kg.}$$

y además á un cierto momento de flexión M″; puesto que el momento máximo M ([a]) se distribuirá en dos partes: una M′ que

([a]) Aunque sería más lógico considerar el momento intermedio $m' = 0,053\,pl^2$; en beneficio de la resistencia suponemos que M es el momento que se distribuye entre ambas piezas.

corresponderá al cordón y la otra M'' á la sopanda, pudiendo desde luego establecer que $M = M' + M''$.

Por otra parte, daremos al lado horizontal B de la escuadría de la pieza que nos ocupa, el mismo valor B = 20,9 centímetros que hemos aceptado para el cordón superior, á fin de que las caras laterales de ambas piezas queden á los haces.

Llamemos x á la altura que debe tener la sección recta de la sopanda para resistir á los esfuerzos simultáneos que la solicitan. Por grande que sea x, la sopanda no podrá sustraerse á la flexión transmitida á través del cordón superior; pero como además ha de resistir á una compresión P, podemos admitir que el mínimo valor de x será el necesario para que la pieza resista á dicha compresión, considerando aquélla como de bases planas.

A cada valor de x, superior al mínimo indicado, corresponden valores particulares de M' y M'', así como de las tensiones máximas unitarias K' y K'' desarrolladas en ambas vigas; lo que basta para probar que el problema es indeterminado, aun dentro de la condición $K \overline{\overline{<}}$ 60 kg.

Para hacerlo determinado podemos establecer la condición muy racional de que las dos vigas trabajen en idénticas condiciones de resistencia, ó lo que es lo mismo, que los coeficientes de trabajo K' y K'' sean iguales entre sí. A tal valor común desconocido lo llamaremos K.

Las incógnitas de la cuestión son cuatro: x, M', M'' y K. Se necesitan, por tanto, cuatro ecuaciones.

Dos de ellas son las de resistencia de ambas vigas, es decir:

$$K = \frac{M'}{Z'} \quad (1) \qquad K = \frac{P}{\omega} + \frac{M''}{Z''} \quad (2)$$

Las otras dos se establecen observando:

1.° Que ha de ser

$$M' + M'' = M \quad (3)$$

2.° Que por tratarse de vigas de igual naturaleza que tienen común el lado B de la escuadría, la distribución entre ambas del momento exterior M obedecerá á la ley demostrada respecto de las cargas; y será, por tanto

$$\frac{M'}{M''} = \frac{Z'H'}{Z''H''} \qquad (4)$$

De las ecuaciones (3) y (4) se deduce que

$$M' = \frac{Z'H'}{Z'H' + Z''H''} M, \qquad M'' = \frac{Z''H''}{Z'H' + Z''H''} M.$$

Igualando los segundos miembros de las (1) y (2), tendremos

$$\frac{M'}{Z'} = \frac{P}{\omega} + \frac{M''}{Z''} \qquad (5)$$

y reemplazando los valores de M′ y M″, antes encontrados, resultará

$$\frac{MH'}{Z'H' + Z''H''} = \frac{P}{\omega} + \frac{MH''}{Z'H' + Z''H''} \qquad (6)$$

Pero observando que

$$\omega = Bx, \qquad H'' = x, \qquad Z'' = \frac{1}{6} Bx^2,$$

la ecuación (6) tomará la forma

$$\frac{MH'}{Z'H' + \frac{1}{6} Bx^3} = \frac{P}{Bx} + \frac{Mx}{Z'H' + \frac{1}{6} Bx^3},$$

que se reduce á

$$x^3 + \frac{6M}{P} x^2 - \frac{6MH'}{P} x + \frac{6Z'H'}{B} = 0 \qquad (7)$$

Ahora bien, si recordamos que

$$M = 166320, \quad P = 8000, \quad Z' = 2711, \quad H' = 27{,}9, \quad B = 20{,}9,$$

la ecuación (7) se convertirá en la siguiente:

$$x^3 + 124{,}7\ x^2 - 3480{,}2\ x + 21714 = 0$$

Esta ecuación tiene sus tres raíces reales, y como presenta dos variaciones y una permanencia, tendrá dos raíces positivas y una negativa.

De las positivas, la mayor está comprendida entre 13,6 y 13,7 y la menor entre 10,6 y 10,7. A esta corresponde una sección ω de unos 222,6 cm^2; inadmisible, como es fácil comprobar, teniendo en cuenta la influencia de la flexión lateral.

La mayor de las raíces positivas es aceptable, bajo este concepto; pero haremos, sin embargo, $x = 15{,}7$; porque de una sesma ó vigueta del marco de Guadarrama se obtendrá la escuadría de $15{,}7 \times 20{,}9$ para la sopanda, con aserrar aquella pieza para reducir á 20,9 cm. la tabla, que vale 22,6 cm.

En estas condiciones, los coeficientes de trabajo resultarían:

Para el cordón superior

$$K' = \frac{M'}{Z'} = \frac{0{,}85\,M}{Z'} = \frac{141372}{2711} = 52{,}14 \text{ kg.};$$

y para la sopanda

$$K'' = \frac{P}{\omega} + \frac{M''}{Z''} = \frac{P}{\omega} + \frac{0{,}15\,M}{Z''} = \frac{8000}{328} + \frac{24948}{858{,}6} = 53{,}44 \text{ kg.}$$

472. Supongamos ahora que el cordón y la sopanda se hacen solidarios, ensamblándolos por medio de pernos, por ejemplo.

Resultará una viga ensamblada cuya escuadría tendrá por lados:

$$B = 20{,}9 \text{ cm.} \quad \text{y} \quad H = 27{,}9 + 15{,}7 = 43{,}6 \text{ cm.}$$

El área de la sección recta y el módulo de flexión, valen respectivamente

$$\omega = 911{,}24 \text{ cm.}^2, \qquad Z = 6621{,}6.$$

Por consiguiente, admitiendo, como dijimos en otro lugar, que la resistencia á la flexión de la viga ensamblada sea los

$\frac{3}{4}$ de la de una sola pieza de la misma sección é igual longitud, deberá encontrarse, tomando las $\frac{3}{4}$ de Z, un coeficiente de trabajo igual ó menor que 60 kilogramos, si las dimensiones fijadas á la escuadría responden á una resistencia suficiente.

Y en efecto, resulta

$$K = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{\frac{3}{4} Z} = \frac{8000}{911,24} + \frac{166320}{4966,2} = 42,27 \text{ kg},$$

lo que demuestra que por virtud del ensamblaje supuesto se obtiene, con las dimensiones establecidas, una resistencia mayor que la necesaria, puesto que el valor de K, calculado como acabamos de ver, podía haber llegado sin inconveniente á 60 kilogramos.

473. Cálculo de las tornapuntas.—Teniendo en cuenta que por medio de los herrajes necesarios pueden consolidarse las ensambladuras, impidiendo todo movimiento importante de rotación en los encuentros de las tornapuntas con la sopanda y el pie derecho, podemos considerar aquellas como piezas de bases planas sometidas á un esfuerzo de compresión que vale

$$P = \frac{5}{18} \frac{pl \sqrt{9f^2 + 4l^2}}{f},$$

ó sustituyendo los valores conocidos, $p = 24$, $f = 150$, $l = 300$, resultará:

$$P = 10000 \text{ kg}.$$

La longitud de estas piezas es próximamente

$$d = \sqrt{f^2 + l_1^2} = 2^m,50 = 250 \text{ cm}.$$

Para que las caras laterales de las tornapuntas y de la sopanda queden á los haces, haremos B = 20,9 cm., y será, por tanto,

$$\omega = 20{,}9\,H$$

Si tomamos como valor aproximado de la relación $\frac{L}{B}$, $\frac{L}{B} = 20$, deduciremos de la tabla IX (fórmula α) (pág. 272).

$$m = 0{,}607, \qquad K' = 0{,}607 \times 60 = 36{,}42 \text{ kg.}$$

Por consiguiente, la ecuación de resistencia será

$$20{,}9 \times 36{,}42\,H = 10000,$$

de donde

$$H = \frac{10000}{761{,}18} = 13{,}14 \text{ cm.} \qquad (^a)$$

No es necesario rectificar el cálculo precedente, porque la relación $\frac{L}{B}$ resulta ahora

$$\frac{L}{B} = \frac{250}{13{,}14} = 19{,}03,$$

y difiere muy poco de la que habíamos establecido.

Conviene que las tornapuntas y la sopanda, que han de ensamblarse á junta plana, tengan la misma escuadría; por cuyo motivo aceptaremos para ambas piezas la mayor de las calculadas.

Así, pues, los lados definitivos de la sección recta de las tornapuntas, serán

$$B = 20{,}9 \text{ cm}, \qquad H = 15{,}7 \text{ íd.}$$

474. **Cálculo del puente.**—Pieza sometida solamente á una compresión igual al esfuerzo de extensión que desarrollan los tirantes, la consideraremos como pieza de bases planas.

(a) En el caso actual, B representa el lado mayor de la escuadría y H el menor.

Dicha compresión es

$$P = \frac{5}{9} \frac{pl^2}{f} = 8000 \text{ kg.}$$

Haciendo, como en las piezas anteriores, B = 20,9, y tomando como valor provisional de la relación $\frac{L}{B}$, entre la longitud de la pieza (L = 200 cm.) y el lado menor de la escuadria $\frac{L}{B} = 15$, obtendremos

$$m = 0{,}723 \quad \text{y} \quad K' = 43{,}38,$$

de donde

$$H = \frac{8000}{20{,}9 \times 43{,}38} = 8{,}8 \text{ cm.}$$

Pero ahora resulta

$$\frac{L}{B} = \frac{200}{8{,}8} = 22{,}7\,.$$

A este valor corresponde

$$m = 0{,}551 \quad \text{y} \quad K' = 33{,}06;$$

por tanto, un valor más aproximado del lado vertical H de la sección recta del puente será:

$$H = \frac{8000}{20{,}9 \times 33{,}06} = 11{,}58 \text{ cm.},$$

Aceptaremos sin embargo H = 15,7, lo mismo que para las piezas anteriores, en razón al mejor aspecto de la obra y por tratarse de la pieza que figurará en el menor número; pues en cada entramado entra una sola vez.

475. Cálculo de los pies derechos.—El esfuerzo de compresión que los solicita, tiene por expresión y vale

$$P = \frac{3}{2}\, pl = \frac{3 \times 24 \times 300}{2} = 10800 \text{ kg.}$$

Para evitar los efectos de la flexión lateral, es preciso reducir el coeficiente de seguridad en cuanto lo exija la relación $\frac{L}{B}$; y con el fin de favorecer aún más la resistencia de estas piezas importantes, supondremos que tienen una base plana y la otra redondeada.

La ecuación de resistencia será, por tanto,

$$mK\omega = \frac{7}{4}\,P; \qquad \text{de donde,} \qquad \omega = \frac{7}{4}\,\frac{P}{mK},$$

Haciendo $K = 60$ y $\frac{L}{B} = 20$, como valor provisional de la relación entre la altura L del pie derecho y la menor dimensión B de su sección transversal, si acudimos á la tabla de la página 272, fórmula (α), encontraremos $\omega = 0{,}607$; y por consiguiente, el área de la sección recta de los pies derechos será

$$\omega = \frac{7 \times 10800}{4 \times 0{,}607 \times 60} = 519 \text{ cm}^2.$$

En el cuadro de la página 403, encontraremos que el valor de ω para la *tercia* del marco de Guadarrama es $\omega = 583{,}1 \text{ cm}^2$.

Aceptaremos, por lo tanto, para los pies derechos, la escuadría de la tercia, cuyos lados valen

$$B = 0^m{,}209; \qquad H = 0^m{,}279.$$

No hay necesidad de rectificar el cálculo primitivo; porque siendo $L = 4^m$, como indica el dibujo, y aceptando $B = 0{,}209$, el valor de la relación $\frac{L}{B}$ es

$$\frac{L}{B} = \frac{400}{20{,}9} = 19{,}13.$$

el cual, como vemos, difiere muy poco del que provisionalmente se había fijado.

VIGAS DE HIERRO

476. Dividiremos para nuestro estudio las vigas de hierro en *sencillas y compuestas*.

Las primeras son piezas prismáticas de hierro laminado cuyo perfil puede ser simétrico ó no serlo, con relación al eje neutro ó de fibras invariables. Así, por ejemplo, los perfiles en doble T, en cruz, en doble escuadra vertical de ramas iguales, las secciones tubulares de forma rectangular ó circular, corresponden al primer grupo; y al segundo los perfiles en simple T, en L, los hierros Zorés y los carriles, que también se usan con ventaja en ciertos casos como viguetas del suelo.

Las vigas compuestas pueden ser rectas ó curvas, de sección constante ó variable, de alma llena ó de alma calada ó discontinua, de enlaces rígidos ó articulados; pero entre los numerosos tipos que pudieran estudiarse, sólo consideraremos los más sencillos y apropiados á nuestro objeto, debiendo advertir que para el estudio completo de las vigas de hierro de gran altura es indispensable acudir á las obras especiales que, con el detenimiento necesario, se ocupan de la materia ([a]).

El cálculo de las vigas de hierro lo haremos aceptando las siguientes bases:

1.ª Para las vigas de *pequeña altura*, prescindiremos del esfuerzo cortante, por la pequeñez de las deformaciones que origina, comparadas con las que engendra la flexión.

2.ª Para las de *grande altura*, admitiremos que los cordones ó cabezas deben poder resistir por sí solos el momento de flexión, y el alma ha de poder resistir por sí sola el esfuerzo cortante máximo.

(*a*) Deben consultarse, entre otras obras españolas, la ya citada del Sr. Marvá *Mecánica aplicada á las construcciones*, y el excelente trabajo del Ingeniero de Caminos, Sr. Gaztelu, *Práctica usual de los cálculos de estabilidad de los puentes*.—1896.

3.ª Cuando las tablas que formen los cordones ó cabezas de la viga se compongan de varios palastros yuxtapuestos, se tendrá en cuenta el esfuerzo de desgarramiento longitudinal para que el conjunto, al flexarse, se porte como si fuera de una sola pieza.

4.ª Admitiremos también

a) Que el peso del metro cúbico es:

Para el hierro y el acero.... de 7790 á 8000 kg.
Para la fundición........... de 7000 á 7500 »

b) Que los valores que corresponden al coeficiente de seguridad K, según se trate de la extensión, compresión ó esfuerzo cortante son los siguientes, por centímetro cuadrado.

Naturaleza del material.	COEFICIENTES DE SEGURIDAD		
	Extensión	Compresión	Esfuerzo cortante.
	$\frac{K}{Kg.\ por\ cm^2.}$	$\frac{K}{Kg.\ por\ cm^2.}$	$\frac{K}{Kg.\ por\ cm^2.}$
Hierro dulce..........	500 á 900	500 á 900	400 á 800
Alambre de hierro.....	900 » 1200	»	»
Alambre galvanizado..	700 » 800	»	»
Acero extradulce......	900 » 1200	900 » 1200	700 » 900
Acero moldeado, recocido............	900 » 1200	1000 » 1300	700 » 900
Acero templado......	900 » 1200	5000 » 6000	700 » 900
Alambre de acero......	900 » 1200	900 » 1200	700 » 900
Fundición ordinaria...	200 » 300	600 » 1200	700 » 900
Fundiciones tenaces...	400 » 500	600 » 1200	700 » 900
Fundiciones maleables.	500 » 700	600 » 1200	700 » 900

477. Vigas sencillas de hierro.—Prescindiendo del esfuerzo cortante por tratarse de vigas de pequeña altura, la ecuación general de resistencia á la flexión será

$$M = KZ \qquad (1)$$

En el caso de que la viga haya de resistir al mismo tiempo á un momento máximo de flexión M y á una fuerza P de extensión ó de compresión, la ecuación de resistencia será, como sabemos,

$$K = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{Z} \qquad (2)$$

representando:

K el coeficiente de seguridad por centímetro cuadrado;

M el momento máximo de flexión, tomando como unidad de longitud el centímetro y como unidad de fuerza el kilogramo. Será, por tanto, un cierto número de kilogramo-centímetros;

Z el módulo de flexión de la sección recta de la viga, calculado con relación al centímetro como unidad de longitud;

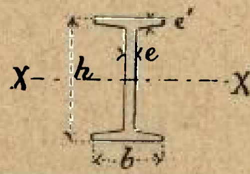
P la carga en kilogramos que solicita además á la viga, por extensión ó por compresión;

ω el área de la sección recta de la viga, en centímetros cuadrados.

478. Para facilitar la resolución de los problemas relativos á la resistencia de las vigas sencillas, se insertan á continuación varios cuadros, en los cuales, para diversos perfiles corrientes del comercio, se consignan sus dimensiones en centímetros, el área de la sección recta en centímetros cuadrados, el valor del módulo Z referido al centímetro y el peso del metro lineal de viga en kilogramos.

Claro es que cuando dos perfiles tengan próximamente el mismo módulo Z, deberá preferirse, si sólo se atiende á la economía, el que corresponda á un menor peso por metro lineal de viga, ó lo que es lo mismo, á un valor menor de ω.

Fig. 195.



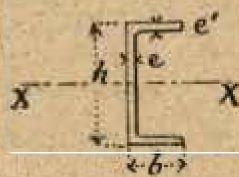
SOCIEDAD DE ALTOS HORNOS

(Bilbao).

Viguetas en doble T.

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTÍMETROS				Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión, al cm.
	h	*b*	*e*	*e'*	(1)	*h*	Z
				DE ALAS ESTRECHAS			
1	10	4,4	0,6	0,875	12,80	10	37,5
2	12	4,5	0,7	0,925	15,40	12	53,2
3	14	4,5	0,7	0,975	17,92	14	71,2
4	16	4,9	0,7	1,00	20,50	16	89,6
5	18	5,5	0,7	1,025	23,00	18	119,0
6	20	6,2	0,7	1,06	25,60	20	154,0
				DE ALAS ANCHAS			
7	8	4,2	0,39	0,59	7,6	5,9	19,6
8	10	5,0	0,45	0,68	10,69	8,3	34,4
9	12	5,8	0,51	0,77	14,27	11,1	55,1
10	14	6,6	0,57	0,86	18,35	14,3	82,7
11	16	7,4	0,63	0,95	22,90	17,9	118,0
12	18	8,2	0,69	1,04	28,00	21,9	162,0
13	20	9,0	0,75	1,13	33,70	26,2	216,0
14	22	9,8	0,81	1,22	39,80	31,0	281,0
15	24	10,6	0,87	1,31	46,40	36,2	357,0
16	26	11,3	0,94	1,41	53,70	41,9	446,0
17	28	11,9	1,01	1,52	61,40	47,9	547,0
18	30	12,5	1,08	1,62	69,40	54,1	659,0
19	32	13,1	1,15	1,73	83,00	61,0	789,0

Fig. 196.

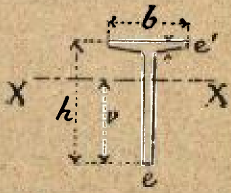


ALTOS HORNOS (Bilbao).

Hierros en U.

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTIMETROS				Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.
	h	*b*	*e*	*e'*	ω	*p*	Z
1	8	4,5	0,6	0,8	11,04	8,6	26,7
2	10	5,0	0,6	0,85	13,50	10,5	41,4
3	12	5,5	0,7	0,9	17,04	13,3	61,3
4	14	6,0	0,7	1,0	20,40	15,9	87,0
5	16	6,5	0,75	1,05	24,10	18,8	117,0
6	18	7,0	0,8	1,1	28,00	21,9	152,0
7	20	7,5	0,85	1,15	32,30	25,2	193,0

Fig. 197.

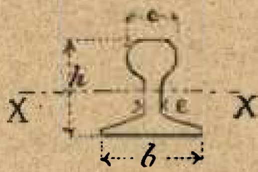


ALTOS HORNOS (Bilbao).

Hierros en simple T.

Número de orden.	DIMENSIONES en centímetros.			Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.	Distancia del eje neutro á las fibras más lejanas. Cm.
	h	*b*	*e*	ω	*p*	Z	ν
				$h = b$			
1	2,5	2,5	0,35	1,63	1,3	0,55	1,74
2	3,0	3,0	0,4	2,24	1,7	0,89	2,10
3	3,5	3,5	0,45	2,95	2,3	1,36	2,45
4	4,4	4,0	0,5	3,75	2,9	1,97	2,81
5	4,5	4,5	0,55	4,65	3,6	2,76	3,17
6	5,0	5,0	0,6	5,64	4,4	3,72	3,53
7	6,0	6,0	0,7	7,91	6,2	6,26	4,24
8	7,0	7,0	0,8	10,56	8,2	9,76	4,95
9	8,0	8,0	0,9	13,59	10,6	14,37	5,67
10	9,0	9,0	1,0	17,00	13,3	20,24	6,38
11	10,0	10,0	1,1	20,79	16,2	27,52	7,09
12	12,0	12,0	1,3	29,50	23,0	46,92	8,52
				$h < b$			
1	3,0	3,5	0,5	3,00	2,3	1,09	2,12
2	2,5	4,5	0,5	3,25	2,5	0,79	1,86
3	4,5	9,0	0,8	10,16	7,9	4,18	3,44
4	5,0	10,0	0,85	12,02	9,4	5,51	3,84
5	6,0	12,0	1,0	17,00	13,3	9,36	4,62

Fig. 198.



ALTOS HORNOS (Bilbao).

Carriles.

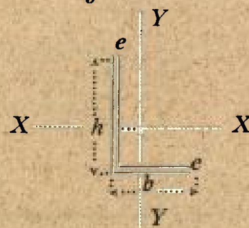
Núm. de orden.	DIMENSIONES en centímetros.				Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.	Distancia del eje neutro á las fibras más lejanas Cm.
	h	*b*	*c*	*e*	ω	*p*	Z	*v*
1	3,8	3,5	2,0	0,5	6,41	5,0	14,21	1,9
2	4,6	4,7	2,5	0,55	7,69	6,0	17,69	2,6
3	4,7	4,7	2,7	0,6	9,62	7,5	28,40	2,5
4	6,4	5,9	3,4	0,8	12,82	10,0	30,00	3,5
5	7,2	6,5	3,5	0,7	16,03	12,5	58,33	3,6
6	8,2	6,4	3,8	0,9	19,23	15,0	59,33	4,5
7	9,0	7,4	4,2	1,1	23,27	18,15	61,95	4,6
8	8,9	8,3	4,7	1,1	25,90	20,2	63,19	4,7
9	10,0	9,4	5,0	1,1	30,13	23,5	90,18	5,4
10	10,8	9,2	5,3	1,1	31,57	24,62	96,42	5,6
11	10,1	9,85	5,7	1,275	35,58	27,75	102,45	5,3
12	11,3	8,2	6,2	1,5	40,03	31,22	109,65	5,8
13	12,0	9,8	5,3	1,5	38,46	30,0	127,03	6,4
14	11,45	10,2	5,7	1,1	38,17	29,77	131,01	5,9
15	12,5	10,5	5,8	1,3	41,67	32,5	132,33	6,34

SOCIEDAD «MATERIAL PARA FERROCARRILES Y CONSTRUCCIONES» (Barcelona).

Hierros en doble T.

Número de orden	DIMENSIONES EN CENTIMETROS			Area de la sección. Cm^2.	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.
	h	*b*	*e*	ω	*p*	Z
1	8	4,4	0,6	11,10	8,8	27
2	10	4,5	0,6	12,30	9,7	38
3	13	5,0	0,7	16,50	12,9	68
4	16	5,5	0,7	20,90	16,3	96
5	18	6,0	0,8	25,50	19,9	134
6	20	6,5	0,8	29,00	22,7	159
7	22,5	7,0	0,9	34,[illegible]0	26,9	222
8	26	11,3	0,9	53,70	42,0	446
9	30	12,5	1,1	69,40	55,0	659
10	32	13,2	1,3	83,00	65,0	814

Fig. 199.



MATERIAL PARA FERROCARRILES

Y CONSTRUCCIONES (BARCELONA).

Hierros en escuadra.

Número de orden.	DIMENSIONES en centímetros,			Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión con respecto al eje neutro XX	Módulo de flexión con respecto al eje neutro YY
	h	*b*	*e*	ω	*p*	Z_x	Z_y
				DE RAMAS IGUALES			
1	3	3	0,5	2,75	2,2	1,08	1,08
2	4	4	0,6	4,44	3,5	2,32	2,32
3	5	5	0,7	6,50	5,1	4,27	4,27
4	6	6	0,8	8,96	7,0	7,05	7,05
5	7	7	0,9	11,80	9,2	10,90	10,90
6	8	8	1,0	15,00	11,7	15,90	15,90
7	9	9	1,1	18,60	14,5	22,00	22,00
8	10	10	1,2	22,56	17,6	29,80	29,80
				DE RAMAS DESIGUALES			
1	3,5	2,3	0,5	2,65	2,1	1,39	0,64
2	8	4,5	0,8	9,36	7,3	11,77	4,11
3	8	6,0	0,8	10,56	8,3	12,37	7,33
4	9	6,5	0,9	13,14	10,3	17,52	9,69
5	10	6,0	1,0	15,00	11,7	23,26	9,16
6	10	7,0	1,0	16,00	12,5	23,88	12,48
7	12	8,0	1,1	20,79	16,2	37,83	18,11
8	13	7,5	1,2	23,16	18,0	47,19	17,33

MATERIAL PARA FERROCARRILES Y CONSTRUCCIONES

(BARCELONA).

Hierros en simple T.

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTIMETROS			Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal. Kg.	Módulo de flexión al cm.
	h	b	e	ω	p	Z
1	2	2	0,4	1,44	1,2	0,37
2	3	3	0,5	2,75	2,2	1,08
3	4	4	0,6	4,44	3,5	2,32
4	5	5	0,7	6,51	5,1	4,27
5	6	6	0,8	8,96	7,0	7,05
6	10	7	0,8	12,96	10,1	19,36
7	4	7,5	0,8	8,56	6,7	3,23
8	8	8	0,9	13,60	10,5	14,37
9	7	10	1,2	18,96	14,8	14,70

Carriles Vignole. *(V. fig. 198.)*

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTIMETROS				Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal. Kg.	Módulo de flexión al cm.
	h	b	c	e	ω	p	Z
1	4	3,5	2	0,5	5,50	4,5	5,13
2	8,2	7,8	4,3	1,0	21,69	17,0	54,80

SOCIEDAD COCKERILL.—SERAING (BÉLGICA).

Hierros en doble T.

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTÍMETROS				Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.
	h	*b*	*e*	*e'*	ω	*p*	Z
1	8	4	0,4	0,5	6,80	5,75	16,94
2	10		0,5	0,8	12,20	10	38,88
3	12	5	0,6	0,8	14,24	12	51,26
4	14	5	0,6	0,9	16,32	13	68,22
5	16	5,5	0,7	1,0	20,82	16	106,04
6	18	6	0,7	1,05	23,73	18,5	126,74
7	20	6,5	0,8	1,1	28,54	23	165,44
8	22	7	0,8	1,0	30,00	25	170,73
9	23,5	9	1,0	1,2	42,70	33	295,38
10	23,7	9,2	0,8	1,1	37,44	30	274,18
11	25	11,5	1,1	1,3	54,54	43	418,65
12	30	12,5	1,1	1,8	74,04	59	709,68
13	30,5	15,2	1,7	2,0	105,85	80	983,79
14	31,7	15,9	1,725	2,15	115,64	90	1129,88
15	12,7	7,5	0,6	1,05	22,11	17	93,76
16	14	7	0,7	1,0	22,40	17	99,06
17	16	8	0,8	1,2	30,08	23	152,67
18	18	9	0,9	1,05	33,21	26	184,52
19	18	10	1,0	1,2	39,60	30	230,66
20	20	10	1,0	1,1	39,80	31	243,68
21	23,5	9,5	1,0	1,25	44,75	34,5	316,11
22	20,3	12,7	1,0	1,3	50,72	40	353,24

Las dimensiones anteriores corresponden al espesor mínimo de fabricación. El espesor del alma puede recibir el aumento de unos 6 milímetros como máximum.

Si *e* es el espesor que se aumenta en fracción decimal de centímetro y H la altura de la doble T, el valor de Z para el perfil, así reformado, se obtendrá sumando al consignado en la tabla, el de la expresión $\frac{1}{6} e H^2$, valuando *e* y H en centímetros.

COCKERILL. — SERAING (BÉLGICA).

Hierros en U.

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTÍMETROS				Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.
	h	b	e	e'	ω	p	Z
1	11,75	6,5	1,0	1,0	22,75	18	78,16
2	14,5	6,0	0,8	0,8	21,72	16,15	81,94
3	17,5	6,0	0,8	0,9	23,36	19,5	114,60
4	20,0	8,0	1,0	1,15	36,10	28	209,86
5	20,0	9,5	1,1	1,15	41,32	32,3	245,16
6	23,5	9,0	1,0	1,1	41,10	32,0	280,08
7	23,7	8,5	0,9	1,35	40,75	31,6	300,76
8	25,0	8,0	1,0	1,35	43,90	34,25	315,82
9	26,0	9,0	1,0	1,2	43,20	33,0	339,93
10	30,0	7,5	1,0	1,15	44,95	35,0	357,49
11	25,0	9,0	1,1	1,4	49,62	38,6	361,27

Puede aumentarse en cada perfil el espesor del alma hasta unos 6 milímetros sobre lo que marca el cuadro que precede.

COCKERILL.—SERAING (BÉLGICA).

Hierros en simple T.

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTÍMETROS				Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.
	h	*b*	*e*	*e'*	ω	*p*	Z
1	3,5	3,3	0,5	0,5	3,15	2,9	1,48
2	3,2	4,0	0,5	0,5	3,40	3	1,52
3	3,0	7	0,75	0,6	6,00	5	1,70
4	4,0	4,5	0,6	0,6	5,04	4	2,51
5	4,5	4,0	0,65	0,65	5,10	4,3	3,11
6	5,6	5,0	0,6	0,65	6,25	4,7	4,76
7	6,0	12,5	1,0	0,8	15,20	12	9,36
8	6,0	11,0	1,2	1,2	18,96	15,5	10,83
9	7,0	9,0	0,9	0,95	14,00	11,5	11,45
10	7,0	6,0	1,2	1,2	14,16	11,5	13,50
11	6,5	13,2	1,4	1,2	22,26	18	14,50
12	8,0	15,0	1,2	1,2	26,16	20,75	14,67
13	6,5	12,5	1,5	1,5	26,25	21,5	15,78
14	6,3	12,4	1,8	1,5	27,24	22,5	17,27
15	7,5	13,0	1,2	1,1	22,00	18	17,50
16	8,0	10,0	1,2	1,2	20,16	16	19,07
17	8,0	11,3	2,0	1,4	29,00	23,5	30,12
18	1,00	15,0	1,2	1,2	28,56	24,0	31,15
19	10,0	17,0	1,3	1,3	33,41	26,0	34,23
20	8,5	11,2	2,3	1,6	33,90	26,5	38,38
21	11,3	15,0	1,3	1,55	35,92	28,0	43,17
22	11,3	17,0	1,3	1,55	39,02	31,0	43,72
23	10,8	16,0	1,5	1,9	44,35	35,0	45,46
24	10,0	17,2	1,5	1,9	47,55	36,0	45,65

Los espesores de cada perfil son invariables.

SOCIÉTÉ ANONYME DES HAUTS FOURNEAUX,

FRANCHE COMTÉ (BESANÇON).

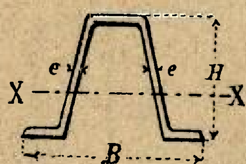
Hierros en doble T.

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTÍMETROS.			Area de la sección en cm^2.	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión. al cm.
	h	*b*	*e*	ω	*p*	Z
			DE ALAS ESTRECHAS			
1	8	3,8	0,4	8,44	6,5	21,062
2	8	4,2	0,8	11,68	9,0	25,325
3	10	4,4	0,5	11,68	9,0	36,075
4	10	4,7	0,8	14,93	11,5	41,062
5	12	4,6	0,6	13,89	10,7	50,575
6	12	5,1	1,1	19,49	15,0	62,[illegible]75
7	14	4,6	0,7	18,40	14,0	73,443
8	14	5,1	1,2	25,43	19,5	89,894
9	16	4,7	0,7	21,14	16,0	96,242
10	16	5,3	1,3	30,80	23,5	122,863
11	18	5,3	0,8	26,27	20,0	134,34
12	18	6,0	1,5	38,94	30,0	172,56
13	20	5,9	0,8	32,52	24,5	191,92
14	20	6,6	1,5	46,66	35,5	239,52
15	22	6,0	0,8	34,00	25,0	217,22
16	22	6,8	1,6	51,60	38,0	281,75
			DE ALAS ANCHAS			
17	12	7,0	0,6	23,59	18,0	92,08
18	12	7,6	1,2	30,79	23,5	106,48
19	14	8,0	0,7	28,66	22,0	130,60
20	14	8,7	1,4	38,46	29,5	153,47

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTÍMETROS			Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión. al cm.²
	h	b	e	ω	p	Z
21	16	8,0	0,8	30,00	23,0	155,45
22	16	8,6	1,4	40,40	31,0	183,18
23	17,5	8,0	0,8	32,40	24,5	175,63
24	17,5	8,6	1,4	42,03	32,0	203,71
25	18	10,0	1,0	42,60	32,0	241,82
26	18	10,5	1,5	51,60	39,0	268,82
27	20	10	1,0	46,27	35,0	291,06
28	20	10,6	1,6	58,27	44,5	331,06
29	22	11	1,0	49,35	36	344,09
30	22	11,6	1,6	62,55	46	392,50
31	26	12	1	59,50	45,5	498,83
32	26	12,9	1,9	83,00	64	601,80
33	30	12	1,2	75,70	57	700,86
34	30	12,8	2	99,70	76	820,86

Hierros Zorés.

Fig. 200.



1	6	6	0,3	5,15	4	6,96
2	8	8	0,3	7,80	6	14,56
3	8	10	0,35	9,64	7	18,79
4	11	12	0,4	14,04	11,1	38,28
5	12	14	0,5	20,90	15,5	59,60
6	14	16	0,6	26,10	20	89,08
7	16	18	0,7	35,00	25,5	135,39
8	18	20	0,7	41,60	32	183,08
9	20	22	0,7	50,66	39	301,20

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTÍMETROS. *h*	*b*	*e*	Area de la sección en cm² ω	Peso por metro lineal en kg. *p*	Módulo de flexión al cm. Z
	Hierros en simple T.					
1	1,8	2	0,3	1,05	0,8	0,22
2	2,0	2,2	0,3	1,26	1,0	0,31
3	2,5	2,5	0,5	2,25	1,7	0,73
4	3,0	2,5	0,4	2,38	1,8	0,95
5	3,5	3,0	0,45	2,72	2,1	1,28
6	4,0	3,5	0,45	3,00	2,3	1,75
7	4,5	4,0	0,55	4,37	3,3	2,62
8	5,4	5,5	1,00	9,50	7,1	6,68
9	5,5	5,8	0,7	7,20	5,5	5,06
10	6,0	10,0	0,9	12,70	9,7	7,89
11	7,5	10,0	0,8	13,20	9,8	9,43
12	6,5	12,5	1,05	19,00	14,5	9,60
13	7,5	12,5	1,2	22,70	17,3	15,22
14	12,5	12,5	1,5	36,20	27,0	54,77
	Hierros en ángulo, simple escuadra.					
1	8	6	0,8	8,44	8,12	13,16
2	8	6	1,0	11,64	10,00	15,65
3	10	7	0,8	11,96	10,00	»
4	10	7	1,6	14,96	19,10	»
	Hierros en doble escuadra.					
1	5,5	2,1	0,55	4,96	3,70	6,93
2	8	3,6	0,65	9,58	7,30	21,28
3	17,5	6,0	0,85	26,82	20,00	134,11
4	25,0	8,0	0,95	41,80	31,00	301,32
5	23,5	9,0	1,00	45,45	34,30	319,94

Número de orden.	DIMENSIONES EN CENTÍMETROS			Area de la sección en cm².	Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm³.
	h	b	e	ω	p	Z
			Carriles.			
1	4,2	3,4	0,5	5,27	4,0	5,27
2	5,1	4,0	0,65	8,06	6,0	10,09
3	6,4	5,1	0,75	12,04	9,15	19,25
4	7,9	6,5	1,00	19,34	15,00	37,22
5	13,0	10	1,6	47,60	36,00	154,73

479. Problemas que hay que resolver.—Los problemas relativos á vigas sencillas de hierro que hay que resolver, son tres:

1.º Conociendo la longitud L de la viga (luz salvada), la carga P que ha de soportar, el coeficiente K de seguridad, el caso de flexión y la forma general que ha de afectar el perfil, determinar las dimensiones que definen la sección recta y la flecha máxima.

2.º Conociendo la longitud de la viga, la carga, el caso de flexión y la flecha máxima que debe ofrecer, calcular las dimensiones de la sección recta y el coeficiente de trabajo.

3.º Conociendo las dimensiones de la sección recta, la luz salvada, la carga y el caso de flexión, calcular el coeficiente de trabajo, es decir, la tensión máxima por centímetro cuadrado y la flecha.

480. Problema 1.º—Como la carga total P y la longitud L son conocidas, el momento máximo de flexión M se calculará fácilmente por la fórmula que corresponda, la cual se hallará en el cuadro de la pág. 377 y siguientes. Se da también el valor del coeficiente de seguridad K; por lo tanto, de la ecuación general $ZK = M$ se obtendrá en seguida $Z = \frac{M}{K}$, es decir, el valor del módulo de flexión que debe ofrecer la sección que se busca.

Pero Z es función de varias cantidades desconocidas, que son las dimensiones que definen la sección recta; de donde resulta que, no estableciendo entre ellas nuevas relaciones en número suficiente, el problema actual es indeterminado y admite, por tanto, infinitas soluciones.

Por ejemplo, si se tratara de una viga de doble T, siendo

h la altura;

b el ancho de las alas ó tablas;

e el espesor del alma;

e' el espesor medio de las alas,

las magnitudes h' y b', cuya significación ya conocemos, serían $h' = h - 2e'$ y $b' = b - e$.

La expresión de Z es, como sabemos, en este caso,

$$Z = \frac{1}{6} \frac{bh^3 - b'h'^3}{h} \qquad (1)$$

la cual es función de las dimensiones b, h, b' y h'.

Si establecemos las condiciones

$$b = nh, \qquad b' = ph, \qquad h' = qh,$$

claro es que la expresión (1) se reduciría á la forma $Z = mh^3$, y entonces el problema sería completamente determinado.

Pero como el perfil así obtenido pudiera ser inadmisible por resultar difícil ó imposible su fabricación, en la práctica, el problema actual se resuelve de la manera siguiente:

Calculado el valor numérico de Z, se acude al catálogo de la fábrica que haya de surtir el material y en él se encontrarán varios perfiles, dentro de la forma general que convenga, para los cuales los valores de Z se aproximarán bastante, unos por exceso y otros por defecto, al calculado.

Si en el catálogo se consignan los espesores medios de fabricación, entonces la cuestión queda reducida á elegir el perfil más conveniente entre aquellos cuyo módulo Z sea mayor que el que necesitamos.

Si, por el contrario, se fijaran los espesores mínimos de fabricación y se consignara además la posibilidad de aumentar el espesor del alma hasta determinado número de milímetros, entonces puede suceder, si la importancia del pedido lo consiente, que el perfil que más convenga se halle entre aquellos cuyo módulo Z es algo inferior al calculado. Esto, tratándose de hierros en doble T y en doble escuadra de ramas iguales; porque para la T sencilla los espesores suelen ser invariables.

En tal caso el espesor que hay que aumentar al alma de la doble T ó de la doble escuadra de ramas iguales, para que el perfil resultante tenga un módulo Z igual al necesario, se determina con toda facilidad, como vamos á indicar.

Sea

Z, el módulo de flexión que el perfil debe ofrecer;

$Z' < Z$, el que tiene el perfil encontrado en el catálogo;

Δe, el aumento de espesor que debe recibir el alma de dicho perfil, para que su módulo de flexión resulte igual á Z.

Es claro que si h es la altura de la viga, tendremos

$$Z = Z' + \frac{1}{6} \Delta e h^2;$$

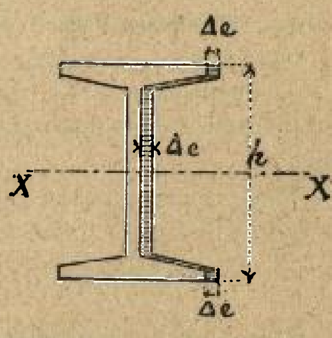
de donde,

$$\Delta e = \frac{6(Z - Z')}{h^2} \qquad (a)$$

Si Δe resulta igual ó menor que el aumento posible de espesor consignado en el catálogo, el problema quedará resuelto en las mejores condiciones de exactitud.

En el caso general, cuando haya que aceptar los espesores ordinarios de almacén y no se imponga la condición de que la altura de la viga no pase de cierto límite, ya hemos dicho que por razón de economía se aceptará aquella sección que corresponda á un menor peso por metro lineal, ó lo que es igual, aquella cuya área sea menor. Algunas veces habrá que atender á que la altura sea conveniente, y atendiendo á esta circunstancia, la elección se hará con igual facilidad.

Fig. 201.



En cualquier caso es necesario, como justificación de la elección hecha, calcular el coeficiente de trabajo por la expresión

$$K = \frac{M}{Z}$$

y debe resultar igual ó menor que el coeficiente de seguridad que se hubiera fijado de antemano.

En euanto á la flecha, una vez conocido el valor de Z de la sección aceptada, no habrá dificultad alguna en calcularla por medio de la fórmula correspondiente, que se encontrará en el cuadro de la página 377 y siguientes.

Generalmente, para las construcciones ordinarias, las flechas admisibles de las vigas de hierro se hallan comprendidas entre $\frac{1}{250}$ y $\frac{1}{2000}$ de la longitud L; de modo que en los casos usuales deberá suceder que

$$f < \frac{1}{250} \mathrm{L} \qquad \text{ó bien} \qquad f < 0{,}004 \mathrm{~L}.$$

Nosotros, sin embargo, aceptaremos como condición de rigidez para los casos ordinarios

$$f \leqq \frac{1}{500} \mathrm{L}, \qquad \text{ó lo que es lo mismo} \qquad f \leqq 0{,}002 \mathrm{~L}.$$

481. Problema 2.º—Así como en el problema anterior se imponía como condición el valor del coeficiente de seguridad K, en el actual se impone además la condición de rigidez; de modo que se fijan de antemano los valores de K y de la flecha *f*.

Las ecuaciones disponibles son las dos siguientes:

$$\mathrm{M} = \mathrm{KZ} \quad (1) \qquad f = \beta \frac{\mathrm{PL}^3}{\mathrm{ZE}h} \quad (2).$$

Eliminando Z y despejando *h* se tendrá

$$h = \frac{\beta \mathrm{KPL}^3}{\mathrm{M}f\mathrm{E}} \quad (3).$$

Esta es la altura que debe tener la sección que se busca para que la viga, al flexarse, dé la flecha fijada.

Pero como la ecuación (2) ha de quedar satisfecha por el valor de h calculado mediante la (3), la cuestión queda ya simplemente reducida á buscar en el catálogo de hierros aquel perfil que, presentando la altura determinada h, tenga un módulo Z igual ó algo mayor que el deducido de la ecuación (1).

Aceptada la sección que prácticamente resuelva el problema, y para justificar la elección hecha, se calcularán los verdaderos valores del coeficiente de trabajo K′ y de la flecha f', y deberá resultar que

$$K' \overline{\overline{<}} K \qquad \text{y} \qquad f' \overline{\overline{<}} f.$$

482. Observación.—Este problema no puede resolverse con facilidad más que para las secciones en las cuales el eje neutro es eje de simetría, pues entonces se verifica que la distancia v del eje neutro á las fibras más fatigadas es igual á $\frac{1}{2}h$, y en tal concepto se sacó por factor común esta cantidad, al deducir en el tomo I la expresión general de la flecha cuando h era constante, que como sabemos puede escribirse para los casos más usuales bajo la forma $f = \beta \frac{PL^3}{ZEh}$.

Cuando las secciones no son simétricas con respecto al eje neutro, entonces $\frac{1}{2}h$ no representa aquella distancia v, por cuyo motivo la expresión de f será para toda clase de secciones, y en particular para las no simétricas,

$$f = \beta \frac{PL^3}{2EI}, \qquad \text{ó bien} \qquad f = \beta \frac{PL^3}{2EZv}$$

y así se ve que para hallar con brevedad una solución aproximada sería necesario que en los catálogos figurasen, al lado de los valores de Z ó de I, los correspondientes de v, lo que algunas veces no sucede.

483. **Problema 3.º**—La resolución de este problema no ofrece dificultad alguna valiéndose de las ecuaciones

$$M = KZ, \qquad f = \beta \frac{PL^3}{2EZv}.$$

Todo consiste en disponer de los valores de Z y de v, ó en calcularlos directamente, lo que es fácil conociendo la forma y dimensiones de la sección.

484. **Ejemplo del problema 1.º**—Determinar el perfil y la flecha de flexión de una viga de doble T, apoyada por sus extremos y sometida á una carga uniformemente repartida en toda su longitud, siendo los datos del problema los siguientes:

Luz salvada ó distancia entre apoyos.	$L = 6^m = 600$ cm.
Carga total uniformemente repartida.	$P = 2400$ kg.
Coeficiente de seguridad, que se admite..........................	$K = 600$ kg. por cm²

El momento máximo de flexión vale

$$M = \frac{1}{8} PL = \frac{1}{8} \times 2400 \times 600 = 180000 \text{ kg.-cm.}$$

y como la expresión de Z es

$$Z = \frac{M}{K},$$

la sección que se busca deberá tener un módulo de flexión cuyo valor sea por lo menos

$$Z = \frac{180000}{600} = 300.$$

Consultando los cuadros anteriores se encontrará que los perfiles, cuyo módulo Z se aproxima más por exceso al calculado, son los siguientes:

FABRICAS	Número de orden.	h Cm.	b Cm.	e Cm.	p Kg.	Z
Bilbao.............	15	24	10,6	0,87	36,2	357
Barcelona.	8	26	11,3	0,9	42,0	446
Seraing (*Bélgica*)....	21	23,5	9,5	1,0	34,5	316,11
Franche-Comté.. ...	28	20	10,6	1,6	44,5	331,06

Si aplicáramos al perfil núm. 14 del cuadro de Altos Hornos, Bilbao, la fórmula (a) de la pág. 485, veríamos que bastaría aumentar el espesor del alma en 2,4 milímetros ó sea 0,24 centímetros para que Z valiera 300. En tal caso las dimensiones resultantes del perfil serían

Altura de la viga.................. $h = 22$ cm.
Ancho de las alas.................. $b = 10{,}04$ cm.
Espesor del alma................... $e = 1{,}05$ »
Espesor medio de las alas........... $e' = 1{,}22$ »

Como consecuencia tendríamos también

Area de la sección.................. $\omega = 45{,}03$ cm^2.
Peso por metro lineal de viga ([a])..... $p = 35{,}12$ kg.
Módulo de flexión.................. $Z = 300$.

Si fuera necesario conformarse con los espesores medios ú ordinarios de almacén, y hubiéramos de acudir precisamente á la fábrica de «Altos Hornos» de Bilbao, entonces aceptaríamos como solución práctica el perfil núm. 15, cuyas dimensiones son

$$\frac{2{,}4}{0{,}87} \times \frac{10{,}6}{1{,}31},$$

forma simbólica usada para representar las dimensiones de la sección, y en la cual expresan: el numerador y denominador

(a) Suponiendo que el m^3 pese 7800 kg.

de la primera fracción, la altura de la viga y el espesor del alma, respectivamente; y los términos de la segunda fracción, considerados en el mismo orden, el ancho de las alas y el espesor medio de las mismas.

En tal supuesto, veamos cuál sería el coeficiente de trabajo resultante.

Como $Z = 357$ y $M = 180000$, tendremos

$$K = \frac{M}{Z} = \frac{180000}{357} = 504{,}2 \text{ kg. por cm}^2.$$

En cuanto á la flecha máxima, en valor absoluto, sabemos que para el caso de flexión que nos ocupa, tiene por expresión

$$f = \frac{5}{192}\,\frac{PL^3}{ZEh}.$$

Sustituyendo los valores de P, L, Z, h y recordando que para el hierro dulce puede aceptarse $E = 2.000000$, resultará

$$f = \frac{5}{192} \times \frac{2400 + 600^3}{357 + 2.000000 \times 24},$$

ó bien:

$$f = 0{,}79 \text{ centímetros, próximamente.}$$

485. **Ejemplo del problema 2.°**—Calcular la sección recta de una viga laminada de doble T, cuya flecha de curvatura, una vez cargada, no pase de $\frac{1}{500}$ de la longitud; estando apoyada por sus extremos y la carga uniformemente repartida.

Los datos del problema son:

Luz salvada, ó distancia entre los apoyos............................	$L = 5^m = 500$ cm.
Carga total uniformemente repartida.	$P = 1400$ kg.
Coeficiente de seguridad que se admite..........................	$K = 700$ kg. por cm².
Flecha que puede tolerarse.........	$f = 0{,}002L = 1$ cm.

El momento máximo de flexión es

$$M = \frac{1}{8} PL = \frac{1}{8} \times 1400 \times 500 = 87500 \text{ kg.-cm.}$$

El valor de β que figura en la fórmula (3) núm. **481**, es $\beta = \frac{5}{192}$; por lo tanto la altura h de la viga habrá de ser

$$h = \frac{5}{192} \times \frac{700 \times 1400 \times 500^3}{87500 \times 1 \times 2.000000}$$

ó bien

$$h = 18,2 \text{ centímetros.}$$

La sección que se busca ha de satisfacer, no sólo á la condición de que su altura no sea inferior al valor calculado, sino á la de tener un módulo Z, cuyo valor sea

$$Z = \frac{M}{K} = \frac{87500}{700} = 125.$$

Si tuviéramos que utilizar los hierros de la fábrica de Barcelona, acudiendo al cuadro correspondiente, veremos que el perfil número 6 sirve desde luego, puesto que tiene de altura $h = 20$ y por módulo $Z = 159$; valores, ambos, mayores que los necesarios.

Conviene, sin embargo, averiguar, en beneficio de la economía, si el perfil número 5 puede utilizarse; pues si bien es cierto que su altura es algo menor que la calculada, en cambio tiene un módulo mayor que el que anteriormente se ha determinado.

Calculando la flecha, tendremos; puesto que

$$h = 18; \qquad Z = 134,$$

$$f = \frac{5 \times 1400 \times 500^3}{192 \times 134 \times 2.000000 \times 18} = 0,94 \text{ cm.}$$

Es, pues, perfectamente aceptable esta sección, cuya escuadría es $\frac{18 \times 0{,}8}{5}$ y cuyo peso por metro lineal es de 19,9 kilogramos.

El coeficiente de trabajo resultante es

$$K = \frac{M}{Z} = \frac{87500}{134} = 652{,}9 \text{ kg. por cm}^2.$$

486. Ejemplo del problema 3.º—Una viga de doble T apoyada por sus extremos, de 7^{m} de longitud, soporta una carga total, uniformemente repartida, de 6000 kilogramos.

Calcular el coeficiente de trabajo y la flecha, teniendo la sección las dimensiones siguientes:

Altura...........................	$h =$	28	cm.
Espesor del alma................	$e =$	1,01	íd.
Ancho de las alas...............	$b =$	11,9	íd.
Espesor medio de las mismas.....	$e' =$	1,52	íd.

Este perfil corresponde al número 17 del cuadro de hierros de Altos Hornos, cuyo módulo de flexión vale $Z = 547$.

Si se tratase de un perfil cuyas dimensiones exactas no figurasen en los cuadros anteriores, sería fácil calcular Z, recordando que su expresión es

$$Z = \frac{1}{6} \frac{bh^3 - b'h'^3}{h},$$

y que además se tiene $b' = b - e$; $h' = h - 2e'$.

El valor del momento máximo de flexión M es

$$M = \frac{1}{8} PL = \frac{1}{8} \times 6000 \times 700 = 525000 \text{ kg.-cm};$$

por lo tanto, resultará un coeficiente de trabajo de

$$K = \frac{M}{Z} = \frac{525000}{547} = 959{,}7 \text{ kg. por cm}^2.$$

El valor de la flecha será

$$f = \frac{5}{192}\ \frac{PL^3}{ZEh} = \frac{5 \times 6000 \times 700^3}{192 \times 547 \times 2 \times 10^6 \times 28} = 1{,}749 \text{cm.}$$

valor que corresponde próximamente á $\frac{1}{400}$ L.

487. **Observación.**—Si la sección de la viga no fuera simétrica respecto al eje neutro (caso de la simple T, escuadras y carriles), los tres problemas que preceden se resolverían de modo análogo; pero teniendo presente, como ya se ha dicho, que para calcular la flecha ha de emplearse la expresión

$$f = \beta \frac{PL^3}{2EZv},$$

en la cual representa:

β, el coeficiente numérico propio del caso de flexión de que se trate, el cual se hallará en el cuadro de la página 377 y siguientes.

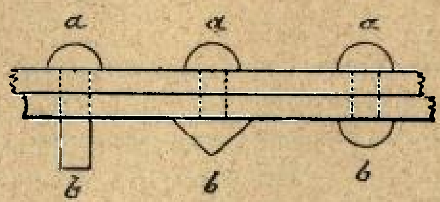
v, la distancia del eje neutro á las fibras más lejanas, en las cuales la tensión unitaria alcanza el valor máximo.

No hay para qué recordar que el producto Zv representa el momento de inercia referido al eje neutro.

488. **Vigas compuestas de hierro, de alma llena.** Cuando hace falta que una viga de hierro tenga una resistencia, y, por tanto, un módulo Z superior al que ofrecen las de mayor altura, laminadas, de fabricación corriente, altura que no suele pasar de 30 á 32 centímetros, es indispensable componer aquella por medio de escuadras y palastros cosidos con *roblones.*

Los roblones (figura 202) son hierros de muy buena calidad, cuya forma es semejante á la de un clavo. La cabeza *a* es esférica. El cuerpo ó pasador, es cilíndrico, y su longitud es mayor que el espesor de los palastros que atraviesa. La parte *b* que sobresale, se remacha en frío ó en caliente, á mano ó con máquina, de cuya suerte resulta una segunda cabeza de forma có-

Fig. 202.



nica cuando se hace á martillo, y esférica cuando se hace á máquina.

Los agujeros en las chapas se abren con punzón de acero ó con taladro. El primer medio es más económico; se emplea para planchas delgadas, pero tiene el inconveniente de la poca perfección del trabajo y de alterar algo las condiciones de resistencia del metal alrededor de los orificios.

El segundo medio es más costoso, pero más perfecto, y permite perforar chapas de mayor espesor, y aun varias de ellas superpuestas, para lograr la más exacta coincidencia en los diversos agujeros que han de ser atravesados por un mismo roblón ([a]).

Las formas del perfil que afectan las vigas que consideramos, son: en doble T de alas sencillas ó múltiples, y tubulares de sección rectangular.

En el primer grupo, las más sencillas se componen de una lámina ó plancha de palastro (figura 203), que constituye el alma y cuatro escuadras; pero puede aumentarse mucho la resisten-

---

(*a*) Para los detalles relatidos al roblonado, operación, sin duda, la más importante en las construcciones metálicas, debe consultarse la obra del Sr. Marvá *Mecánica aplicada á las construcciones*, y el *Tratado de construcciones civiles*, de G. A. Breymann, traducido del alemán al italiano por Gatto y anotado por F. P.º Boullée.

cia añadiendo dos tablas, una á cada cabeza. Las tablas pueden

Fig. 203.

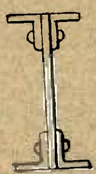


Fig. 204.

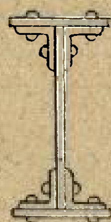
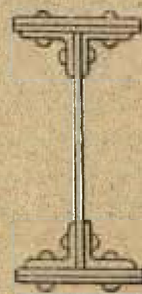


Fig. 205.



ser simples (figura 204), dobles (figura 205), etc., según el número de planchas que las formen.

En el segundo grupo, las vigas pueden componerse de dos palastros, constituyendo un alma doble, dos ó cuatro tablas y cuatro escuadras (figuras 206 y 207), ó bien de tres palastros

Fig. 206.

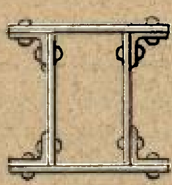


Fig. 207.

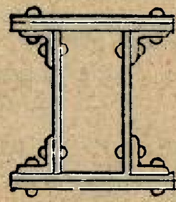
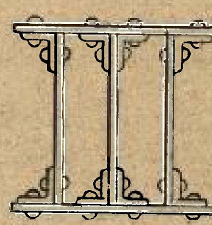


Fig. 208.



formando un alma triple, dos tablas y ocho escuadras (figura 208). Mediante estas dos últimas disposiciones, es decir con la fórmula tubular, se obtienen vigas de gran rigidez en sentido lateral, con cabezas de gran anchura, muy á propósito para constituir grandes dinteles, sobre los cuales haya de cargar un muro de edificación de regular espesor.

Como vemos, todas estas secciones son simétricas respecto del eje neutro.

Cuando la luz que hay que salvar pasa de unos 13 á 14 metros, es más económico el empleo de las vigas de alma calada.

En las vigas que consideramos, el alma no podrá ser, en ciertos casos, de una sola pieza, porque el mayor largo de las chapas de dimensiones corrientes no suele pasar de unos 4 metros. Mayores longitudes, de 7 á 8 metros, corresponden á dimensiones extraordinarias que tienen, como es natural, un recargo en el precio.

Otro tanto puede ocurrir con las tablas y aun con los hierros de ángulo que forman las escuadras ó cantoneras.

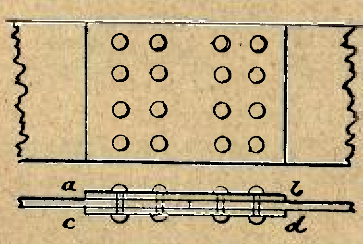
En el caso más general habrá, por tanto, que empalmar los diversos trozos de que se compongan el alma, las tablas y los hierros de ángulo, y unir éstos con el alma de una parte, y de otra con las tablas ó cabezas.

Empecemos por estudiar en los casos más sencillos y con la posible brevedad, la resistencia de este género de empalmes y ensambladuras, necesarios en las vigas compuestas de hierro.

489. Cálculo de las roblonaduras.—Consideraremos los siguientes casos:

490. 1er CASO.—**Empalme de los trozos de alma, en sentido vertical.**—Esta unión se hace, como indica la figura 209, colocando al tope los extremos que han de unirse, los cuales se cosen por medio de roblones á dos chapas de palastro *ab* y *cd*, llamadas *cubrejuntas*, cuyo espesor sea, por lo menos igual á la mitad del espesor del alma.

Fig. 209.



Este empalme se llama, por tal causa, *á doble cubrejunta.*

Admitiendo que el alma resiste al esfuerzo cortante máximo, el cual tiende á desunir los trozos empalmados, y por tanto, á cortar ó tronchar los vástagos de los roblones, y observando que cada uno de estos presenta dos secciones resistentes, será preciso que entre todos los situados á uno cualquiera de los lados de la junta, sean capaces de resistir á dicho esfuerzo.

Así, pues, si llamamos

T al esfuerzo cortante máximo;
δ al diámetro de los roblones;
n al número necesario de roblones en cada lado de la junta;
k al coeficiente de seguridad al esfuerzo cortante (generalmente $k = 400$ kilogramos por centímetro cuadrado),

la condición de resistencia será

$$2n\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)k \geqq \mathrm{T};$$

de la cual se deducirá el número necesario de roblones de cada lado de la junta, si se fija de antemano el diámetro, ó al contrario.

El valor de n será, por tanto,

$$n \geqq \frac{\mathrm{T}}{\left(2k\,\frac{\pi\delta^2}{4}\right)},$$

debiendo ser n un número entero.

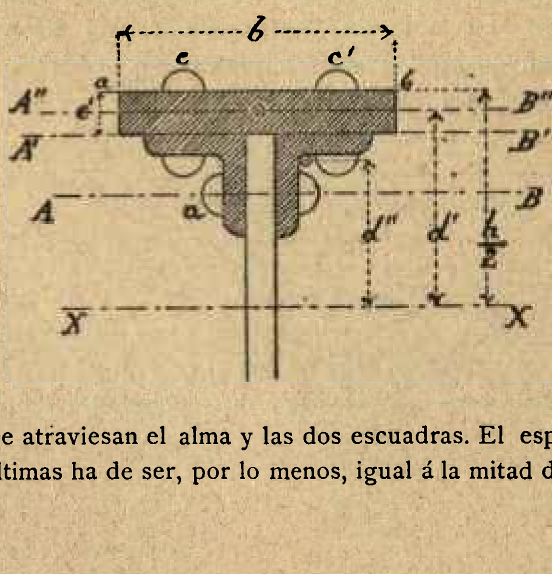
El diámetro de los roblones, así como su distancia entre ejes, suelen fijarse, en relación con el espesor total de los palastros atravesados, con arreglo á las indicaciones del siguiente cuadro:

δ	Diámetro de los roblones en milímetros	8	10	12	14	16	18	20	22	25
Σe	Espesor total de los palastros atravesados, en milímetros.	6 á 10	10 á 12	12 á 14	14 á 16	16 á 20	20 á 25	25 á 35	35 á 50	50 á 70
λ	Distancia entre ejes de los roblones en milímetros	50 á 60	60 á 70	70 á 80	80 á 90	90 á 100	100 á 120	100 á 120	100 á 120	100 á 120

La distancia entre el borde de la chapa y el eje del roblón más próximo debe ser igual ó mayor que dos veces y media el diámetro de aquel.

491. 2.º CASO. —**Unión del alma con las escuadras.**— Esta unión se hace por medio de una fila *a* de roblones (figura

Fig. 210.



210) que atraviesan el alma y las dos escuadras. El espesor de estas últimas ha de ser, por lo menos, igual á la mitad del espe-

sor de la primera. Además, hay que observar que, como en el caso anterior, cada roblón ofrece dos secciones resistentes.

Aceptando como base de cálculo que la roblonadura ha de poder resistir al esfuerzo de desgarramiento longitudinal desarrollado en el plano AB, si llamamos S al valor de dicho esfuerzo por metro lineal de viga y recordamos que la expresión del esfuerzo rasante por unidad superficial es (pág. 328)

$$s = -\frac{T\omega d}{u\zeta Z},$$

prescindiendo del signo, y observando que ζ en este caso es igual á $\frac{h}{2}$, es claro que la fuerza de desgarramiento por centímetro de longitud de viga tendrá por expresión

$$su = \frac{2T}{Zh}\,\omega d,$$

y por metro lineal de viga será $S = 100\,su$, ó bien

$$S = \frac{200\ T}{Zh}\,\omega d \qquad (a)$$

fórmula en la cual representan respectivamente:

T, esfuerzo cortante máximo;
h, altura total de la viga;
ω, área de la parte de sección comprendida entre los planos *ab* y AB;
d, brazo de palanca de ω con respecto al eje neutro XX.

Generalmente se reemplaza por ω el área de la parte rayada, que comprende el área de la cabeza y la de las dos escuadras, por lo que llamando ω' á la primera, ω'' á la segunda y d', d'' á las distancias respectivas de sus centros de gravedad al eje neutro, puede aceptarse que

$$\omega d = \omega' d' + \omega'' d'',$$

en cuyo caso la fuerza de desgarramiento se calculará por la expresión

$$S_1 = \frac{200T}{Zh}(\omega' d' + \omega'' d'').$$

Conocido este valor, y siendo n_1 el número necesario de roblones por metro lineal de viga, es claro que la condición de resistencia será $2n_1\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)k \geqq S_1$; de donde

$$n_1 \geqq \frac{S_1}{2k\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)} \qquad (2)$$

492. 3.er CASO. **Unión de las tablas con las escuadras.**—Estas piezas se unen cosiéndolas por medio de dos filas de roblones c y c' (figura 210), una para cada escuadra.

Generalmente se acostumbra á poner por metro lineal de viga, el mismo número de roblones y del mismo diámetro que en el caso anterior.

Si se quiere comprobar la resistencia del roblonado que así resulta, no hay más que emplear la fórmula

$$n_2 \geqq \frac{S_2}{2k\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)} \qquad (3)$$

en la cual representa S_2 la fuerza de desgarramiento longitudinal por metro de viga, en el plano A'B' (figura 210), cuyo valor se calculará por la expresión

$$S_2 = \frac{200T}{Zh}\omega' d' \ (^a);$$

pero ya se ve que si los roblones han de ser de igual diámetro,

(a) ω' no representa ahora otra cosa que el área de la sección de la cabeza, ó sea $\omega' = be'$.

como $S_2 < S_1$, resultará necesariamente $n_2 < n_1$; razón por la cual n_2 no se calcula, y se acepta, como habíamos dicho antes, que $n_1 = n_2$.

493. 4.° CASO. **Empalme de las chapas que forman las tablas.**—La fuerza que tiende á romper el roblonado á simple cubrejunta que se emplea en estos empalmes, es la tensión total, desarrollada en la junta, cuya expresión, llamando e al espesor de la chapa que se va á empalmar, b á su ancho, y K al coeficiente de trabajo correspondiente, será beK.

Por lo tanto, el número n_3 de roblones necesarios á cada lado de la junta, se deducirá de la condición de resistencia

$$n_3 \left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right) k \geqq be\mathrm{K};$$

de donde

$$n_3 \geqq \frac{\mathrm{K}}{k} \cdot \frac{be}{\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)} \qquad (4)$$

Si, por ejemplo, siendo $k = 400$ kilogramos por centímetro cuadrado, como suele aceptarse de ordinario, fuera K $= 600$, la expresión (4) se convertiría en

$$n_3 \geqq \frac{3}{2} \frac{be}{\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)};$$

y si fuera K $= 800$, sería entonces

$$n_3 \geqq 2 \frac{be}{\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)}.$$

494. Resistencia de las vigas compuestas de hierro de alma llena.—Para simplificar la resolución de los problemas relativos á este género de vigas, insertamos á continuación tres cuadros; el primero se refiere á las vigas compuestas de un alma y cuatro escuadras; el segundo, á las de un alma, cuatro escuadras y dos tablas, y el tercero, á las de dos almas, cuatro escuadras y dos tablas, las cuales, según su espesor total, pueden estar formadas por una ó más chapas, lo mismo en este caso que en el anterior.

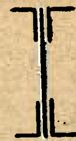
El primero es aplicable para alturas de viga comprendidas entre $0^m,16$ y $0^m,55$. Los otros dos comprenden diversas secciones, cuya altura varía entre $0^m,30$ y 1^m.

VIGAS DE PEQUEÑA ALTURA

COMPUESTAS DE UN ALMA Y CUATRO ESCUADRAS

DE RAMAS IGUALES.

Fig. 211.



VIGAS DE PEQUEÑA ALTURA

COMPUESTAS DE UN ALMA Y CUATRO ESCUADRAS DE RAMAS IGUALES.

Resistencia de las almas de 1 centímetro de espesor. (*a*)

Altura en cm	16	18	20	22	25	28	30	35	40	45	50	55
Peso del metro lineal: kg.	12,48	14,04	15,60	17,16	19,50	21,84	23,40	27,30	31,20	35,10	39,00	42,90
Módulo de flexión: Z_1 ..	42,6	54	66,6	80,6	104,1	130,6	150	204,1	266,6	337,5	416,6	504,1

Resistencia de las cuatro escuadras. (*b*)

Dimensiones de las escuadras en cm.	Sección de las 4 escuadras en cm².	Peso de las 4 escuadras por metro en kg.	VALORES DE Z_2 PARA LAS CUATRO ESCUADRAS siendo la altura de la viga, en cm., de											
			16	18	20	22	25	28	30	35	40	45	50	55
$\frac{3 \times 3}{0,4}$	8,96	6,99	57	66	75	83	97	110	119	»	»	»	»	»
$\frac{3 \times 3}{0,5}$	11,00	8,58	69	80	91	102	118	134	146	»	»	»	»	»
$\frac{3,5 \times 3,5}{0,45}$	11,79	9,20	73	84	96	107	125	142	154	183	»	»	»	»
$\frac{3,5 \times 3,5}{0,55}$	14,19	11.07	87	101	114	128	149	170	184	219	»	»	»	»
$\frac{4 \times 4}{0,5}$	15,00	11,70	90	104	119	133	155	177	192	229	266	»	»	»
$\frac{4 \times 4}{0,6}$	17,76	13,86	105	122	139	156	183	209	227	270	314	358	»	»

4,5×4,5 / 0,5	17,00	13,20	99	115	131	148	173	198	214	256	300	340	383	»
4,5×4,5 / 0,6	20,16	15,73	116	135	155	174	205	233	253	303	352	403	453	503
4,5×4,5 / 0,7	23,24	18,13	132	154	176	199	233	267	289	347	405	462	520	578
5×5 / 0,5	19,00	14,82	108	126	144	162	189	217	236	282	333	377	424	471
5×5 / 0,6	22,56	17,60	127	148	169	191	224	256	279	314	390	444	500	557
5×5 / 0,7	26,04	20,31	144	169	190	219	256	294	326	382	450	511	576	640
5,5×5,5 / 0,5	21,00	16,38	116	136	155	175	206	236	257	308	360	412	466	516
5,5×5,5 / 0,6	24,96	19,47	137	160	183	207	243	285	304	365	426	488	546	611
5,5×5,5 / 0,7	28,84	22,50	156	186	210	237	279	321	349	419	490	561	633	704
6×6 / 0,6	27,36	21,34	146	171	200	222	264	301	327	394	460	529	596	665
6×6 / 0,7	31,64	24,68	167	196	220	255	294	346	377	454	530	609	688	768
6×6 / 0,8	35,84	27,96	187	220	250	287	336	390	424	512	600	689	777	866
6×6 / 0,9	39,96	31,17	206	243	280	317	376	465	471	569	666	765	864	963

(*a*) Para cualquier otro espesor, diferente de 1 cm., se multiplicará el valor de la tabla, correspondiente á la altura dada, por dicho espesor, expresado en cm.

Así, por ejemplo, para una altura de 40 cm., y un espesor de 0,8 cm., se encontrará

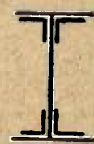
$$Z_1 = 0{,}8 \times 266{,}6 = 213{,}28$$

(*b*) Como la distancia v del eje neutro á las fibras más lejanas es igual á $\frac{h}{2}$, tanto para el alma como para las cuatro escuadras, el valor del módulo Z, de la sección compuesta será $Z = Z_1 + Z_2$.

VALORES DE *p* Y DE Z

PARA ALGUNAS SECCIONES COMPUESTAS DE UN ALMA, CUATRO ESCUADRAS Y DOS TABLAS

Fig. 212.



Vigas de altura variable entre $0^m,30$ y $1^m,00$.

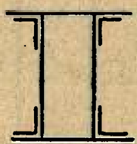
Número de orden.	Altura de la viga en cm. — h	ALMA Espesor en cm. — e	TABLAS Ancho en cm. — b	TABLAS Espesor en cm. — e'	ESCUADRAS Dimensiones en centímetros.	Peso por metro lineal en kg. — p	Módulo de flexión al cm. — Z
1	30	0,6	20	1,0	5 × 5 × 0,6	72	943
2	30	0,6	20	1,0	6 × 6 × 0,6	76	987
3	30	1,0	20	1,0	7 × 7 × 0,8	96	1193
4	30	1,0	25	1,0	7 × 7 × 0,8	104	1343
5	35	0,6	20	1,0	5 × 5 × 0,6	74	1129
6	35	1,0	20	1,0	7 × 7 × 0,8	104	1541
7	35	1,0	25	1,0	7 × 7 × 0,8	108	1629
8	35	1,0	27,5	1,0	8 × 8 × 0,8	119	1782
9	40	0,6	25	1,0	8 × 8 × 0,8	118	1990
10	40	1,0	25	1,0	9 × 9 × 1	131	2257
11	40	1,0	30	1,0	9 × 9 × 1	139	2457
12	45	0,6	25	1,0	7 × 7 × 0,8	102	2085
13	45	1,0	25	1,0	8 × 8 × 0,8	123	2306
14	45	1,0	30	1,0	9 × 9 × 1	144	2842
15	50	0,8	25	1,0	7 × 7 × 0,8	112	2434
16	50	1,0	30	1,0	8 × 8 × 0,8	135	2876
17	50	1,0	30	1,0	9 × 9 × 1	148	3230
18	55	0,8	25	1,0	8 × 8 × 0,8	122	2861

Número de orden.	Altura de la viga en cm. — h	ALMA Espesor en cm. — e	TABLAS Ancho en cm. — b	TABLAS Espesor en cm. — e'	ESCUADRAS Dimensiones en centímetros.	Peso por metro lineal en kg. — p	Módulo de flexión al cm. — Z
19	55	0,8	27,5	1,0	8 × 8 × 0,8	126	2998
20	55	0,8	30	1.0	8 × 8 × 0,8	130	3136
21	55	1,0	30	1,0	9 × 9 × 1	152	3635
22	55	1,0	35	1,0	10 × 10 × 1	166	4057
23	60	0,8	30	1,0	8 × 8 × 0,8	226	3477
24	60	1,0	32,5	1,0	9 × 9 × 1	160	4191
25	60	1,0	30	1,0	10 × 10 × 1	162	4209
26	65	0,8	30	1,0	8 × 8 × 0,8	136	3832
27	65	1,0	32,5	1,0	9 × 9 × 1	164	4625
28	65	1,0	35	1,0	10 × 10 × 1	174	4973
29	70	1,0	30	1,0	9 × 9 × 1	164	4888
30	70	1,0	35	1,0	10 × 10 × 1	178	5444
31	70	1,0	37,5	1,5	10 × 10 × 1,5	238	7850
32	75	1,0	30	1,0	9 × 9 × 1	168	5324
33	75	1.0	35	1,5	10 × 10 × 1	209	7196
34	75	1,0	37,5	1,5	10 × 10 × 1,5	242	8526
35	80	1,0	35	1,5	10 × 10 × 1	213	7771
36	80	1,0	37,5	2,0	10 × 10 × 1,5	275	10650
37	85	1,0	30	1,0	10 × 10 × 1	182	6487
38	85	1,0	37,5	2,0	10 × 10 × 1,5	279	11435
39	85	1,0	37,5	3,0	10 × 10 × 1,5	337	14521
40	90	1,0	30	1,0	10 × 10 × 1	186	6967
41	90	1,0	35	1,5	10 × 10 × 1,5	248	10255
42	90	1,0	37,5	3,0	10 × 10 × 1,5	341	15497
43	95	1,0	35	1,5	10 × 10 × 1	225	9546
44	95	1,0	37,5	3,0	10 × 10 × 1,5	345	16476
45	100	1,0	30	1,0	10 × 10 × 1	194	7956
46	100	1,0	35	2,0	10 × 10,8 × 1,5	283	13326
47	100	1,0	37,5	3,0	10 × 10,8 × 1,5	349	17471

VALORES DEL MÓDULO DE FLEXIÓN Z

Y PESO POR METRO LINEAL, PARA ALGUNAS SECCIONES TUBULARES, COMPUESTAS DE DOS ALMAS, CUATRO ESCUADRAS Y DOS TABLAS

Fig. 213.



Vigas de altura variable entre $0^m,30$ y $1^m,00$.

Número de orden.	Altura de la viga en cm. — h	ALMA: Espesor en cm. — e	TABLAS: Ancho en cm. — b	TABLAS: Espesor en cm. — e'	ESCUADRAS: Dimensiones en centímetros	Peso por metro lineal en kg. — p	Módulo de flexión al cm. — Z
1	30	0,6	20	1,0	5 × 5 × 0,6	87	1025
2	30	0,6	25	0,6	6 × 6 × 0,6	84	929
3	30	1,0	30	1,0	7 × 7 × 0,8	139	1631
4	30	1,0	35	1,0	7 × 7 × 0,8	147	1781
5	35	0,6	20	1,0	5 × 5 × 0,6	92	1243
6	35	1,0	30	1,0	7 × 7 × 0,8	147	2000
7	35	1,0	40	1,0	7 × 7 × 0,8	162	2351
8	35	1,0	45	1,0	8 × 8 × 0,8	165	2592
9	40	0,6	35	1,0	8 × 8 × 0,8	168	2643
10	40	1,0	45	1,0	9 × 9 × 1	198	3309
11	40	1,0	55	1,5	9 × 9 × 1	257	4774
12	45	0,6	30	1,0	7 × 7 × 0,8	134	2506
13	45	1,0	35	1,0	8 × 8 × 0,8	175	3080
14	45	1,0	40	1,0	9 × 9 × 1	197	3517
15	50	0,8	30	1,0	7 × 7 × 0,8	155	3003
16	50	1,0	35	1,0	8 × 8 × 0,8	183	3526
17	50	1,0	40	1,0	9 × 9 × 1	205	4130
18	55	0,8	35	1,0	8 × 8 × 0,8	174	3801

Número de orden.	Altura de la viga en cm. — h	ALMA: Espesor en cm. — e	TABLAS: Ancho en cm. — b	TABLAS: Espesor en cm. — e'	ESCUADRAS: Dimensiones en centímetros.	Peso por metro lineal en kg. — p	Módulo de flexión en cm. — Z
19	55	0,8	40	1,5	8×8 ×0,8	213	5137
20	55	0,8	45	2,0	8×8 ×0,8	259	6767
21	55	1,0	40	1,0	9×9 ×1	213	4673
22	55	1,0	45	1,0	10×10×1	227	5096
23	60	0,8	35	1,0	8×8 ×0,8	180	4241
24	60	1,0	40	1,5	9×9 ×1	253	6384
25	60	1,0	45	2,0	10×10×1	305	8296
26	65	0,8	35	1,0	8×8 ×0,8	186	4704
27	65	1,0	40	1,0	9×9 ×1	229	5811
28	65	1,0	45	1,0	10×10×1	243	6307
29	70	1,0	40	1,0	9×9 ×1	237	6383
30	70	1,0	45	1,0	10×10×1	251	6938
31	70	1,0	50	1,5	10×10×1,5	298	8983
32	75	1,0	40	1,0	9×9 ×1	244	6987
33	75	1,0	45	1,5	10×10×1	293	9067
34	75	1,0	50	2,0	10×10×1,5	271	12645
35	80	1,0	45	1,0	10×10×1	266	8256
36	80	1,0	50	1,5	10×10×1,5	340	11734
37	85	1,0	45	1,0	10×10×1	274	8940
38	85	1,0	50	1,5	10×10×1,5	348	12652
39	85	1,0	50	2,5	10×10×1,5	426	16771
40	90	1,0	45	1,0	10×10×1	282	9636
41	90	1,0	50	2,0	10×10×1,5	395	15761
42	90	1,0	60	3,0	10×10×1,5	521	22845
43	95	1,0	45	1,5	10×10×1	324	12428
44	95	1,0	50	2,5	10×10×1,5	441	19142
45	100	1,0	45	1,0	10×10×1	297	11090
46	100	1,0	50	2,0	10×10,8×1,5	410	17928
47	100	1,0	60	3,0	10×10,8×1,5	536	25801

495. Problemas relativos á las vigas compuestas de hierro de alma llena y sección constante.—Son los mismos que para las vigas sencillas, aparte de las roblonaduras, de que ya nos hemos ocupado.

Las fórmulas que resuelven aquellos problemas son, como sabemos,

$$ZK = M, \qquad f = \beta \frac{PL^3}{ZEh},$$

cuando la viga no trabaja más que por flexión; ó bien

$$K = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{Z}, \qquad f = \beta \frac{PL^3}{ZEh},$$

cuando la viga se halla sometida á un esfuerzo de flexión, y además á otro de extensión ó compresión P.

496. Ejemplos del problema 1.º— *a*) Determinar la sección de una viga de hierro, compuesta de una alma y cuatro escuadras, con los siguientes datos:

Luz salvada por la viga..............	$L = 6^m = 600$ cm.
Carga total uniformemente repartida...	$P = 8800$ kg.
Coeficiente de seguridad que se admite.	$K = 800$ kg.

La viga ha de estar apoyada por sus extremos. Resistirá un momento máximo de flexión de

$$M = \frac{1}{8} PL = \frac{1}{8} \times 8800 \times 600 = 660000 \text{ kg.-cm.}$$

Hace falta, por tanto, una sección cuyo módulo Z valga por lo menos,

$$Z = \frac{M}{K} = \frac{660000}{800} = 825 .$$

Aceptando para el alma un espesor de 1 centímetro, si acudimos al cuadro de la pág. 504 encontraremos que para una altura $h = 45$ centímetros corresponde $Z_1 = 337{,}5$.

Pero necesitamos que Z valga.................. $Z = 825$
Como al alma, supuesta de 45×1 cm. corresponde.................................... $Z_1 = 337{,}5$

Habrá que buscar para las 4 escuadras.......... $Z_2 = 487{,}5$

El valor inmediato mayor que encontramos en el cuadro de la pág. 504, para $h = 45$, es $Z_2 = 488$, el cual corresponde á escuadras de 5,5 centímetros de lado y 0,6 centímetros de espesor; por consiguiente, una solución muy aproximada será

1 alma de 45×1 cm......... $Z_1 = 337{,}5$

4 escuadras de $\frac{5{,}5 \times 5{,}5}{0{,}6}$..... $Z_2 = 488{,}0$

cuyo módulo es...... $Z = 825{,}5$

y cuyo peso por metro lineal, es el siguiente:

Peso del alma.............. 35,01 kg.

Peso de las 4 escuadras..... 19,47 »

Peso de la viga por metro lineal..... 54,48 kg.

De modo análogo se encontrarían otras soluciones, de las que se elegirá aquella que más convenga, atendiendo á las proporciones de la forma resultante, á la altura de la viga y al menor peso por metro lineal.

Supongamos que la sección anterior tuviera el defecto de ser un poco alta y nos conviniera que la altura no excediera de 40 centímetros.

Atendiendo al propio tiempo á la economía, nos conviene que Z_2 sea lo mayor posible.

Elegiremos las escuadras más robustas, cuyas dimensiones son $\frac{6 \times 6}{0{,}9}$. A las 4 que necesitamos corresponde un $Z_2 = 666$, y así diremos:

El módulo total debe ser.. ..	$Z = 825$
Tomamos para las escuadras.	$Z_2 = 666$
Luego queda para el alma....	$Z_1 = 159$

Este valor de Z_1 corresponde á un alma de 40 centímetros de altura y de un cierto espesor e, que se determina en seguida dividiendo el Z_1 que necesitamos por el consignado en el cuadro correspondiente á la altura fijada, como es fácil deducir.

Dicho espesor será, por tanto:

$$e = \frac{159}{266,6} = 0,596 \text{ cm.}$$

En números redondos aceptaremos

$$e = 0,6$$

á cuyo valor corresponde el siguiente Z_1:

$$Z_1 = 0,6 \times 266,6 = 159,96.$$

De suerte que otra solución será

1 alma de 40 $\times$ 0,6 cm.....	$Z_1 = 159,96$
4 escuadras de $\frac{6 \times 6}{0,9}$ cm...	$Z_2 = 666$
Módulo total.........	$Z = 825,96$

El peso por metro de viga es:

Peso del alma..... 0,6 $\times$ 31,20........	= 18,72 kg.
Pero de las 4 escuadras............	= 31,17 »
Peso de la viga por metro lineal.....	49,89 kg.

Aceptaremos esta solución para calcular el roblonado y la flecha.

497. Roblonado.—Siendo el espesor total, de las tres planchas que hay que atravesar, de 2,4 cm., elegiremos, con arreglo al cuadro de la página 498, roblones de 1,8 centímetros de diámetro.

La expresión de S_1, puesto que en el caso actual, $\omega' = 0$, será

$$S_1 = \frac{200T}{Zh}\,\omega''d''.$$

Pero $\omega''d''$ representa, como sabemos, el momento del área de la sección recta de las dos escuadras, con respecto al eje neutro. Aquella se descompone en dos rectángulos cuyas áreas y brazos de palanca son los siguientes:

Areas parciales.	Brazos de palanca.	Momentos.
$\omega_1 = 2 \times 6 \times 0{,}9 = 10{,}80$	$d_1 = 19{,}55$	$\omega_1 d_1 = 211{,}14$
$\omega_2 = 2 \times 5{,}1 \times 0{,}9 = 9{,}18$	$d_2 = 16{,}55$	$\omega_2 d_2 = 151{,}93$
Será por tanto..... $\omega''d'' = \omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 = 363{,}07$		

Tenemos además

$$T = \frac{1}{2}P = 4400; \quad Z = 825{,}96; \quad h = 40;$$

por consiguiente, sustituyendo en la expresión de S_1 resultará

$$S_1 = \frac{200 \times 4400 \times 363{,}07}{825{,}96 \times 40} = 9670{,}6 \text{ kg.}$$

La expresión de n_1 (pág. 500, fórmula 2) es

$$n_1 > \frac{S_1}{2k\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)}$$

y como $k = 400$, $\delta = 1{,}8$ y $\frac{\pi\delta^2}{4} = 2{,}54$, tendremos

$$n_1 \geqq \frac{9670,6}{2 \times 400 \times 2,54} = 4,7;$$

ó en números enteros

$$n_1 \geqq 5.$$

Puede aceptarse, por ejemplo, $n_1 = 9$, con lo cual la distantancia de roblones entre ejes quedará comprendida entre 10 y 12 centímetros, de acuerdo con las indicaciones del citado cuadro.

498. Flecha.—Dado el caso de flexión de que se trata, la expresión de la flecha en valor absoluto es (pág. 384)

$$f = \frac{5}{192} \frac{PL^3}{ZEh}.$$

Su valor será

$$f = \frac{5 \times 8800 \times 600^3}{192 \times 825,96 \times 2 \times 10^6 \times 40} = 0,75 \text{ cm}.$$

el cual corresponde á $\frac{1}{800}$ de la longitud de la viga.

499. *b)* Determinar la sección de una viga de hierro compuesta de un alma, cuatro escuadras y dos tablas, con los siguientes datos.

Luz salvada........................	$L = 8^m$	$= 800$ cm.
Carga total uniformemente repartida...	P	$= 30000$ kg.
Coeficiente de seguridad que se admite.	$K =$	700 kg.

La viga ha de estar empotrada por sus extremos. En tal concepto habrá de resistir á un momento máximo de flexión

$$M = \frac{1}{12} PL,$$

cuyo valor es

$$M = \frac{1}{12} \times 30000 \times 800 = 2.000000 \text{ kg.-cm.}$$

Pero como

$$Z = \frac{M}{K},$$

la sección que necesitamos deberá tener un módulo de flexión cuyo valor sea por lo menos

$$Z = \frac{2.000000}{700} = 2857,14.$$

En el cuadro de la pág. 506 encontraremos que los perfiles 16 y 18 resuelven prácticamente el problema, puesto que sus módulos se diferencian poco, por exceso, del necesario.

En el caso de que quisiéramos corregir un perfil cualquiera, más ó menos resistente que el que se necesita, modificando el espesor de las tablas ó el del alma, pueden aplicarse las siguientes fórmulas, que conducen rápidamente al resultado.

En efecto, si llamamos

Z, al módulo que se necesita;
Z', al del perfil que se quiere corregir, elegido en el cuadro;
Δe, la variación de espesor que exige solamente el alma de dicho perfil para que el módulo resultante sea igual á Z;
$\Delta e'$, la variación de espesor que necesitan solamente las tablas del expresado perfil, con igual objeto,

es fácil deducir que

$$\Delta e = \frac{6(Z - Z')}{h^2} \quad (1) \qquad \Delta e' = \frac{Z - Z'}{bh} \quad (2)$$

La primera expresión es exacta; la segunda es muy aproximada por exceso, y como esto es favorable á la resistencia, puede admitirse sin inconveniente alguno.

Claro es que, atendiendo á la economía, convendrá disminuir el espesor del alma y no el de las tablas, cuando $Z < Z'$; y aumentar el de las tablas y no el del alma si $Z > Z'$, aplicando la fórmula (1) en el primer caso y la (2) en el segundo.

Si $Z > Z'$, Δe y $\Delta e'$ serán positivos, y si $Z < Z'$, serán negativos; lo que quiere decir que, si sucede lo primero, hay que aumentar el espesor del elemento que ha de corregirse, y si ocurre lo segundo, habrá que disminuir dicho espesor.

No hay para qué decir que en ambas fórmulas representan:

h la distancia entre las caras externas de las tablas en el perfil que se quiere corregir del citado cuadro;

b la anchura de las tablas de dicho perfil.

De modo análogo se resolverá el problema 1.º si la sección hubiera de componerse de dos almas, cuatro escuadras y dos tablas. Bastaría acudir para ello al cuadro de la pág. 508, pudiendo emplear las fórmulas de corrección (1) y (2) en el caso de que se considerase conveniente.

500. Ejemplo del problema 2.º—Determinar la sección de una viga de hierro, compuesta de un alma, cuatro escuadras y dos tablas, apoyada por sus extremos, y sometida á una carga uniformemente repartida en toda su longitud, y además, á una carga aislada aplicada en el punto medio; siendo los datos del problema los siguientes:

Luz salvada........................	$L = 12^m = 1200$ cm.
Carga total uniformemente repartida.	$P = 13800$ kg.
Carga aislada, aplicada en el punto medio...........................	$Q = 14000$ kg.
Coeficiente de seguridad que se admite	$K = 600$ kg. por cm².
Flecha máxima que se tolera........	$f = \frac{1}{1200} L = 1$ cm.

En el caso que nos ocupa, la expresión de la flecha, prescindiendo del signo, es (pág. 385, caso 9),

$$f = \frac{1}{192} \frac{(5P + 8Q) L^3}{ZEh}$$

Además

$$M = KZ.$$

Si entre estas dos ecuaciones eliminamos Z y despejamos *h*, resultará:

$$h = \frac{K\,(5P + 8Q)\,L^3}{192\,M f E}$$

La expresión de M es (pág. 385)

$$M = \frac{1}{8}\,(P + 2Q)\,L;$$

por consiguiente, sustituyendo, tendremos

$$h = \frac{K\,(5P + 8Q)\,L^2}{24\,(P + ZQ)\,fE},$$

fórmula por la cual calcularemos la altura que debe tener la viga, para que ni la flecha ni el coeficiente de trabajo excedan de los límites previamente señalados.

Resultará, por tanto:

$$h = \frac{600 \times (5 \times 13800 + 8 \times 14000) \times 1200^2}{24 \times (13800 + 2 \times 14000) \times 1 \times 2.000000} = 77{,}94 \text{ cm.}$$

ó, en números redondos,

$$h = 78 \text{ cm.}$$

El momento M vale

$$M = \frac{1}{8}\,(13800 + 2 \times 14000) \times 1200 = 6.270000 \text{ kg.-cm.}$$

La sección que necesitamos deberá tener un módulo Z, cuyo valor sea, por lo menos,

$$Z = \frac{M}{K} = \frac{6.270000}{600} = 10450.$$

Es, pues, necesario que la sección que se adopte tenga una altura igual ó mayor que 78 centímetros y un módulo que no sea menor que 10450.

En el cuadro de la pág. 506 encontramos que el perfil número 36 cumple con ambas condiciones, puesto que para él es $h = 80$ centímetros y $Z' = 10650$, valores ambos que difieren poco por exceso de los necesarios.

Si aplicáramos la fórmula (1) de corrección del alma encontraríamos en números redondos

$$\Delta e = 0{,}2 \text{ cm}.$$

Aceptadas las dimensiones del perfil núm. 36, excepto el espesor del alma, que se reduce de 1 á 0,8 centímetros, el peso por metro lineal de viga quedaría por tal causa reducido, de 275 á unos 263,2 kilogramos, atribuyendo 7800 kilogramos al metro cúbico de hierro.

La resolución del problema tercero, cualquiera que sea la forma de la sección de la viga, no presenta ninguna dificultad, después de lo dicho, en general, en el lugar oportuno.

501. Vigas compuestas de hierro, de alma llena y sección variable.—En los problemas que acabamos de resolver hemos supuesto que la sección de la viga era constante. En tal concepto, y tratándose de vigas apoyadas por sus extremos, es claro que allí donde se desarrolle el mayor momento de flexión, es decir, en la sección peligrosa, la tensión unitaria máxima tendrá el valor asignado al coeficiente de seguridad, con corta diferencia, y en tal región presentará la viga el grado de resistencia impuesto; pero es evidente que en todas las demás secciones el coeficiente de trabajo irá siendo cada vez menor, hasta reducirse á cero en los apoyos, donde el momento de flexión se anula.

Resulta, pues, que en las vigas de sección constante, todas las secciones, excepto la peligrosa, son resistentes con exceso, y tanto más, cuanto más se acercan á los apoyos. Hay, por tanto, en tales vigas exceso de materia, y además está mal repartida.

Para grandes luces y cargas importantes, es conveniente que la sección sea variable, porque de tal suerte, sin menoscabo de la resistencia de la obra, se puede obtener una economía de consideración.

Esto se consigue en la práctica proporcionando el espesor de las tablas, en las diversas regiones de la viga, al valor variable del momento de flexión, no de manera gradual como teóricamente sería necesario, pues esto es imposible, sino componiendo aquellas con varias chapas de palastro: la primera, que comprende todo el largo de la viga y asegura la unión con las escuadras, y las demás, cada vez más cortas, para aumentar el espesor de las tablas hacia la región central, resultando así escalonada la superficie externa de ambas cabezas.

Pudiera, además, reducirse la sección del alma desde los extremos hacia el centro, para proporcionar en cierto modo la resistencia de aquella parte de la viga al valor variable del esfuerzo cortante, el cual, como sabemos, va creciendo desde el centro hasta los apoyos, donde alcanza su valor máximo. Para ello se dividiría la viga en varias zonas, adoptando la misma sección resistente para las regiones simétricas; pero de tales variaciones de sección prescindiremos nosotros, porque su empleo estaría suficientemente motivado en las grandes vigas, en cuyo estudio no hemos de ocuparnos.

502. Supongamos, para fijar las ideas, que se trate de determinar la sección de una viga de hierro, compuesta de un alma, cuatro escuadras y dos tablas de espesor variable, apoyada por sus extremos, de longitud L y sometida á una carga permanente P, uniformemente repartida, y á otra móvil Q, que recorre la viga en toda su longitud, advirtiendo que en la carga P se comprende el peso propio de la construcción, cuyo valor aproximado se calcula como luego veremos.

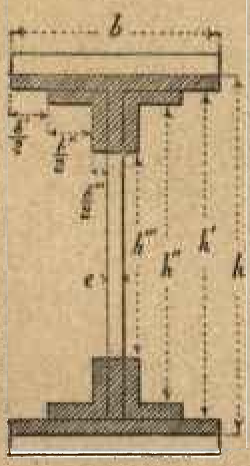
La sección que buscamos se compone de dos partes: una constante, formada por el alma, las cuatro escuadras y las dos primeras chapas que abarcan todo el largo de la viga, y otra variable, constituída por las chapas que hay que añadir para aumentar el espesor de las tablas de trecho en trecho, desde los extremos hacia el centro.

Las dimensiones de la parte constante se definen de antemano, sin perjuicio de rectificarlas luego, atendiendo á las proporciones usuales que marca el siguiente cuadro:

Altura de la viga en metros.	Anchura de las tablas.	Espesor del alma en centímetros	Lado de las escuadras en centímetros.
h	b	e	c
Hasta 1^m	$\frac{1}{3}h$ á $\frac{1}{2}h$	0,5 á 0,8	5 á 8
De 1 á 2^m	$\frac{1}{4}h$ á $\frac{1}{2}h$	1,0 á 1,2	8 á 12
De 2 á 4^m	$\frac{1}{4}h$ á $\frac{1}{3}h$	1,2 á 1,5	12 á 15
Superior á 4^m	$\frac{1}{5}h$ á $\frac{1}{6}h$	1,5 á 1,8	12 á 15

Admitiremos, además, que tanto en la parte constante, como en la variable, la altura de la sección es igual á la de la primera, es decir, igual á h; y prescindiremos, para los efectos de la flexión, de la porción de alma comprendida entre las escuadras, considerando así que la parte constante es la que aparece rayada en la figura 214.

Fig. 214.



A virtud de la hipótesis de que h tenga el mismo valor en todas las regiones de la viga, podemos escribir, para una sección cualquiera, que

$$Z = Z' + Z'' \qquad (a)$$

siendo

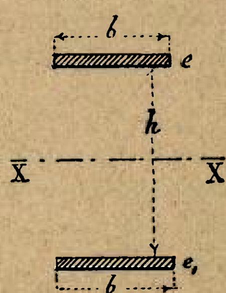
Z el módulo de flexión de la sección total;
Z' el de la parte constante;
Z'' el de la parte variable, correspondiente á las chapas que hay que añadir.

En cuanto al valor de Z' (figura 214), se calculará fácilmente, una vez definidas las dimensiones de la parte constante, por la expresión

$$Z' = \frac{1}{6} \frac{bh^3 - b'h'^3 - b'h''^3 - (b''' + e)\, h'''^3}{h} \qquad (a)$$

La expresión exacta de Z'' es la consignada en la pág. 372 (figura 137), pero si en ella sustituímos en vez de h su valor $h' + 2e$, siendo e el espesor del palastro, y prescindimos de los términos que en el numerador dependan de la 2.ª y 3.ª potencia de e y en el denominador se prescinde asimismo del término $2e$, teniendo en cuenta que h' de aquella fórmula se representa ahora por h (figura 215) y e por e_1 resultará la expresión sencilla que para los palastros se usa

Fig. 215.



$$Z'' = bhe_1$$

que da valores ligeramente erróneos, pero tanto más aproximados á los verdaderos, cuanto mayor sea h (altura de la parte constante).

Recordando, además, que $Z = \frac{M}{K}$, la ecuación (a) tomará la forma

$$\frac{M}{K} = Z' + bhe_1$$

ó bien, dividiendo por bh y llamando C á la constante $\frac{Z'}{bh}$,

$$\frac{M}{Kbh} = C + e_1 \qquad (1)$$

La expresión general de M, en el caso que consideramos, es

$$M = \frac{\frac{1}{2}P + Q}{L}\, x\,(L - x) \quad (2)$$

El máximo corresponde, como es fácil deducir, al caso en que la carga móvil Q pase por el punto medio de la viga, es decir, cuando $x = \frac{L}{2}$; y entonces la expresión de M será

$$M = \frac{1}{8}\,(P + 2Q)\,L \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduciría, eliminando M, el valor de e_1, en función de x; pero la distribución de las chapas en las cabezas, una vez fijado el grueso de aquéllas, ó, lo que es lo mismo, el número de palastros que debe haber en cada región de la viga, se determina gráficamente de la manera que vamos á indicar.

503. Cálculo de las cabezas.—Puesto que M es una función de x que se anula para $x = o$ y para $x = L$, según indica la expresión (2), supongamos construída la curva cuya ecuación es

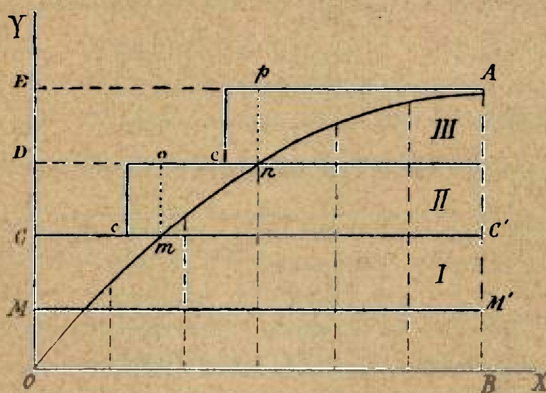
$$y = f(x) = \frac{M}{Kbh},$$

y sea ésta la OAB (fig. 216).

Sobre el eje de ordenadas tomemos la magnitud OC, igual á la constante calculada C, que sumada con e_1 ha de dar $\frac{M}{Kbh} = y$; á continuación, magnitudes CD = DE, etc., que representen el espesor que han de tener las chapas, y por los puntos de división tracemos paralelas al eje de abscisas, que cortarán á la curva en los puntos *m*, *n*, etc.

El contorno escalonado *monp*A y su simétrico (no representado en la figura) que envuelve á la referida curva por encima de la recta CC′, representará, no sólo el conjunto, sino el número y distribución de las chapas que hay que añadir, allí donde el

Fig. 216.



espesor del palastro, que abarca toda la longitud de la viga, es insuficiente.

Con efecto; dicho contorno satisface, como se ve en la figura, á la condición

$$e_1 + C \gtreqless \frac{M}{Kbh},$$

que es lo que en realidad puede exigirse en la práctica.

Generalmente, á cada chapa se le da un largo algo mayor que el necesario, resultando así, como contorno definitivo, el indicado en la figura con líneas llenas.

El rectángulo I representa la chapa que acompaña á las escuadras de extremo á extremo; los II y III, las dos chapas que hay que añadir donde se necesitan; y finalmente, el rectángulo MB representa un palastro de espesor igual á OM, del mismo ancho que las tablas, que no tiene existencia real, pero que equivale á las dos escuadras de una cualquiera de las cabezas. Claro es que de tal suerte podemos considerar que la sección resistente de la cabeza es un rectángulo cuya base b es el ancho de las tablas y cuya altura $C + e_1$ es la ordenada del diagrama de espesores, ó, lo que es lo mismo, del contorno escalonado, en la sección que se considere.

Como la curva $y = \frac{M}{Kbh}$ es simétrica respecto de la vertical del punto medio de la viga, en las aplicaciones basta construir una de sus mitades; y puesto que además pasa por el origen, se determinarán algunos otros puntos, dando á x en la expresión (2) diversos valores, de los cuales el mayor sea $x = \frac{L}{2}$ y dividiendo los resultados por Kbh. Así se obtendrán las ordenadas de tales puntos, por los que se hará pasar una línea continua, que será la curva teórica de espesores. Aunque no sean muchos los puntos determinados, los errores inherentes al trazado que acabamos de indicar no tienen en este caso ninguna importancia.

Puesto que las abscisas representan longitudes de viga y las ordenadas espesores de palastros de determinado ancho, siendo la unidad el centímetro, aceptaremos la escala de $\frac{1}{100}$ para las primeras (horizontales) y la de $\frac{1}{1}$ para las segundas (verticales).

Si quisiéramos apreciar en la misma curva los valores del momento de flexión M, fácil es disponer al lado del eje de ordenadas una escala de momentos, cuya graduación se haría observando que en ella la unidad estaría representada por la longitud $\frac{1}{Kbh}$; pero es también muy fácil para valuar un momento cualquiera, medir el valor de y con la escala de espesores, y multiplicar por Kbh el resultado.

Determinada la distribución de los palastros en las cabezas de la manera que acabamos de explicar, sólo resta calcular el coeficiente de trabajo en las regiones débiles, es decir, en aquellos puntos, como los c, e y A, en que el contorno escalonado se acerca más á la curva de espesores, contando con la disminución de resistencia debida á los taladros atravesados por los roblones en la sección que se considere.

Dicho coeficiente de trabajo se hallará fácilmente dividiendo la tensión total desarrollada en cualquiera de las cabezas de la sección de que se trate por el área resistente.

De la ecuación (1) se deduce que la tensión total tiene por expresión $\frac{M}{h}$. En cuanto al área resistente efectiva, se obtendrá restando del área total $(C + e_1)\,b$ la ocupada por los taladros ó agujeros de los roblones.

504. **Cálculo del alma.**—El esfuerzo cortante máximo se engendra en los apoyos al pasar por ellos la carga Q. Su valor será, por tanto,

$$T = \frac{1}{2} P + Q.$$

Calculada el alma para que sea capaz de resistir á este esfuerzo, su espesor deberá ser

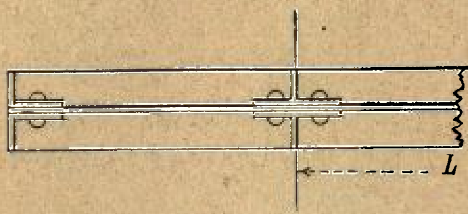
$$e \geqq \frac{T}{kh},$$

siendo k el coeficiente de seguridad por centímetro cuadrado al esfuerzo cortante, que generalmente se toma igual á unos 400 kilogramos, y h la altura de la viga.

Suele ofrecer el alma en ciertos casos exceso de resistencia, porque el espesor mínimo que se acepta es de unos 0,8 centímetros, no sólo para dotarla de mayor rigidez, sino con objeto de prevenir los efectos de la oxidación.

Finalmente, para aumentar más la rigidez del alma se emplean montantes que se disponen con hierros en simple T á modo de doble cubrejunta y se colocan de trecho en trecho, pero sobre todo encima de los apoyos. Además, en los extremos de la viga, contando con la entrega que deben ofrecer, se refuerza el alma, volviendo las escuadras en ángulo recto, de cuya suerte resulta la disposición que representa en proyección horizontal la figura 217.

Fig. 217.



505. Ejemplo.—Determinar la sección de una viga de hierro, compuesta de un alma, cuatro escuadras y dos tablas de espesor variable, siendo los datos del problema los siguientes:

Luz salvada (distancia entre apoyos)..	$L = 12^m = 1200$ cm.
Carga permanente, uniformemente repartida........................	$P = 10000$ kg.
Carga móvil........................	$Q = 11000$ kg.
Coeficiente de trabajo que se admite á la flexión	$K \leqq 600$ kg. por cm².
Coeficiente de trabajo que se admite al esfuerzo cortante.................	$k \leqq 300$ » » »

Admitamos las signientes dimensiones para la parte constante de la sección:

Alma....................	$80 \times 0{,}8$ cm.
Escuadras..............	$8 \times 8 \times 1$ cm.
1.ª chapa...............	35×1 cm.

Las cantidades que entran en la expresión de Z' (módulo de la parte constante) son:

$$
\begin{array}{llll}
b & = 35 & h & = 80 \\
b' & = 18{,}2 & h' & = 78 \\
b'' & = 14 & h'' & = 76 \\
e + b''' & = \;\;2{,}8 & h''' & = 62
\end{array}
$$

Si aplicamos la fórmula (*a*) de la pág. 521, resultará

$$Z' = 5146$$

La constante C y el divisor Kbh, tienen los valores siguientes:

$$C = \frac{Z'}{bh} = \frac{5146}{35 \times 80} = 1{,}8$$

$$Kbh = 600 \times 35 \times 80 = 1.680000$$

506. Peso propio de la viga.—Es necesario determinar *à priori*, aunque sólo sea aproximadamente, el peso propio de la viga; porque representando una carga repartida de cierta consideración, los momentos de flexión que engendra no pueden despreciarse, sino que, por el contrario, se han de sumar á los originados por las cargas que á ella están aplicadas.

Para esto, supondremos por el momento que la viga sea de sección constante, en cuyo caso, si aceptamos que el peso del metro cúbico de hierro es de 7800 kilogramos, y apreciamos con el metro las longitudes, llamando Ω al área de la sección recta de la viga, L á la longitud de la misma (comprendida entre los apoyos) y P_1 al peso propio, aproximado, tendremos

$$P_1 = 7800\ \Omega\ L.$$

El área Ω se compone de dos partes: la que corresponde á las dos cabezas, que llamaremos $2\omega_1$ y la del alma, que será ω_2. Esta última la conocemos; puesto que hemos aceptado un espesor de 0,8 cm. y una altura de 80 cm., y será por tanto,

$$\omega_2 = 64 \text{ cm}^2.$$

En cuanto á ω_1, comprenderá, no sólo el área de la sección de las chapas necesarias en una de las cabezas, sino la de aquella otra chapa hipotética que dijimos era equivalente á las dos escuadras, como si estuvieran concentradas en las tablas.

Observando que $\omega_1 K$ representa, tanto la fuerza de extensión desarrollada en la cabeza inferior como la de compresión á que resiste la cabeza superior, es claro que siendo h, sin gran error, la distancia de aquellas fuerzas, las cuales forman el par que equilibra al momento exterior M, su momento será $\omega_1 K h$ y por lo tanto podremos escribir que

$$\omega_1 = \frac{M}{hK}, \qquad (a)$$

siendo M el momento máximo de flexión, calculado con los valores conocidos de P y de Q, el cual será, por tanto:

$$M = \frac{1}{8}(P + 2Q)\,L = \frac{10000 + 2 \times 11000}{8} \times 1200$$

ó bien

$$M = 4.800000 \text{ kg.-cm.}$$

El valor ω_1 será,

$$\omega_1 = \frac{4.8000000}{80 \times 600} = 100 \text{ cm}^2,$$

y el de Ω

$$\Omega = 2\omega_1 + \omega_2 = 2 \times 100 + 64 = 264 \text{ cm}^2,$$

ó en función del metro

$$\Omega = 0{,}0264 \text{ m}^2.$$

Por consiguiente el peso total será

$$7800 \times 0{,}0264 \times 12 = 2471 \text{ kg.}$$

Para tener en cuenta el peso debido á los cubrejuntas de los empalmes y á las cabezas de los roblones, admitiremos, en números redondos, como peso propio de la viga

$$P_1 = 3000 \text{ kg.}$$

Podemos, pues, aceptar, que las cargas á que aquella ha de resistir son:

Carga permanente, directamente aplicada		10000 kg.
Peso propio de la viga (aproximado).....		3000 »
Carga permanente total, uniformemente repartida..........................	P =	13000 kg.
Carga móvil..........................	Q =	11000 kg.

507. Curva de espesores.—Recordaremos que la ecuación de esta curva es

$$y = \frac{M}{Kbh}$$

siendo

$$M = \frac{\frac{1}{2}P + Q}{L} x(L - x)$$

Si sustituímos en esta última expresión los valores anteriores de P y Q, resultará:

$$M = \frac{175}{12} x(1200 - x),$$

que es la ecuación de la curva de momentos máximos, cuyas ordenadas, divididas por Kbh, nos darán las de la curva de espesores que necesitamos.

Para construir esta curva, haremos en la expresión de M, $x = 100$, 200..... etc., hasta 600, que es el valor de x correspondiente á la mitad de la luz, y dividiremos los resultados por Kbh = 1.680000.

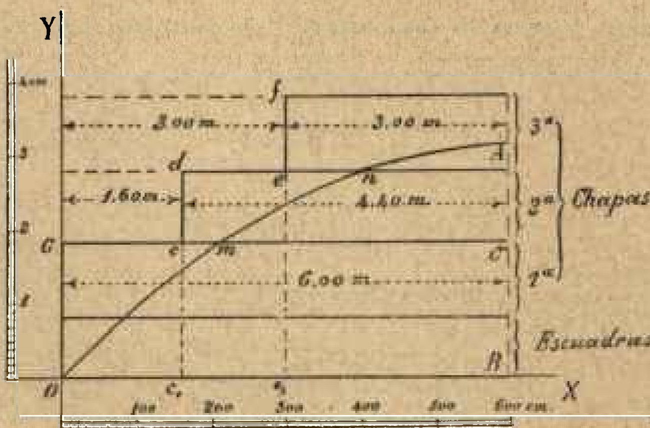
Hecho esto, resultan los valores siguientes para las coordenadas de seis puntos, sin contar con el origen, por donde sabemos que la curva pasa.

Para	$x = 100$ cm.,	$y = 0{,}95$ cm.	Para	$x = 400$ cm.,	$y = 2{,}78$ cm.
»	$x = 200$ »	$y = 1{,}74$ »	»	$x = 500$ cm.,	$y = 3{,}04$ »
»	$x = 300$ »	$y = 2{,}34$ »	»	$x = 600$ cm.,	$y = 3{,}12$ »

Fijada la situación de estos puntos, y uniéndolos con una línea continua que pase por el origen, resulta la curva $OmnA$ (figura 218).

Hemos encontrado antes que $C = 1,8$; por consiguiente, si tomamos la magnitud $OC = 1,8$ centímetros y trazamos la paralela CC' al eje de abscisas; suponiendo además que el grueso

Fig. 218.

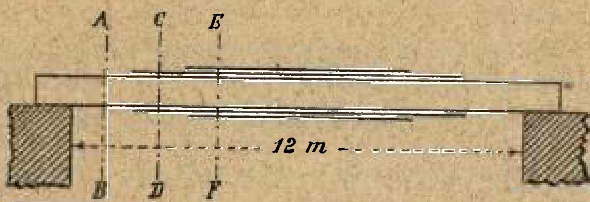


de las chapas haya de ser de 1 centímetro, á estas distancias trazaremos las paralelas necesarias, que en este caso son dos, porque la última ya rebasa el vértice de la curva de espesores. Así quedan definidos los puntos m y n, donde es necesario reforzar el espesor; pero aumentando algo el largo de las chapas, para tener en cuenta los efectos de las roblonaduras, los sustituiremos por los c y e que distan del origen: el primero $1^m,60$ y el segundo $3^m,00$. De esta suerte, las verticales cd y ef acabarán de limitar el contorno que define la distribución de los palastros.

Así resulta, que sobre las escuadras va una chapa de 1 centímero de grueso y 12 metros de longitud. A los $1^m,60$ de los extremos se refuerza con otra del mismo grueso y $8^m,80$ de largo; y, finalmente, ocupando la parte central va la tercera chapa, también de 1 centímetro de grueso, cuyos extremos distan de los apoyos 3^{m},00, según indica la figura, y cuya longitud es, por lo tanto, de 6 metros.

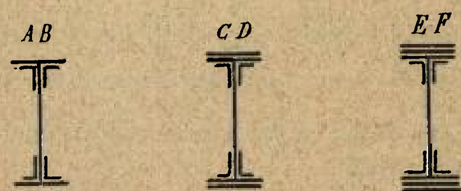
Las figuras 219 y 220 hacen ver la distribución de los palastros en ambas cabezas, así como los tres perfiles distintos que resultan para las regiones en que hay una, dos ó tres chapas.

Fig. 219.



Hay que tener presente que el material acumulado lo más lejos posible del eje neutro es el que más influye en el valor de Z, y por tanto en la resistencia de la sección. Por esta causa no debe exagerarse el espesor de las escuadras ó hierros de ángulo, elementos que, por estar más cerca del eje neutro, influyen menos que las tablas en la indicada resistencia.

Fig. 220.



Tampoco es conveniente que el número de chapas sea excesivo, lo que resultará si se eligen de poco grueso, porque se complica en extremo la construcción de la viga.

Finalmente, los empalmes de los palastros en las cabezas se hacen á juntas encontradas, de la manera que puede estudiarse en los tratados especiales.

508. Comprobación de la resistencia de la viga. Para comprobar las condiciones de resistencia de la viga, cuya forma y dimensiones quedan definidas, y averiguar, por tanto, cual será el coeficiente de trabajo del material en las regiones débiles, es necesario, cuando convenga proceder con cierto rigor, rectificar el peso propio y tener además en cuenta la influencia de las roblonaduras, cuyos taladros debilitan la viga y reducen la sección resistente efectiva, en términos que no deben despreciarse.

Determinaremos el volumen de los diferentes elementos que componen la viga de que se trata.

Las 6 chapas de las cabezas, suman una longitud de

$$2 \times (12 + 8{,}80 + 6) = 53{,}60 \text{ m.},$$

y como todas tienen $0^m{,}35$ de ancho y $0^m{,}01$ de grueso, el área de la sección recta de una chapa será

$$0{,}35 \times 0{,}01 = 0{,}0035 \text{ m}^2,$$

resultando, para los $53^m{,}60$ de chapa (sin contar la parte que corresponde á las entregas) un volumen de

$$0{,}0035 \times 53{,}60 = 0{,}187600 \text{ m}^3.$$

Las 4 escuadras dan, entre los apoyos, una longitud de

$$4 \times 12 = 48 \text{ m.},$$

y como tienen $0^m{,}08$ de lado, y $0^m{,}01$ de grueso, el área de su sección será

$$(0{,}08 + 0{,}07) \times 0{,}01 = 0{,}0015 \text{ m}^2,$$

y el volumen, en los 48 metros de hierros de esta clase, será

$$0{,}0015 \times 48 = 0{,}072000 \text{ m}^3.$$

El volumen correspondiente á los 12 metros de alma, comprendida entre los apoyos, es

$$12 \times 0{,}80 \times 0{,}008 = 0{,}076800 \text{ m}^3.$$

El volumen de la viga, en los 12 metros de luz, será el siguiente:

Chapas....................	0,187600
Escuadras..................	0,072000
Alma......................	0,076800
Suma..............	0,336400 m³.

Aceptando que el peso del metro cúbico de hierro es de 7800 kilogramos, los 12 metros de viga comprendidos entre los apoyos pesarán:

$$0,3364 \times 7800 = 2623,92 \text{ kg.}$$

Estudiada la organización de la viga, y conocido que fuera el diámetro de los roblones y el largo de las chapas, y como consecuencia el número y dimensiones de los cubrejuntas, así como el númro total de roblones, se hallaría el peso que habría que agregar al anteriormente calculado. Aunque la relación entre ambos pesos no puede ser constante, para abreviar suele deducirse aproximadamente el peso total de la viga, multiplicando el primero por un coeficiente $1 + K$, mayor que la unidad, en que K varía de 0,15 á 0,30.

Para nuestro razonamiento supondremos que el peso resultante sea de 3000 kilogramos, el mismo que al principio habíamos aceptado, de cuya suerte la expresión general de M seguirá siendo

$$M = \frac{175}{12} x(1200 - x).$$

Como en los bordes de las chapas no van roblones, consideraremos como secciones débiles la del punto medio y aquellas que, situadas á la izquierda de los puntos *c* y *e* ó á la derecha de sus simétricos, distan de los extremos más próximos, $1^m,55$ y $2^m,95$ respectivamente. De suerte que las tres secciones que importa considerar, son las que tienen por abscisa, $x = 155$, $x = 295$ y $x = 600$.

Si llamamos ω_1 al área de la sección resistente de una de las cabezas, de la expresión (*a*) de la pág. 528, deduciremos que el coeficiente de trabajo habremos de calcularlo por la fórmula

$$K = \frac{M}{\omega_1 h}.$$

Suponiendo que el diámetro de los roblones sea de 2 centímetros, y observando que ω_1 es la diferencia entre el área total de la cabeza y la ocupada por los taladros de los roblones, el cálculo será sencillo, inspeccionando las figuras 221, 222 y 223 que indican claramente el número y dimensiones de los agujeros en las secciones 1.ª, 2.ª y 3.ª que consideramos.

Fig. 221.

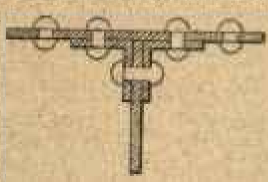


Fig. 222.

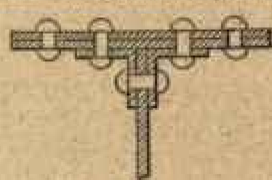
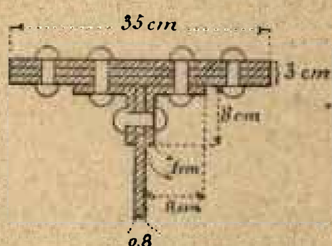


Fig. 223.



Por vía de ejemplo, determinaremos ω_1 en el caso de la figura 223, que corresponde á la sección del punto medio de la viga, pues el cálculo para los otros dos casos se hará de modo análogo..

El área de la sección recta de la cabeza (parte rayada, figura 214, pág. 520) es

$$35 \times 3 + 16{,}8 \times 1 + 7 \times 2{,}8 = 141{,}4 \text{ cm}^2.$$

La ocupada por los roblones, es

$$2 \times (3 \times 2 + 4 \times 2 + 2{,}8) = 33{,}6 \text{ cm.}^2.$$

Por consiguiente resultará

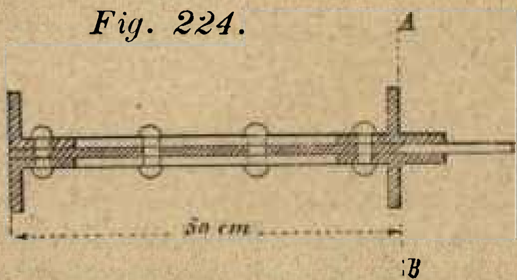
$$\omega = 141{,}4 - 33{,}6 = 107{,}8 \text{ cm}^2.$$

Los valores de M, ω_1, $\omega_1 h$, y K, para las secciones definidas por las abscisas que anteriormente indicamos, son los siguientes:

x	M	ω_1	$\omega_1 h$	K
155	2.362135	57,8	4624	510,8
295	3.893385	80,8	6464	602,3
600	5.250000	107,8	8624	608,7

Estos resultados nos dicen que la región más débil de las cabezas corresponde al punto medio de la viga, donde el metal trabajará á razón de 608,7 kg., por cm²; valor perfectamente aceptable, no sólo por la pequeñísima diferencia que ofrece, respecto al que habíamos fijado como coeficiente de seguridad, sino porque en casos análogos al que acabamos de estudiar, y para luces inferiores á 30 metros, se admite que dicho coeficiente valga de 650 á 700 kg. por cm².

Fig. 224.



Para comprobar la resistencia del alma, basta considerar uno de sus extremos, que supondremos organizado como indica la figura 224 (proyección horizontal); es decir, formando un verdadero montante compuesto de un trozo de alma de 50 cm., 2 hierros en ángulo de $8 \times 8 \times 1$ cm., y 2 en simple T de $16 \times 8 \times 1$ cm.

Este montante ha de resistir por compresión al esfuerzo cortante máximo, ó lo que es lo mismo, á la reacción desarrollada en el apoyo, en el momento de pasar por él la carga móvil; fuerza cuyo valor es

$$T = \frac{1}{2} P + Q = \frac{13000}{2} + 11000 = 17500 \text{ kg.}$$

El área total de la ecuación causada por un plano horizontal que pase por la fila de roblones que unen el alma y las escuadras, será la siguiente:

Hierros en ángulo.....	$2 \times 15 \times 1$......	$= 30$ cm²
Id. en simple T...	$2 \times 23 \times 1$......	$= 46$ »
Trozo de alma........	$50 \times 0{,}8$	$= 40$ »
	Suma........	116 cm²

El área ocupada por los 4 roblones que indica la figura, suponiendo que sean de 2 cm. de diámetro, es

$$2 \times (2{,}8 \times 2 + 0{,}8 \times 2) = 2 \times 7{,}2 = 14{,}4 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto el área resistente resultará igual á

$$116 - 14{,}4 = 101{,}6 \text{ cm}^2,$$

y el coeficiente de trabajo efectivo

$$K = \frac{17500}{101{,}6} = 172{,}2 \text{ kg. por cm}^2,$$

por donde vemos que el alma en las regiones extremas, reforzadas como hemos dicho, es perfectamente resistente, toda vez que la condición $k < 300$, queda satisfecha con exceso.

Por último, si consideramos una sección recta vertical del alma, inmediata á la arista del apoyo, es decir, situada á la derecha y muy cerca del plano AB, la sección resistente será la del alma que vale $0{,}8 \times 80 = 64$ cm², disminuída en la que ocupan los dos roblones que pueden resultar cortados por el plano secante, y cuyo valor es $2 \times 2 \times 0{,}8 = 3{,}2$ cm². Dicha sección resistente tendrá en consecuencia un área de $64 - 3{,}2 = 60{,}8$ cm².

Admitiendo que el esfuerzo cortante, para la sección supuesta sea el mismo que antes hemos considerado, es decir el máximo de T, resultará ahora el siguiente coeficiente de trabajo.

$$k = \frac{17500}{60{,}8} = 287{,}8 \text{ kg.}$$

Podemos, pues, afirmar que en todas las regiones del alma se satisface á la condición impuesta, $k \overline{\overline{<}}\ 300$ kg. por cm².

509. Observación.—Cuando dos ó más vigas compuestas han de resultar solidarias, formando parte de un sistema más complicado, como ocurre en el caso de los puentes metálicos, es necesario enlazarlas por medio de determinadas piezas llamadas riostras que dotan al conjunto de la rigidez necesaria en sentido lateral.

Para el estudio de los arriostramientos, así como para los demás extremos relativos á aquellas obras metálicas, deben consultarse en caso necesario las obras especiales, como la ya citada del Ingeniero de Caminos Sr. Gaztelu, *Práctica usual de los cálculos de estabilidad de los puentes.*

510. Vigas de hierro, de celosía.—Se organizan de manera parecida á sus similares de madera, con la diferencia de que los pernos se sustituyen por roblones y las cabezas se componen, como para las de alma llena, de dos escuadras y una tabla formada de una ó varias planchas.

Siendo aplicable á estas vigas cuanto hemos dicho de una manera general al estudiar las de celosía de madera, y como por otra parte no debemos ocuparnos de las vigas para grandes luces y cargas importantes en movimiento, nos limitaremos á presentar el siguiente

511. Ejemplo.—Calcular una viga de hierro, en celosía ordinaria, con los siguientes datos.

Luz salvada .... $L = 12\,m = 1200$ cm.
Carga uniformemente repartida..... $P = 22500$ kg.
Altura de la viga................. $h = \frac{L}{12} = 1$ m. $= 100$ cm.
Coeficiente de seguridad á la flexión $K = 700$ kg. por cm².
Id. de íd. al esfuerzo cortante........................ $k = 500$ » »

La celosía ha de ser de 2.º orden.

512. Cálculo de las cabezas.—Ante todo, determinemos el peso aproximado de la viga, teniendo presente cuanto se dijo en el problema que precede.

El área de la sección de una cabeza es

$$\omega_1 = \frac{M}{hK},$$

siendo M el momento de flexión máximo, calculado con el valor dado de P, erróneo por defecto, puesto que no comprende el peso propio de la viga, todavía desconocido.

El valor de M es

$$M = \frac{1}{8}\,PL = \frac{22500 \times 1200}{8} = 3.375000 \text{ kg.-cm.}$$

Por lo tanto el de ω_1 será

$$\omega_1 = \frac{3.375000}{100 \times 700} = 48,2 \text{ cm}^2.$$

ó en números redondos

$$\omega_1 = 50 \text{ cm}^2.$$

Si para calcular ω_2, suponemos que las barras de la celosía han de ser hierros planos de 1,2 centímetros de grueso, y además que la relación entre la superficie metálica y la total del alma sea próximamente de 0,7, tendremos

$$\omega_2 = 0{,}7 \times 100 \times 1{,}2 = 84 \text{ cm}^2,$$

Resultará, en consecuencia

$$\Omega = 2\omega_1 + \omega_2 = 2 \times 50 + 84 = 184 \text{ cm}^2;$$

ó expresando este área total en metros cuadrados,

$$\Omega = 0{,}0184 \text{ m}^2;$$

y los 12 metros de viga pesarán

$$12 \times 0{,}0184 \times 7800 = 1722 \text{ kg}.$$

Si para tener en cuenta la materia que suponen las roblonaduras, cubrejuntas y aumento de escuadría en las piezas para que ofrezcan la sección resistente necesaria, multiplicamos el valor que precede por el coeficiente 1,3, resultará el siguiente peso propio aproximado:

$$P_1 = 1{,}3 \times 1722 = 2239 \text{ kg}.$$

En beneficio de la resistencia, y en números redondos, aceptaremos

$$P_1 = 2500 \text{ kg}.$$

Por consiguiente la carga total uniformemente repartida, que hemos de considerar para el cálculo, será

$$P = 22500 + 2500 = 25000 \text{ kg}.$$

Así tendremos:

Momento máximo de flexión:

$$M = \frac{1}{8} PL = \frac{25000 \times 1200}{8} = 3.750000 \text{ kg.-cm}.$$

Area resistente que deben ofrecer las cabezas:

$$\omega_1 = \frac{M}{hK} = \frac{3.750000}{100 \times 700} = 53{,}6 \text{ cm}^2.$$

Si admitimos escuadras de $7 \times 8 \times 1$ centímetros y roblones de 2 centímetros de diámetro, el área resistente de las 2 escuadras será

$$30 - 4 \times 2 \times 1 = 22 \text{ cm}^2;$$

luego cada tabla debe ofrecer un área resistente de

$$53{,}6 - 22 = 31{,}6 \text{ cm}^2.$$

Si fijamos el ancho de las tablas en $\frac{1}{3} h$, es decir en 33 centímetros, y observamos que siendo δ el diámetro de los roblones, b el referido ancho y e el espesor de aquellas, se tiene

$$e(b - 2\delta) = 31{,}6;$$

el espesor que deben tener las tablas en la sección peligrosa será

$$e = \frac{31{,}6}{33 - 2 \times 2} = 1{,}09 \text{ cm.},$$

ó en números redondos

$$e = 1{,}1 \text{ cm}.$$

En vista de este resultado, aceptaremos para las tablas una sola chapa en cada cabeza, que abarque toda la longitud de la viga.

513. Cálculo de las barras de la celosía. — El esfuerzo cortante máximo, es

$$T = \frac{1}{2} P = \frac{25000}{2} = 12500 \text{ kg};$$

pero como la celosía es de 2.º orden, á cada nudo ó cruzamiento corresponderá la mitad, es decir, 6250 kilogramos. Por lo tanto el esfuerzo de extensión ó de compresión que experimentan las barras será, puesto que $\cos\alpha = 0{,}707$ y $n = 2$;

$$t = \frac{T}{2n\cos\alpha} = \frac{12500}{2 \times 2 \times 0{,}707} = 4420 \text{ kg}.$$

Los roblones que aseguran los cruzamientos de las diagonales han de resistir por esfuerzo cortante á $\frac{1}{2}$ T = 6250 kg.

Por consiguiente las ecuaciones de resistencia serán:

Para los roblones, siendo n el número de los que entran en cada cruzamiento,

$$n\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)k = 6250. \qquad (1)$$

Y para las barras, hierros planos de ancho b y grueso e,

$$\left(b - n'\delta\right) e\,\mathrm{K} = 4420, \qquad (2)$$

siendo n' el número de roblones que debilitan la sección.

Aceptando $\delta = 2$ cm., y por tanto $\frac{\pi\delta^2}{4} = 3{,}14$ cm², y siendo $k = 500$, el número necesario de roblones en cada cruzamiento será [ecuación (1)],

$$n = \frac{6250}{3{,}14 \times 500} = 3{,}98;$$

y como n ha de ser un número entero, aceptaremos

$$n = 4,$$

de donde resultará

$$n' = 2.$$

Si fijamos el ancho de las diagonales, de manera que quepan los 4 roblones en la superficie de cruzamiento, haciendo, por ejemplo, $b = 10$, de la ecuación (2) se deduce que el espesor de los barras ha de ser

$$e = \frac{4420}{(10 - 2 \times 2) \times 700} = 1{,}05 \text{ cm.},$$

ó en números redondos

$$e = 1{,}1 \text{ cm.},$$

resultando, en consecuencia, una sección útil ó resistente de

$$(10-4) \times 1,1 = 6,6 \text{ cm}^2,$$

y como el esfuerzo que actúa es de 4420 kilogramos, las barras trabajarían por centímetro cuadrado á razón de

$$\frac{4420}{6,6} = 669,69 \text{ kg.}$$

Pero no basta que el coeficiente de trabajo resulte en estas piezas menor que el de seguridad $K = 700$ kilogramos; porque considerando cada porción de barra comprendida entre dos cruzamientos sucesivos, como un prisma de bases planas, sujeto á los efectos de la flexión lateral que puede provocar la compresión que lo solicita, no cabe prescindir de esta circunstancia importante, sin exponernos á que las barras no presenten la rigidez necesaria.

Por este motivo no pueden emplearse muchas veces hierros planos, como ocurre en el caso actual.

En efecto; la longitud libre es próximamente de unos 27,5 centímetros; y como la menor dimensión de la sección recta es de 1,1, la relación entre ambas magnitudes (representada por $\frac{L}{D}$, en la tabla de la página 319) resulta igual á 25; lo que exige, como fácilmente se deduce de dicho cuadro, que el coeficiente de trabajo no exceda de $0,537 \times 700 = 375,9$ kg. Esta condición no puede quedar satisfecha; porque dadas las dimensiones de los hierros planos que habíamos supuesto, el coeficiente de trabajo es, como antes hemos visto, de 669,3 kilogramos, es decir casi doble de lo que debía ser, teniendo en cuenta la influencia de la flexión lateral.

Por lo tanto, aceptaremos hierros perfilados en simple T, de $9 \times 4,5 \times 0,8$ cm. (catálogo de Altos Hornos, Bilbao), en los cuales el área de la sección total vale $(9 - 0,8 + 4,5) \times 0,8 = 10,16$ cm², y el área resistente, $10,16 - 4 \times 0,8 = 6,96$ cm².

La relación $\frac{L}{D}$ vale ahora próximamente 6; lo que prueba suficientemente que no hay que temer los efectos de la flexión lateral.

Claro es que cuando se emplean para las diagonales hierros perfilados, estos no pueden ir encepados entre las ramas verti-

Fig. 225.

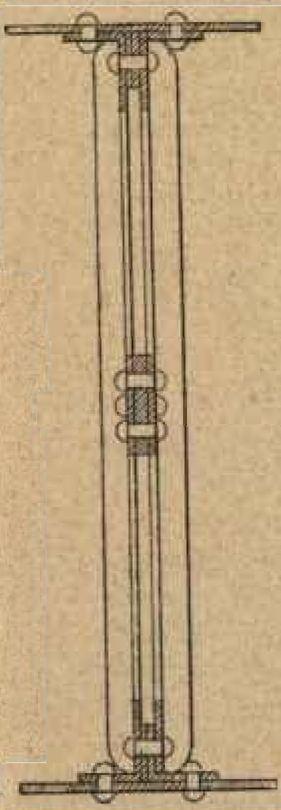
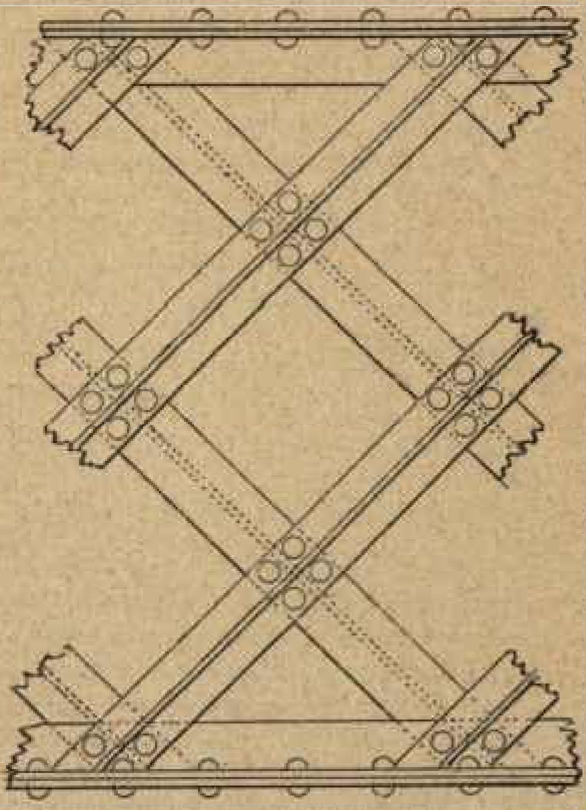


Fig. 226.



cales de las escuadras, sino que, por el contrario, hay que invertir el orden, ya se cosan los extremos de las barras á un trozo de alma, como pasa en las grandes vigas, ya se haga la unión directamente en la forma indicada por la figura 225. Esta y la 226 representan en escala de $\frac{1}{10}$ la sección y alzado de la viga que acabamos de estudiar.

514. Comprobación de la resistencia.— Determinadas ya las dimensiones de los diversos elementos de que se compone la viga, rectifiquemos ante todo su peso propio, como base de los cálculos de comprobación, cubicando para ello sns diferentes partes.

Las dos chapas de las cabezas suman una longitud de 24 metros; y como su ancho es $b = 0^m,33$ y su grueso es de $0^m,011$, el volumen de los 24 metros de chapa será

$$24 \times 0,33 \times 0,011 = 0,087120 \text{ m}^3.$$

Las 4 escuadras dan, en los 12^m de luz, un largo de 48^m; y como tienen $0^m,09 \times 0^m,07 \times 0^m,01$ de escuadría, el área de su sección será

$$(0,09 + 0,06) \times 0,01 = 0,0015 \text{ m}^2,$$

y el volumen correspondiente á los 48 metros, será, por tanto,

$$0,0015 \times 48 = 0,072 \text{ m}^3.$$

Cada diagonal completa puede valuarse en $1^m,38$ de longitud; porque á fin de disponer en buenas condiciones los cruzamientos extremos, que encepan á las ramas verticales en contacto de las escuadras, las mallas de la celosía deben tener unos $0^m,46$ de lado. Se necesitan, por tanto, 50 diagonales completas y 4 medias diagonales; en suma 52 diagonales completas, cuya longitud total resulta de $52 \times 1,38 = 71^m,76$.

La escuadría de las barras es de $0^m,09 \times 0^m,045 \times 0^m,008$. El área de su sección es de $0^{m^2},001016$, y el volumen en la longitud calculada,

$$0,001016 \times 71,76 = 0,072908 \text{ m}^3.$$

Suponiendo que las chapas son de tres metros de largo, se necesitan 6 cubrejuntas, que á $0^m,46$ de longitud una, dan un volumen de

$$0,46 \times 6 \times 0,33 \times 0,011 = 0,010019 \text{ m}^3$$

Las cuatro escuadras necesitan 8 cubrejuntas, si el largo de de aquellos hierros fuera de 4 metros. En tal supuesto, darían el siguiente volumen las cubrejuntas expresadas:

$$0,46 \times 8 \times (0,08 + 0,05) \times 0,01 = 0,004784 \text{ m}^3.$$

Por último, el hueco que queda en los cruzamientos de las diagonales hay que rellenarlo con unas chapas suplementarias, que figuran en número de 77, y cuyas dimensiones son $0^m,09 \times 0^m,09 \times 0^m,02$; dando un volumen total de

$$77 \times 0,09 \times 0,09 \times 0,02 = 0,012474 \text{ m}^3.$$

Haciendo la suma de los volúmenes calculados, tendremos:

	Metros cúbicos.
Chapas......................	0,087120
Sus cubrejuntas.............	0,010019
Escuadras...................	0,072000
Sus cubrejuntas.............	0,004784
Barras......................	0,072908
Suplementos.................	0,012474
Suma.........	0,259305

Si asignamos 7800 kg. al metro cúbico de hierro, el peso del volumen calculado será, en números redondos,

$$0,259305 \times 7800 = 2023 \text{ kg.}$$

Admitiendo que sean 848 los roblones necesarios y que cada cabeza pese 0,055 kg. habrá que añadir al peso anterior,

$$2 \times 848 \times 0{,}055 = 93{,}28 \text{ kg.}$$

y resultará un peso propio, para la porción de viga comprendida entre las aristas de los apoyos, de

$$P_1 = 2116{,}28 \text{ kg.},$$

ó en números redondos

$$P_1 = 2120 \text{ kg.}$$

lo que prueba que en el cálculo primitivo no valuamos tal peso por defecto, como es conveniente, en beneficio de la resistencia.

Este resultado basta para probar que los coeficientes de trabajo efectivo no excederán de los límites señalados, toda vez que el valor más exacto de la carga total será

$$P = 22500 + 2120 = 24620 \text{ kg.}$$

en vez de los 25000 kilogramos que habíamos supuesto para determinar las secciones resistentes.

De todas suertes, aunque, como ahora ocurre, pudiera parecer ociosa la comprobación de la resistencia, debe hacerse siempre; no sólo para justificar cumplidamente las dimensiones adoptadas, sino como medio de averiguar si en los cálculos primitivos se cometieron errores que no deban tolerarse.

Si así lo hiciéramos, tendríamos

$$M = 3.693000 \text{ kg.-cm.}$$

$$T = \frac{1}{2} P = 12310 \text{ kg.}$$

$$t = \frac{T}{2 \times 2 \cos\alpha} = 4353 \text{ kg.}$$

y en conclusión, los resultados que figuran en el siguiente cuadro:

ELEMENTOS de la viga.	ÁREA DE LA SECCIÓN			FUERZA		Coeficiente de trabajo por cm².
	Total	Ocupada por los taladros.	Resistente.	Designación.	Valor.	
	Cm²	Cm²	Cm²		Kg.	Kg.
Cabezas	66,30	12,40	53,90	$\frac{M}{h}$	36930	685,1
Barras	10,16	3,20	6,96	t	4353	625,4
Roblones	3,14	0,00	3,14	$\frac{T}{8}$	1539	490,1

Por último, la comprobación de la resistencia de los montantes que constituyen los extremos de la viga, no ofrece dificultad alguna, una vez conocida su organización, y en consecuencia su sección resistente.

515. Vigas armadas de hierro.—Todo cuanto se dijo, de una manera general, respecto á las vigas armadas de madera, es aplicable á las de hierro; así es que, para no repetir, nos limitaremos á estudiar un solo tipo por vía de ejemplo. Haremos antes, sin embargo, algunas ligeras consideraciones acerca de los diversos métodos de cálculo que en unas y otras pueden seguirse.

Supongamos que se trata de una viga armada por la parte inferior, con dos puntos de apoyo intermedios, los cuales dividen la longitud total de la viga en tres partes iguales, siendo, por tanto, $l = \frac{L}{3}$.

Los puntos de apoyo que crean las bielas no son puntos fijos, ni en rigor están de nivel con los extremos; pues aun cuando lo estuvieran antes de cargar la viga, luego de cargada tales puntos bajarían una cierta cantidad, no sólo por el acortamiento de las bielas sometidas á un esfuerzo de compresión, sino por el alargamiento de los tirantes que, como sabemos, trabajan por extensión; y esto sin contar con los defectos inevitables de montaje y con las variaciones de longitud producidas por los cambios de temperatura.

Claro es que si pudieran calcularse rigurosamente las desnivelaciones de los apoyos intermedios, podrían calcularse, á su vez, los verdaderos valores de los momentos y reacciones en dichos apoyos, así como los momentos máximos intermedios, y se podrían, por tanto, establecer las ecuaciones de resistencia de una manera exacta; pero todo esto complicaría en extremo el problema, sin que, por otra parte, hubiera la seguridad de haberlo resuelto bien; toda vez que el cálculo de aquellas desnivelaciones habría de reconocer necesariamente por base determinadas hipótesis, y en modo alguno hechos indiscutibles.

Si para simplificar el problema admitimos que los cuatro apoyos están en línea recta, cabe además suponer:

1.º Que la viga es rígida ó de tramos solidarios.

2.º Que es articulada ó de tramos independientes, aunque, en realidad, como ahora suponemos, sea de una sola pieza.

En el primer supuesto, las expresiones del momento máximo y de las reacciones en los apoyos intermedios, son las siguientes (tomo I, núms. **330** y **333**):

$$M = \frac{1}{10} pl^2, \qquad R_1 = \frac{11}{10} pl.$$

En el segundo supuesto, dichas expresiones son

$$M = \frac{1}{8} pl^2, \qquad R_1 = pl.$$

La primera hipótesis es favorable á la resistencia de las piezas adicionales, bielas y tirantes, puesto que las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas á los nudos intermedios son de mayor valor en este primer caso que en el segundo.

La segunda hipótesis, por el contrario, es favorable á la resistencia de la viga propiamente dicha ó cordón superior; puesto que ahora habría de calcularse partiendo de un valor mayor de M.

Pero es claro que si quisiéramos proceder favoreciendo la resistencia de todos los elementos de la viga armada, podríamos aceptar la primera hipótesis para la determinación de las fuerzas exteriores y la segunda para el cálculo del momento máximo de flexión.

Para apreciar las diferencias que resultan de estos diversos procederes, apliquemos los tres métodos de cálculo que acaban de indicarse, al siguiente

516. Ejemplo.—Calcular una viga de hierro, armada por la parte inferior, con dos puntos de apoyo intermedios (figura 227), siendo los datos del problema los siguientes:

Luz salvada por la viga............	$L = 9^m = 900$ cm.
Carga total, uniformemente repartida.	$P = 10800$ kg.
Longitud de cada uno de los tres tramos..........................	$l = \dfrac{L}{3} = 3^m = 300$ cm.
Flecha de la viga ó longitud de las manguetas.....................	$f = \dfrac{L}{9} = 1^m = 100$ cm.
Carga unitaria (por centímetro lineal de viga)......................	$p = \dfrac{P}{L} = 12$ kg.

Si tenemos en cuenta que los tramos son solidarios, las fuerzas que podemos suponer aplicadas á los nudos intermedios serán iguales entre sí é iguales á las reacciones, cuya expresión es $R_1 = R_2 = \dfrac{11}{10} pl$. Por tanto será:

$$\mathbf{1} = P_1 = \mathbf{2} = P_2 = \frac{11}{10} pl = \frac{11}{10} \times 12 \times 300 = 3960 \text{ kg}.$$

Las reacciones en los apoyos extremos, que necesitamos considerar para construir el diagrama recíproco, es decir, las fuerzas **3** y **4** serán también iguales entre sí, y como su suma ha de ser igual á **1** + **2**, tendremos

$$\mathbf{3} = \mathbf{4} = 3960 \text{ kg.}$$

Claro es que este valor no es el de las reacciones efectivas $R = R'$ que los apoyos extremos desenvuelven, pues cada una de ellas vale respectivamente la mitad de la carga total $P = 3pl$, siendo, por tanto, $R = R' = \frac{3}{2} pl = \frac{15}{10} pl.$

Las fuerzas **3** y **4** son las que podemos suponer aplicadas á los nudos extremos para que equilibren á las **1** y **2**, que lo están á los intermedios. El valor absoluto de dichas fuerzas no es más que la diferencia entre las reacciones efectivas y la porción de carga uniformemente repartida que puede suponerse concentrada en los apoyos extremos (admitiendo que cada uno de los intermedios soporta $\frac{11}{10}$ de la carga total) es decir, $\frac{4}{10} pl$, y así la carga $P = 3pl$ se distribuirá de la manera siguiente:

Sobre los nudos extremos................	$2 \times \frac{4}{10} pl = \frac{8}{10} pl$
Sobre los intermedios .	$2 \times \frac{11}{10} pl = \frac{22}{10} pl$
Suma igual á la carga total.......	$\frac{30}{10} pl = 3\,pl = P.$

Resultará por tanto

$$\mathbf{3} = 4 = R - \frac{4}{10} pl = \frac{15}{10} pl - \frac{4}{10} pl = \frac{11}{10} pl = 3960 \text{ kg.},$$

como habíamos indicado.

Los momentos máximos de flexión en valor absoluto son iguales entre sí, se engendran en los nudos intermedios, y su valor es

$$M = \frac{1}{10} pl^2 = \frac{1}{10} \times 12 \times 300^2 = 108000 \text{ kg.-cm.}$$

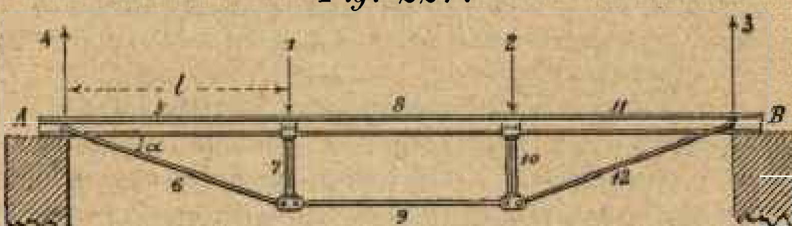
Si ahora prescindimos de la solidaridad de los tramos, suponiendo que éstos son independientes, las fuerzas que en tal hipótesis podemos suponer aplicadas á los nudos intermedios serán evidentemente

$$\mathbf{1} = \mathbf{2} = P_1 = P_2 = pl = 12 \times 300 = 3600.$$

Las reacciones que necesitamos considerar para la construcción de la figura recíproca serán por tanto:

$$\mathbf{3} = \mathbf{4} = \frac{P}{2} - \frac{1}{2}\,pl = \frac{3}{2}\,pl - \frac{1}{2}\,pl = pl = 3600 \text{ kg.}$$

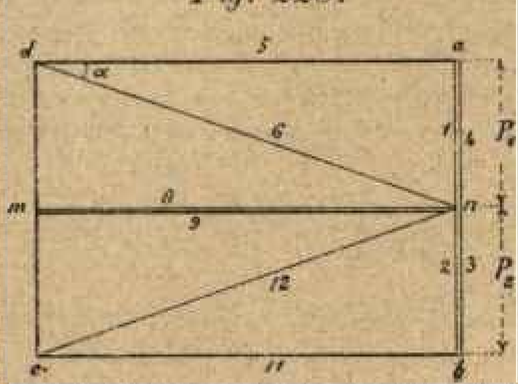
Fig. 227.



Y el momento máximo en valor absoluto, para cualquiera de los tramos, valdrá

$$M = \frac{1}{8}\,pl^2 = \frac{1}{8} \times 12 \times 300^2 = 135000 \text{ kg.-cm.}$$

Fig. 228.



Construyamos el diagrama de fuerzas interiores (fig. 228).

La figura directa es deformable, pero como su contorno coincide con el polígono funicular correspondiente al sistema de fuerzas exteriores, cuyo polígono es 1. 2. 3. 4, (que podemos suponer trasladado á *dc)*, relativo al polo *n*, y tomando A como punto de partida, será posible construir la figura recíproca.

Para esto podemos fijar, por ejemplo, como escala de fuerzas $0^m,001 = 200$ kilogramos, en cuyo caso tomaremos la magnitud *an* igual á la representación lineal de la fuerza exterior **1**, á continuación la *nb*, de igual tamaño que la anterior, puesto que ha de representar la fuerza exterior $\mathbf{2} = \mathbf{1}$. Las magnitudes iguales $bn = \mathbf{3}$ y $na = \mathbf{4}$ representan las fuerzas que para equilibrar á las **1** y **2** pueden suponerse aplicadas á los extremos B y A de la viga. La línea doble *ab*, representará, por tanto, el polígono de las fuerzas exteriores **1, 2, 3, 4,** las cuales constituyen un sistema en equilibrio.

Construída la figura recíproca, como ya se sabe, vemos que los tirantes **6, 9** y **12** son piezas que han de trabajar por extensión, que las bielas **7** y **10** son piezas comprimidas, y que los tres tramos de la viga primitiva **5, 8** y **11**, son piezas comprimidas y flexadas; puesto que además de la compresión que el diagrama de tensiones manifiesta, han de resistir al momento máximo de flexión correspondiente; de modo que son piezas sometidas á una flexión compuesta.

Si medimos las líneas de la figura recíproca, tomando el milímetro por unidad, y multiplicamos los resultados por 200, tendremos los valores numéricos de las fuerzas interiores en kilogramos; pero á semejanza de lo que hicimos en otro lugar, podemos también deducir dichos valores por medio de las siguientes fórmulas, que fácilmente se deducen de la figura recíproca, teniendo en cuenta que en la figura directa se verifica que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{f}{\sqrt{l^2+f^2}} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+f^2}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{l}.$$

Son las siguientes:

Compresión de la viga....... $5 = 8 = 11 = \frac{P_1 l}{f}$

Extensión de los tirantes inclinados................ $6 = 12 = P_1 \frac{\sqrt{l^2 + f^2}}{f}$

Extensión del tirante horizontal..................... $9 = P_1 \frac{l}{f}$

Compresión de las bielas..... $7 = 10 = P_1$.

Hemos visto que á P_1 y á M hay que atribuir valores distintos, según se consideren á los tramos de la viga como solidarios, es decir, tal como son en realidad en el caso supuesto, ó independientes; habiendo resultado:

Para la primera hipótesis..... $P_1 = 3960$, $M = 108000$

Y para la segunda hipótesis. $P_1 = 3600$, $M = 135000$

Pero en beneficio de la resistencia podemos atribuir á P_1 y M los mayores valores que anteceden, en cuyo caso un tercer método de cálculo corresponderá á $P_1 = 3960$ y $M = 135000$.

Si en las fórmulas anteriores hacemos $l = 300$, $f = 100$, y además sustituimos sucesivamente los valores de P_1 que corresponden á las tres hipótesis indicadas, tendremos los siguientes resultados:

DESIGNACIÓN	HIPÓTESIS		
	1.ª	2.ª	3.ª
	Kilogramos.	Kilogramos.	Kilogramos.
Compresión de la viga	11880	10800	11880
Extensión de los tirantes inclinados	12522	11384	12522
Extensión del tirante horizontal.	11880	10800	11880
Compresión de las bielas	3960	3600	3960
	Kg.—cm.	Kg.—cm.	Kg.—cm.
Momento máximo de flexión.....	108000	135000	135000

517. Cálculo de la viga primitiva.—Para dar idea clara de las diferencias que resultan de los procedimientos de cálculo antes indicados, y puesto que la viga primitiva ha de ser en doble T, admitamos las siguientes relaciones, que, como puede comprobarse, corresponden muy aproximadamente á uno de los perfiles del catálogo de «Altos Hornos» de Bilbao, que aceptaremos como solución práctica; tales son:

$$b = 0{,}445h; \qquad b' = 0{,}409h; \qquad h' = 0{,}886h.$$

Así, las expresiones del módulo Z y del área de la sección ω, en función de h, serán

$$Z = 0{,}0267\, h^3; \qquad \omega = 0{,}083\, h^2.$$

La ecuación general de resistencia, será, por tanto:

$$K = \frac{P}{0{,}083\, h^2} + \frac{M}{0{,}0267\, h^3}$$

Si dividimos por K, multiplicamos por h^3, y aceptamos como coeficiente de seguridad, K = 800, tendremos también

$$h^3 - \frac{P}{66{,}4}\, h - \frac{M}{21{,}36} = 0,$$

ecuación en que P representa la compresión de la viga y M el momento máximo de flexión á que ha de resistir.

Si ahora se sustituyen sucesivamente los valores de P y M, correspondientes á cada una de las tres hipótesis, que se consignan en el cuadro que precede, resultarán las ecuaciones siguientes:

$$h^3 - 178{,}9\ h - 5056{,}1 = 0 \ \ldots\ldots \quad (1)$$
$$h^3 - 162{,}65\ h - 6320{,}2 = 0 \ \ldots\ldots \quad (2)$$
$$h^3 - 178{,}9\ h - 6320{,}2 = 0 \ \ldots\ldots \quad (3)$$

Los valores aproximados de h, y como consecuencia los de Z y de ω que de ellas se deducen fácilmente, son los que á continuación se expresan:

De la (1)... $h = 20{,}6$; $Z = 233{,}4$; $\omega = 35{,}22$
» (2)... $h = 21{,}4$; $Z = 261{,}7$; $\omega = 38{,}01$
» (3)... $h = 21{,}7$; $Z = 272{,}8$; $\omega = 39{,}08$

Si acudimos ahora al catálogo de hierros de «Altos Hornos,» Bilbao, hallaremos para los perfiles señalados con los números 13 y 14, (alas anchas)

N.º 13.... $h = 20$, $Z = 216$, $\omega = 33{,}70$
N.º 14.... $h = 22$, $Z = 281$, $\omega = 39{,}80$

Vemos, pues, que en el caso que acabamos de estudiar, cualquiera de los tres métodos de cálculo nos hubiera conducido á aceptar, como solución práctica, el perfil núm. 14.

De todas suertes, para favorecer la resistencia de todas las piezas, conviene seguir el tercer procedimiento de cálculo, que, como ya hemos dicho, consiste en determinar las fuerzas interiores, partiendo de la repartición de las cargas que supone la solidaridad de los tramos, y en calcular el momento máximo de flexión, suponiendo que aquellos son independientes.

Algunos autores, sin embargo, teniendo en cuenta las escasas diferencias que ofrecen los métodos segundo y tercero, y en gracia á la mayor sencillez de los cálculos, prefieren el segundo método, tratando el sistema como si fuera articulado.

Esto en cuanto á la viga primitiva.

Respecto á las piezas adicionales, aceptaremos la solidaridad de los tramos cuando aquella sea de una sola pieza, y la independencia de los mismos, en el caso contrario.

518. Cálculo de los tirantes.—Consideremos únicamente los tirantes inclinados, que son los que han de resistir á un esfuerzo mayor, porque al horizontal se le puede dar la misma sección, en vista de que entre ésta y la que se deduce del cálculo resulta muy escasa diferencia, como fácilmente puede comprobarse.

La ecuación de resistencia es, como sabemos

$$\frac{P}{\omega} = K \qquad \text{ó bien} \qquad \omega = \frac{P}{K}$$

siendo P = **6** = **12** = 12522 kg.

Los tirantes han de ser hierros redondos, y si por su buena calidad pudiera aceptarse como coeficiente de seguridad á la extensión K = 1000 kg. por cm^2 tendremos

$$\omega = \frac{12522}{1000} = 12{,}522 \text{ cm}^2.$$

A esta sección corresponde un diámetro

$$d = 3{,}99 \text{ cm.}$$

ó en números redondos

$$d = 4 \text{ cm.}$$

Si quisiéramos que los tirantes trabajasen solamente á razón de 900 kilogramos por centímetro cuadrado, entonces resultaría

$$\omega = 13{,}913 \text{ cm.}^2 \qquad \text{y} \qquad d = 4{,}21 \text{ cm,}$$

ó en números redondos

$$d = 4{,}3 \text{ cm.}$$

519. Cálculo de las bielas.—Si fijamos por el momento el coeficiente de seguridad á la compresión en K = 800, y prescindimos de la influencia de la flexión lateral, de la ecuación de resistencia resultará, puesto que P = 3960,

$$\omega = \frac{P}{K} = \frac{3960}{800} = 4{,}95 \text{ cm}^2.$$

Supongamos que las bielas hayan de ser hierros de doble T.

El perfil núm. 7 del catálogo de «Altos Hornos», Bilbao, tiene una sección de 7,6 cm^2, y la menor dimensión de su contorno es $b = 4{,}2$ cm. La relación entre la longitud de la pieza

$L = 100$ cm. y dicha menor dimensión es

$$\frac{L}{b} = \frac{100}{4,2} = 23,8 \text{ próximamente.}$$

ó en números redondos

$$\frac{L}{b} = 24.$$

Prueba esto que es necesario tener en cuenta la influencia de la flexión lateral, reduciendo el coeficiente de seguridad, $K = 800$, en cuanto lo exija la expresada relación.

Si acudimos á la tabla de la página 319, veremos que para $\frac{L}{b} = 24$, corresponde $m = 0,544$; lo que nos dice que hay que tomar para K el valor $K = 0,544 \times 800 = 435$ próximamente.

A este valor de K corresponde una sección recta, cuyo valor es

$$\omega = \frac{3960}{435} = 9,1 \text{ cm}^2.$$

El perfil núm. 8 del referido catálogo de «Altos Hornos» es el que más se aproxima por exceso al que se necesita, puesto que su sección recta es $\omega = 10,69$ cm^2, siendo $b = 5$ cm.

Es inútil una nueva corrección, porque debiendo partir de un menor valor de $\frac{L}{b}$, $\left(\frac{L}{b} = \frac{100}{5} = 20\right.$ llegaríamos á un valor de ω, también menor; por consiguiente, aceptaremos como solución práctica el perfil núm. 8, para el cual el coeficiente de trabajo resultará

$$K = \frac{3960}{10,69} = 370,4 \text{ próximamente.}$$

Finalmente, como para $\frac{L}{b} = 20$, corresponde $m = 0,571$, dicho perfil podría trabajar sin inconveniente alguno á razón de $K = 0,571 \times 800 = 456,8$ kg. por centímetro cuadrado.

ENTRAMADOS HORIZONTALES

520. Para construir los suelos que separan los distintos pisos de un edificio, es necesario disponer una serie de piezas, cuyo conjunto recibe el nombre de *entramado horizontal,* y los cuales deben ofrecer, no sólo la resistencia necesaria para soportar las cargas permanentes y accidentales que las solicitan, sino el grado conveniente de rigidez á fin de que la curvatura originada por la flexión á que trabajan, no resulte apreciable á la vista; debiendo aparecer las superficies de la obra, correspondiente al techo y pavimento, planas y horizontales, y no convexas hacia abajo, como es frecuente observar en suelos de rigidez insuficiente.

Las piezas más largas, cuyos extremos descansan en los muros de la crujía, ó bien en sólidos puntos de apoyo, y sobre las cuales insisten otras más cortas y de menor escuadría, reciben el nombre de *vigas maestras.* Sobre estas se apoyan las piezas más cortas, que se denominan *cabios* ó *viguetas.*

Para grandes luces y cargas importantes, las vigas maestras se componen de diferentes partes, constituyendo *vigas armadas,* de las cuales ya nos hemos ocupado.

Cuando las dimensiones de la crujía lo consiente, el entramado se reduce á una serie de cabios paralelos entre sí, que salvan el ancho de aquella y se apoyan en los muros opuestos; pero si dicho ancho pasa de cierto límite, puede ser necesario ó conveniente organizar el entramado con vigas maestras colocadas paralelamente á la menor dimensión de la crujía y á distancias apropiadas para servir de apoyo á las viguetas.

En aquellos casos en que es necesario alejar el entramado de los muros, por ciertas regiones ocupadas, por ejemplo, por huecos de escalera de caja reducida, chimeneas, salidas de humo y dinteles sobre los cuales no deben referirse cargas importantes, se disponen cabios más cortos, llamados *maderos cojos,* los cuales se apoyan en piezas llamadas *brochales*, que á su vez descansan sobre los cabios adyacentes ó inmediatos á los maderos cojos.

Cualquiera que sea la pieza que se considere de un entramado horizontal, resultará sometida á cargas de flexión y dentro de alguno de los casos más sencillos estudiados en el tomo I, ó de los comprendidos en el cuadro de la pág. 337 y siguientes; pero si bien, considerando aisladamente cada pieza, los problemas á que puede dar lugar son fáciles, en cambio, cuando se considera el entramado en su conjunto, la cuestión presenta nuevo aspecto, no sólo para atender á la mayor economía de la obra, sino para acomodarse á las prácticas locales y dimensiones corrientes de las piezas que ofrece el comercio; lo que exige un estudio comparativo entre aquellas soluciones que se juzguen preferibles, de las varias á que se presta la organización de un entramado horizontal.

Aunque en muchos casos las piezas que se apoyan en los muros quedan en ellos empotradas, atendiendo á la poca entrega relativa de las mismas y á la imperfección de tales empotramientos, consideraremos para el cálculo y en beneficio de la resistencia, que las vigas y viguetas son piezas horizontales apoyadas por sus extremos.

521. Determinación de las cargas.—La carga unitaria, es decir, la carga por unidad superficial de entramado, cuyo conocimiento previo es indispensable para poder calcular la escuadría y separación de las piezas de un entramado horizontal, se compone de dos partes: la carga permanente ó peso muerto del suelo y la carga accidental ó sobrecarga.

La *carga permanente* comprende los siguientes pesos:

1.º El del forjado ó relleno de los claros que dejan las viguetas.

2.º El del pavimento y techo.

3.º El de los tabiques, si los hay.

4.º El peso propio del entramado.

La *carga accidental* está constituída por el peso de las personas y muebles en las habitaciones, el de los granos y forrajes en los graneros y heniles, el de la paja en los pajares, de los géneros en los almacenes, etc.

Con arreglo al objeto de la construcción, podrá fijarse aproximadamente el valor de la carga unitaria, partiendo de los datos que se consignan á continuación, sin perjuicio de que cuando convenga se haga un análisis detenido del valor de los sumandos que componen la carga total por unidad de superficie de entramado.

CARGAS TOTALES POR METRO CUADRADO PARA EL CÁLCULO DE LOS SUELOS.

DESIGNACIÓN.	Carga por metro cuadrado — Kilogramos.
Habitaciones ordinarias..................	300
Salas de reunión......................	450
Salas de edificios públicos............	550
Almacenes........................	600 á 1000

522. Peso propio del entramado.—En cuanto al peso propio de las piezas que componen el entramado, podrá ó no ser conocido de antemano, según que las circunstancias aconsejen emplear piezas de escuadría determinada, ó que, por el contrario, sea preciso calcular ésta. En el primer caso, la determinación de la carga total se deducirá con facilidad; pero en el segundo sólo podrá fijarse aproximadamente el valor de dicho peso propio, puesto que depende de dimensiones desconocidas. Con tal objeto pueden utilizarse los datos medios que contienen varios Manuales, ó bien podrá aumentarse en un 8 ó 10 por 100 la suma de los pesos representados por la sobrecarga, forjado, pavimento y techo, de cuya suerte se tendrá una carga total suficiente para un primer cálculo.

523. **Peso del forjado, pavimento y techo.**—La determinación de estos pesos depende del sistema de ejecución, espesor y materiales empleados en las indicadas obras complementarias del entramado; y para dar valor á tales cargas, podrán tenerse á la vista los datos que á continuación se expresan:

PESO DE LOS FORJADOS POR METRO CUADRADO DE PISO

SUELOS DE MADERA

FORJADO.	CABIOS.	Peso por m². — Kg.
Forjado con botes. . . .	De sesmas ó viguetas á $0^m,33$ entre ejes.	119
	De maderos de á 6 ídem íd. .	100
	De maderos de á 8 á $0^m,28$ íd.	94
	De maderos de á 10 á $0^m,20$ íd.	80
Id. con cascote ó ripio.	De sesmas ó viguetas ídem íd.	126
	De maderos de á 6 ídem íd. . .	113
	De maderos de á 8 ídem íd. . .	98
	De maderos de á 10 ídem íd.	84
Id. con bovedillas.	De tablones del Norte á 0 ',33 entre ejes.	192

PESO DE LOS FORJADOS POR METRO CUADRADO DE PISO

SUELOS DE HIERRO

Viguetas colocadas á 0m70 entre ejes.

DESIGNACION.		Peso por m². — Kilogramos.
Macizo de yesones, cascote, ripio ó yeso, con un espesor de...........	0m,10...	180
	0m,15...	250
	0m,20...	300
Forjado con canales, con un ídem íd..	0m,10...	110
	0m,15...	150
	0m,20...	180
Forjado con botes, tomados con yeso, con un espesor de...............	0m,10...	136
	0m,15...	140
	0m,20...	150
Forjado de bovedilla de rasilla enrasada por el trasdos con el relleno correspondiente.......		100 á 150
De bovedilla de ladrillo ordinario, de 0m,14 de espesor, enrasada por el trasdos...........		300
Bovedilla de ladrillo hueco, espesor de 0m,11 ídem íd..................................		180 á 200
De planchas combadas de palastro de 5 milímetros de espesor..........................		40

PESO POR METRO CUADRADO DE DIVERSAS CLASES DE PAVIMENTOS Y TECHOS

PAVIMENTOS

DESIGNACION		Peso por m². — Kilogramos.
Pavimento de yeso de $0^m,025$ de espesor		35
Pavimento de yeso de $0^m,05$ de espesor		70
Tierra para sentar baldosas y baldosines		30
Solado de baldosa ordinaria		22
Solado de baldosín		26
Solado de azulejos		24
Solado de mosaico de Valencia		29
Solado de mosaico de Barcelona		27
Solado de pizarra		46
Solado de caliza (mármol)		67
Entarimados ordinarios	De tabla de pino	13
	De tabla de encina	18
	Rastreles de pino	6

TECHOS

DESIGNACION	Peso por m². — Kilogramos.
Guarnecidos y maestrados en techos enlistonados	48
Guarnecidos y maestrados en techos encañados.	39
Blanqueo de yeso	3

Los datos anteriores, relativos á los suelos de hierro, los hemos tomado de la obra del Sr. Marvá, *Mecánica aplicada á las construcciones;* los demás figuran en el *Anuario de construcción,* de D. Mariano Monasterio.

524. Peso de las sobrecargas.—Para fijar el valor de la sobrecarga en algunos casos, pueden utilizarse las indicaciones del siguiente cuadro:

PESO DE LA SOBRECARGA POR METRO CUADRADO

OBJETO DE LOS SUELOS.	Peso por m². — Kilogramos.
Para habitaciones ordinarias..................	80
» salas de reunión, aulas, etc..............	200
» almacenes ordinarios.....................	300
» graneros; por metro de altura del montón.	800
» pajares ; por ídem, íd., íd................	100
» heniles ; por ídem, íd., de heno sin prensar.	120
» heniles ; por ídem, íd. de heno prensado...	200

El peso de los tabiques, si los hay, se determinará aparte para tenerlo en cuenta en el cálculo de las piezas del entramado sobre las cuales hayan de resistir aquéllos. Dicho peso podrá variar entre 100 y 200 kilogramos por metro cuadrado de tabique, según su naturaleza y espesor.

ENTRAMADOS DE MADERA

525. Los casos más frecuentes, y que por lo mismo nos interesa considerar, son los que representan las figuras siguientes:

El primero (figura 229) se presenta cuando el suelo puede organizarse empleando solamente cabios ó viguetas.

El segundo (figura 230) supone una crujía más ancha que no puede salvarse con viguetas, siendo necesario colocar vigas maestras AB, AB, para que perpendicularmente á ellas se apoyen los cabios *ab*, *ab*...

Finalmente, el tercer caso, frecuente en las construcciones ordinarias, se pone de manifiesto en la figura 231; y como se ve, consiste en estar constituído el piso por viguetas ó cabios *ab*, *ab*, que salvan el ancho de la crujía; por uno ó más brochales *mn*, que alejan el entramado de regiones determinadas y por los maderos cojos necesarios *ef*.

Fig. 229.

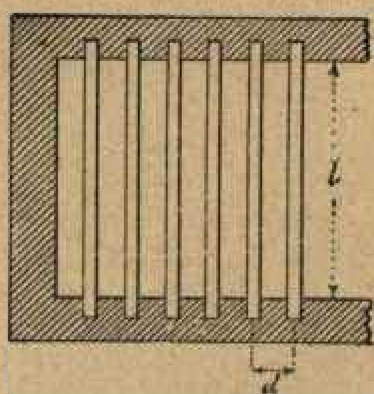
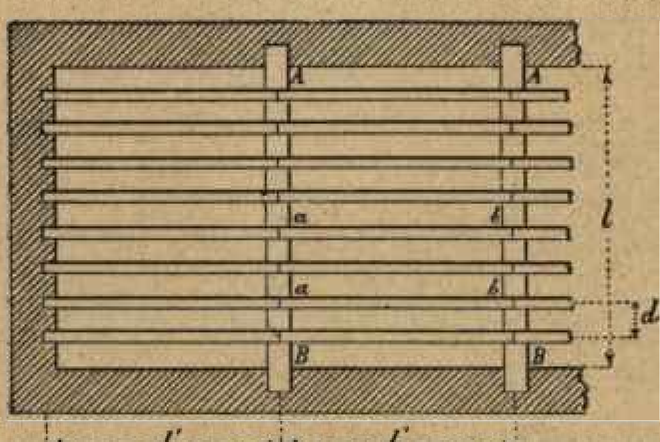
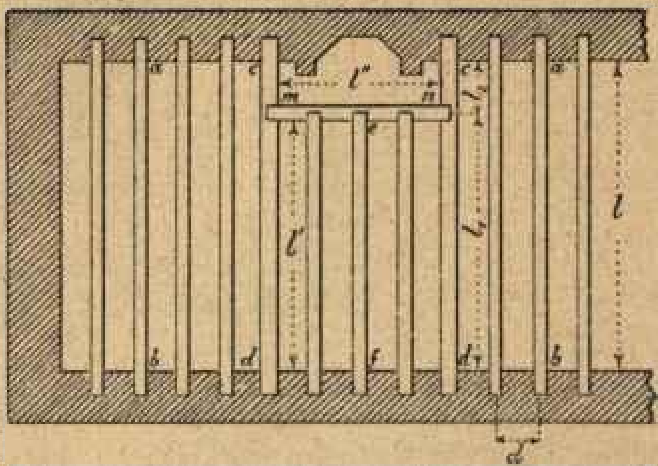


Fig. 230.



Las viguetas *cd, cd,* sobre las cuales cargan los extremos del brochal, deben de ser más resistentes que las otras; y pudieran

Fig. 231.



denominarse *viguetas de carga,* porque no sólo resisten el peso uniformemente repartido que las demás, sino el que directamente transmiten los extremos del brochal, lo que constituye una carga aislada que hay que tener en cuenta.

526. Cálculo de las piezas de un entramado de madera.—Todas ellas trabajan por flexión y las consideraremos como prismas apoyados por sus extremos. La única diferencia que en realidad ofrecen, consiste en la manera como se distribuye sobre las piezas la carga total que las solicita.

A la carga total por centímetro cuadrado de piso, incluyendo el peso propio de las piezas del entramado, la representaremos por p'.

527. Cabios ó viguetas.—Son piezas apoyadas en dos puntos y sometidas á una carga uniformemente repartida en toda su longitud ([a]).

Siendo

l la luz salvada por los cabios (distancia entre los apoyos);
d la distancia entre ejes de las piezas;

la carga total será $P = p'dl$, y la carga por unidad de longitud de vigueta, $p = p'd$.

La ecuación de resistencia será, como sabemos,

$$ZK = \frac{1}{8} pl^2 \quad \text{ó bien} \quad ZK = \frac{1}{8} p'dl^2 \qquad (a)$$

528. **Maderos cojos.**—Se encuentran en el mismo caso que las viguetas; y si llamamos l' á la distancia entre los apoyos en que descansan, es decir, entre el paramento del muro y el brochal, la ecuación de resistencia para estas piezas, será

$$ZK = \frac{1}{8} p'dl'^2 \qquad (b)$$

529. **Brochales.**—Aunque en rigor los brochales soportan una carga uniformemente repartida, y además las cargas aisladas que transmiten los extremos correspondientes de los maderos cojos, en la práctica no hay inconveniente en admitir que la carga total está uniformemente repartida.

Si llamamos l_1 á la longitud de los maderos cojos, l_2 á la distancia entre el brochal y el muro más próximo, l'' á la longitud del brochal y d á la distancia entre ejes de las viguetas, la carga que soporta el brochal dependerá, no sólo del área del rectángulo que llenan los maderos cojos *dmnd* (figura 231), sino del sistema de enlaces que se establezcan en el claro *cmnc,* para sostener el piso en tal región; pero suponiendo que aquellos permitan referir el peso ó carga que gravita sobre dicho claro

([a]) Las longitudes de las piezas las evaluaremos en centímetros.

de modo uniforme en los cuatro lados del rectángulo *cmnc*, la expresión de la carga total será

$$P = p'\left(\frac{1}{2} l_1 (l'' - d) + \frac{1}{4} l'' l_2\right)$$

Si la distancia de los cabios no es grande y el claro que deja el brochal es poco importante, la carga total sería, calculándola por exceso,

$$P = \frac{1}{2} p' l'' \left(l_1 + \frac{1}{2} l_2\right),$$

y la carga por unidad de longitud de brochal

$$p = \frac{1}{2} p' \left(l_1 + \frac{1}{2} l_2\right)$$

La ecuación de resistencia es, por tanto,

$$ZK = \frac{1}{8} p l''^2 \quad \text{ó bien} \quad ZK = \frac{1}{16} p' \left(l_1 + \frac{1}{2} l_2\right) l''^2 \qquad (c)$$

530. **Vigas maestras.**—Se consideran como piezas apoyadas en dos puntos y sometidas á una carga uniformemente repartida; de manera que siendo l la distancia entre ejes de las vigas maestras, la carga total que soportan será $P = p'l\mathrm{L}$, siendo L el ancho de la crujía, y la carga por unidad de longitud será $p = p'l$.

En el caso de que los cabios que concurren en la viga maestra fueran de longitudes desiguales l y l', entonces claro es que será

$$P = p'\mathrm{L}\,\frac{l + l'}{2}, \qquad \text{y} \qquad p = p'\,\frac{l + l'}{2}.$$

La ecuación de resistencia sería en el primer caso

$$ZK = \frac{1}{8} p' l \mathrm{L}^2 \qquad (d)$$

y en el segundo caso

$$ZK = \frac{1}{8} p' \frac{l+l'}{2} L^2 = \frac{1}{16} p' (l+l') L^2 \qquad (e)$$

531. Viguetas de carga.—Deben considerarse como prismas apoyados por sus extremos y sometidos á una carga P_1, uniformemente repartida en toda su longitud, y á otra P_2, aplicada en el punto de encuentro con el brochal.

La primera tiene por expresión

$$P_1 = p'dl.$$

La segunda es, aproximadamente,

$$P_2 = \frac{1}{4} p' l_1 l'$$

ó calculándola por exceso

$$P_2 = \frac{1}{4} p' l l'.$$

Admitiendo que el momento máximo de flexión, originado por las cargas P_1 y P_2, corresponde al punto medio del prisma ([a]), aquel se obtendrá sumando los momentos que en tal punto origina cada carga.

Así tendremos:

Momento originado en el punto medio de la viga por la carga uniformemente repartida P_1:

$$M_1 = \frac{1}{8} P_1 l$$

Momento engendrado en dicho punto medio, por la carga aislada P_2 que el brochal transmite:

$$M_2 = P_2 \frac{l_2}{l} \times \frac{l}{2} = \frac{1}{2} P_2 l_2$$

(a) En caso de duda es muy fácil construir el diagrama de momentos de flexión, trazando los de ambas fuerzas y efectuando su suma gráfica para varios puntos, con lo que se determinará cuál es la sección de la viga en que el momento es máximo.

Por tanto, llamando M al momento total, tendremos

$$M = \frac{1}{8} P_1 l + \frac{1}{2} P_2 l_2$$

Y la ecuación de resistencia será:

$$ZK = \frac{1}{8} P_1 l + \frac{1}{2} P_2 l_2 \qquad (f)$$

532. Problemas que hay que resolver.—Los problemas que en el estudio de los suelos hay que resolver son los tres siguientes:

I. Dada la carga por unidad de superficie de piso, la escuadría de una pieza de entramado y la luz que con ella se ha de salvar, determinar la separación ó distancia entre ejes de las piezas de igual categoría, con la doble condición de que la tensión unitaria no exceda del límite que se señale como coeficiente de seguridad y que la flecha no alcance un valor inadmisible.

II. Dada la carga por unidad de superficie de piso, la luz que ha de salvarse con las piezas y su distancia entre ejes, calcular la escuadría de las mismas, de manera que queden satisfechas las condiciones enunciadas de resistencia y rigidez.

III. Conociendo la organización y dimensiones de las piezas de un entramado, así como las condiciones del forjado, pavimento y techo, calcular la sobrecarga máxima que puede soportar sin peligro alguno.

De estos tres problemas, el I y II son los más frecuentes; y el primero, sobre todo, presenta especial interés; porque conduce á utilizar de la manera más económica las escuadrías corrientes del comercio.

533. Ejemplos del problema I.—1.º Determinar la distancia entre ejes á que deben colocarse los cabios de un suelo sencillo, empleando maderos rollizos de castaño ([a]), sin forjado

(*a*) Aunque en algunas localidades suele emplearse, el castaño es madera poco conveniente para suelos, porque se agusana fácilmente y se pudre empotrada en las fábricas.

alguno, con techo de encañado guarnecido y blanqueado de yeso y pavimento de yeso sobre encañado, con un espesor de 2,5 centímetros.

Además se tienen los siguientes datos:

Ancho de la crujía..................	$l = 3^m{,}50 = 350$ cm.
Diámetro medio de los maderos.....	$2r = 0^m{,}12 = 12$ »
Peso del centímetro cúbico de madera.	$\delta = 0{,}0007$ kg.
Coeficiente de seguridad, por centímetro cuadrado.................	$K = 50$ kg.
Grado de rigidez que se establece...	$f \overline{\overline{<}} \frac{1}{300} l.$

Representemos por

- c la sobrecarga por centímetro cuadrado;
- t el peso del techo por íd. íd.;
- s el peso del solado ó pavimento por íd. íd.;
- ω la acción recta del cabio, en centímetros cuadrados;
- d la distancia entre ejes de los cabios, en centímetros;
- l la luz salvada por éstos (ancho de la crujía) en íd.

Prescindiendo de la influencia de los empotramientos, y considerando que los cabios están sencillamente apoyados por sus extremos, la ecuación de resistencia será (fórmula (a) pág. 567.)

$$ZK = \frac{1}{8} p' d l^2 \qquad (a)$$

La expresión de p' será

$$p' = \frac{\delta\omega}{d} + c + s + t.$$

Sustituyendo en la ecuación (a) y despejando d, tendremos:

$$d = \frac{\frac{8ZK}{l^2} - \delta\omega}{c + s + t}$$

Con los datos establecidos y acudiendo á los cuadros de las página 561 y siguientes, se obtienen fácilmente los valores que siguen:

$K = 50$	$\delta = 0{,}0007$	$c = 0{,}008$	
$Z = 169{,}5$	$\omega = 113$	$s = 0{,}0035$	$c + s + t = 0{,}0157$
$l^2 = 122500$	$\delta\omega = 0{,}0791$	$t = 0{,}0042$	

Si estos valores se sustituyen en la expresión de d, resultará

$$d = 30 \text{ centímetros.}$$

Veamos si esta distancia es compatible con el grado de rigidez que hemos impuesto.

La expresión de la flecha, en el caso que nos ocupa, es (tomo I, pág. 203)

$$f = \frac{5}{192} \frac{pl^4}{ZEH}$$

Como H representa ahora el diámetro de la sección circular, haremos $E = 100000$; $H = 12$.

El valor de $p = p'd$, como es fácil calcular por los datos anteriores, y el que se ha obtenido para d, es

$$p = 0{,}0791 + 0{,}0157 \times 30 = 0{,}5501 \text{ kg.};$$

por lo tanto, resultará

$$f = \frac{5}{192} \times \frac{0{,}5501 \times 350^4}{169{,}5 \times 100000 \times 12},$$

ó finalmente

$$f = 1{,}06 \text{ centímetros.}$$

Ahora bien; puesto que

$$\frac{1}{300} l = \frac{350}{300} = 1{,}16,$$

la condición de rigidez queda satisfecha, toda vez que se verifica, como vemos, que

$$f < \frac{1}{300} l.$$

Resulta, por tanto, que no habrá inconveniente en colocar los cabios á 30 centímetros entre ejes.

534. 2.° Determinar la distancia entre ejes á que deben colocarse los cabios de un entramado sencillo, empleando maderos de á 10, de pino, del marco de Guadarrama, cuyas dimensiones son: $0^m,139 \times 0^m,087 \times 3^m,90$; para una sobrecarga de 80 kilogramos por metro cuadrado de piso, con forjado de botes tomados con yeso, techo de cielo raso en encañado y pavimento de baldosín. El ancho de la habitación es de $3^m,50$.

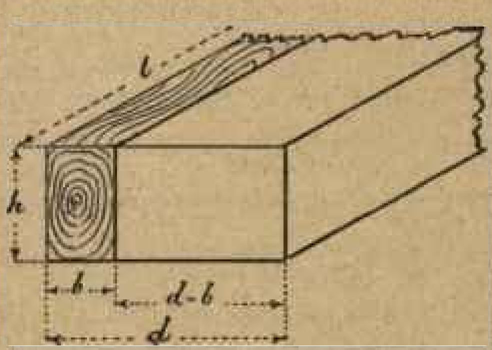
El peso del centímetro cúbico de madera de pino admitiremos que vale $\delta = 0{,}0006$ kilogramos.

El del forjado con botes lo fijaremos en $\delta' = 0{,}001$ (valor aproximado, deducido de los datos de forjados, en el cuadro correspondiente).

Conservando las notaciones del problema anterior, y llamando b y h á la base y altura de la sección recta de los cabios, la expresión de la carga total p, por unidad de longitud de cabio, como es fácil deducir, es la siguiente:

$$p'd = p = \delta bh + (d - b)\, h\delta' + (c + s + t)\, d \qquad (a)$$

Fig. 232.



En efecto, como indica la figura 232, se ve que representan respectivamente; δbh, el peso del centímetro lineal de cabio; $(d-b)\, h\delta'$, el peso del centímetro lineal del prisma que constituye el forjado; $(c + s + t)\, d$, la carga que actúa en cada centímetro de cabio, constituída por el peso de la sobrecarga c, el del solado s y el del techo t.

La expresión de p, podemos escribirla como sigue:

$$p = d\,[\delta' h + c + t + s] - bh\,(\delta' - \delta);$$

de donde

$$d = \frac{p + bh\,(\delta' - \delta)}{\delta' h + c + t + s};$$

y como el valor de p, deducido de la ecuación de resistencia á la flexión, $\mathrm{KZ} = \frac{1}{8}\,pl^2$, es $p = \frac{8\mathrm{KZ}}{l^2}$, resultará finalmente

$$d = \frac{\frac{8\mathrm{KZ}}{l^2} + bh\,(\delta' - \delta)}{\delta' h + c + s + t}$$

Admitiendo para coeficiente de trabajo, $\mathrm{K} = 60$ kilogramos por centímetro cuadrado, tendremos:

$\mathrm{K} = 60$	$l^2 = 122500$	$\delta' h = 0{,}0139$
$b = 8{,}7$	$bh = 120{,}9$	$c = 0{,}008$
$h = 13{,}9$	$\delta' = 0{,}001$	$s = 0{,}0056$
$\mathrm{Z} = 280$	$\delta = 0{,}0006$	$t = 0{,}0042$

Y sustituyendo se obtendrá

$$d = 36 \text{ centímetros},$$

despreciando la fracción que resulta.

La expresión de la flecha, vimos en el tomo I, pág. 203, que es $f = \frac{5}{192}\,\frac{p\mathrm{L}^4}{\mathrm{ZEH}}$; ó puesto que ahora la longitud de la pieza y la altura de la sección se han representado por l y h respectivamente, será $f = \frac{5}{192}\,\frac{pl^4}{\mathrm{ZE}h}$.

Pero observando que se tiene $\mathrm{K} = \frac{1}{8}\,\frac{pl^2}{\mathrm{Z}}$, resultará también

$$f = \frac{5}{24}\,\frac{\mathrm{K}l^2}{\mathrm{E}h};$$

y sustituyendo los valores

$$K = 60; \quad l^2 = 122500; \quad E = 100000, \quad y\ h = 13{,}9,$$

resultará finalmente

$$f = 1{,}1 \text{ cm.}$$

Esta deformación es perfectamente aceptable, porque corresponde próximamente á $\frac{1}{318}\, l.$

535. Cuadros de distancias máximas entre ejes, á que deben colocarse los cabios, en algunos casos particulares.—Los siguientes cuadros tienen por objeto facilitar el estudio de la organización de los suelos en algunos casos; se han calculado en el supuesto de que el coeficiente de seguridad sea K = 60 kilogramos por centímetro cuadrado, y se refieren á las piezas usuales del marco de Guadarrama, para salvar luces, desde $3^m{,}50$ hasta $6^m{,}50$.

Se ha empleado la fórmula $d = \dfrac{\dfrac{8KZ}{l^2} + (\delta' - \delta)\, bh}{\delta' h + s + t + c}$, en la cual representan:

l luz salvada en centímetros;
d distancia máxima entre ejes de las piezas;
K coeficiente de seguridad por centímetro cuadrado;
Z módulo de flexión de la sección transversal de la pieza;
b, h dimensiones de dicha sección;
δ peso en kilogramos del centímetro cúbico de madera;
δ' peso en íd. íd. del forjado;
s peso del pavimento por centímetro cuadrado;
t peso del techo por íd. íd.
c peso de la sobrecarga por íd. íd.

Además se han asignado á las constantes que entran en la expresión de d, los valores siguientes:

$K = 60$;
$\delta = 0{,}0006$;
$\delta' = 0{,}001$ ... (forjado con botes);
$\delta' = 0{,}0016$ ... (forjado con cascote);
$s = 0{,}0024$ ... (pavimento de entarimado);
$s = 0{,}007$ ... (ídem de encañado y yeso);
$t = 0{,}0058$ ... (ídem de baldosa);
$t = 0{,}004$ ... (techo de yeso).

Los resultados se han reducido á metros para que figuren en los cuadros respectivos.

Como complemento de tales cuadros, se han calculado otros dos que á continuación de los primeros se consignan.

El primero se refiere á la resistencia de las tablas para enlatados y entarimados, y el segundo á la resistencia de los encañados para constituir pavimentos económicos, de mucho uso en las construcciones rurales.

Las distancias que los cuadros contienen deben considerarse como límite superior de las mismas, del que en la práctica no se debe pasar, suponiendo que el material es de buena calidad.

La inspección de los resultados demostrará que no pueden combinarse arbitrariamente los elementos de un suelo, si se busca la solución más económica, compatible con la resistencia necesaria.

CUADROS DE DISTANCIAS MÁXIMAS, ENTRE EJES, Á QUE DEBEN COLOCARSE LOS CABIOS, EN ALGUNOS CASOS PARTICULARES, SEGÚN LA ESTRUCTURA DEL SUELO Y LA IMPORTANCIA DE LA SOBRECARGA

MADEROS DE Á 10. ESCUADRÍA. $\begin{cases} b = 0^{m},087 \\ h = 0^{m},139 \end{cases}$ Luz salvada....... $= 3^{m},50$. Largo de las piezas. $= 3^{m},90$.

CLASE DE SUELO				DISTANCIA MÁXIMA ENTRE EJES siendo la *sobrecarga*, por metro cuadrado, de kilogramos					
Número de orden.	NATURALEZA DEL Forjado.	Pavimento.	Techo.	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**
1	0	Entarimado....	0	$0^{m},82$	$0^{m},45$	$0^{m},31$	$0^{m},24$	$0^{m},19$	»
2	0	Caña y yeso....	0	$0^{m},60$	$0^{m},38$	$0^{m},27$	$0^{m},22$	$0^{m},18$	»
3	0	Caña y yeso....	Caña y yeso.	$0^{m},48$	$0^{m},33$	$0^{m},25$	$0^{m},20$	»	»
4	De botes.	Entarimado....	De yeso....	$0^{m},38$	$0^{m},28$	$0^{m},22$	$0^{m},19$	»	»
5	De botes.	Baldosa..... ..	De yeso....	$0^{m},34$	$0^{m},26$	$0^{m},21$	$0^{m},18$	»	»
6	Cascote..	Baldosa........	De yeso....	$0^{m},29$	$0^{m},23$	$0^{m},19$	»	»	»

MADEROS DE Á 8. ESCUADRÍA.. $\begin{cases} b = 0^m,104 \\ h = 0^m,157 \end{cases}$ Luz salvada........ $4^m,00$ Largo de las piezas. $4^m,46$

CLASE DE SUELO				DISTANCIA MÁXIMA ENTRE EJES siendo la *sobrecarga,* por metro cuadrado, de kilogramos					
Número de orden.	NATURALEZA DEL								
	Forjado.	Pavimemto.	Techo.	100	200	300	400	500	600
1	0	Entarimado....	0	$0^m,95$	$0^m,53$	$0^m,36$	$0^m,28$	$0^m,22$	$0^m,19$
2	0	Caña y yeso....	0	$0^m,69$	$0^m,44$	$0^m,32$	$0^m,25$	$0^m,20$	»
3	0	Caña y yeso....	Caña y yeso.	$0^m,56$	$0^m,38$	$0^m,29$	$0^m,23$	$0,^m19$	»
4	De botes.	Entarimado....	De yeso	$0^m,42$	$0^m,32$	$0^m,26$	$0^m,22$	»	»
5	De botes.	Baldosa........	De yeso	$0^m,38$	$0^m,29$	$0^m,34$	$0^m,20$	»	»
6	Cascote..	Baldosa........	De yeso	$0^m,32$	$0^m,26$	$0^m,22$	$0^m,19$	»	»

MADEROS DE Á 6. ESCUADRÍA. $\left\{ \begin{array}{l} b = 0^m,139 \\ h = 0^m,174 \end{array} \right.$ Luz salvada....... $= 4^m,50$.
Largo de las piezas. $= 5^m,02$.

CLASE DE SUELO				DISTANCIA MÁXIMA ENTRE EJES siendo la *sobrecarga*, por metro cuadrado, de kilogramos					
Número de orden.	NATURALEZA DEL								
	Forjado.	Pavimento.	Techo.	100	200	300	400	500	600
1	0	Entarimado....	0	$1^m,22$	$0^m,68$	$0^m,47$	$0^m,36$	$0^m,29$	$0^m,24$
2	0	Caña y yeso....	0	$0^m,89$	$0^m,56$	$0^m,41$	$0^m,32$	$0^m,26$	»
3	0	Caña y yeso....	Caña y yeso.	$0^m,72$	$0^m,49$	$0^m,37$	$0^m,29$	$0^m,24$	»
4	De botes.	Entarimado....	De yeso....	$0^m,52$	$0^m,40$	$0^m,32$	$0^m,27$	»	»
5	De botes.	De baldosa.....	De yeso....	$0^m,47$	$0^m,37$	$0^m,30$	$0^m,26$	»	»
6	Cascote..	De baldosa.....	De yeso....	$0^m,40$	$0^m,33$	$0^m,28$	$0^m,24$	»	»

VIGUETAS ESCUADRÍA. $b = 0^m,157$; $h = 0^m,226$ Luz salvada....... $= 5^m,00$. Largo de las piezas. $= 6^m,13$.

Número de orden.	CLASE DE SUELO — NATURALEZA DEL Forjado.	Pavimento.	Techo.	DISTANCIA MÁXIMA ENTRE EJES siendo la *sobrecarga*, por metro cuadrado, de kilogramos 100	200	300	400	500	600
1	0	Entarimado....	0	$1^m,90$	$1^m,05$	$0^m,73$	$0^m,55$	$0^m,45$	$0^m,37$
2 (a)	0	Tabla y yeso...	0	$1^m,38$	$0^m,87$	$0^m,63$	$0^m,50$	$0^m,41$	$0^m,35$
2 (b)	0	Encañado doble y yeso.......	0	»	$0^m,87$	$0^m,63$	$0^m,50$	»	»
2 (c)	0	Encañado sencillo y yeso....	0	»	»	»	»	$0^m,41$	$0^m,35$
3 (a)	0	Encañado doble y yeso.......	Caña y yeso.	$1^m,10$	$0^m,75$	$0^m,57$	»	»	»
3 (b)	0	Encañado sencillo y yeso....	Caña y yeso.	»	»	»	$0^m,46$	$0^m,38$	$0^m,33$
4	De botes.	Entarimado....	De yeso....	$0^m,69$	$0^m,55$	$0^m,46$	$0^m,39$	$0^m,34$	»
5	De botes.	Baldosa........	De yeso....	$0^m,64$	$0^m,51$	$0^m,43$	$0^m,37$	$0^m,32$	»
6	Cascote..	Baldosa........	De yeso..	$0^m,52$	$0^m,44$	$0^m,38$	$0^m,34$	$0^m,30$	»

VIGUETAS — Escuadría. $b = 0^{m},157$; $h = 0^{m},226$ — Luz salvada........ $5^{m},50$. Largo de las piezas. $6^{m},13$.

CLASE DE SUELO				DISTANCIA MÁXIMA ENTRE EJES siendo la *sobrecarga,* por metro cuadrado, de kilogramos					
Número de orden.	NATURALEZA DEL								
	Forjado.	Pavimento.	Techo.	100	200	300	400	500	600
1	0	Entarimado....	0	$1^{m},54$	$0^{m},85$	$0^{m},59$	$0^{m},45$	$0^{m},36$	$0^{m},30$
2 (a)	0	Tabla y yeso...	0	$1^{m},12$	$0^{m},70$	$0^{m},51$	$0^{m},40$	$0^{m},33$	»
2 (b)	0	Encañado doble y yeso.......	0	»	$0^{m},70$	»	»	»	»
2 (c)	0	Encañado sencillo y yeso....	0	»	»	$0^{m},51$	$0^{m},40$	$0^{m},33$	»
3 (a)	0	Encañado doble y yeso.......	Caña y yeso.	$0^{m},90$	»	»	»	»	»
3 (b)	0	Encañado sencillo y yeso....	Caña y yeso.	»	$0^{m},61$	$0^{m},46$	$0^{m},37$	$0^{m},31$	»
4	De botes.	Entarimado....	De yeso....	$0^{m},58$	$0^{m},46$	$0^{m},38$	$0^{m},33$	»	»
5	De botes.	De baldosa.....	De yeso....	$0^{m},53$	$0^{m},43$	$0^{m},36$	$0^{m},31$	»	»
6	Cascote..	De baldosa.....	De yeso....	$0^{m},44$	$0^{m},38$	$0^{m},32$	$0^{m},29$	»	»

SESMAS ESCUADRÍA. $b = 0^m,157$; $h = 0^m,226$ Luz salvada .... $= 6^m,00$; Largo de las piezas. $= 6^m,97$

CLASE DE SUELO				DISTANCIA MÁXIMA ENTRE EJES siendo la *sobrecarga*, por metro cuadrado, de kilogramos					
Número de orden.	NATURALEZA DEL								
	Forjado.	Pavimento.	Techo.	100	200	300	400	500	600
1	0	Entarimado....	0	$1^m,26$	$0^m,70$	$0^m,48$	$0^m,37$	$0^m,30$	»
2	0	Caña y yeso....	0	$0^m,92$ (*a*)	$0^m,58$	$0^m,42$	$0^m,33$	»	»
3	0	Caña y yeso....	Caña y yeso.	$0^m,74$	$0^m,50$	$0^m,38$	$0^m,30$	»	»
4	De botes.	Entarimado....	De yeso....	$0^m,49$	$0^m,39$	$0^m,32$	»	»	»
5	De botes.	De baldosa.....	De yeso....	$0^m,45$	$0^m,36$	$0^m,30$	»	»	»
6	Cascote..	De baldosa.....	De yeso....	$0^m,38$	$0^m,32$	»	»	»	»

(*a*) Para esta distancia de $0^m,92$, el encañado debe ser doble.

SESMAS

ESCUADRÍA. $b = 0^m,157$; $h = 0^m,226$

Luz salvada........ = $6^m,50$.
Largo de las piezas. = $6^m,97$.

CLASE DE SUELO				DISTANCIA MÁXIMA ENTRE EJES siendo la *sobrecarga*, por metro cuadrado, de kilogramos					
Número de orden.	NATURALEZA DEL Forjado	Pavimento.	Techo.	100	200	300	400	500	600
1	0	Entarimado....	0	$1^m,04$	$0^m,58$	$0^m,40$	$0^m,30$	»	»
2	0	Caña y yeso....	0	$0^m,76$	$0^m,48$	$0^m,35$	»	»	»
3	0	Caña y yeso....	Caña y yeso.	$0^m,62$	$0^m,42$	$0^m,31$	«	»	»
4	De botes.	Entarimado....	De yeso....	$0^m,43$	$0^m,34$	»	»	»	»
5	De botes.	**De baldosa**.....	De yeso....	$0^m,39$	$0^m,31$	»	»	»	»
6	Cascote..	**De baldosa**.....	De yeso....	$0^m,33$	»	»	»	»	»

RESISTENCIA DE LOS ENTARIMADOS

CUADRO DE DISTANCIAS MÁXIMAS ENTRE LOS APOYOS (CABIOS Ó RASTRELES) SOBRE LOS CUALES HAYAN DE INSISTIR LAS TABLAS DE LOS ENTARIMADOS Y ENLATADOS DE PINO.

CLASE DE TABLA		DISTANCIA MÁXIMA entre los apoyos para cargas, por metro cuadrado, de kilogramos						OBSERVACIONES
DESIGNACIÓN	Grueso. — *Metros.*	100	200	300	400	500	600	
Ripia.........	0,013	$1^{m},06$	$0^{m},75$	$0^{m},61$	$0^{m},53$	$0^{m},47$	$0^{m},43$	Estas distancias corresponden á un coeficiente de trabajo, por cm^2. de 50 kg.
Tableta. . ..	0,017	$1^{m},38$	$0^{m},98$	$0^{m},80$	$0^{m},69$	$0^{m},62$	$0^{m},56$	
Camera.......	0,026	$2^{m},12$	$1^{m},50$	$1^{m},22$	$1^{m},06$	$0^{m},94$	$0^{m},86$	
De á gordo....	0,035	$2^{m},85$	$2^{m},02$	$1^{m},64$	$1^{m},42$	$1^{m},27$	$1^{m},16$	

RESISTENCIA DE LOS ENCAÑADOS

Cuadro de las distancias entre los apoyos sobre los cuales hayan de insistir los encañados sencillos y dobles, siendo el menor diámetro exterior de las piezas, de $0^m,02$.

CLASE de encañado.	Distancia máxima entre los apoyos para cargas, por metro cuadrado, de kilogramos.						OBSERVACIONES
	100	200	300	400	500	600	
Sencillo ...	0,89	0,63	0,52	0,40	0,45	0,37	Se ha admitido un coeficiente de trabajo de K = 40 kg por cm^2.
Doble	1,24	0,89	0,75	0,63	0,56	0,52	

Este cuadro, cuyo objeto es dar algunas indicaciones del empleo racional de los encañados, material interesante en las construcciones rurales, se ha calculado bajo los supuestos que á continuación se expresan, y que creemos corresponden á los casos más frecuentes.

1.º Se ha fijado el coeficiente de seguridad K en 40 kilogramos por centímetro cuadrado, porque de las repetidas experiencias efectuadas, se han encontrado para K_r, coeficiente de fractura, valores mayores que 400 kilogramos por centímetro cuadrado; habiendo aceptado para el primero $K = \frac{1}{10} K_r$.

2.º Se ha tenido en cuenta solamente la menor sección transversal de las piezas, tomando como tipo medio para el cálculo del cuadro, las siguientes dimensiones.

Diámetro exterior....	$D = 2$	centímetros.
» interior....	$d = 1,52$	»
Grueso de las paredes	$e = 0,24$	»

3.º Se ha tomado para módulo de flexión de la referida menor sección transversal, $Z = 0,5$, cantidad inferior á la que realmente corresponde á las dimensiones anteriores, y las cuales se refieren á una de las piezas ensayadas que ofrecieron menos resistencia.

4.º Para los encañados dobles se ha admitido que la carga se reparte por mitad entre las piezas de la capa superior y de la inferior; habiendo en consecuencia obtenido las distancias l_2 para los encañados dobles, con solo multiplicar por $\sqrt{2}$ las l_1 correspondientes á los sencillos.

En efecto, las ecuaciones de resistencia para ambos, son:

Para los sencillos. $ZK = \frac{1}{8} p l_1^2$ de donde $l_1 = \sqrt{\frac{8ZK}{p}}$

Para los dobles .. $2ZK = \frac{1}{8} p l_2^2$ de donde $l_1 = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{8ZK}{p}}$

resultando, por consiguiente,

$$l_2 = l_1 \sqrt{2} = 1{,}414\, l_1$$

como habíamos indicado. ([a])

536. Ejemplo del problema II.—Calcular las dimensiones de la sección recta de una viga maestra de pino, para salvar 7 metros de luz; siendo de $3^m{,}50$ la longitud de los cabios que aquella ha de sostener y 300 kilogramos la carga total por metro cuadrado de piso, sin contar con el peso propio de la viga maestra.

Con arreglo á las notaciones establecidas, tendremos:

Longitud de la pieza (luz salvada).......... $L = 700$ cm.
Distancia entre ejes (longitud de los cabios)... $l = 350$ »
Carga total por centímetro cuadrado de piso.. $p' = 0{,}03$ kg.

Si entre los lados B y H de la sección recta de la viga, establecemos la relación usual $B = 0{,}7\,H$, la expresión del módulo de flexión será $Z = \frac{1}{6} B H^2 = \frac{0{,}7}{6} H^3$.

([a]) Cuando resulten excesivas las distancias consignadas en los cuadros que preceden, se reducirán en la práctica á los límites que impongan la naturaleza del forjado y sistema usual de ejecución.

La ecuación de resistencia es (fórmula (*d*) pág. 568)

$$ZK = \frac{1}{8}\, p'l\, L^2$$

Tomando como coeficiente de seguridad, $K = 60$ kilogramos, y sustituyendo en la ecuación que precede los valores asignados á p', l y L, tendremos

$$\frac{0{,}7 \times 60}{6} \times H^3 = \frac{0{,}03 \times 350 \times 490000}{8}$$

de donde

$$H = \sqrt[3]{\frac{0{,}03 \times 350 \times 490000}{7 \times 8}} = \sqrt[3]{91875} = 45{,}1$$

Las dimensiones de la sección recta serán:

$$B = 31{,}6 \text{ cm.}$$
$$H = 45{,}1 \text{ »}$$

Si para el caso que estudiamos hubieran de elegirse las piezas del marco de Guadarrama, entonces se emplearía el *pie* y *cuarto doble*, cuya sección recta tiene las siguientes dimensiones:

$$B = 34{,}8 \text{ cm.}$$
$$H = 50{,}5 \text{ »}$$

valiendo el módulo de flexión

$$Z = 14791$$

El coeficiente de trabajo resultaría

$$K = \frac{p'lL^2}{8Z} = \frac{0{,}03 \times 350 \times 490000}{8 \times 14791} = 43{,}4 \text{ kg.}$$

Y el valor de la flecha será (*a*)

$$f = \frac{5}{24}\,\frac{KL^2}{EH} = \frac{5 \times 43{,}4 \times 490000}{24 \times 100000 \times 50{,}5} = 0{,}9 \text{ cm. próximamente.}$$

(*a*) Esta expresión de f se obtiene, recordando que $f = \frac{5}{192}\,\frac{PL^3}{ZEH}$ y además que $ZK = \frac{1}{8} PL$.

En el marco de Cuenca ó castellano, la pieza de mayor escuadría es la *media vara,* cuya sección recta tiene las siguientes dimensiones:

$$B = 35 \text{ cm.}$$
$$H = 42 \text{ »}$$

siendo

$$Z = \frac{1}{6} BH^2 = 10290.$$

Veamos las condiciones de resistencia de esta pieza, si la empleáramos para viga maestra en el caso que nos ocupa.

Coeficiente de trabajo por centímetro cuadrado,

$$K = \frac{p'lL^2}{8Z} = \frac{5.145000}{8 \times 10290} = 62{,}5 \text{ kg.}$$

Flecha,

$$f = \frac{5}{24} \frac{KL^2}{EH} = \frac{5 \times 62{,}5 \times 490000}{24 \times 100000 \times 42} = 1{,}52 \text{ cm,}$$

que viene á corresponder á la fracción $\frac{1}{460}$ de la longitud de la viga.

En vista, pues, de lo poco que excede la tensión unitaria del coeficiente de seguridad fijado al principio, y del escaso valor de la deformación total, no habría inconveniente en aceptar la *media vara* de Cuenca para viga maestra, en las condiciones del problema que acaba de resolverse.

537. Resolución del problema que precede, teniendo en cuenta el peso propio de la viga.—Si ω es el área de la sección recta de la viga, en centímetros cuadrados, y δ el peso del centímetro cúbico de madera, el peso de cada centímetro lineal de viga será $\delta\omega = \delta BH$. Y puesto que al principio establecimos $B = 0{,}7\,H$, será $\delta\omega = 0{,}7\,\delta H^2$. Por consiguiente el valor de p (carga total por centímetro lineal de viga) tendrá por expresión $p = p'l + \delta\omega$, ó bien $p = p'l + 0{,}7\,\delta H^2$.

La ecuación de resistencia será, por lo tanto,

$$ZK = \frac{1}{8}(p'l + 0{,}7\,\delta H^2)L^2$$

Pero como

$$Z = \frac{1}{6}BH^2 = \frac{0{,}7}{6}H^3,$$

tendremos también

$$\frac{0{,}7K}{6}H^3 = \frac{1}{8}(p'l + 0{,}7\,\delta H^2)L^2$$

Dividiendo por el coeficiente de H^3 y pasando todo al primer miembro, tendremos

$$H^3 - \frac{3\,\delta L^2}{4K}H^2 - \frac{3p'lL^2}{2{,}8K} = 0.$$

Recordando que según las condiciones del problema actual, se tiene $p' = 0{,}03$ kg.; $L = 700$ cm.; $l = 350$ cm.; $K = 60$ kg. y $\delta = 0{,}006$ kg. la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$H^3 - 3{,}675\,H^2 - 91875 = 0.$$

Esta ecuación de 3.^{er} grado tiene una sola raiz real y positiva; porque tiene el último término negativo, presenta una variación y no presenta ninguna su transformada en $-H$.

Dicha raiz está comprendida entre 46 y 47; de suerte que podemos aceptar como valor aproximado en menos de una unidad,

$$H = 46{,}5 \text{ cm.}$$

Cuando prescindimos del peso propio de la viga encontramos

$$H = 45{,}1 \text{ cm.}$$

La diferencia, como se ve, no es importante; por cuyo motivo y en obsequio á la brevedad de los cálculos, suele prescindirse del peso propio de las vigas de madera, en la determinación de su escuadría.

Tratándose de vigas maestras para grandes luces, conviene, sin embargo, calcular el verdadero coeficiente de trabajo, teniendo en cuenta el peso propio de la pieza, lo que servirá además para conocer si en los primeros cálculos se ha cometido algún error importante; pues el valor de K que ahora se encuentre no debe exceder en mucho al que se fijó para determinar la escuadría de la viga.

En efecto, consideremos la viga antes calculada de 7^m de longitud y cuya sección recta resultó de las dimensiones siguientes:

$$B = 31{,}6 \text{ cm.} \quad H = 45{,}1 \text{ cm};$$

resultando para Z

$$Z = 10712{,}45.$$

El área de la sección recta será

$$BH = \omega = 1425{,}16 \text{ cm}^2.$$

El peso del centímetro lineal de viga será, por tanto,

$$\delta\,\omega = 0.0006 \times 1425{,}16 = 0{,}85509 \text{ kg}.$$

Y como la carga exterior por centímetro de longitud era

$$p'l = 0{,}03 \times 350 = 10{,}5 \text{ kg.},$$

la carga unitaria total será

$$p = 10{,}5 + 0{,}85509 = 11{,}35509 \text{ kg}.$$

La expresión de K es

$$K = \frac{pL^2}{8Z}.$$

Sustituyendo, resulta

$$K = \frac{11{,}35509 \times 490000}{8 \times 10712{,}45} = 64{,}92 \text{ kg}.$$

Pero como las dimensiones de la sección transversal de la viga calculada no coinciden con las de ninguna de las piezas corrientes del comercio, dijimos antes que podríamos emplear el *pie y cuarto doble*, del marco de Guadarrama.

El coeficiente efectivo para esta pieza, teniendo en cuenta su peso propio, será

$$K = \frac{(p'l + \delta\omega)\,L^2}{8Z}$$

Ahora bien, tenemos

$$p'l = 10{,}5 \text{ kg.}; \quad \omega = BH = 34{,}8 \times 50{,}5 = 1757{,}4 \text{ cm}^2.$$

$$\delta = 0{,}0006; \quad L^2 = 490000; \quad Z = \frac{1}{6}\,BH^2 = 14791.$$

Por lo tanto resultará

$$K = \frac{(10{,}5 + 0{,}0006 \times 1757{,}4)\,490000}{8 \times 14791} = 47{,}84 \text{ kg.}$$

Si hiciéramos un cálculo semejante respecto á la *media vara* de Cuenca, hallaríamos

$$K = \frac{(10{,}5 + 0{,}0006 \times 1470)\,490000}{8 \times 10290} = 67{,}75 \text{ kg.}$$

Por último, las dimensiones de la viga calculada directamente, teniendo en cuenta su peso propio, son:

$$B = 32{,}5 \text{ cm.} \qquad H = 46{,}5 \text{ cm.}$$

siendo además,

$$Z = \frac{1}{6}\,BH^2 = 11712, \qquad \text{y} \qquad \omega = BH = 1511{,}25 \text{ cm}^2.$$

De aquí resulta que el verdadero valor de K, en este caso, será

$$K = \frac{(10{,}5 + 0{,}0006 \times 1511{,}25)\,490000}{8 \times 11712} = 59{,}65 \text{ kg.}$$

Si ahora, por la fórmula $f = \frac{5}{24}\frac{KL^2}{EH}$ calculamos las correspondientes flechas, tendremos, en resumen, *contando con el peso propio de la viga,* los siguientes resultados, que permiten elegir la escuadría más conveniente, según el grado de seguridad y de rigidez que se juzgue aceptable.

DESIGNACION	Coeficiente de trabajo K. — Kilogramos.	Flecha f. — Centimetros.	Relación $\frac{f}{L}$
Viga calculada directamente.....	59,65	1,30	$\frac{1}{538}$
Pie y cuarto doble (marco de Guadarrama).....................	47,84	0,97	$\frac{1}{721}$
Media vara (marco castellano)....	67,75	1,64	$\frac{1}{427}$

538. **Ejemplo del problema III.**—Calcular la sobrecarga por metro cuadrado que sin peligro alguno podrá soportar un suelo de madera de pino, cuya organización y dimensiones son las siguientes:

Vigas maestras, á $3^m,50$ entre ejes, de $0^m,35 \times 0^m 50$ de escuadría.

Cabios á $0^m,40$ entre ejes; de escuadría igual á $0^m,15 \times 0^m,22$.

Forjado de botes tomados con yeso.

Techo de yeso.

Luz salvada por las vigas maestras (ancho de la crujía) igual á $6^m,80$.

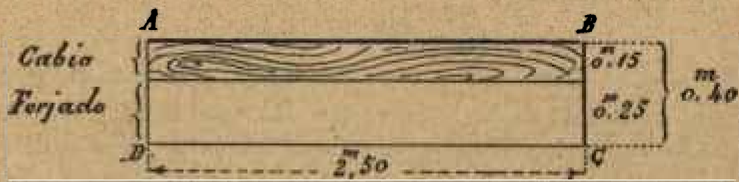
Hay que calcular, ante todo, el peso del suelo por metro cuadrado.

Si consideramos un rectángulo ABCD, de 1 metro cuadrado de área (fig. 233), cuyo lado menor sea $0^m,40$, distancia de los cabios entre ejes, el lado mayor será de $2^m,50$; puesto que $2^m,50 \times 0^m,40 = 1\ m^2$. A este rectángulo corresponde una superficie de $0^m,15 \times 2^m,50 = 0^{m,2}\,375$, ocupada por la vigueta. El resto, hasta $1\ m^2$, es decir $0^{m,2}\,625$ lo ocupa el forjado; y como el espesor del entramado es de $0^m,22$, el volumen ocupado por el forjado será, en $1\ m^2$ de piso, de $0^m,22 \times 0^{m^2},625 = 0^{m^3},1375$.

El volumen ocupado por los cabios, será, asimismo, por metro cuadrado de piso, $0^m,22 \times 0^{m^2},375 = 0^{m^3},0825$.

El peso del forjado correspondiente á aquel volumen, admitiendo que el metro cúbico pesa 1000 kilogramos, será de 137,50 kilogramos.

Fig. 233.



El peso que corresponde á los cabios, aceptando que el metro cúbico de madera pesa 600 kilogramos, será igual á $0,0825 \times 600 = 49,50$ kilogramos.

Con estos datos y acudiendo á los cuadros de pesos de pavimentos y techos (pág. 563) formaremos, como sigue, el peso del metro cuadrado de piso:

	Kilogramos.
Peso del forjado, por metro cuadrado..........	137,50
Id. del entarimado, por íd. íd...............	19,00
Id. del techo, por íd. íd.....................	42,00
Id. de los cabios, por íd. íd.................	49,50
Peso total del metro cuadrado de suelo	248,00

Corresponden, por tanto, al centímetro cuadrado 0,0248 kgm.

De la ecuación de resistencia de los cabios (núm. **527**) se deduce que la carga total p', por centímetro cuadrado, que pueden soportar es

$$p' = \frac{8KZ}{dl^2};$$

pero tenemos

$$K = 60; \quad Z = \frac{1}{6} \times 15 \times 22^2 = 1210; \quad d = 40; \quad l^2 = 350^2 = 122500;$$

por tanto, el valor de p' será

$$p' = \frac{8 \times 60 \times 1210}{40 \times 122500} \; 0{,}1185 \text{ kg. por cm}^2.$$

ó lo que es lo mismo

$$P' = 1185 \text{ kg. por m}^2.$$

Si pues, esta es la carga total por metro cuadrado de piso que los cabios pueden resistir con toda seguridad, y al peso propio del suelo corresponde, como hemos visto, 248 kilogramos, la diferencia representará la *sobrecarga* que los cabios podrán soportar sin peligro alguno.

Aquella diferencia es de $1185 - 248 = 937$ kg. por metro cuadrado de piso.

Veamos si las vigas maestras podrán soportar esta sobrecarga, ú otra distinta á igualdad de condiciones de resistencia, teniendo en cuenta el peso propio de la pieza.

Sea

p' peso del centímetro cuadrado del suelo;
c » de la sobrecarga por centímetro cuadrado de íd;
ω área de la sección transversal de la viga maestra, en centímetros cuadrados;
δ pero del centímetro cúbico de madera;
l distancia entre ejes de las vigas maestras, en centímetros;
L luz salvada por las vigas maestras, en íd.

La expresión de la carga total, por centímetro lineal de viga maestra, será la siguiente:

Peso propio del suelo.......	$p'l$
Id. de la sobrecarga......	$c\,l$
Id. de la viga maestra.....	$\delta\,\omega$
Suma.....	$p = (p' + c)\,l + \delta\,\omega$

Si en la ecuación de resistencia $ZK = \frac{1}{8} pL^2$, sustituímos la expresión anterior de p, tendremos

$$ZK = \frac{1}{8}\left((p' + c)l + \delta\omega\right)L^2;$$

y sacando el valor de c

$$c = \frac{8KZ}{lL^2} - \left(\frac{\delta\omega}{l} + p'\right).$$

Tenemos

$$K = 60 \qquad \delta = 0{,}0006$$

$$Z = \frac{1}{6} \times 35 \times 50^2 = 14583 \qquad \omega = 35 \times 50 = 1750$$

$$l = 350 \qquad p' = 0{,}0248$$

$$L^2 = 680^2 = 462400$$

Sustiuyendo resulta

$$c = \frac{8 \times 60 \times 14583}{350 \times 462400} - \left(\frac{0{,}0006 \times 1750}{350} + 0{,}0248\right)$$

ó bien,

$$c = 0{,}0154 \text{ kg. por cm}^2.,$$

ó lo que es lo mismo

$$10000\,c = 154 \text{ kg. por m}^2.$$

En resumen: si se atiende á los cabios, el suelo admite una sobrecarga por metro cuadrado de........ 937 kg.
Y atendiendo á la resistencia de las vigas maestras, sólo puede soportar por igual unidad de superficie... 154 kg.

Esta última sobrecarga sería la admisible; pero la notable diferencia que existe entre la resistencia de los cabios y la de las vigas maestras, prueba que el suelo que acabamos de estudiar está mal organizado.

Para que un piso esté bien organizado es necesario que todas sus piezas trabajen próximamente á la misma tensión unitaria, exceptuando en cierto modo aquellas que, por su gran longitud y grado de rigidez, deban trabajar á una tensión menor que la que corresponda al coeficiente ordinario de seguridad.

ENTRAMADOS DE HIERRO

539. Los suelos de hierro, lo mismo que los de madera, pueden estar constituídos solamente por viguetas ó bien por vigas maestras y viguetas, según la importancia de la crujía.

Las vigas maestras son de ordinario vigas compuestas de palastro, de forma tubular ó en doble T, y las viguetas son generalmente vigas laminadas de hierro ó de acero, pudiendo también utilizarse, en ciertos casos, carriles usados, por razón de economía.

El coeficiente de seguridad K, que se adopta de ordinario para las piezas de hierro varía de 700 á 800 kilogramos por centímetro cuadrado, y para las de acero, de 800 á 1000 kilogramos por igual unidad de sección recta. Sin embargo, para dependencias en que sean de temer choques ó vibraciones importantes, conviene disminuir el valor de K. Lo propio debe hacerse cuando lo exija la mala calidad del hierro, como no es raro que suceda tratándose de viguetas laminadas.

La distancia entre viguetas, en la práctica usual; suele variar entre $0^{m},50$ y $1^{m},00$. En muchos casos se fija en $0^{m},70$ á $0^{m},75$.

Tanto en las vigas maestras como en las viguetas, es necesario que la presión que transmiten á los muros en que se apoyan no exceda de unos 6 kilogramos por centímetro cuadrado. Para esto, los extremos de las piezas no descansan directamente en los muros, sino que lo hacen por el intermedio de platinas de hierro ó lajas de piedra dura, las cuales reparten la presión sobre una superficie mayor.

Finalmente, cuando por ser grande la luz salvada, la flecha de las viguetas hubiera de resultar tan perceptible que perjudicase el buen aspecto de la obra, en vez de emplear piezas de mayor altura y por tanto de mayor coste, que dieran menor flecha, pueden utilizarse las calculadas por la condición de que K no exceda del límite señalado, encorvándolas antes de ponerlas en obra, en tanto por lo menos cuanto valga la flecha máxima dada por el cálculo, y colocándolas con la convexidad hacia arriba.

De todas suertes, en los suelos de gran luz conviene siempre cerciorarse de que la flecha máxima no excede del límite que previamente se fije, como condición de rigidez.

540. **Cálculo de los suelos de hierro.**—Una vez estudiada la organización general del entramado, el cálculo de sus diferentes partes no ofrece ninguna dificultad, después de lo dicho acerca de los suelos de madera y teniendo á la vista los cuadros de resistencia de las viguetas sencillas y compuestas, consignados en las páginas 469 á 482 y 504 á 509; porque en definitiva, conociendo el caso de flexión de cada pieza y la carga que la solicita, la escuadría y la flecha se determinarán por las fórmulas del cuadro de la pág. 377 y siguientes y de la manera que hemos visto al resolver los diversos ejemplos que oportunamente hemos presentado.

Para facilitar el estudio de la organización de los suelos de hierro y poder hallar con brevedad y elegir la solución más conveniente, bajo el punto de vista económico, se insertan á continuación dos cuadros relativos á las viguetas sencillas de la fábrica de «Altos Hornos», Bilbao y de la «Sociedad Material para ferrocarriles y construcción», de Barcelona, en los cuales se indican las luces que pueden salvarse con viguetas de doble T, para cargas, por metro cuadrado de piso, de 300, 400, 500 y 600 kilogramos y distancias entre ejes de $0^m,50$, $0^m,75$ y $1^m,00$, bajo la condición de que el hierro trabaje á razón de unos 800 kilogramos por centímetro cuadrado.

Si representamos por

l la luz salvada en metros;
d la distancia entre ejes, en metros;
P la carga, por metro cuadrado de piso;
Z el módulo de flexión, referido al centímetro;

es fácil deducir que la expresión de l será (siendo K = 800)

$$l = 8\sqrt{\frac{Z}{Pd}}$$

fórmula por la cual se han calculado los cuadros que siguen:

SUELOS DE HIERRO.

LUCES *que pueden salvarse con viguetas de doble* T, *de Barcelona y de Bilbao, para cargas por metro cuadrado de piso de* 300, 400, 500 *y* 600 *kg., y distancias entre ejes de* $0^m,50$, $0^m,75$ *y* 1^m; *bajo la condición de que el hierro trabaje á razón de unos* 800 *kg. por centímetro cuadrado.*

MATERIAL PARA FERROCARRILES Y CONSTRUCCIONES (BILBAO)

DIMENSIONES de las vigas en centímetros.			Peso por metro lineal. en kg.	Módulo de flexión al cm.		CARGA por metro cuadrado. 300 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 400 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 500 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 600 kilogramos. Distancia entre ejes.		
h	*b*	*e*		*Z*		$0^m,50$	$0^m,75$	1^m	$0^m,50$	$0^m,75$	1^m	$0^m,50$	$0^m,75$	1^m	$0^m,50$	$0^m,75$	1^m
8	4,5	0,6	8,8	27	Luces salvadas, en metros.	3,39	2,77	2,40	2,94	2,40	2,08	2,63	2,15	1,86	2,40	1,96	1,70
10	4,5	0,6	9,7	38		4,02	3,29	2,85	3,49	2,85	2,46	3,12	2,55	2,20	2,85	2,33	2,02
13	5	0,7	12,9	68		5,38	4,40	3,80	4,66	3,80	3,30	4,17	3,41	2,95	3,81	3,11	2,69
16	5,5	0,7	16,3	96		6.40	5,23	4,53	5,54	4,53	3,92	4,96	4,05	3,50	4,53	3,70	3,20
18	6	0,8	19,9	134		7,56	6,17	5,35	6,55	5,35	4,63	5,86	4,78	4,14	5,3[illegible]	4,37	3,78
20	6,5	0,8	22,7	159		»	6,73	5,82	7,13	5,82	5,04	6,38	5,21	4,51	5,83	4,76	4,12
22,5	7	0,9	26,9	222		»	»	6,88	»	6,88	5,96	7,54	6,15	5,33	6,88	5,62	4,87

SOCIEDAD DE ALTOS HORNOS (BILBAO)

VIGUETAS DE DOBLE T DE ALAS ESTRECHAS

DIMENSIONES de las vigas en centímetros.			Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.	Luces salvadas, en metros.	CARGA por metro cuadrado. 300 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 400 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 500 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 600 kilogramos. Distancia entre ejes.		
h	*b*	*e*		Z		0m,50	0m,75	1m	0m,50	0m,75	1m	0m,50	0m,75	1m	0m,50	0m,75	1m
10	4,4	0,6	10	37,5		4,00	3,26	2,82	3,46	2,82	2,45	3,09	2,52	2,19	2,82	2,30	2,00
12	4,5	0,7	12	53,2		4,76	3,89	3,36	4,12	3,36	2,91	3,69	3,01	2,60	3,36	2,75	2,38
14	4,5	0,7	14	71,2		5,51	4,50	3,89	4,77	3,89	3,37	4,26	3,48	3,01	3,89	3,18	2,75
16	4,9	0,7	16	89,6		6,18	5,04	4,37	5,35	4,37	3,78	4,78	3,91	3,38	4,37	3,56	3,09
18	5,5	0,7	18	119,0		7,12	5,81	5,03	6,17	5,03	4,36	5,51	4,50	3,90	5,03	4,11	3,56
20	6,2	0,7	20	154,0		8,10	6,61	5,73	7,01	5,73	4,96	6,27	5,12	4,38	5,73	4,68	4,05

VIGUETAS DE DOBLE T, DE ALAS ANCHAS

DIMENSIONES de las vigas en centímetros.			Peso por metro lineal en kg.	Módulo de flexión al cm.	CARGA por metro cuadrado. 300 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 400 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 500 kilogramos. Distancia entre ejes.			CARGA por metro cuadrado. 600 kilogramos. Distancia entre ejes.		
h	*b*	*e*		Z	0m,50	0m,75	1m	0m,50	0m,75	1m	0m,50	0m,75	1m	0m,50	0m,75	1m
					Luces salvadas en metros.											
8	4,2	0,39	5,9	19,6	2,89	2,36	2,04	2,50	2,04	1,77	2,24	1,82	1,58	2,04	1,66	1,44
10	5,0	0,45	8,3	34,4	3,83	3,12	2,70	3,31	2,70	2,34	2,96	2,42	2,09	2,70	2,21	1,91
12	5,8	0,51	11,1	55,1	4,85	3,95	3,42	4,20	3,42	2,96	3,75	3,06	2,65	3,42	2,80	2,42
14	6,6	0,57	14,3	82,7	5,94	4,85	4,20	5,14	4,20	3,63	4,60	3,75	3,25	4,20	3,42	2,97
16	7,4	0,63	17,9	118,0	7,09	5,79	5,01	6,14	5,01	4,34	5,49	4,48	3,88	5,01	4,09	3,54
18	8,2	0,69	21,9	162,0	8,31	6,78	5,87	7,20	5,87	5,09	6,44	5,25	4,55	5,87	4,80	4,15
20	9,0	0,75	26,2	216,0	9,60	7,83	6,78	8,31	6,78	5,87	7,43	6,07	5,25	6,78	5,54	4,80
22	9,8	0,81	31,0	281,0	»	8,94	7,74	9,48	7,74	6,70	8,48	6,92	5,99	7,74	6,32	5,47
24	10,6	0,87	36,2	357,0	»	10,07	8,72	»	8,72	7,55	9,55	7,84	6,75	8,72	7,12	6,17
26	11,3	0,94	41,9	446,0	»	»	9,75	»	9,75	8,44	»	8,72	7,55	9,75	7,96	6,89
28	11,9	1,01	47,9	547,0	»	»	»	»	»	9,35	»	9,66	8,36	»	8,82	7,63
30	12,5	1,08	54,1	659,0	»	»	»	»	»	»	»	»	9,18	»	9,68	8,38
32	13,1	1,15	61,0	789,0	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	10,50	9,17

ARMADURAS

541. **Preliminares.**—Reciben el nombre de *armaduras,* las construcciones de naturaleza diversa que tienen por objeto sustentar las cubiertas de los edificios.

En tales construcciones hay que considerar dos partes distintas: las *armaduras propiamente dichas* y la red de piezas que constituyen los *entramados inclinados* y se apoyan sobre las primeras.

Las *armaduras propiamente dichas,* llamadas también *formas, cerchas* y *cuchillos,* insisten por sus extremos sobre los muros y algunas veces sobre pies derechos; se colocan de trecho en trecho en planos verticales; afectan formas sumamente variadas, y, á semejanza de las grandes vigas, con las que ofrecen completa analogía, se componen, en general, de un cordón superior, formado por dos piezas sencillas ó compuestas, llamadas *pares;* un cordón inferior ó *tirante,* que puede ser recto ó poligonal y diversas piezas interiores ó de relleno, de las cuales, unas trabajan por compresión, tales son los *montantes, tornapuntas, manguetas* ó *bielas*, etc., y otras lo hacen por extensión, como sucede con el *pendolón, péndolas, tirantes,* etc.

Los *entramados inclinados,* que, como hemos dicho, descansan sobre los cuchillos, constan, en el caso más general, de las piezas siguientes:

Correas ó *viguetas:* piezas horizontales que se apoyan directamente sobre los pares á los cuales suelen ser perpendiculares.

Cabios ó *parecillos:* piezas colocadas sobre las correas, perpendicularmente á ellas y que siguen, por tanto, las líneas de máxima pendiente de las superficies de cubierta.

Listones, ó en su lugar, *tablas,* colocados sobre los cabios, paralelamente á las correas, y sobre cuyas piezas insiste directamente el tejado. Se emplean los primeros, á cuyo conjunto se da el nombre de *enlistonado,* para la teja plana, chapas metálicas, etc.; y, para los demás casos, en que el tejado es de distinta naturaleza, se usan las segundas, es decir, el *enlatado,* constituído por un entarimado de tablas delgadas que no dejan claros entre sí.

En algunas localidades, el enlatado se reemplaza por un verdadero *embaldosado* y entonces la distancia entre ejes de los cabios ha de ser igual al lado del cuadrado de la baldosa empleada.

En ciertos casos, y según la importancia de la construcción, pueden faltar algunas de estas piezas, como es fácil observar en las diversas disposiciones adoptadas para cubrir los edificios, sobre todo cuando la luz salvada no es de consideración.

Prescindiendo de las cerchas de fábrica, constituídas, de ordinario, por arcos ojivales enrasados por el trasdos, según rectas cuya inclinación es la misma que ha de tener la cubierta, clasificaremos las armaduras, para nuestro estudio, en dos grupos, según la naturaleza de los materiales preponderantes: *de madera* y *de hierro*. Pueden dividirse también en rígidas y articuladas, atendiendo al sistema de enlaces entre sus diferentes piezas.

542. Cargas que soportan las armaduras.—La carga total p, por metro cuadrado de vertiente, que hay que tener en cuenta para el cálculo de las armaduras, se compone de dos partes: la carga permanente t, que comprende el peso de la cubierta y el correspondiente al entramado y armadura propiamente dicha; y la carga accidental, $n + v$, que á su vez está constituída por el peso n, debido á la nieve y la presión vertical v, engendrada por la acción del viento.

543. Carga permanente.—Según hemos dicho, la carga permanente t por metro cuadrado de vertiente, se compone de dos sumandos; y como uno de ellos (peso debido á las piezas del entramado y armadura propiamente dicha) depende de las dimensiones desconocidas de las piezas que han de calcularse, no es posible fijar *à priori* el valor de t de una manera exacta; pero para un primer estudio y sin perjuicio de rectificar después el peso propio del entramado y armadura, pueden tomarse los valores consignados en el siguiente cuadro, donde, además, se indican las inclinaciones límites usuales de las vertientes para cada clase de cubierta.

CLASE DE CUBIERTA.	INCLINACIÓN DE LA CUBIERTA		Carga permanente en kg. por m² para armaduras de	
	Relación entre la flecha y la luz $\frac{f}{l}$	Angulo de inclinación — *Grados.*	Madera ó madera y herro. — t	Hierro. — t
Teja árabe ó lomuda	$\frac{1}{5}$ á $\frac{1}{3}$	22° á 34°	160	130
Id. plana........	$\frac{1}{3}$ á $\frac{1}{2}$	34° á 45°	100	70
Pizarra	$\frac{1}{3}$ á $\frac{1}{2}$	34° á 45°	75	50
Zinc ó palastro ...	$\frac{1}{7}$ á $\frac{1}{5}$	16° á 22°	40	25
Vidrio...........	$\frac{1}{10}$ á $\frac{1}{5}$	11° á 22°	80	60
Cartón...........	$\frac{1}{7}$ á $\frac{1}{5}$	16° á 22°	30	»

Si llamamos α al ángulo que forma la vertiente con el horizonte, la relación $\frac{2f}{l}$, entre el doble de la flecha y la luz de una armadura, será la tangente trigonométrica del ángulo α. En el siguiente cuadro se consignan los valores usuales de la relación $\frac{f}{l}$ y debajo los correspondientes de α, expresados en grados y minutos sexagesimales, con un error menor que 10′.

Valor de $\frac{f}{l}$....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
Inclinación α=	45°	33° 40′	26° 40′	21° 50′	18° 30′	16°	14° 10′	12° 40′	11° 20′

544. **Observación.**—Los valores de *t* consignados en el cuadro que anteriormente hemos visto, se emplean única y exclusivamente para el cálculo de la armadura propiamente dicha.

Para el cálculo de las piezas del entramado, enlistonado ó enlatado, cabios y correas, se formará la carga permanente partiendo de los datos que ahora consignaremos, relativos al peso por metro cuadrado de diversas clases de cubiertas, y añadiendo para el cálculo de cada elemento el peso propio de las piezas anteriormente calculadas, como veremos oportunamente.

CUADRO DE PESOS POR METRO CUADRADO DE VERTIENTE PARA DIVERSAS CLASES DE CUBIERTAS.

CLASE DE CUBIERTA.	Peso por m² Kg.
Teja ordinaria forjada con cascote y barro .	110 á 130
Id. íd. en seco....................	60 « 70
Id. plana catalana.....................	50
Id. íd. de Madrid	45
Planchas de plomo del núm. 2	12,50
Id. » » » » 3	18,73
Id. » » » » 4............	25

CLASE DE CUBIERTA.	Peso por m² Kg.
Chapas de zinc.—Sistema de listones.	
Chapa del núm. 11	5
Id. » » 12	6
Id. » » 13	7
Id. » » 14	8
Id. Sistema de rombos.	
Chapa del núm. 9	4
Id. » » 10	4,5
Id. » » 11	5
Id. » » 12	6
Id. Sistema de regueras.	
Chapa del núm. 15	8
Id. » » 16	9
Id. » » 17	11
Id. » » 18	12
Chapas onduladas núm. 14	9
Id. » » 15	10
Pizarra española núms. 1 á 5	37
Id. » » 6	35
Id. » » 7 y 8	30
Id. » » 9	34
Id. » » 10	31
Vidrio sencillo (incluído mastic, etc.)	5,50
Id. semidoble	7
Id. doble (de 4 milímetros)	10
Id. estriado	15
Asfalto	20 á 25
Fieltro asfaltado	8
Cartón embreado	4

545. Cargas accidentales.—Ya hemos dicho que estas cargas se deben al peso de la nieve que puede acumularse sobre la cubierta y á la presión vertical engendrada por el viento.

Veamos qué valores hay que atribuir á dichas cargas, las cuales supondremos que obran simultáneamente.

546. Peso de la nieve por metro cuadrado de vertiente.—Si llamamos h á la altura de la capa de nieve y α al ángulo que forma la cubierta con el horizonte, el prisma de nieve que gravite sobre un metro cuadrado de cubierta tendrá un volumen igual á $h \cos \alpha$; y como generalmente se admite que la densidad de la nieve es $\frac{1}{8}$ de la del agua, el peso de dicho prisma será, en kilogramos,

$$n = \frac{1}{8} \times 1000\, h \cos \alpha = 125\, h \cos \alpha$$

Recordando que

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} \qquad \text{y} \qquad tg\, \alpha = \frac{2f}{l},$$

será

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{f}{l}\right)^2}}$$

y por tanto

$$n = \frac{125\, h}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{f}{l}\right)^2}}$$

Si en esta expresión damos á la relación $\frac{f}{l}$ los valores usuales, y suponemos que h varía de $0^m,10$ á $0^m,40$, tendremos los correspondientes de n, que se consignan en el siguiente cuadro:

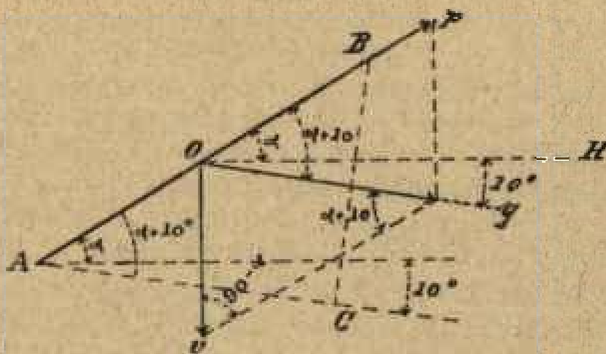
RELACIÓN $\frac{f}{l}$	PESO n DE LA CAPA DE NIEVE POR M^2 DE VERTIENTE para una altura h de			
	$0^m,10$	$0^m,20$	$0^m,30$	$0^m,40$
	kilogramos.	Kilogramos.	Kilogramos.	Kilogramos.
$\frac{1}{2}$	8,86	17,72	26,58	35,44
$\frac{1}{3}$	10,40	20,80	31,20	41,60
$\frac{1}{4}$	11,18	22,36	33,54	44,72
$\frac{1}{5}$	11,60	23,20	34,80	46,40
$\frac{1}{6}$	11,85	23,70	35,55	47,40
$\frac{1}{7}$	12,01	24,02	36,03	48,04
$\frac{1}{8}$	12,12	24,24	36,36	48,48
$\frac{1}{9}$	12,20	24,40	36,60	48,80
$\frac{1}{10}$	12,26	24,52	36,78	49,04

547. **Presión vertical del viento.**—Para calcular esta presión sobre un metro cuadrado de vertiente, admitiremos que la dirección del viento forma un ángulo de 10^0 con el horizonte y además, que, siendo V la velocidad de aquel, la presión que ejerce por metro cuadrado sobre una superficie plana perpendicular á su dirección es

$$P = 0,113V^2.$$

Sea AB $=1$ (figura 234) la proyección vertical de un metro cuadrado de cubierta, la cual forma con el horizonte el ángulo BOH $=\alpha$; y sea Oq la acción del viento sobre AB, cuya dirección forma con la horizontal OH el ángulo de 10^0, HOq.

Fig. 234.



Llamando q á la presión Oq que el viento ejerce sobre la superficie inclinada AB $=1$, su valor se obtendrá multiplicando la presión por metro cuadrado, $P=0{,}113V^2$, por la proyección BC de AB, sobre la normal á la dirección de aquel; de donde tendremos:

$$q = P \times BC = 0{,}113\, V^2\, (AB)\, \text{sen}\, (\alpha + 10^o);$$

y puesto que AB $=1$ será

$$q = 0{,}113\, V^2\, \text{sen}\, (\alpha + 10).$$

Ahora bien, descomponiendo la fuerza q en la componente vertical v y la paralela á la vertiente p, tendremos en el triángulo vOq:

$$\frac{v}{q} = \frac{\text{sen}\,(\alpha + 10^o)}{\text{sen}\,(90 - \alpha)} = \frac{\text{sen}\,(\alpha + 10^o)}{\cos \alpha};$$

de donde

$$v = q \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 10^\circ)}{\cos \alpha}$$

y sustituyendo el valor de q, antes encontrado, será

$$v = \frac{0{,}113\, V^2 \operatorname{sen}^2(\alpha + 10^\circ)}{\cos \alpha}.$$

Por medio de esta expresión se calculará la presión vertical del viento por metro cuadrado de vertiente, conociendo la velocidad V de aquel y el ángulo α, de inclinación de la cubierta.

La velocidad del viento es muy variable; puede oscilar entre 4 y 45 metros por segundo, correspondiendo el primer valor á un viento fresco y el segundo á un violento huracán; de donde resulta que los valores de V^2 se hallan comprendidos entre los apartados límites, $V^2 = 16$ y $V^2 = 2025$.

Parece natural que para prevenirse contra los efectos de los grandes huracanes hubiera de darse á V^2 su valor máximo; pero como al propio tiempo se tiene en cuenta en los cálculos el peso de la nieve, la cual no puede subsistir sobre la cubierta cuando la velocidad del viento llega á un cierto límite; suele tomarse como máximo, para el objeto que nos ocupa, la de 30 ó 32 metros por segundo; por lo que no hay inconveniente en asignar á V^2 como máximo valor, $V^2 = 1000$; y así la expresión de v, que comunmente se emplea, es:

$$v = \frac{113 \operatorname{sen}^2(\alpha + 10^\circ)}{\cos \alpha}$$

Si en esta fórmula damos á α los valores correspondientes á los usuales de la relación $\frac{f}{l}$, tendremos los resultados que contiene el siguiente cuadro:

RELACION $\frac{f}{l}$ ... =	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
Presión vertical por metro cuadrado de vertiente en kg... $v =$	107,2	64,7	45,1	33,8	27,1	22,5	19,5	17,2	15,2

548. Carga total p por metro cuadrado de cubierta.—Si suponemos que el espesor de la capa de nieve alcanza un valor máximo de $0^m,30$, que creemos suficientemente grande en nuestros climas, y para cada clase de cubierta y valores de la relación $\frac{f}{l}$, hacemos la suma de las cantidades calculadas t, n y v, formaremos el siguiente cuadro, en el cual se han redondeado las cifras resultantes.

Por lo demás, en un caso cualquiera en que se juzgase conveniente no aceptar como valor de V^2, $V^2 = 1000$, ni $h = 0{,}30$, es fácil calcular directamente el valor de p, determinando los valores de n y de v, de la manera que anteriormente hemos indicado.

VALORES DE LA CARGA TOTAL p, POR METRO CUADRADO DE CUBIERTA, QUE PUEDEN TOMARSE, EN GENERAL, PARA EL CÁLCULO DE LAS ARMADURAS PROPIAMENTE DICHAS.

CLASE DE CUBIERTA	Relación $\frac{f}{l}$ entre la flecha y la luz.								
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
Armadura de madera ó de madera y hierro.									
Teja lomuda	293	255	238	228	217	»	»	»	»
Teja plana............	233	196	175	169	»	»	»	»	»
Pizarra...............	209	171	154	144	»	»	»	»	»
Zinc ó palastro	174	136	119	109	103	99	96	94	92
Vidrio	214	176	159	149	143	139	136	134	132
Cartón...............	164	126	109	99	93	89	86	84	82
Armadura de hierro.									
Teja lomuda	264	226	209	199	»	»	»	»	»
Teja plana...........	204	166	149	139	»	»	»	»	»
Pizarra	184	146	129	119	»	»	»	»	»
Zinc ó palastro	159	121	104	94	88	84	81	79	77
Vidrio	194	156	139	129	123	119	116	114	112

549. Marcha general de cálculo.—Conociendo la luz y la flecha de una armadura, así como el valor de la carga por metro cuadrado de vertiente que ha de soportar y la distancia entre cuchillos, y elegida además la forma y organización que se juzgue preferible, las operaciones que en general lleva consigo el cálculo de una armadura son las siguientes:

1.ª Determinación de las cargas que pueden suponerse aplicadas á los diversos nudos.

2.ª Determinación de las reacciones en los apoyos.

3.ª Determinación de las fuerzas interiores (de compresión ó de extensión) que se desarrollan en cada una de las piezas.

4.ª Cálculo del momento máximo de flexión en aquellas piezas que soporten cargas directamente aplicadas en puntos intermedios á nudos contiguos.

5.ª Cálculo de la escuadría de las piezas diferentes, según se hallen sometidas:

a) á flexión simple (listones, tablas y correas);
b) á flexión compuesta (pares, cuando hay correas que insisten fuera de los nudos, y tirantes cuando soportan viguetas de suelo);
c) á compresión (pares, cuando las correas insisten en los nudos, puentes, tornapuntas, bielas, etc.);
d) á extensión (tirantes, cuando no soportan viguetas de suelo, péndolas y pendolón).

550. **Determinación de las fuerzas que pueden suponerse aplicadas á los nudos.**—Supongamos una armadura simétrica y simétricamente cargada, cuya mitad de la izquierda representa la figura 236, y compuesta de las siguientes partes:

Pares AD, tirante AH, puente BG, tornapuntas ó jabalcones CE, pendolón DE y diversas correas *c, c,* etc., de las que las inferiores extremas hacen las veces de *soleras* y la más alta recibe el nombre de *hilera* ó *cumbrera*.

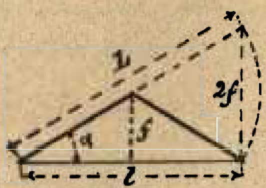
Sobre las correas descansa la superficie material que forma la cubierta (no representada en la figura), cuyo peso está uniformemente repartido.

Llamemos l á la luz y f á la flecha, d á la distancia entre cerchas, α al ángulo que forma el par con el tirante, ó lo que es lo mismo, el que forma la cubierta con el horizonte, y p al peso total por metro cuadrado de cubierta, el cual comprende, como ya hemos dicho, el peso propio de la construcción, el de la nieve y la presión vertical del viento.

Entre los dos pares dan una longitud cuya expresión es

$$L = \sqrt{l^2 + 4f^2} = \frac{l}{\cos \alpha}$$

Fig. 235.



(figura 235), y como las formas las suponemos á la distancia d unas de otras, corresponderá á cada una de ellas una superficie cargada

$$S = L \times d = \frac{dl}{\cos \alpha} = d\sqrt{l^2 + 4f^2};$$

y, por tanto, sobre cada cuchillo gravitará una carga total uniformemente repartida

$$P = \frac{pld}{\cos \alpha} = pd\sqrt{l^2 + 4f^2} \text{ kg.}$$

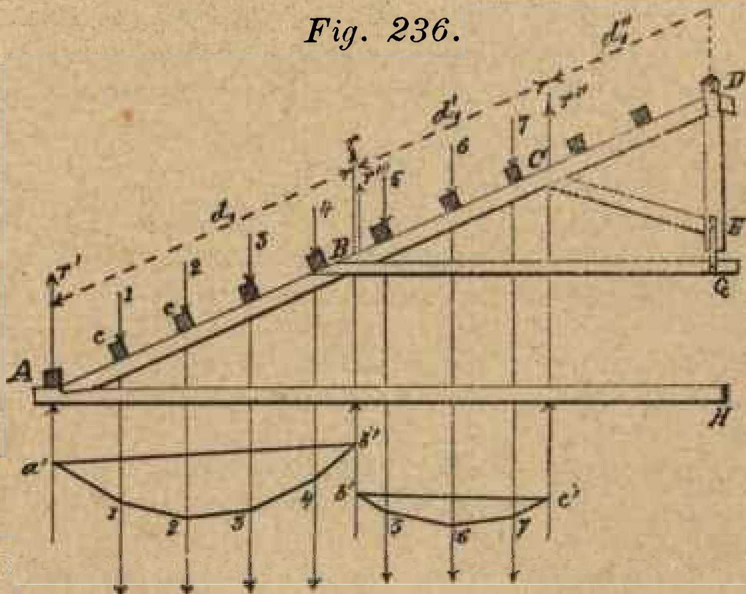
Esta carga se transmite á los pares por el intermedio de las correas; de suerte que, con relación á aquéllos, la carga P no puede considerarse como uniformemente repartida, sino como fraccionada en cargas parciales aplicadas cada una sobre la correa correspondiente.

Cuando las correas están bastante próximas y su distribución en cada tramo del par es simétrica respecto á los nudos contiguos, entonces en la práctica no hay inconveniente en admitir que la capa P está uniformemente repartida en los pares.

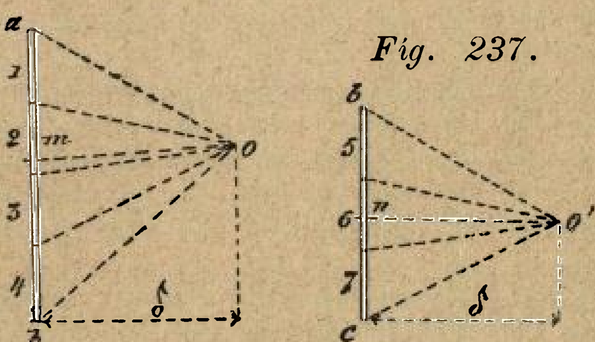
Aunque las correas se disponen siempre á distancias iguales entre sí, puede suceder, si bien no es lo frecuente, que los pares queden divididos por los nudos en tramos desiguales, y que además las correas insistan en puntos intermedios á nudos contiguos, y de manera no simétrica con respecto á estos últimos. Tal es el caso más general que primeramente podemos considerar.

Si hay $n + 1$ correas que dejan n espacios iguales, cada una transmitirá al par una carga igual á $\frac{P}{n}$ excepto las inferiores, que hacen las veces de solera, cada una de las cuales sólo recibe una carga mitad, es decir, $\frac{1}{2}\frac{P}{n}$.

Fig. 236.



Consideremos los tramos consecutivos desiguales AB y BC



(figura 236), cuyas longitudes representaremos por $d_1 = AB$ y $d'_1 = BC$.

Suponiendo, en obsequio á la brevedad, que los tramos son independientes, el problema se reduce á determinar, como ya sabemos y ahora hemos de recordar, las reacciones que los pesos transmitidos al par por las cuatro primeras correas engendran en los nudos ó apoyos A y B, así como las que engendran en B y C los pesos que transmiten las tres siguientes.

Para ello construiremos los polígonos de las fuerzas

$$1 + 2 + 3 + 4 = ab \text{ y } 5 + 6 + 7 = bc \text{ (figura 237).}$$

Elegiremos los polos O y O' á la distancia δ, y trazando los polígonos funiculares correspondientes, tiraremos por último las rectas Om y O'n, respectivamente paralelas á las $a'b'$ y $b'c'$.

La magnitud bm representa la reacción r que el primer grupo de fuerzas engendra en el apoyo B; la ma, la reacción r' en A; la cn es la reacción r'' en C, desarrollada en este punto por las fuerzas del segundo grupo, y por último, nb es la reacción r''' que estas engendran en B.

En resumen, las reacciones desarrolladas en los tres apoyos consecutivos que consideramos, serán: en A, $r' = ma$; en B, $r + r''' = bm + bn$, y en C, $r'' = cn$.

Es claro que haciendo lo propio para los tramos siguientes, llegaremos á determinar las reacciones totales en cada apoyo, que no son otra cosa sino las fuerzas iguales y contrarias á las que podemos suponer aplicadas á los nudos, y que nos proponíamos encontrar

Pero este caso, como antes decíamos, es poco frecuente. Lo ordinario es que el par quede dividido en tramos iguales por los nudos, y que las correas insistan únicamente sobre éstos; porque de esta suerte los pares no trabajan más que por compresión, lo que permite disminuir su escuadría y, por lo tanto, el coste de la obra.

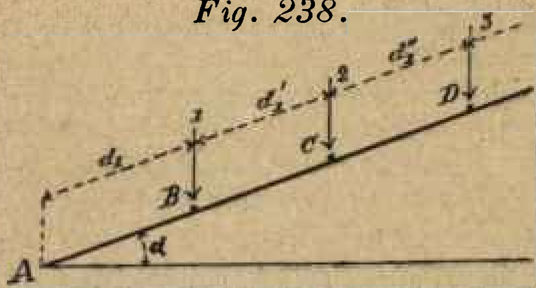
En tal supuesto, si llamamos d_1 á la separación constante de los nudos, ó, lo que es lo mismo, á la distancia entre correas en este caso, y n al número de tramos de que se compone cada par, la expresión de la carga que cada correa transmite al nudo correspondiente (incluyendo la hilera que está en igualdad de condiciones), será

$$1 = 2 = 3 = \frac{P}{2n} = \frac{pld}{2n \cos \alpha}.$$

Conviene observar que en el extremo inferior de los pares, cuando sobre él insiste la correa que hace las veces de solera, resulta aplicada una carga igual á $\frac{1}{2} \frac{P}{2n} = \frac{1}{2} \frac{pld}{2n \cos \alpha}$; porque como sobre el tramo inferior actúa un peso $\frac{P}{2n}$, este se descompone en dos mitades, una aplicada á la correa inferior y la otra sobre la inmediata, que sumada con la componente simétrica da la carga total $\frac{P}{2n}$ que obra sobre ella.

Finalmente, si las correas insisten sobre los nudos solamente (figura 238) y á distancias desiguales d_1, d'_1, d''_1, etc., las cargas

Fig. 238.



sobre cada uno de aquéllos son fáciles de calcular. En efecto: siendo $P = \frac{pld}{\cos \alpha}$ la carga total repartida en la longitud L que suman los dos pares, la carga por metro lineal de par será $\frac{P}{L} = \frac{pld}{L \cos \alpha}$; y como $l = L \cos \alpha$, una expresión más sencilla de dicha carga será $\frac{P}{L} = pd$.

Ahora bien; sobre el tramo AB actúa una carga total pdd_1; sobre BC, la carga es pdd'_1; para CD, pdd''_1, y así para los demás tramos.

Pero estas cargas, sustentadas por los cabios ó parecillos, están uniformemente repartidas á razón de pd kilogramos por metro lineal de cabio; por consiguiente, en B resultará aplicada la mitad de la primera carga y la mitad de la segunda; en C la mitad de la segunda más la mitad de la tercera, y así sucesivamente, de donde tendremos:

Carga aplicada en el nudo B........ $1 = pd\,\dfrac{d_1 + d'_1}{2}$

Id. » » C........ $2 = pd\,\dfrac{d'_1 + d''_1}{2}$, etc.

Resulta, pues, que en este caso la carga aplicada sobre un nudo, será igual á la semisuma de las cargas que obran sobre los tramos contiguos, separados por el nudo de que se trata.

551. Determinación de las reacciones en los apoyos.—Si la armadura es simétrica y está simétricamente cargada, las reacciones en los apoyos serán iguales entre sí, y cada una valdrá la mitad de la carga total P, es decir la mitad de la suma de las fuerzas que podemos suponer aplicadas á los diversos nudos, contando con los extremos que descansan en los apoyos.

Pero de las cargas aplicadas á estos últimos se puede prescindir, porque quedan directamente anuladas por fracciones de igual valor, de las reacciones efectivas que obran en sentido contrario; de donde resulta que las reacciones, cuyo conocimiento interesa, como pronto veremos, para la construcción del diagrama de fuerzas interiores, son las que provienen de considerar única y exclusivamente las fuerzas aplicadas á los nudos intermedios.

Así, por ejemplo, si cada par queda dividido en n tramos iguales y la carga total es P, la aplicada á cada uno de los $2n - 1$

nudos intermedios, que existen sobre los dos pares será $\frac{P}{2n}$; las reacciones efectivas ó totales sobre los apoyos serán iguales á $\frac{1}{2}$ P, y, finalmente, las reacciones que equilibran á las $2n - 1$ fuerzas exteriores que se necesita considerar para construir el expresado diagrama, tendrán por expresión

$$\frac{1}{2}(2n-1)\frac{P}{2n} = \frac{(2n-1)P}{4n}.$$

Claro es que la carga aplicada á cualquiera de los extremos de la armadura será $\frac{1}{2}\ \frac{P}{2n}$; así como las que obran sobre los nudos intermedios compondrán $(2n-1)\frac{P}{2n}$. La suma de todas ellas debe ser igual á la carga total P: y en efecto, resulta

$$2 \times \frac{1}{2}\ \frac{P}{2n} + \frac{(2n-1)P}{2n} = \frac{P + 2nP - P}{2n} = P.$$

Si la armadura no es simétrica ó no está simétricamente cargada, las reacciones serán desiguales y su determinación se hará descomponiendo, de la manera que ha poco recordamos, el sistema conocido de fuerzas exteriores, aplicadas á los $2n - 1$ nudos intermedios, en dos componentes paralelas que pasen por los apoyos. Todo, pues, se reduce á construir un polígono funicular correspondiente al sistema indicado y relativo á un polo arbitrario; porque la recta trazada desde el polo, paralelamente al lado que cierra el contorno del polígono funicular, dividirá á la suma de las fuerzas exteriores en dos partes, que serán las reacciones buscadas.

552. Determinación de las fuerzas interiores.— Si cada par de la armadura queda dividido en n tramos, el número total de éstos en ambos pares será $2n$ y, por lo tanto, habrá $2n - 1$ nudos intermedios. El número total de fuerzas exteriores, determinadas de la manera que ya hemos explicado, y las cuales forman un sistema en equilibrio, será $2n + 1$; puesto que á las $2n - 1$ aplicadas á los nudos hay que añadir las dos reacciones en los apoyos.

Así, por ejemplo, si cada par quedase dividido por los nudos en 4 partes, entre los dos pares darán 8 tramos; habrá, por tanto, 7 nudos intermedios y 9 fuerzas exteriores en equilibrio, 7 aplicadas á estos nudos y 2 reacciones en los apoyos.

Dibujada la figura de la armadura, reducida á sus ejes, con arreglo á una cierta escala, se trazan por los nudos y por los apoyos rectas verticales que representen las líneas de acción de las fuerzas exteriores, las cuales, contadas de izquierda á derecha desde el primer nudo intermedio, se numerarían en el caso supuesto con las cifras gruesas **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**. La reacción en el apoyo derecho se designa con la cifra **8** y la de la izquierda con la **9**.

De modo análogo, y siempre de izquierda á derecha, se numeran todas las piezas de la armadura con las cifras siguientes, desde la **10** inclusive en adelante.

Con arreglo á una escala apropiada á la claridad y exactitud de las operaciones, se construye el polígono de fuerzas exteriores; se construye asimismo la figura recíproca y en caso necesario el polígono funicular, de la manera que ya sabemos, y aplicando las reglas conocidas y midiendo las líneas resultantes, tendremos así determinadas la naturaleza y magnitud de las fuerzas interiores desarrolladas en las diversas piezas de la armadura.

Este método, que de una manera general hemos estudiado en el tomo I, pág. 107, y del que hemos hecho uso en diferentes ocasiones, puede, en ciertos casos, ser insuficiente. Tal sucede cuando, al quererlo aplicar, se llega á un nudo en que el número de fuerzas desconocidas es superior á dos. Entonces es absolutamente necesario recurrir á otros métodos; por ejemplo, al método de Culmann, del que también nos hemos ocupado en el tomo I, pág. 113, y más adelante tendremos ocasión de aplicar á algún caso concreto.

Como ya sabemos, á medida que se van construyendo los polígonos recíprocos de los diversos nudos, se van numerando sus lados con las cifras delgadas del mismo nombre que tienen los lados correspondientes de la figura directa, teniendo cuidado de hacer con trazo grueso las líneas de la figura recíproca que representen compresiones, y con trazo delgado las que representen extensiones. Del propio modo, en la figura directa, se harán con trazo grueso las líneas que representen piezas comprimidas, y con trazo delgado aquellas que representen piezas extendidas.

La construcción del polígono funicular será necesaria siempre que las reacciones en los apoyos no sean iguales entre sí y también cuando convenga utilizar aquél para la determinación del momento máximo de flexión, en cualquiera de las piezas sometidas á este género de esfuerzo; pues ya sabemos que dicho momento puede calcularse multiplicando el valor de la ordenada máxima del polígono funicular correspondiente por la distancia polar, es decir, por la distancia entre el polo y la línea del polígono de las fuerzas exteriores que representa la resultante de las mismas.

Finalmente, el diagrama de fuerzas interiores puede utilizarse para deducir, respecto á cada tipo de armadura, fórmulas generales muy sencillas, con las cuales se calculan rápidamente, como pronto veremos, los valores numéricos de las compresiones y extensiones desarrolladas en las diferentes piezas.

553. **Cálculo de los momentos máximos de flexión.**—Sucede con frecuencia que ciertas piezas de una armadura se hallan sometidas á flexión compuesta, resistiendo simultáneamente á un esfuerzo de compresión ó de extensión y á un momento máximo de flexión, que es necesario determinar.

Cuando las correas insisten en puntos intermedios á los nudos, el par sufre una compresión y una flexión; y análogamente, si el tirante soporta viguetas de suelo, resistirá á una extensión y á una flexión.

Importa, pues, calcular el momento máximo originado por las fuerzas de flexión que obran sobre la pieza que se considera, y esto puede hacerse de dos modos: ó analíticamente, de la manera que en los casos más importantes hemos estudiado en el tomo I, ó construyendo un polígono funicular; pues ya sabemos que el producto de multiplicar su ordenada máxima por la distancia polar, nos dará el momento que se busca.

Este último procedimiento supone que la pieza está apoyada por sus extremos, ó, que si se compone de varios tramos, estos son independientes, y se aplica con suma facilidad, cualquiera que sea la distribución de las cargas.

Pero el primer método permite establecer como base de cálcnlo dos hipótesis distintas, á saber: ó se admite que los tramos son solidarios y los apoyos están en línea recta, en cuyo caso la aplicación del teorema de los tres momentos resolverá el problema, ó se considera á los diversos tramos como si fueran independientes, y entonces el cálculo del momento máximo se hará por la fórmula correspondiente á las vigas apoyadas por sus extremos.

La primera hipótesis no suele aceptarse, aunque parezca más conforme con la realidad, no sólo porque en rigor los apoyos no resultarán en línea recta después de las deformaciones elásticas, sino porque su aplicación es algo más laboriosa, sin que, por otra parte, la diferencia en los resultados sea demasiado importante.

Por este motivo, nosotros aceptaremos de ordinario la hipótesis de tramos independientes, siguiendo en esto el ejemplo de muchos autores cuya autoridad en la materia que nos ocupa es reconocida.

554. **Determinación de la escuadría de las diferentes piezas.**—Ninguna dificultad puede ofrecer este cálculo, puesto que nos son conocidas las fórmulas aplicables á todos los casos.

Así, por ejemplo, si una pieza de armadura ha de trabajar por extensión, y la fuerza que la solicita es P, siendo K el coeficiente de seguridad y ω el área de la sección resistente, sabemos que será $\omega = \frac{P}{K}$.

Si la fuerza P fuera de compresión y la longitud de la pieza hiciera temer los efectos de la flexión lateral, entonces la sección ω tendría por expresión $\omega = \frac{P}{K'}$, siendo K′ el coeficiente de seguridad que corresponde á la relación $\frac{L}{B}$ entre la longitud de la pieza y el lado menor de su sección transversal; pero como el valor de la relación $\frac{L}{B}$ no se conoce de antemano, se resolvería prácticamente el problema, mediante algunos ensayos, de la manera que vimos al estudiar los pies derechos. Esto, en el caso de que la pieza fuera de bases planas. Si tuviera una base plana y la otra redondeada, es decir, si pudiera considerarse como empotrada por uno de sus extremos y articulada por el otro, entonces la fórmula sería la misma, pero sustituiríamos en ella en vez de P, $\frac{7}{4}$ P. Sabemos también que si la pieza tuviera sus dos bases redondeadas, ó lo que es lo mismo, si estuviera articulada por sus dos extremos, pondríamos en la referida fórmula $\frac{7}{2}$ P en vez de P.

Claro es que para piezas cortas, simplemente comprimidas, la sección ω se calcularía por la misma fórmula que para las piezas extendidas, representando K el coeficiente de seguridad á la compresión en ejemplares cúbicos.

Si alguna pieza hubiera de calcularse para resistir á un cierto esfuerzo cortante, el cálculo de la sección resistente se haría lo mismo y sería $\omega = \frac{T}{k}$, siendo T el esfuerzo cortante que lo solicita y k el coeficiente de seguridad á dicho esfuerzo.

Por último, para las piezas sometidas á flexión, las ecuaciones de resistencia, de las que fácilmente se deduce la escuadría, son:

Para la flexión simple..... $M = KZ$;

» la flexión compuesta.. $K = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{Z}$;

fórmulas que conocemos, y en las cuales representan:

K el coeficiente de seguridad;
M el momento máximo de flexión;
P la fuerza de compresión ó de extensión;
Z el módulo de flexión de la sección transversal de la pieza;
ω área de dicha sección.

Otras piezas de enlace hay que calcular, como son los pasadores ó pernos, estribos y roblones, que resisten á extensiones ó esfuerzos cortantes conocidos; pero siempre nos encontraremos en alguno de los casos estudiados.

Otro tanto pudiera decirse respecto á determinadas dimensiones que dependen del esfuerzo de desgarramiento longitudinal, como veremos oportunamente.

En conclusión: el cálculo de la seccion resistente, y por tanto de la escuadría de las diversas piezas de una armadura, no ofrece ninguna dificultad ni supone ningún problema nuevo que no tengamos ya estudiado y resuelto; pero es necesario tener muy en cuenta que las escuadrías así obtenidas no pueden aceptarse para determinadas piezas, porque para ensamblar unas con otras es necesario practicar cajas, rebajos ó taladros que debilitan la sección resistente. Así es que, para fijar las dimensiones prácticas de la sección transversal de una pieza cualquiera, es absolutamente indispensable aumentar las calculadas, en tanto cuanto lo exijan dichas ensambladuras, como tendremos ocasión de ver más adelante.

ARMADURAS DE MADERA

555. Las armaduras de madera pueden ser *en tejadillo* ó *á una sola agua* y *á dos aguas,* según que la cubierta forme una sola vertiente ó dos vertientes opuestas, formando un ángulo diedro, y en este último caso pueden ser simétricas ó disimétricas, con relación al plano vertical que pasa por la hilera.

Consideraremos los tipos más usuales; pero antes estudiaremos en general la manera de calcular las piezas que forman el entramado inclinado, como son el enlistonado y enlatado, los cabios y las correas (véase figura 239).

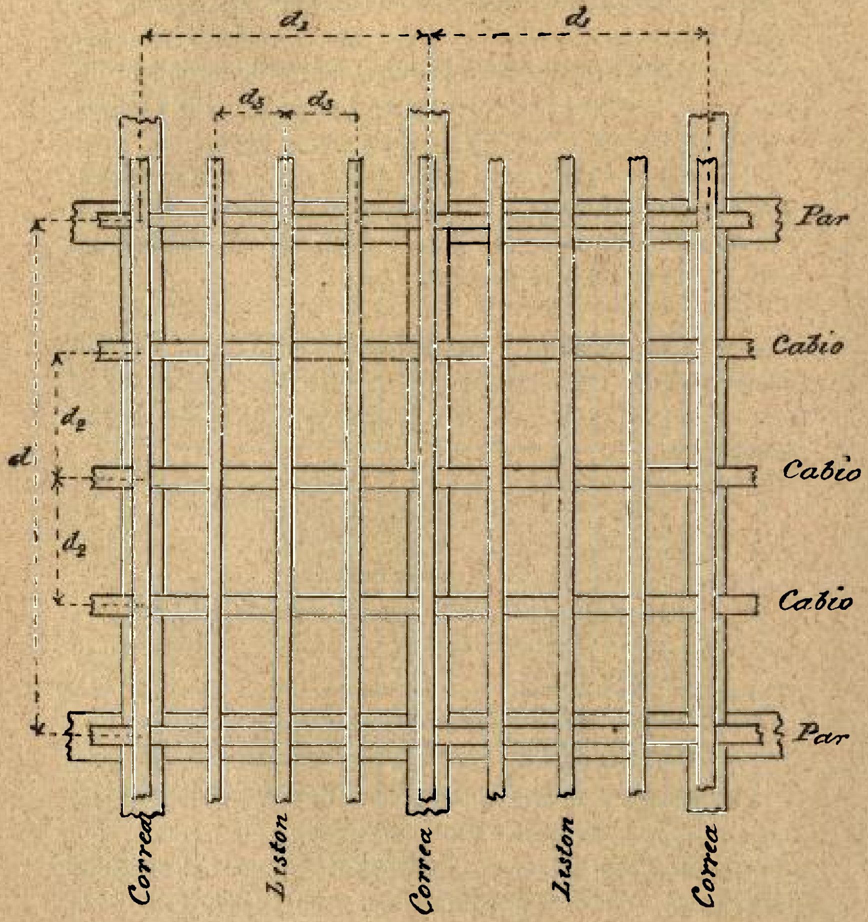
556. **Enlistonado y enlatado.**—Siendo p_3 la carga por metro cuadrado de vertiente, que en este caso comprende el peso del tejado, el de la nieve y la presión vertical del viento, llamaremos

d	á la distancia entre ejes de las formas ó cerchas;			
d_1	íd.	íd.	íd.	de las correas;
d_2	íd.	íd.	íd.	de los cabios;
d_3	íd.	íd.	íd.	de los listones ó de las tablas;
b	lado menor de la escuadría;			
h	lado mayor de íd.;			
ω	área de la sección transversal;			
Z	módulo de flexión de la misma.			

Los listones y tablas son piezas sometidas á flexión y apoyadas de ordinario en más de dos puntos; pero cada tramo lo consideraremos como pieza apoyada por sus extremos y sometida á una carga uniformemente repartida. Aun cuando esta carga forma en realidad el ángulo $90 - \alpha$ con las caras de apoyo, supondremos, sin embargo, para el cálculo, en obsequio á la brevedad y á la resistencia, que aquella es normal á dicha cara, como en el caso ordinario.

La superficie de carga para cada tramo de listón ó de tabla será $S_3 = d_2\, d_3$; y la carga total $P_3 = p_3\, d_2\, d_3$.

Fig. 239.



El momento máximo de flexión será, por tanto,

$$M = \frac{1}{8} P_3\, d_2,$$

y la ecuación de resistencia

$$\frac{1}{8} P_2 d_2 = \frac{1}{6} bh^2 K. \qquad (1)$$

Ahora bien; teniendo en cuenta que para los listones suele aceptarse la sección cuadrada, será $h = b$, y tendremos

$$\frac{1}{8} P_2 d_2 = \frac{1}{6} Kb^3, \qquad \text{de donde}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{P_2 d_2}{K}} \qquad (2).$$

Si en lugar de listones fueran tablas las que hubiese que calcular, lo más breve es acudir al cuadro de la pág. 584, donde á primera vista se encontrará la solución práctica más conveniente.

557. Cabios ó parecillos.—Son piezas inclinadas, que se apoyan por lo común en más de dos correas, á las cuales son perpendiculares; están sometidas á una carga uniformemente repartida, cuando hay enlatado, ó á cargas concentradas y equidistantes si se emplea el enlistonado; pero con el fin de simplificar y en beneficio de la resistencia, consideraremos cada tramo de cabio comprendido entre dos correas consecutivas como pieza apoyada por sus extremos y sometida á una carga uniformemente repartida, oblicua á su eje, con el que forma el ángulo $90 - \alpha$.

La carga por metro cuadrado de vertiente para el cálculo de los cabios, que llamaremos p_2, se compone del peso del tejado, del de la nieve, presión vertical del viento y peso correspondiente al enlistonado ó enlatado, que ya es conocido.

La superficie de carga para cada tramo de cabio es $S_2 = d_2 d_1$; la carga total que lo solicita es $P_2 = p_2 d_2 d_1$; y como esta carga forma con el eje de la pieza el ángulo $90 - \alpha$, la componente normal será $P_2 \cos \alpha$ y la paralela será P_2 sen α.

La primera engendra un momento máximo de flexión igual á $\frac{1}{8} P_2 \cos \alpha\, d_1$; y la segunda una compresión igual á P_2 sen α; por consiguiente la ecuación de resistencia será:

$$K = \frac{P_2 \operatorname{sen} \alpha}{\omega} + \frac{\frac{1}{8} P_2 \cos \alpha\, d_1}{Z}. \qquad (3)$$

Algunos autores simplifican aún más el cálculo de los cabios, admitiendo no sólo las hipótesis ya establecidas, sino la de que la carga P_2 es normal al eje, en cuyo caso la ecuación de resiscia sería $\frac{1}{8} P_2 d_1 = ZK$, ó bien

$$Z = \frac{1}{8} \frac{P_2 d_1}{K}. \qquad (4)$$

Y así, para resolver rápidamente y de una manera práctica el problema, acudiríamos á las tablas de la pág. 408, y encontraríamos un valor de Z igual ó algo superior al calculado por la fórmula (4), que determinaría la pieza más conveniente.

558. **Correas.**—Colocadas sobre los pares con los que se cruzan á ángulo recto, consideraremos las correas como piezas apoyadas por sus extremos y sometidas á la carga transmitida por los cabios. Esta carga la supondremos uniformemente repartida, teniendo en cuenta que los cabios se colocan á distancias iguales y relativamente cortas.

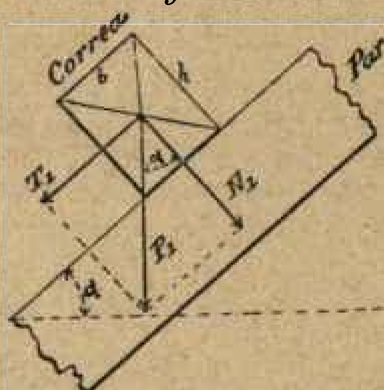
La carga p_1 por metro cuadrado de vertiente, de que hay que partir para el cálculo de las correas, comprende el peso del tejado, el de la nieve, la presión vertical del viento, y, por último, los pesos que corresponden al enlistonado ó enlatado y á los cabios, pesos ambos que nos son conocidos porque se refieren á elementos que se acaban de calcular.

La superficie de carga será un rectángulo cuyo lado mayor d es la distancia de las cerchas entre ejes y cuyo lado menor d_1 es la distancia entre correas; de suerte que $S_1 = d_1 d$.

La carga total uniformemente repartida será $P_1 = p_1 d_1 d$, y no es normal á la cara de apoyo, sino que forma con ella el ángulo $90 - \alpha$ (figura 240). Podemos descomponerla en dos: una, $N_1 = P_1 \cos \alpha$, normal á la vertiente; y otra $T_1 = P_1 \operatorname{sen} \alpha$, paralela á ella. La primera origina un momento máximo de flexión igual á $\frac{1}{8} N_1 d = \frac{1}{8} P_1 d \cos \alpha$, y la segunda, otro que vale $\frac{1}{8} T_1 d = \frac{1}{8} P_1 d \operatorname{sen} \alpha$.

Pero la flexión que tiende á producir la fuerza T_1, puede quedar anulada cuando los cabios quedan sujetos por clavazón ó tornillaje á las correas y no presentan tendencia alguna al deslizamiento, por quedar aquellos bien sujetos á la hilera y á la solera; pues, indudablemente, resultando así las correas ligadas á los cabios, la flexión, en el sentido paralelo á la vertiente, será imposible. Sólo hay, por tanto, que tener en cuenta la flexión producida por la componente $N_1 = P_1 \cos \alpha$.

Fig. 240.



Algunas veces, sin embargo, la ligazón entre cabios y correas es incompleta ó nula. En este caso, algunos autores opinan que puede prescindirse de la componente $T_1 = P_1 \operatorname{sen} \alpha$, fundándose en que amarrados los cabios á la cumbrera y á la solera, no pueden estos transmitir más que esfuerzos normales á la vertiente; mientras que otros, en beneficio de la resistencia de la pieza, ó creyendo acercarse más á la realidad, aconsejan que se tenga en cuenta dicha fuerza T_1, y bajo esta base se considerará que las correas experimentan dos flexiones simultaneas, según las direcciones de la expresadas componentes N_1 y T_1. Otros, por último, en obsequio á la brevedad, consideran la carga total P_1 como si obrara normalmente á la cara de apoyo de la pieza, es decir, en el caso ordinario.

Las ecuaciones de resistencia que corresponden á los tres métodos de cálculo que quedan indicados, son las siguientes:

1.ª Cuando se prescinde de la componente T_1 (siendo $Z = \frac{1}{6} bh^2$).

$$Z = \frac{1}{8} \frac{P_1 d \cos \alpha}{K} \qquad (1)$$

2.ª Cuando se tienen en cuenta las dos componentes N_1 y T_1

(siendo $Z' = \frac{1}{6} bh^2$ y $Z'' = \frac{1}{6} hb^2$).

$$K = \frac{1}{8} P_1 d \left(\frac{\cos \alpha}{Z'} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{Z''} \right) \qquad (2)$$

Y en efecto; la fuerza N_1 engendra una tensión máxima unitaria K' que vale, $K' = \frac{1}{8} \frac{N_1 d}{Z'} = \frac{1}{8} P_1 d \frac{\cos \alpha}{Z'}$.

La T_1 engendra á su vez una tensión máxima unitaria igual á

$$K'' = \frac{1}{8} \frac{T_1 d}{Z''} = \frac{1}{8} P_1 d \frac{\operatorname{sen} \alpha}{Z''}.$$

Pero como, evidentemente, en dos puntos de la sección rectangular (extremos de una diagonal) las tensiones K' y K'' se suman, la tensión máxima unitaria resultante K, será $K = K' + K''$; y sustituyendo las expresiones anteriores de K' y de K'' se obtendrá la ecuación (2).

3.ª Cuando se admite para el cálculo que la fuerza P_1 es normal á la cara de apoyo, entonces la ecuación de resistencia es

$$Z = \frac{1}{8} \frac{P_1 d}{K} \qquad (3)$$

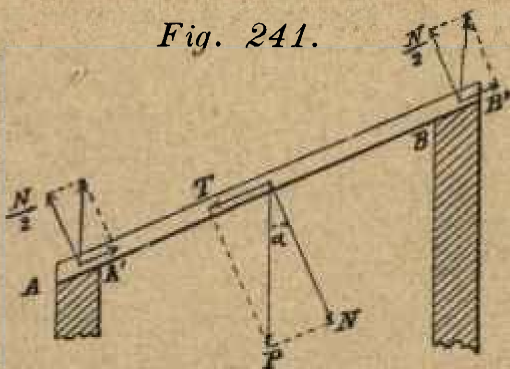
Este último método de cálculo, seguido por muchos constructores, es indudablemente el más sencillo, y conduce, como pronto veremos, á resultados aceptables.

559. Tipos diversos de armaduras de madera.— Armadura de una sola vertiente.—La manera más sencilla de formar una cubierta para crujías de escasa luz, consiste en reducir las cerchas á una serie de piezas inclinadas, que pueden hacer las veces de pares ó de cabios, pudiendo insistir directamente sobre los muros, ó, lo que es mejor, sobre soleras, á las cuales pueden sujetarse por sus extremos.

Algunas veces se colocan dichas piezas bastante próximas, á manera de cabios, para que sobre ellas insista directamente el enlistonado, el enlatado ó el embaldosado, según los casos; de todos modos conviene que los extremos presenten caras de asiento horizontales, á fin de que las reacciones en los apoyos sean verticales y evitar toda tendencia al resbalamiento.

En efecto; si la pieza se coloca, como indica la figura 241,

Fig. 241.



sobre superficies de apoyo inclinadas, la componente N engendrará en los apoyos reacciones normales iguales entre sí y de valor igual á $\frac{1}{2}$ N.

Si la pieza no queda amarrada á los muros, sino simplemente apoyada sobre las superficies inclinadas AA′ y BB′; para que el equilibrio sea estable, é imposible, por tanto, el resbalamiento que tiende á producir la componente T, será necesario que las fuerzas de rozamiento $f\frac{N}{2}$, engendradas en aquellas superficies, anulen á T, ó lo que es lo mismo, que sea $T < fN$ ó $\frac{T}{N} < f$.

Pero $\frac{T}{N} = \operatorname{tg}\alpha$ y $f = \operatorname{tg}\varphi$, siendo α el ángulo de inclinación de la pieza sobre el horizonte, y φ el ángulo de frotamiento que corresponde á la naturaleza de las superficies en contacto; por consiguiente la condición de estabilidad al resbalamiento será que $\alpha < \varphi$.

Para alejar, sin embargo, todo temor y tener la seguridad de que el deslizamiento será imposible, conviene disponer los extremos de las piezas, mediante cortes sencillísimos, de manera que las caras de apoyo sean horizontales, pues así se conseguirá que las reacciones en los apoyos sean verticales.

Veamos ahora cómo se determina la sección recta de la pieza única á que se reduce la cercha más elemental posible, en el caso que acabamos de indicar, es decir, siendo horizontales las caras de apoyo y estando la carga P uniformemente repartida (figura 242).

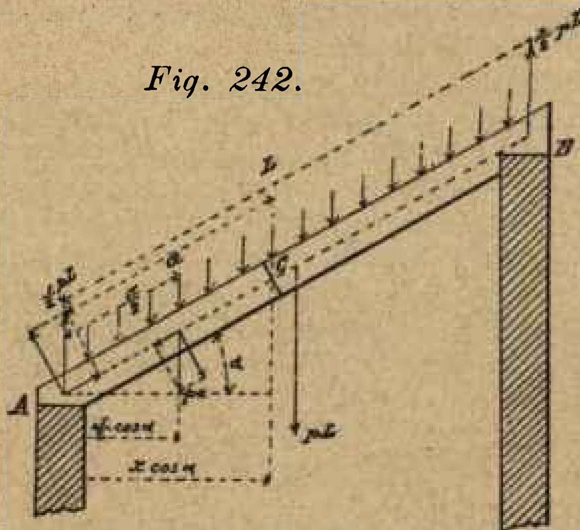
Si L es la longitud de la pieza y p la carga por unidad lineal, la carga total será $P = pL$ y las reacciones verticales en los apoyos serán iguales á $\frac{1}{2}pL$.

Tomemos el punto A como origen de distancias y consideremos una sección cualquiera, C, definida por su distancia x al origen, siendo α el ángulo de inclinación de la viga.

La reacción vertical $\frac{1}{2}pL$, del apoyo izquierdo, origina una componente paralela al eje de la pieza, cuyo valor es $\frac{1}{2}pL \operatorname{sen}\alpha$;

pero como en sentido contrario obra la componente paralela de las cargas aplicadas en la distancia x, que vale px sen α, claro

Fig. 242.



es que la sección considerada resultará sometida á la compresión $P_1 = p \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1}{2} L - x\right)$.

El momento de flexión, en la sección C, tiene por expresión

$$M = \frac{1}{2} p \cos \alpha \, (Lx - x^2).$$

Si la sección es constante y además la suponemos rectangular, será $\omega = bh$ y $Z = \frac{1}{6} bh^2$, y como la tensión unitaria tiene por expresión $K_x = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{Z}$,

tendremos para el caso actual,

$$K_x = \frac{p \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1}{2} L - x\right)}{bh} + \frac{\frac{1}{2} p \cos \alpha \, (Lx - x^2)}{\frac{1}{6} bh^2},$$

expresión que se reduce á la forma

$$K_x = \frac{p}{bh^2}\left[\frac{1}{2} Lh \operatorname{sen}\alpha + (3L\cos\alpha - h\operatorname{sen}\alpha)x - 3\cos\alpha x^2\right] \quad (1)$$

El máximo de esta cantidad variable corresponderá á un cierto valor de x, que define la sección peligrosa, correspondiente á la primera mitad (pues en la segunda hay otra sección peligrosa fácil de hallar, en que el esfuerzo preponderante es de extensión). Hallaremos aquella resolviendo la ecuación que resulta de igualar á 0 la primera derivada de la función de x, que figura dentro del paréntesis de la expresión (1), toda vez que la segunda derivada es evidentemente negativa.

Así tendremos

$$f'(x) = 3 L \cos\alpha - h \operatorname{sen}\alpha - 6 \cos\alpha x = 0$$

de donde

$$x = \frac{1}{2} L - \frac{1}{6} h \operatorname{tg}\alpha;$$

y sustituyendo en la expresión (1), llamando K al máximo que resulta, será

$$K = \frac{1}{12} \frac{p}{bh^2} (9 L^2 \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\alpha h^2) \qquad (2)$$

Si damos á K en esta ecuación el valor del coeficiente de seguridad, todo será conocido, excepto las cantidades b y h; pero si establecemos entre ellas uua de las relaciones usuales, haciendo $b = mh$, entonces la ecuación (2) no contendrá más que una sola incógnita, h; será de tercer grado; y por medio de algunos ensayos, se hallará un valor suficientemente aproximado de la raiz real positiva que corresponde á la cuestión.

También puede escogerse una sección arbitraria y comprobar si es buena ó no lo es. Para ello se calculará el valor del segundo miembro, y si resulta igual ó un poco menor que el primero, será aceptable dicha sección. No lo será si el segundo miembro resulta mayor que el primero ó bastante menor que él.

En cualquier caso se conocerá con toda facilidad si la sección necesaria debe ser mayor ó menor que la ensayada, observando que cuando ω y Z crecen, K disminuye, y al contrario, es decir, que si aquellos elementos disminuyen, K aumenta; siendo más decisiva la influencia de Z que la de ω en las variaciones de K. Claro es que, á virtud de unos cuantos tanteos, se acertará con una sección que resuelva prácticamente el problema.

En realidad, como las secciones más fatigadas se separan muy poco de la sección mediana, en donde la resultante de las fuerzas paralelas al eje de la pieza es nula, puede simplificarse el cálculo, prescindiendo por completo de aquellas y aceptando la siguiente ecuación de resistencia.

$$KZ = \frac{1}{8} p L^2 \cos \alpha$$

Finalmente, algunos constructores, en beneficio de la resistencia, calculan la escuadría de las piezas que nos ocupan por medio de la ecuación

$$K = \frac{T}{\omega} + \frac{\frac{1}{8} NL}{Z} \qquad (a)$$

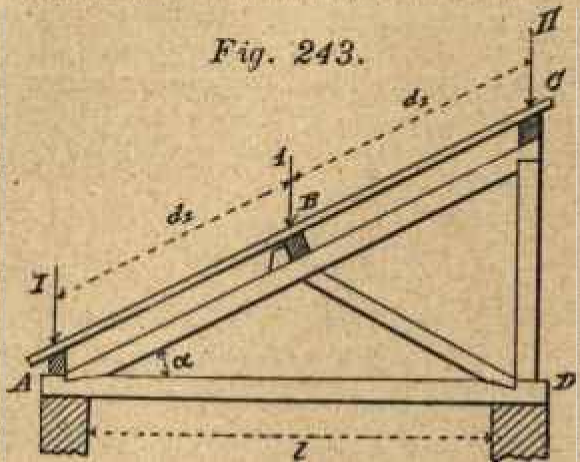
en la que T y N representan las componentes de la carga total P, paralela la primera y normal la segunda al eje de la pieza. Siendo, por tanto, $T = P \operatorname{sen} \alpha$, $N = P \cos \alpha$ y $L = \dfrac{l}{\cos \alpha}$, ($l$ es la luz salvada), la ecuación (a) podrá escribirse bajo la forma

$$K = \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{\omega} + \frac{Pl}{8Z}.$$

560. Armaduras de una sola vertiente con tirante y tornapunta.—Para luces de alguna más importancia, lo general es organizar la armadura de una sola vertiente, como indica la figura 243, constituída en rigor por media armadura del tipo que veremos más adelante.

El tirante AD descansa sobre los muros; el par AC se ensambla inferiormente en A con el tirante, y superiormente en C con el montante CD. Esta pieza se suprime cuando el muro se prolonga hasta la cumbrera C, en cuyo caso el par se en-

Fig. 243.



sambla por su extremo superior sobre la solera correspondiente. Por último, la tornapunta se ensambla, á su vez, en B con el par y en D con el tirante, creando un punto de apoyo al par, que supondremos así dividido en dos tramos iguales, AB = BC, de longitud $d_1 = \frac{1}{2} \frac{l}{\cos\alpha}$.

Si d es la distancia entre cerchas, $L = 2d_1 = \frac{l}{\cos\alpha}$ la longitud del par y p la carga por unidad superficial de vertiente, la carga total $P = pdL$ se distribuye del modo siguiente:

En el tramo AB, lo mismo que en el BC ... $\frac{1}{2} P = pdd_1$

En A .... $\mathbf{I} = \frac{1}{2} pdd_1 = \frac{1}{4} P$

En B .... $\mathbf{1} = pdd_1 = \frac{1}{2} P$

En C........... $\mathbf{II} = \frac{1}{2} pdd_1 = \frac{1}{4} P$

Total...... $\mathbf{I} + \mathbf{1} + \mathbf{II} = 2pdd_1 = P$

De las fuerzas **I** y **II** se prescinde para el cálculo de la armadura, porque la primera queda directamente anulada por una fracción de igual valor de la reacción efectiva desarrollada en A, y la segunda determina una compresión de la pieza CD, que también queda anulada de modo análogo por la reacción efectiva desarrollada en D.

Si las correas insisten solamente en los nudos, el tramo del par BC no trabaja nada, por lo que basta considerar, para la construcción del diagrama de fuerzas interiores, la porción AB del par, la tornapunta BD y el tirante AD, (figura 244), sometido este sistema á la única carga exterior $\mathbf{1} = \frac{1}{2} P$ aplicada en B, y á las reacciones desarrolladas en A y D, cuyo valor es $\mathbf{2} = \mathbf{3} = \frac{1}{4} P$.

Las fuerzas interiores desarrolladas en las diversas piezas son las que indica la figura recíproca (figura 245). De ella se deducen inmediatamente las relaciones siguientes:

Compresión del par ó de la tornapunta.............. $\mathbf{4} = \mathbf{6} = \frac{\mathbf{2}}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{4} \frac{P}{\text{sen } \alpha}$

Extensión del tirante .... $\mathbf{5} = \mathbf{2} \cot \alpha = \frac{1}{4} \frac{P}{\text{tg } \alpha}$

Fig. 244.

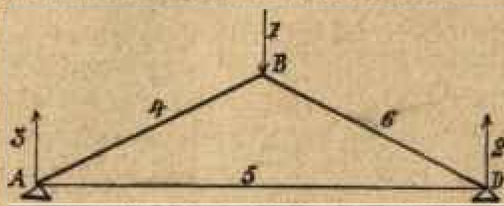
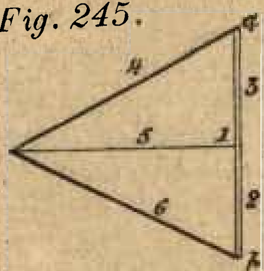


Fig. 245.



Si las correas insisten en puntos intermedios y por su número puede considerarse que la carga está uniformemente repartida sobre el par, éste se encontrará entonces sometido á la compresión antes calculada y á un momento máximo de flexión igual á

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \mathrm{P} \times \mathrm{AB} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \mathrm{P} \frac{\frac{1}{2} l}{\cos \alpha} = \frac{1}{32} \frac{\mathrm{P}l}{\cos \alpha}.$$

En este caso la ecuación de resistencia para el cálculo del par será

$$\mathrm{K} = \frac{\left(\frac{\mathrm{P}}{4 \operatorname{sen} \alpha}\right)}{\omega} + \frac{\left(\frac{1}{32} \frac{\mathrm{P}l}{\cos \alpha}\right)}{\mathrm{Z}}.$$

La del tirante será

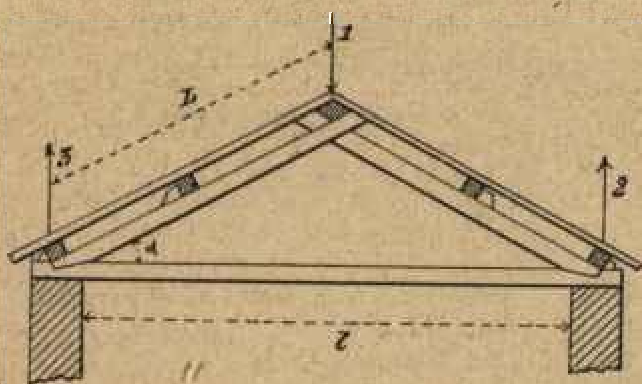
$$\omega = \frac{\frac{1}{4} \mathrm{P} \cot \alpha}{\mathrm{K}}.$$

561. Armaduras á dos aguas.—Entre los numerosos tipos que pueden presentarse, nos ocuparemos solamente de las más usuales, que clasificaremos en dos grupos: *armaduras* *de tirante horizontal y armaduras recogidas ó de tirantes inclinados.*

Armaduras de tirante horizontal.—En este grupo estudiaremos los tipos siguientes:

562. Armadura de pares y tirante.—La disposición general se indica en la figura 246. Los pares se ensamblan por

Fig. 246.



la parte inferior con el tirante y por la superior lo hacen entre sí cruzándose á media madera.

Si no hay correas intermedias y las piezas que sirven de apoyo á los cabios se reducen á la cumbrera y soleras, los pares trabajan solamente por compresión. Si hubiera correas intermedias, una por ejemplo en cada par, como indica la figura, entonces los pares trabajan por compresión y flexión, debiendo considerarse como piezas apoyadas por sus extremos y sometidas á flexión compuesta.

El diagrama de fuerzas interiores es enteramente análogo al que expresa la figura 245; y si, como de costumbre, llamamos P á la carga total sobre cada cercha, las fuerzas exteriores que hay que considerar para la construcción de dicho diagrama, son:

$$1 = \frac{1}{2}P \quad ; \quad 2 = 3 = \frac{1}{4}P.$$

Las fuerzas interiores podrán calcularse, si se quiere, por las siguientes expresiones:

Compresión de los pares. $4 = 6 = \frac{1}{2}\frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{4}\frac{P}{\text{sen}\,\alpha}$

Extensión del tirante.... $5 = \frac{1}{2}\frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{4}\frac{P}{\text{tg}\,\alpha}$

Finalmente, las ecuaciones de resistencia son:

Para los pares, si no hay correas intermedias,

$$\omega = \frac{4 = 6}{K'} = \frac{\frac{1}{4}\frac{P}{\text{sen}\,\alpha}}{K'},$$

siendo K′ el coeficiente de seguridad teniendo en cuenta la influencia de la flexión lateral;

Y si hay correas intermedias:

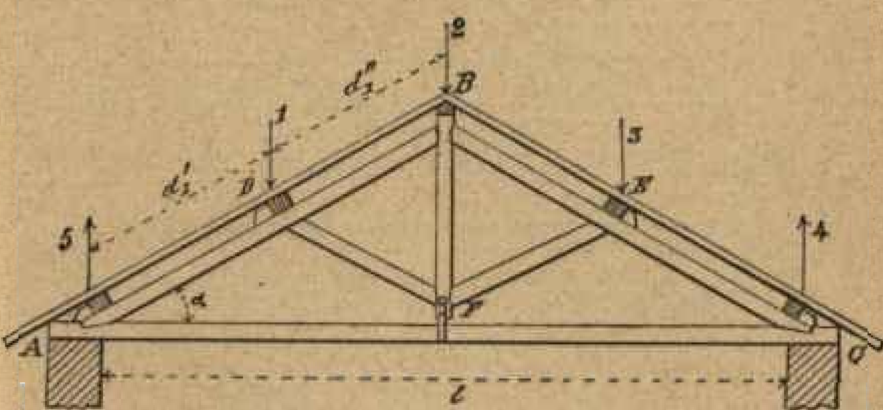
$$K = \frac{\left(\frac{1}{4}\frac{P}{\text{sen}\,\alpha}\right)}{\omega} + \frac{\left(\frac{1}{32}\frac{Pl}{\cos\alpha}\right)}{Z}.$$

Para el tirante

$$\omega = \frac{\frac{1}{4}P\cot\alpha}{K}.$$

563. Armadura de pares, tirante, tornapuntas y pendolón.—Cuando la luz es más importante y los pares resultan de longitud excesiva, es necesario dotar á éstos de un punto de apoyo intermedio, y esto se consigue por medio de las tornapuntas DF y EF (figura 247) que inferiormente se ensamblan al pendolón BF. Los pares se unen con el tirante, como de ordinario, y con el pendolón, como indica la figura. Este último sustenta al tirante por medio de un estribo de hierro.

Fig. 247.



Si el punto de apoyo que crea la tornapunta, divide al par en dos tramos desiguales AD $= d_1'$ y BD $= d_1''$, las fuerzas exteriores cuyo conocimiento es necesario para construir la figura recíproca, tendrán, en función de la carga pd, por metro lineal de par, las expresiones siguientes:

$$\mathbf{1} = \mathbf{3} = pd\,\frac{\mathrm{AD} + \mathrm{DB}}{2} = pd\,\frac{d_1' + d_1''}{2}$$

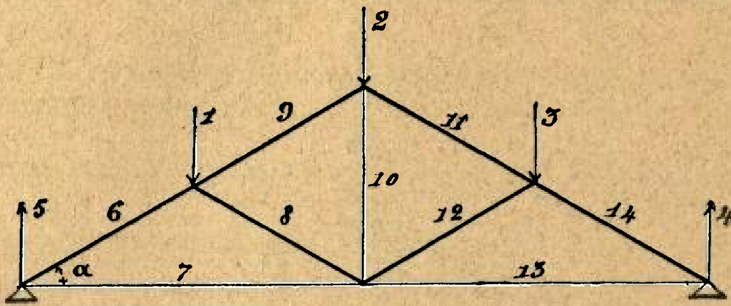
$$\mathbf{2} = pd\,\frac{\mathrm{DB} + \mathrm{BE}}{2} = pd\,\frac{d_1'' + d_1''}{2} = pdd_1''$$

$$\mathbf{4} = \mathbf{5} = pd\left(\mathrm{AB} - \frac{1}{2}\,\mathrm{AD}\right) = \frac{1}{2}\,pd\,(d_1' + 2\,d_1''),$$

siendo p la carga total por metro cuadrado de vertiente y d la distancia de cerchas, entre ejes.

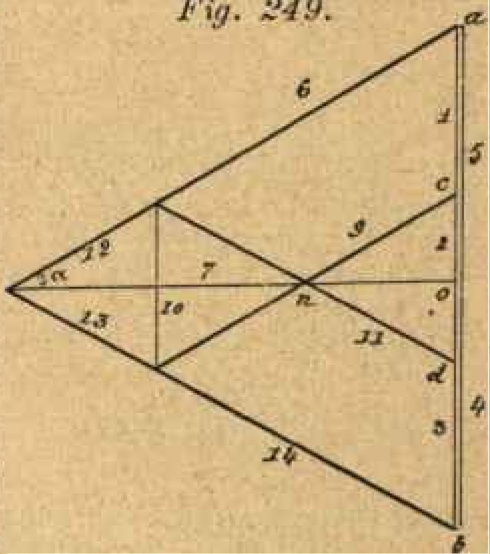
Si los tramos del par fueran iguales (figura 248) y llamamos

Fig. 248.



P á la carga total sobre cada cercha, que vale, como sabemos, $pd \frac{l}{\cos \alpha}$, á cada tramo corresponderá una carga igual

Fig. 249.



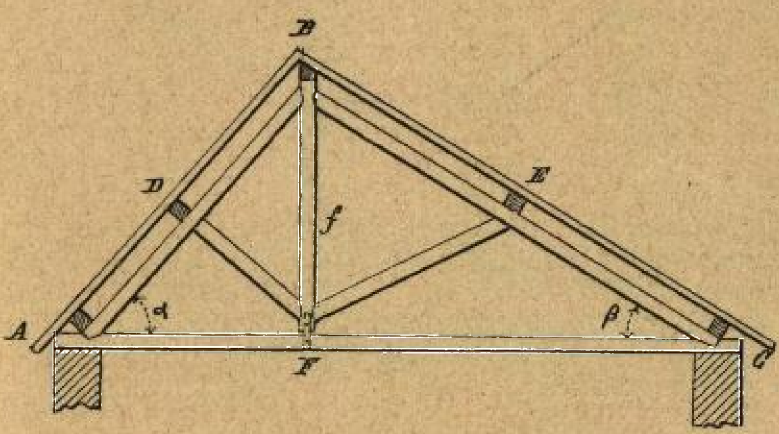
á $\frac{1}{4}$ P, y entonces las fuerzas exteriores tendrán las siguientes expresiones:

$$1 = 2 = 3 = \frac{1}{4} P \quad ; \quad 4 = 5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) P = \frac{3}{8} P.$$

El diagrama de fuerzas interiores se construirá en cualquiera de estos casos sin dificultad; y suponiendo que los pares son de tramos iguales, será el que representa la figura 249, del que se deducen con toda facilidad las fórmulas que á continuación se expresan, si se quieren calcular las tensiones sin necesidad de construir dicho diagrama:

Compresiones...	Par.......	AD...	$6 = \frac{3}{8} \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}$
	Par.......	DB...	$9 = \frac{1}{4} \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}$
	Tornapunta	DF...	$8 = \frac{1}{8} \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}$
Extensiones.....	Tirante...	AF...	$7 = \frac{3}{8} P \cot \alpha$
	Pendolón	BF...	$10 = \frac{1}{4} P$

Fig. 250.

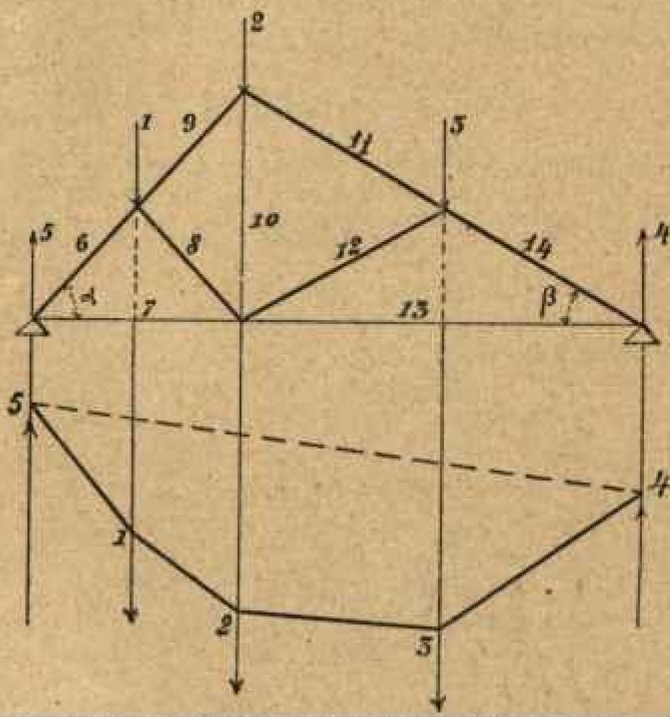


Como la armadura se supone simétrica y simétricamente cargada, basta considerar una de sus mitades.

En cuanto á las ecuaciones de resistencia, no puede haber duda en establecerlas para cada una de las piezas.

Si la armadura no fuera simétrica, como indica la figura 250, las fuerzas que podemos suponer aplicadas á los nudos pueden

Fig. 251.



calcularse por medio de las siguientes expresiones, que se deducen con toda facilidad, y en las cuales representan: f la flecha BF, α y β los ángulos que forman los pares con el horizonte, p la carga total por metro cuadrado de vertiente y d la distancia entre formas.

Tendremos, pues (figura 251)

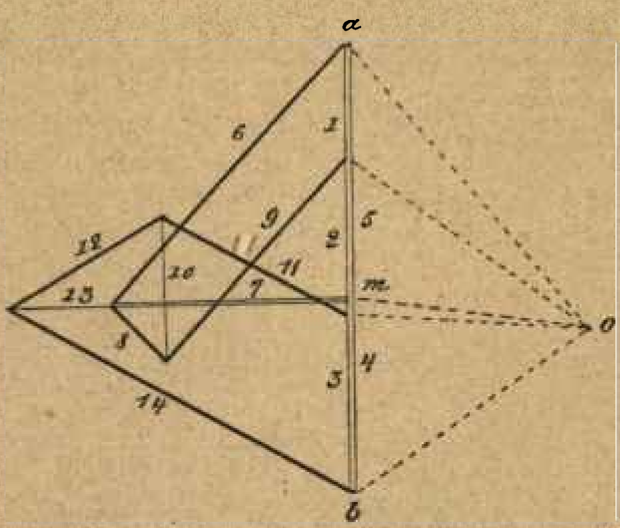
$$\mathbf{1} = \frac{1}{2} pdf \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right)$$

$$\mathbf{2} = \frac{1}{4} pdf \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \right)$$

$$\mathbf{3} = \frac{1}{2} pdf \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \right).$$

Para determinar las reacciones **4** y **5**, lo más cómodo y expedito es emplear un polígono funicular (figura 251) relativo á un polo arbitrario O (figura 252). El radio polar O*m*, paralelo á

Fig. 252.

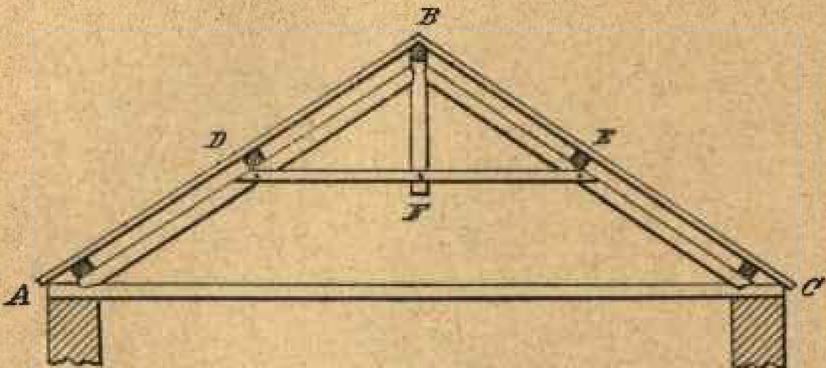


la línea 4.5 que cierra dicho polígono, dividirá á la suma *ab*, de las fuerzas calculadas 1, 2 y 3, en dos segmentos, de los cuales será, *bm* = 4 y *ma* = 5.

El diagrama de tensiones totales desarrolladas en cada pieza, es el que indica la figura 252, y su construcción no ofrece ninguna dificultad.

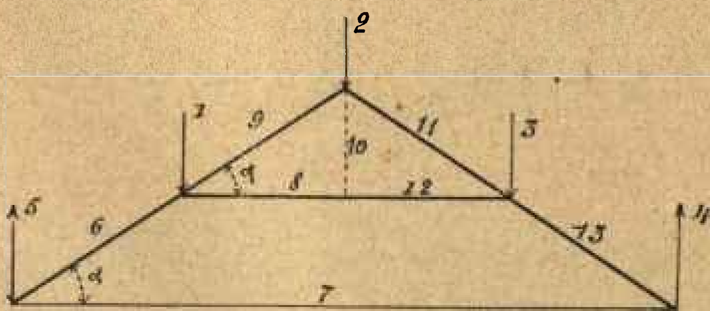
564. Armadura de pares, tirante, puente y pendolón.—El punto de apoyo intermedio que necesitan los pares, cuando su longitud lo exige, puede obtenerse mediante la pieza horizontal DE (figura 253) llamada puente, que, según se dedu-

Fig. 253.



ce del diagrama de tensiones trabaja por compresión. Tiene esta disposición la ventaja de que el espacio comprendido entre el puente y el tirante puede utilizarse para diversos usos, lo que

Fig. 254.



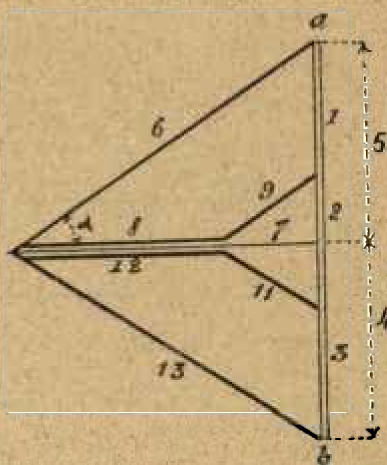
no sucede cuando el pendolón llega hasta la segunda de las piezas indicadas.

Suponiendo que los tramos de los pares sean iguales, y siendo, como siempre, P la carga total sobre una cercha, las fuerzas exteriores tendrán las siguientes expresiones (figura 254):

$$\mathbf{1} = \mathbf{2} = \mathbf{3} = \frac{1}{4}\,P; \qquad \mathbf{4} = \mathbf{5} = \frac{3}{8}\,P.$$

Construída la figura recíproca, como ya sabemos (figura 255), se ve en seguida que el pendolón no es pieza necesaria, puesto que la fuerza que lo solicita es igual á o. En efecto, el triángulo recíproco del nudo **8, 10, 12,** se ha reducido en este caso á una recta y su lado vertical á un punto. Así, pues, las funciones del pendolón consisten en sustentar el puente DE, oponiéndose en parte á su flexión lateral.

Fig. 255.



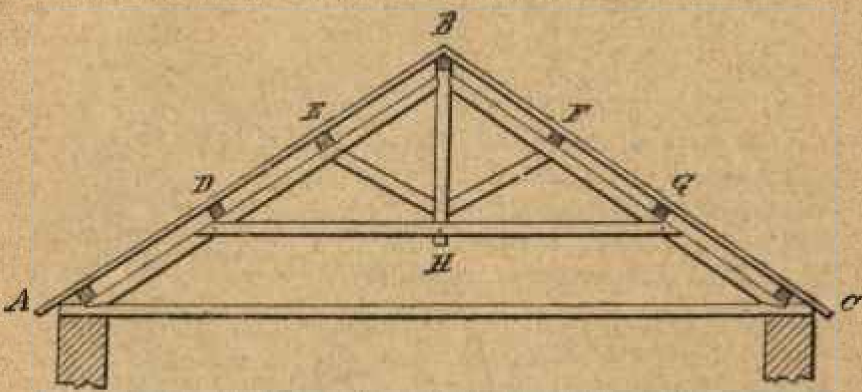
Del indicado diagrama se deducen inmediatamente las expresiones de las fuerzas interiores desarrolladas en cada pieza, y son las siguientes:

Compresiones..	Par...... AD...	$\mathbf{6} = \frac{3}{8}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
	Par...... DB...	$\mathbf{9} = \frac{1}{8}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
	Puente... DE...	$\mathbf{8} = \frac{2}{8}\,\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$
Extensiones......	Tirante... AC...	$\mathbf{7} = \frac{3}{8}\,\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$
	Pendolón. BF...	$\mathbf{10} = 0$

El puente, como la figura indica, puede estar formado de dos piezas, que encepan por sus extremos á los pares y por su centro al pendolón, verificándose la unión de tales piezas por medio de pernos.

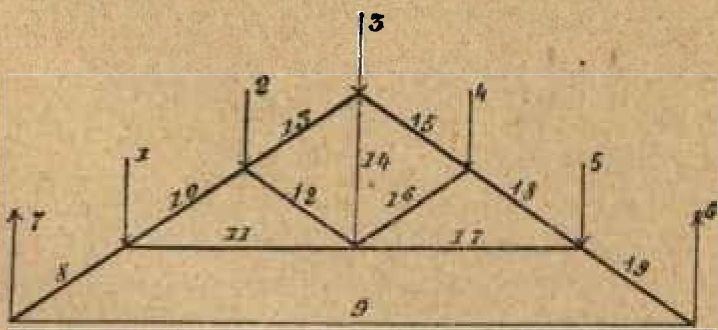
565. Armadura de pares, tirante, puente, tornapuntas y pendolón (figura 256).—Se diferencia de la ante-

Fig. 256.



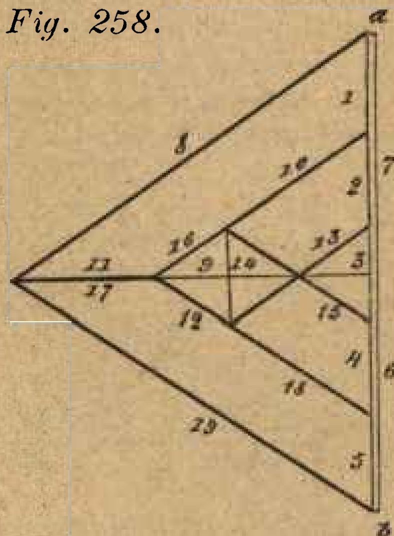
rior en que los pares AB y BC quedan divididos cada uno en tres

Fig. 257.



tramos (que supondremos iguales) á virtud de un punto de apoyo intermedio que crea la tornapunta, además del que crea el puente.

Fig. 258.



Las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas á los nudos tienen en este caso las siguientes expresiones (figura 257):

$$\mathbf{1} = \mathbf{2} = \mathbf{3} = \mathbf{4} = \mathbf{5} = \frac{1}{6}\,P;$$

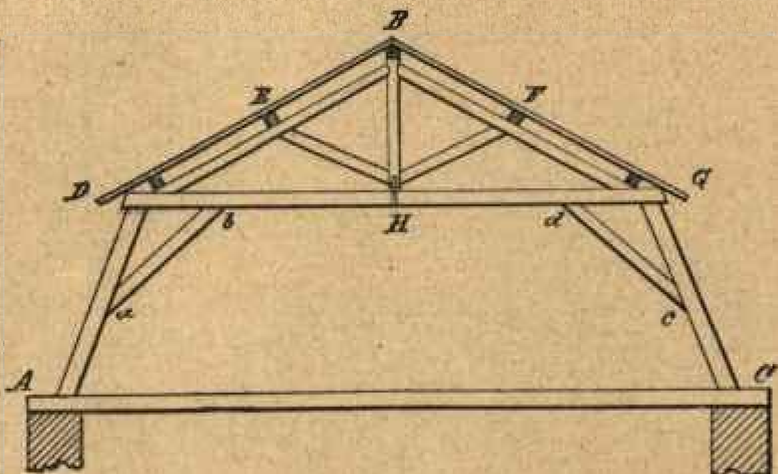
$$\mathbf{6} = \mathbf{7} = \frac{5}{12}\,P.$$

El diagrama de fuerzas interiores (fig. 258) nos dice que todas las piezas son comprimidas, excepto el tirante AC y el pendolón BH, que trabajan por extensión. Su construcción es muy sencilla y de él se deducen las siguientes expresiones de las fuerzas interiores:

Compresiones..	Par.......	AD...	$\mathbf{8} = \frac{5}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
	Par.......	DE....	$\mathbf{10} = \frac{3}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
	Par.......	EB....	$\mathbf{13} = \frac{2}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
	Puente....	DG....	$\mathbf{11} = \frac{2}{12}\,\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$
	Tornapunta	EH...	$\mathbf{12} = \frac{1}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
Extensiones...	Tirante....	AC....	$\mathbf{9} = \frac{5}{12}\,\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$
	Pendolón..	BH....	$\mathbf{14} = \frac{1}{6}$

566. Armadura Mansard ó quebrantada (fig. 259). En realidad una armadura Mansard (nombre de su inventor) ó Mansarda, como algunos llaman, se compone de una armadura ordinaria DBG, compuesta, por ejemplo, de pares, tirante, tornapuntas y pendolón, sustentada por fuertes piezas oblicuas, AD y CG á manera de jabalcones, que inferiormente se ensamblan en los extremos del tirante inferior AC, que hace al propio tiem-

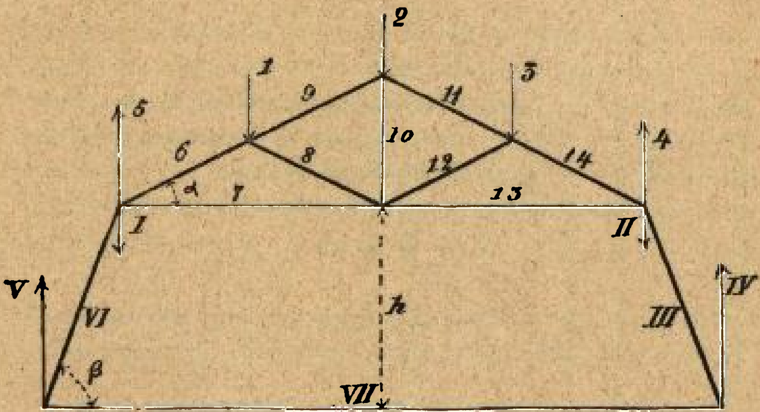
Fig. 259.



po las veces de madero de suelo; pues el objeto principal de la armadura que nos ocupa es aprovechar como espacio habitable el comprendido entre los tirantes AC y DG. Las piezas *ab* y *cd*, y aun otras que según la importancia de la construcción suelen disponerse, tienen por objeto hacer más rígido el conjunto, y en el caso de la figura, dichas piezas aseguran la invariabilidad del ángulo que forman los jabalcones con el tirante superior DG.

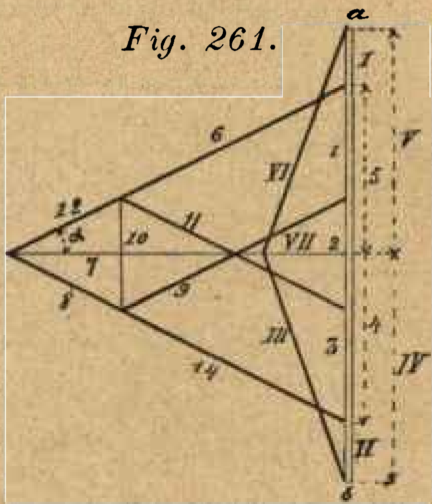
Para construir el diagrama de tensiones totales, consideramos descompuesta la armadura en dos partes: la superior DBG, que con respecto á los jabalcones se encuentra en las condiciones ordinarias de uno de los tipos que ya hemos estudiado, y la inferior, constituída por dichos jabalcones, el tirante inferior AC y el superior DG. Cierto es que esta última figura es deforma-

Fig. 260.



ble; pero como su contorno constituye uno de los polígonos funiculares del sistema de fuerzas exteriores que la solicita, la construcción del diagrama de tensiones es posible.

Fig. 261.



Para el cálculo de la parte superior, las fuerzas exteriores serán, llamando P á la carga total sobre la misma (figura 260):

$$\mathbf{1} = \mathbf{2} = \mathbf{3} = \frac{1}{4}\,\mathrm{P}.$$

$$\mathbf{4} = \mathbf{5} = \frac{3}{8}\,\mathrm{P}.$$

La carga total que gravita directamente sobre cada jabalcón, llamando h á la distancia entre tirantes será

$$P_1 = pd\,\frac{h}{\operatorname{sen}\beta},$$

que se descompone en dos mitades, una aplicada en A y otra en D; pero como en D carga también la mitad del peso P que actúa sobre la armadura superior, y lo mismo puede decirse del nudo G, simétrico de D, resultará que sobre cada uno de ellos podemos suponer aplicada una carga igual á

$$\frac{1}{2}(P_1 + P).$$

Así, pues, las fuerzas exteriores que hay que considerar ahora para el cálculo de la parte inferior de la armadura son:

$$\mathbf{I} = \mathbf{II} = \frac{1}{2}(P_1 + P)\,; \qquad \mathbf{IV} = \mathbf{V} = \frac{1}{2}(P_1 + P)\,;$$

pero hay que advertir, como ya hemos dicho, que P representa la carga total que obra sobre la parte superior DBG de una forma y P_1 la que obra sobre un solo jabalcón.

Calculadas las fuerzas exteriores no puede haber dificultad en construir el diagrama de tensiones totales desarrolladas en cada una de las piezas, como se indica en la figura 261.

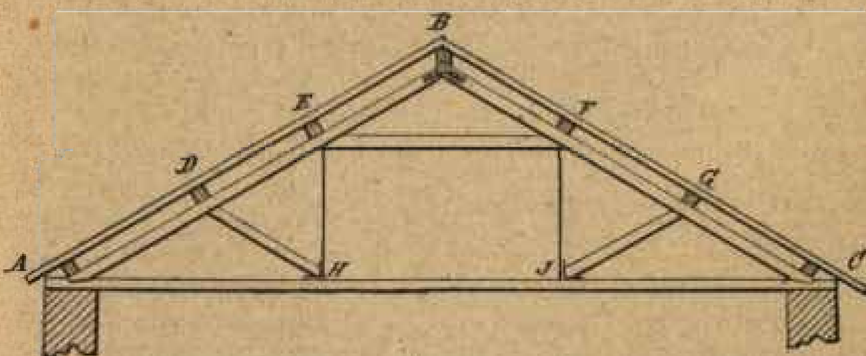
Las expresiones por las cuales pueden calcularse, si se quiere, las fuerzas interiores, son las siguientes:

$$\text{Compresiones.}\left\{\begin{array}{lll}
\text{Par} \ldots\ldots\ldots & \text{DE} \ldots & \mathbf{6} = \dfrac{3}{8}\,\dfrac{P}{\operatorname{sen}\alpha} \\[2ex]
\text{Par} \ldots\ldots\ldots & \text{EB} \ldots & \mathbf{9} = \dfrac{2}{8}\,\dfrac{P}{\operatorname{sen}\alpha} \\[2ex]
\text{Tornapunta.} & \text{EH} \ldots & \mathbf{8} = \dfrac{1}{8}\,\dfrac{P}{\operatorname{sen}\alpha} \\[2ex]
\text{Jabalcón} \ldots & \text{AD} \ldots & \mathbf{VI} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{P_1 + P}{\operatorname{sen}\beta}
\end{array}\right.$$

Extensiones . . $\left\{ \begin{array}{lll} \text{Tirante} \ldots \text{AC}.. & \mathbf{VII} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{P_1 + P}{\text{tg}\,\beta} \\ \text{Tirante} \ldots \text{DG}.. & \mathbf{7} = \dfrac{3}{8}\,\dfrac{P}{\text{tg}\,\alpha} \\ \text{Pendolón} \ldots \text{BH}.. & \mathbf{10} = \dfrac{1}{4}\,P. \end{array} \right.$

567. Armaduras de pares, tirante, puente, tornapuntas y péndolas.—Si los pares deben quedar divididos en tres tramos, que supondremos iguales, por medio de dos apoyos intermedios, puede organizarse la armadura como indica la figura 262, la cual se compone de los pares AB y BC, el tiran-

Fig. 262.



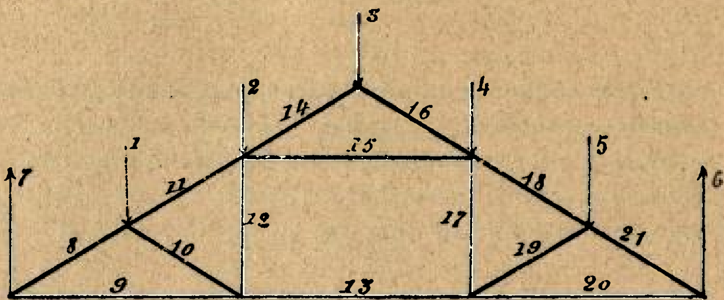
te AC, el puente EF, las tornapuntas DH y GJ y las péndolas, que pueden ser de hierros redondos, EH y FJ.

Suponiendo, como hemos dicho, que los tramos en que los pares quedan didididos sean iguales, las fuerzas exteriores que hay que considerar son las siguientes, en función de la carga total P, correspondiente á una cercha (V. figura 263).

$$\mathbf{1} = \mathbf{2} = \mathbf{3} = \mathbf{4} = \mathbf{5} = \frac{1}{6}\,P; \qquad \mathbf{6} = \mathbf{7} = \frac{5}{12}\,P.$$

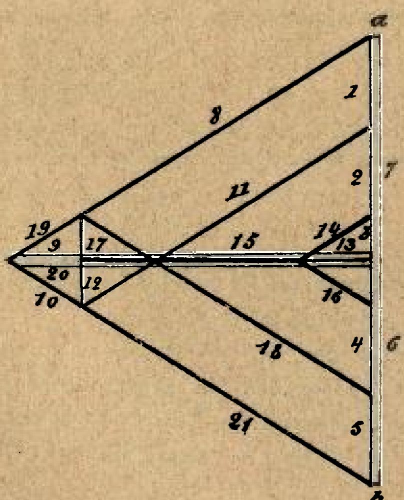
Aunque la figura de que se trata es deformable, toda vez que, siendo $m = 14$ y $n = 9$, se deducirá $K = -1$ de la ex-

Fig. 263.



presión $m = 2n - 3 + K$, es posible construir la figura recíproca; porque las K condiciones á que para ello ha de satisfacer se reducen en este caso á la de que el puente y el tirante sean paralelos, como es fácil comprobar.

Fig. 264.

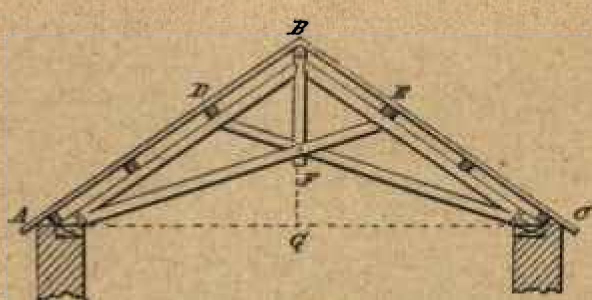


El diagrama de tensiones no ofrece nada de particular en su construcción y es el que manifiesta la figura 264; pero si en lugar de determinar los valores de aquellas, midiendo los diversos lados del diagrama con la escala de fuerzas que se hubiera establecido, se quisieran calcular analíticamente dichas tensiones, puede hacerse por medio de las siguientes expresiones que, como en los casos que preceden, se deducen con toda facilidad del expresado diagrama. Así, tendremos :

Compresiones	Par.......	AB....	$8 = \frac{5}{12} \frac{P}{\text{sen } \alpha}$
	Par.......	DE....	$11 = \frac{4}{12} \frac{P}{\text{sen } \alpha}$
	Par.......	EB....	$14 = \frac{1}{12} \frac{P}{\text{sen } \alpha}$
	Puente....	EF....	$15 = \frac{3}{12} \frac{P}{\text{tg } \alpha}$
	Tornapunta	BH....	$10 = \frac{1}{12} \frac{P}{\text{sen } \alpha}$
Extensiones	Tirante....	AH....	$9 = \frac{5}{12} \frac{P}{\text{tg } \alpha}$
	Tirante....	HJ....	$13 = \frac{4}{12} \frac{P}{\text{tg } \alpha}$
	Péndolas...	EH....	$12 = \frac{1}{12} P.$

568. *Armaduras recogidas ó de tirantes inclinados.* — En

Fig. 265.

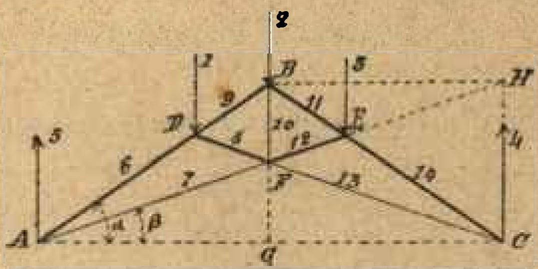


este grupo estudiaremos solamente, y con la posible brevedad, los siguientes tipos :

569. Armadura de pares, pendolón y tirantes inclinados. — Dispuesta la armadura como indica la figura 265, resultan los pares apoyados en tres puntos y divididos en dos tramos, que pueden ser iguales ó desiguales. Las piezas inclinadas AE y CD, verdaderas riostras, quedan á su vez divididas por el punto de unión F con el pendolón, en dos partes, que desempeñan funciones completamente distintas, como se verá al construir el diagrama de fuerzas interiores. Las inferiores actúan como tirantes y trabajan por extensión, mientras que las superiores hacen las veces de tornapuntas y trabajan por compresión.

Para el estudio del tipo que nos ocupa supondremos que el punto D (figura 266) divide al par en dos tramos, cuyas longitu-

Fig. 266.



des están en la relación : : 2 : 1, es decir que AD $= 2 \times$ (DB); y como la armadura es simétrica será también CE $= 2 \times$ (EB).

Si llamamos L á la suma de las longitudes de los pares, es claro que será AD $=$ EC $= \frac{1}{3}$ L y DB $=$ BE $= \frac{1}{6}$ L. La carga total sobre cada cercha será P $= pd$L.

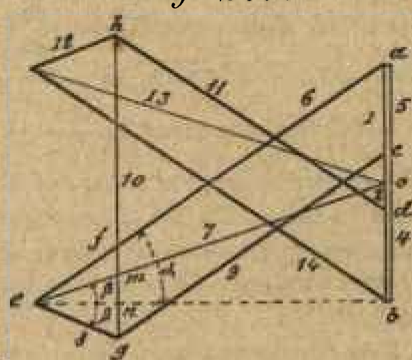
La fuerza que podemos suponer aplicada tanto al nudo D como á su simétrico E, tiene por expresión, $pd\,\frac{\text{AD} + \text{DB}}{2}$ y la correspondiente al nudo B será, $pd\,\frac{\text{DB} + \text{BE}}{2}$; por consiguiente sustituyendo en vez de AD y DB = BE sus valores en función de L, y en lugar de pdL su igual P, resultarán las expresiones siguientes de las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas á los nudos:

$$\mathbf{1} = \mathbf{3} = \frac{3}{12}\,\text{P}; \qquad \mathbf{2} = \frac{2}{12}\,\text{P}; \qquad \mathbf{4} = \mathbf{5} = \frac{4}{12}\,\text{P} = \frac{1}{3}\,\text{P}.$$

El diagrama de tensiones totales es el indicado en la figura 267; se construye con toda facilidad y nos dice, como habíamos indicado al principio, que las partes inferiores de las piezas AE y CD trabajan por extensión y las superiores por compresión, y además que los pares son piezas comprimidas y el pendolón es pieza extendida.

Teniendo en cuenta las relaciones á que satisface la figura directa, es fácil deducir de la recíproca fórmulas sencillas para calcular las tensiones de cada pieza sin necesidad de construir el diagrama de fuerzas interiores.

Fig. 267.



Sea α el ángulo que forma el par con el horizonte y β el que forma, también con el horizonte, el tirante inclinado.

Unamos por una recta los puntos *b* y *e* (figura 267).

Si el triángulo *aeb* fuera rectángulo en *b*, como *ae* y *ab* son por construcción, respectivamente paralelas á AB y á BG, el ángulo *aeb* sería igual á α; y en tal caso la compresión que experimenta el tramo AD del par, representado por la línea *ae* de la figura recíproca, tendría por expresión $ae = \frac{ab}{\operatorname{sen} \alpha}$, ó bien $6 = \frac{8}{12} \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}$.

En efecto; dicho triángulo es rectángulo en b. Para probarlo tracemos en la figura 266 la recta BH paralela á AC, y prolonguemos la AE hasta su encuentro en H con la anterior.

Los triángulos AEC y BEH son semejantes; y puesto que por construcción se verifica que $BE = \frac{1}{2} EC$, será también $BH = \frac{1}{2} AC$, y por tanto $BH = GC$. Además BH y GC son ambas perpendiculares á BG; por consiguiente HC será igual y paralela á BG; y por esto los triángulos BFE y HCE serán semejantes; y así como $BE = \frac{1}{2} CE$, será $BF = \frac{1}{2} HC$, y por tanto $BF = FG$.

Los triángulos ABF y eao son por construcción semejantes, y de ello se deduce que $\frac{AF}{FB} = \frac{eo}{ao}$; pero como o es el punto medio da ab, de donde $ao = ob$ y hemos demostrado que $BF = FG$, tendremos tambien $\frac{AF}{FG} = \frac{eo}{ob}$. Además, el ángulo AFG es igual al eob; por tanto, los triángulos AFG y eob, que tienen los lados AF y FG proporcionales á los eo y ob é iguales los ángulos que comprenden, serán semejantes; luego el ángulo abe será recto, por serlo su homólogo BGA, como queríamos demostrar.

Para calcular la compresión $9 = cg$, observaremos que del cuadrilátero $cgnb$ se deduce que $cg = \frac{cb + ng}{\operatorname{sen} \alpha}$, siendo $cb = \frac{5}{12} P$ como ya sabemos. En cuanto á ng vamos á ver que vale $\frac{1}{12} P$.

Desde luego $ng = nm$, porque el triángulo emg es isósceles y la en es bisectriz del ángulo en e. Tambien $nm = mf$ por ser

$bo = oa$; luego será $ng = \frac{1}{3} fg$; y puesto que $gf = ac = \frac{3}{12}$ P, resultará $ng = \frac{1}{12}$ P, como habíamos indicado.

Así tendremos

$$cg = \mathbf{9} = \frac{6}{12} \; \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

De los triángulos eng y eob se deduce inmediatamente que

$$eg = \mathbf{8} = \frac{ng}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{12} \; \frac{P}{\operatorname{sen} \beta}$$

y que

$$eo = \mathbf{7} = \frac{ob}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{4}{12} \; \frac{P}{\operatorname{sen} \beta}.$$

Por último, siendo $gh = ab + 2\, ng$, podremos también establecer que $gh = \mathbf{10} = \frac{10}{12}$ P.

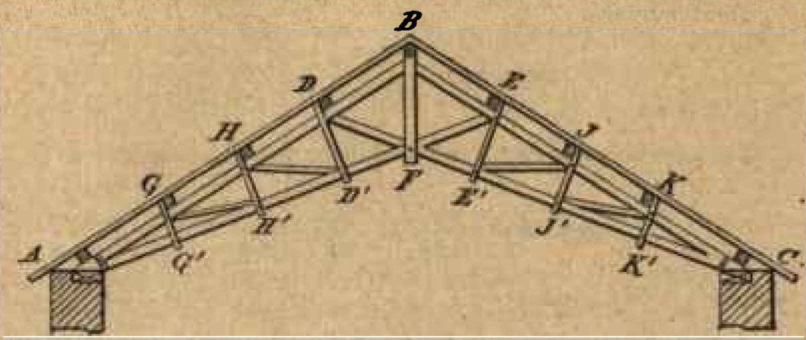
Resumiendo, tendremos:

$$\text{Compresiones..} \left\{ \begin{array}{lll} \text{Par} \ldots\ldots\ldots & \text{AD} \ldots. & \mathbf{6} = \frac{8}{12} \; \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \text{Par} \ldots\ldots\ldots & \text{DB} \ldots. & \mathbf{9} = \frac{6}{12} \; \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \text{Tornapunta..} & \text{DF} \ldots. & \mathbf{8} = \frac{1}{12} \; \frac{P}{\operatorname{sen} \beta} \end{array} \right.$$

$$\text{Extensiones.....} \left\{ \begin{array}{lll} \text{Tirante} \ldots\ldots & \text{AF} \ldots. & \mathbf{7} = \frac{4}{12} \; \frac{P}{\operatorname{sen} \beta} \\ \text{Pendolón} \ldots.. & \text{FB} \ldots. & \mathbf{10} = \frac{10}{12} \; \text{P}. \end{array} \right.$$

570. Armadura de pares, pendolon, tornapuntas. cepos y tirantes inclinados.—Para salvar luces más importantes puede organizarse la armadura de tirantes inclinados de la manera que indica la figura 268.

Fig. 268.



Tienen estos modelos la ventaja de utilizar una buena parte del espacio que salvan en la región media; pero en cambio ofrecen el inconveniente, como se deduce inspeccionando el diagrama de tensiones, de que las piezas, sobre todo los tirantes y los pares, resultan sometidas á esfuerzos tanto más considerables cuanto mayor es la inclinación de los tirantes.

Por esta causa las armaduras recogidas no deben preferirse sino cuando, por circunstancias especiales, sea absolutamente necesario su empleo.

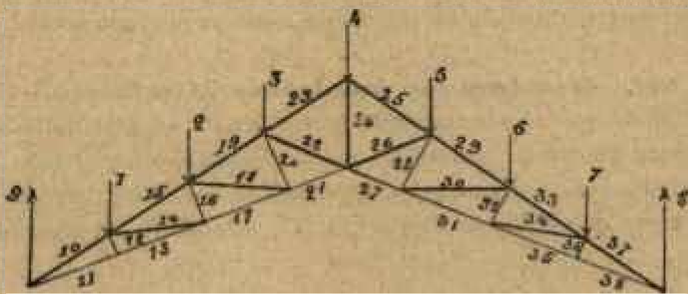
En el modelo que representa la figura, los pares se apoyan en cinco puntos y quedan divididos en cuatro tramos cada uno, que supondremos iguales. El sistema es estrictamente indeformable, y si las correas insisten solamente en los nudos, ninguna pieza trabaja por flexión.

Las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas á los nudos, son, como fácilmente se observa, las siguientes. (Véase la figura 269.)

$$1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7 = \frac{1}{8}\,P; \qquad 8 = 9 = \frac{7}{16}\,P.$$

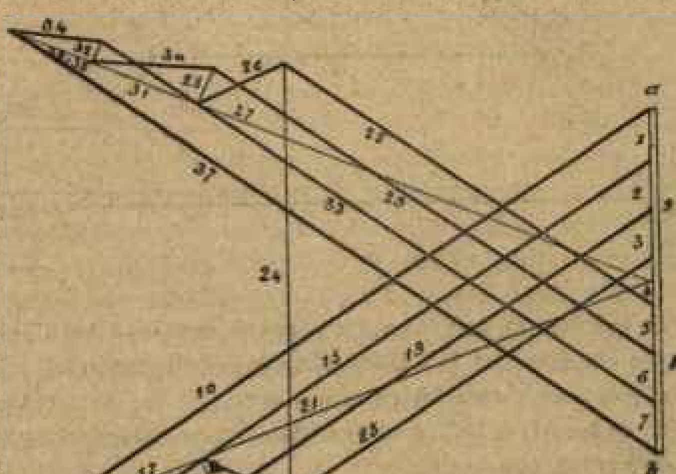
Para determinar las tensiones totales desarrolladas en cada

Fig. 269.



una de las piezas, lo más cómodo y expedito es construir el diagrama de fuerzas interiores, representado por la figura 270, y cuya construcción no ofrece dificultad.

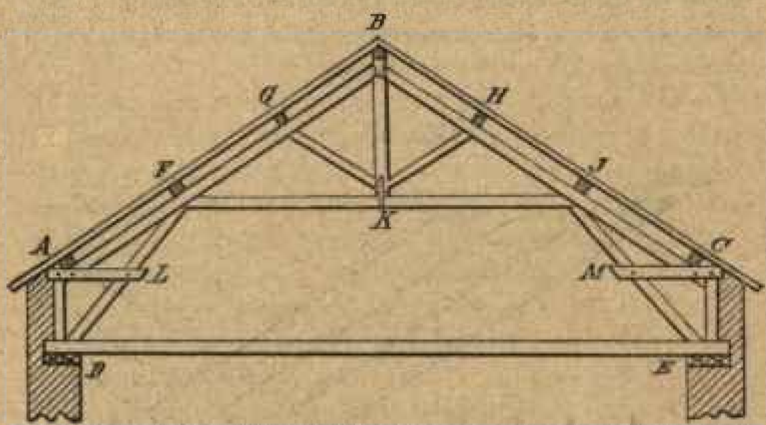
Fig. 270.



Uuicamente haremos observar que las piezas GG′ = **12** y su simétrica KK' = **36** (figura 268), no trabajan nada, por reducirse á un punto sus líneas recíprocas en el expresado diagrama. Puede, por tanto, prescindirse, al construir éste, de tales piezas, puesto que la figura que resulta después de suprimidas, sigue siendo estrictamente indeformable, como es fácil comprobar.

571. Armadura con jabalcones de refuerzo.—Con el fin de que bajo la armadura quede mayor espacio utilizable, puede disponerse el tirante á cierta distancia, y por debajo de la horizontal que pasa por el extremo inferior de los pares, de la manera que indica la figura 271. De esta suerte, la armadura

Fig. 271.



queda sustentada, no sólo por los apoyos extremos A y C, sino por los que crean en D y E los jabalcones de refuerzo DF y JE. Estas piezas se unen á los extremos inferiores de los pares por medio de las AL y MC, y algunas veces son dobles, constituyendo verdaderos cepos.

Es, además, conveniente colocar las piezas AD y CE á manera de montantes, porque así la presión que transmiten al muro los pares y jabalcones de refuerzo se reparte sobre una superficie mayor que la correspondiente á las secciones de apoyo de tales piezas, si los montantes no existieran.

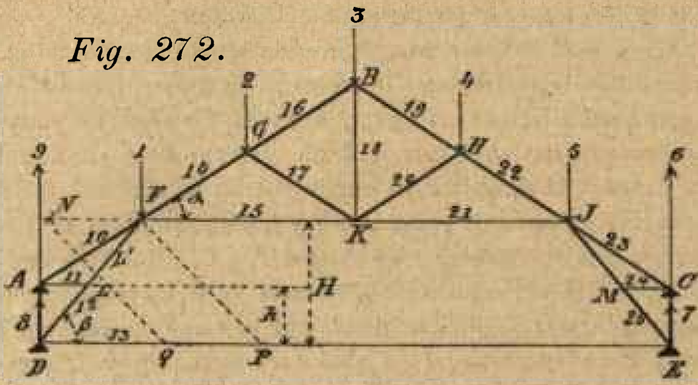
No es posible determinar rigurosamente las funciones que desempeñan los jabalcones de refuerzo, porque dependen de circunstancias hasta cierto punto fortuitas. En efecto; si aquellas piezas fueran algo cortas, ó por defecto de montaje, una vez cargada la armadura no comprimieran lo necesario á los pares en los puntos de encuentro F y J, entonces todo el peso cargaría principalmente en los apoyos A y C, y los tramos de par AG y CH experimentarían, además de la correspondiente compresión, una flexión originada por la carga aplicada en F y en J. Por el contrario, si los jabalcones fueran algo más largos de lo que deben ser, ó al montarlos forzaran á los pares levantando algo los puntos F y J, en tal caso, una vez cargada la armadura, la mayor parte del peso podría cargar sobre dichos jabalcones.

En el primer caso, estas piezas trabajarían únicamente por flexión, producida por la fuerza de extensión desarrollada en las piezas AL y MC. En el segundo caso, trabajarían solamente por compresión, y los pares AG no experimentarían flexión alguna, si, como la figura supone, las correas sólo insisten en los nudos.

En realidad, el problema de averiguar con todo rigor cómo se reparte la carga total entre los cuatro apoyos A, C, D y E, es imposible; porque, como hemos hecho notar, depende de circunstancias anejas al montaje y construcción de la armadura, imposibles de conocer de antemano y menos de traducir en valores numéricos; pero aceptando, con autores de tan reconocida autoridad como Planat, que el jabalcón crea en F un verdadero punto de apoyo, admitiremos, como base de cálculo, que la carga aplicada en F, que es la que transmite la correa que insiste sobre este punto, se reparte entre el jabalcón DF y el tirante FJ, de la parte superior de la armadura.

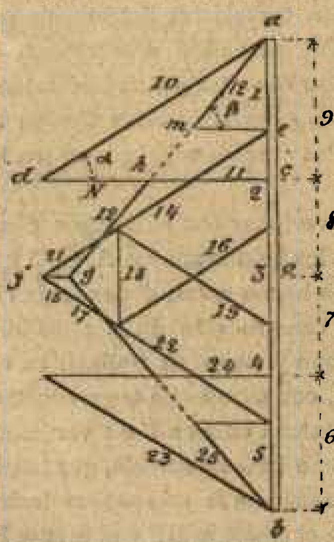
Establecido esto, y bajo el supuesto de que cada par quede dividido en tres tramos iguales, las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas á los nudos, son (véase la figura 272):

Fig. 272.



$$1 = 2 = 3 = 4 = 5 = \frac{2}{12}\,P; \quad 6 = 9 = \frac{3}{12}\,P; \quad 7 = 8 = \frac{2}{12}\,P.$$

Fig. 273.



El diagrama de tensiones totales lo construiremos de la manera siguiente (figura 273):

Sea *ab* el polígono de fuerzas exteriores. En el nudo A concurren en equilibrio las fuerzas $9 = \frac{3}{12}\,P$, representada por la línea *ac* en dicho polígono, y las tensiones desarrolladas en el tramo de par AF = **10** y en la pieza AL = **11**. El triángulo recíproco de este nudo será el *cad*, cuyo sentido cíclico nos dice, aplicando la regla conocida, que el par experimenta una compresión **10** igual á *ad* y la pieza AL una extensión **11** igual á *dc*.

Ahora bien; sujeto el jabalcón por sus extremos en D y en F, y sometido en L á la acción de la pieza AL, que trabaja por extensión, el primero se hallará sometido á la compresión determinada por la fuerza **1** representada por el lado *am* del triángulo *aem*, y además á la flexión producida por la fuerza **11** que actua en el punto L.

Esta fuerza **11** que solicita al jabalcón, engendra en F una cierta reacción N que es necesario calcular para tenerla en cuenta al pasar al nudo F. Puede calcularse analíticamente por la expresión $N = \frac{h}{H} \times$ **11**, recordando la propiedad de que las componentes paralelas están en razón inversa de sus distancias á la resultante; pero se puede hallar gráficamente del siguiente modo, fundándose en la expresada propiedad. Para ello tomaremos sobre el tirante inferior, y á contar del punto D, la magnitud DP, igual á la extensión conocida 11. Fijaremos el punto L′ de modo que satisfaga á la condición FL′ = DL; uniremos el punto P con el F, y trazando por L′ la L′Q paralela á FP, el segmento PQ será la magnitud de la componente buscada, es decir, la fuerza N que hay que considerar aplicada en el nudo F.

Así, pues, en este nudo F habremos de considerar las siguientes fuerzas en equilibrio.

Fuerzas conocidas.....	**1**, **10**, **12** y N = FN
Idem desconocidas....	**14** y **15**;

total seis, de las cuales sólo dos se desconocen.

El exágono recíproco del nudo F es fácil de construir, y nos dará á conocer la magnitud y sentido de las fuerzas **14** y **15**.

Como el lado **14** es limítrofe de las fuerzas exteriores **1** y **2**, por el punto *e*, en que estas concurren en el polígono de las fuerzas, trazaremos la recta *ef* paralela á la barra **14**. Por el punto *d*, es decir, á continuación de la fuerza 10, puede trazarse la 12 ó la N. Si es esta última, llegaremos al punto *h*, siendo *dh* = N, y trazando por *h* la *hg* igual y paralela á *am* = 12, la paralela *gf* al tirante **15**, cerrará el contorno y determinará la magnitud de las fuerzas desconocidas **14** y **15**.

El exágono recíproco será, por tanto, el *aefghda*, ó si se quiere el 1. 14. 15. 12. N. 10, cuyo sentido cíclico es el que resulta del orden enunciado de sus lados.

Vemos, pues, que la pieza **15** resulta extendida y la **14** comprimida.

En el nudo G, lo mismo que en el B, la construcción de los polígones recíprocos no exige observación alguna; y como por otra parte la armadura de que se trata es simétrica y la suponemos simétricamente cargada, el resto del diagrama se hará con toda facilidad.

El triángulo recíproco del nudo D es el *eam*, de suerte que la extensión del tirante **13** será igual á *me*.

Si α es el ángulo que forma el par con el horizonte, y β el que forma el jabalcón de refuerzo con el tirante inferior, las expresiones de las fuerzas interiores desarrolladas en las distintas piezas son, como fácilmente se deduce del diagrama, las siguientes.

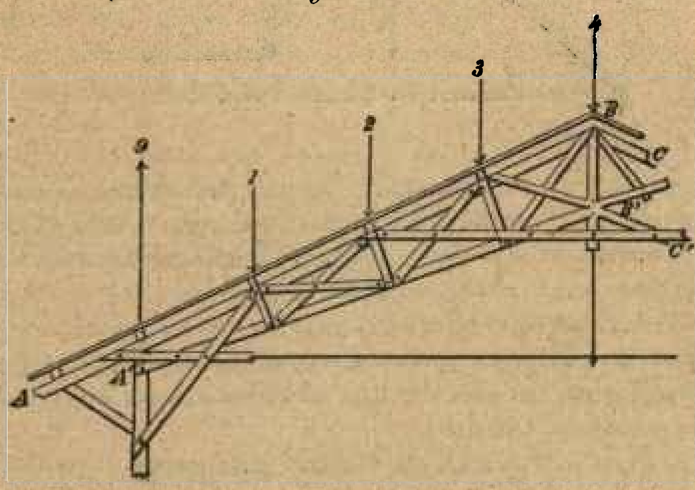
Compresiones.	Par............	AF;	$\mathbf{10} = \frac{3}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
	Par............	FG;	$\mathbf{14} = \frac{3}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
	Par............	GB,	$\mathbf{16} = \frac{2}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
	Jabalcón.......	DF,	$\mathbf{12} = \frac{2}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\beta}$
	Tornapunta....	GK,	$\mathbf{17} = \frac{1}{12}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$
Extensiones.	Pieza.........	AL,	$\mathbf{11} = \frac{3}{12}\,\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$
	Tirante inferior.	DE,	$\mathbf{13} = \frac{2}{12}\,\frac{P}{\operatorname{tg}\beta}$
	Tirante superior.	FJ,	$\mathbf{15} = \frac{1}{12}\,P\left(\frac{h}{H\operatorname{tg}\alpha} - \frac{2}{\operatorname{tg}\beta}\right)$
	Pendolón.......	BK,	$\mathbf{18} = \frac{1}{6}\,P.$

Hay que tener presente que el jabalcón de refuerzo es pieza sometida á flexión compuesta: puesto que ha de resistir á una compresión que vale $\mathbf{12} = \frac{2}{12} \frac{P}{\text{sen}\,\beta}$ y á un momento máximo de flexión originado por la fuerza 11 y que vale $M = N(H - h)$.

En cuanto á los montantes, se ve fácilmente que son piezas comprimidas bajo una carga igual á $\frac{1}{3}$ P.

572. Armaduras rígidas de madera para grandes luces.—Con aplicación á grandes cobertizos y dependencias varias puede organizarse esta clase de armaduras de muy distintos modos; pero en general podemos decir que están constituídas, como indica la figura 274, por un cordón superior ABC,

Fig. 274.

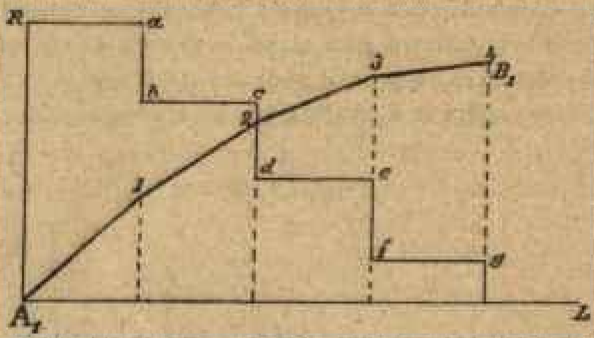


y otro inferior A'B'C', ambos rectos y ligados entre sí por diferentes piezas que aseguran la rigidez del sistema.

Pueden calcularse estas armaduras, cuando por la disposición de las piezas de enlace no constituyen un sistema reticular ó triangulado, considerándolas como vigas compuestas, apoyadas por sus extremos y sometidas á cargas exteriores conocidas, **1, 2, 3,** etc.

En tal concepto, si $A_1 B_1$ (figura 275), representa la primera mitad del diagrama de momentos de flexión, fácil de construir, ya se consideren las cargas aisladas ó se suponga que están uniformemente repartidas, pues la diferencia es poco importan-

Fig. 275.



te; y si R*ab*, etc., representa el diagrama de esfuerzos cortantes, la armadura ha de poder resistir en cualquiera de sus puntos al momento de flexión y esfuerzo cortante correspondiente que los expresados diagramas dan á conocer.

Pero como no se trata de obtener un sistema de igual resistencia, porque esto no sería práctico, se adoptan las mismas bases de cálculo que para las vigas rectas de celosía, que ya hemos estudiado; á saber:

1.° Los cordones AB y A′B′ deben poder resistir por sí solos al momento máximo de flexión, sin que en región alguna el coeficiente de trabajo exceda del que se señale como límite de seguridad.

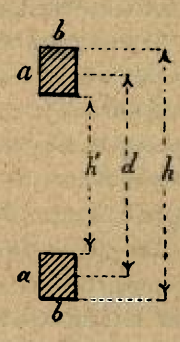
2.° Las piezas de relleno que forman el alma de la viga, deben resistir por sí solas el esfuerzo cortante máximo, de modo que el coeficiente de trabajo tampoco exceda del que se hubiese fijado como límite de seguridad.

Como el momento de flexión alcanza su valor máximo en la región superior de los pares, y éstos están formados por piezas de sección rectangular constante, natural es disponerlos como la figura indica, formando un cierto ángulo de modo que se separen más en el vértice de la armadura que en los apoyos, para que el valor del módulo Z, al variar con la distancia de tales piezas, se acomode en lo posible á las variaciones del momento de flexión M.

Suponiendo conocida la figura de la armadura reducida á sus ejes, así como la distribución y magnitud de las fuerzas exteriores, la cuestión queda reducida á determinar la escuadría de las piezas diferentes, de modo que queden satisfechas las condiciones enunciadas.

Si llamamos a al lado vertical y b al lado horizontal de la escuadría de las piezas que hacen las veces de cordones (figura 276); h, á la distancia de sus caras externas, medida en el vértice de la armadura; $h' = h - 2a$, á la distancia de las caras internas de dichas piezas en la misma región; K, al coeficiente de seguridad y M, al momento máximo de flexión, la ecuación de resistencia para el cálculo de los cordones, será

Fig. 276.



$$ZK = M \qquad (1)$$

siendo

$$Z = \frac{1}{6} b \frac{h^3 - h'^3}{h}.$$

Como en realidad, la distancia que se conoce es d, y h y h' son desconocidas, puede utilizarse para un primer cálculo la expresión aproximada de Z, que en otro lugar establecimos, y que ahora será

$$Z = \omega d.$$

Un primer valor de ω será, por tanto,

$$\omega = \frac{M}{Kd}$$

y dará idea de la sección necesaria. Elegida una pieza cuya sección transversal sea algo superior á ω, será fácil determinar a, b, h y h', y calcular Z, y ver si satisface á la ecuación (1).

Conociendo así los lados a y b de la escuadría de los cordones, es necesario comprobar si en las demás regiones el coeficiente de trabajo K′ es aceptable, y lo será si resulta que $K' \leqq K$.

Fácil es determinar en la región que se considere el valor M′ del momento de flexión, así como el del módulo Z′; y como la expresión de K′ es

$$K' = \frac{M'}{Z'},$$

las comprobaciones que hay que hacer, naturalmente en número bastante limitado, son, como se ve, muy sencillas.

Si en alguna región sucediera que $K' > K$ y se estimara inadmisible la diferencia, sería preciso reforzar las dimensiones de la escuadría de los cordones, de preferencia el lado vertical; ó puede ensayarse si aumentando la separación ó el ángulo que forman dichos cordones, sin modificar la escuadría hallada, se llegan á obtener para Z′ valores suficientes.

Las piezas interiores que componen el alma de la viga, ya hemos dicho que se calculan para que por sí solas puedan resistir el esfuerzo cortante máximo T, que en este caso es igual á la reacción desarrollada en cualquiera de los apoyos.

Como puede suceder (véase la figura 274) que las referidas piezas se corten bajo ángulos variables según la región que se considere y formen ángulos desiguales con la vertical, lo más cómodo es descomponer el esfuerzo cortante T en dos componentes, según las direcciones de las piezas en cada cruzamiento, y tomar la mayor de ellas como base de cálculo, en cuyo caso, representándola por t, la ecuación de resistencia será

$$\omega = \frac{t}{K}.$$

Algunas veces, y atendiendo á la dificultad de lograr con piezas de madera un sistema suficientemente rígido, sobre todo si la mano de obra no es muy esmerada, se dota á estas armaduras de un tirante de hierro, cuya tensión puede variarse á voluntad. De esta suerte se introduce una nueva fuerza, cuya influencia en la resistencia de la armadura vamos á indicar sucintamente.

573. Influencia del tirante.—Supongamos que al templar el tirante logramos que desarrolle una tensión algo menor que la que sería necesaria para el equilibrio de la armadura, si fuera articulada en el punto de encuentro de los pares y quedase reducida al tipo ya conocido de armadura compuesta de pares y tirante.

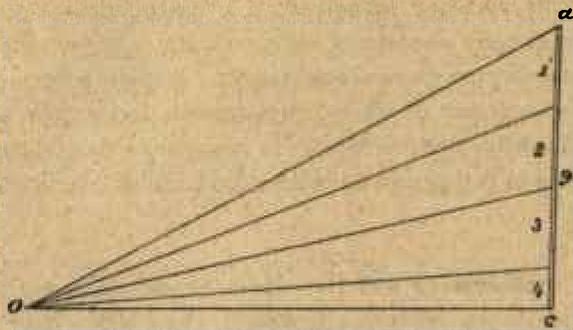
Si construimos un polígono funicular $\alpha m B'$ (figura 278) ([a]), tomando como punto de partida el apoyo izquierdo α y como polo un punto O (figura 277), situado sobre el eje de simetría cO del polígono de fuerzas exteriores y á una distancia polar igual á la tensión del tirante, dicho polígono funicular pasará por el apoyo derecho, no dibujado en la figura, y representará, con respecto á la línea media $\alpha\beta$ de los pares, el polígono de presiones correspondiente, á semejanza de lo que sucedía con las bóvedas.

El momento de flexión en un punto cualquiera se calculará multiplicando la ordenada vertical del referido polígono por la distancia polar, y es claro que en aquella región en que el polígono de presiones pase por encima de la línea media, el momento será positivo, la línea elástica será cóncava hacia arriba, y como consecuencia, el cordón superior quedará comprimido y

(a) Sólo se construye la mitad, porque la segunda mitad sería simétrica de la primera.

el inferior extendido. Lo contrario sucederá en la región en que el polígono de presiones pase por debajo de la línea media. Fi-

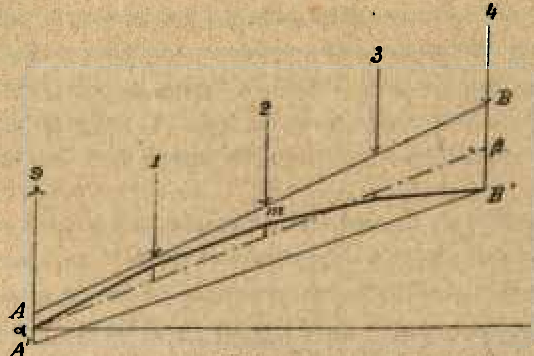
Fig. 277.



nalmente, donde el referido polígono corte á esta línea el momento de flexión será nulo.

Trazado el polígono de presiones, es muy fácil averiguar cuál es la región en que el momento es máximo en valor absoluto, puesto que corresponderá al punto de mayor ordenada vertical. El producto de esta ordenada por la distancia polar (extensión del tirante), será el valor del momento máximo de

Fig. 278.



flexión, el cual seguramente será menor que el correspondiente al caso en que no había tirante, y así se ve que una tensión conveniente de esta pieza adicional modifica la intensidad y distribución de los momentos de flexión en los pares, disminuyendo el valor del coeficiente de trabajo de una manera notable, como es fácil comprobar.

ARMADURAS DE HIERRO

574. Con las armaduras de hierro formamos un grupo aparte, no por diferencias en los métodos de cálculo, que éstos son siempre los mismos, sino porque habiendo de ocuparnos sólo de las más sencillas, nos fijaremos principalmente en los tipos que por su organización especial se consideran más propios de las armaduras metálicas.

Pueden convenir en ciertos casos las armaduras mixtas, empleando la madera para las piezas que trabajen por flexión ó por compresión, y el hierro para las que trabajen por extensión; pero cualquiera que sea el tipo de que se trate y la naturaleza de los materiales, la marcha y los procedimientos de cálculo serán en el fondo los mismos.

Los tipos de armaduras de hierro, en cuyo estudio hemos de ocuparnos, son los llamados *Polonceau*, *inglés*, y *Oppermann*, indicando la disposición general de los tipos *suizo* y *alemán*.

575. Armaduras, sistema Polonceau.—Estas armaduras están constituídas por dos vigas armadas ABD, BCF (figuras 279 y 281) unidas por un tirante central ADFC, el cual puede coincidir con la horizontal que pasa por los apoyos ó quedar á cierta distancia sobre ella, según la longitud de las piezas ED y JF, llamadas *manguetas* ó *bielas*.

Dentro de esta forma general, cabe reforzar los pares con diverso número de bielas; pero sólo consideraremos las armaduras de una biela (figuras 279 y 281) y de tres bielas (figuras 283 y 287).

Fig. 279.

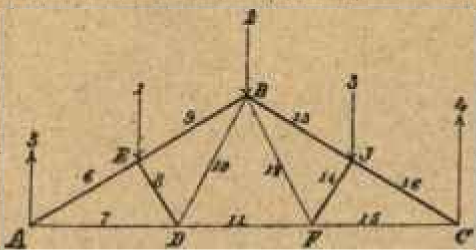
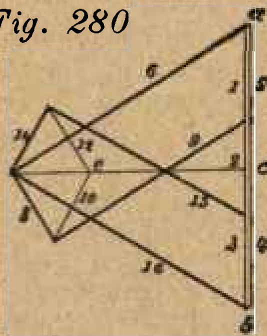


Fig. 280



576. Armadura de una biela.—Cada par queda divi-

Fig. 281.

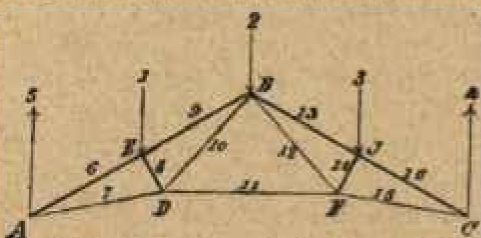
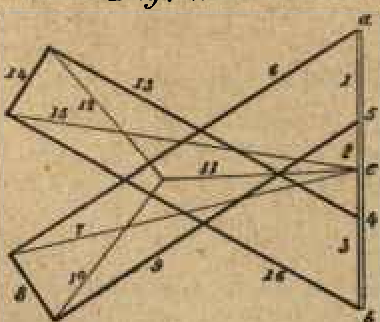


Fig. 282.

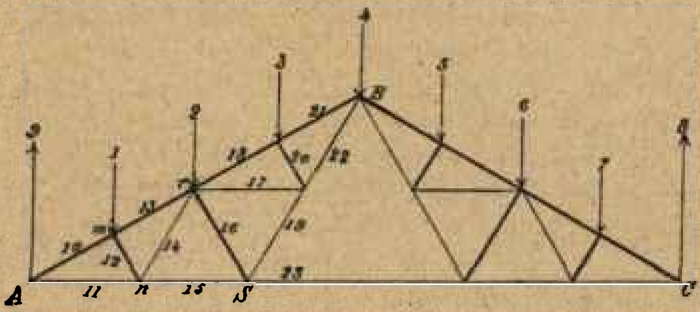


dido en dos tramos iguales y la determinación de las fuerzas exteriores **1, 2, 3, 4** y **5** se hará como ya sabemos.

Si el cordón inferior es recto (figura 279), el diagrama de fuerzas es el que representa la figura 280. Si fuera quebrado (figura 281), el diagrama será el que indica la figura 282. En ambos casos su construcción no ofrece ninguna dificultad.

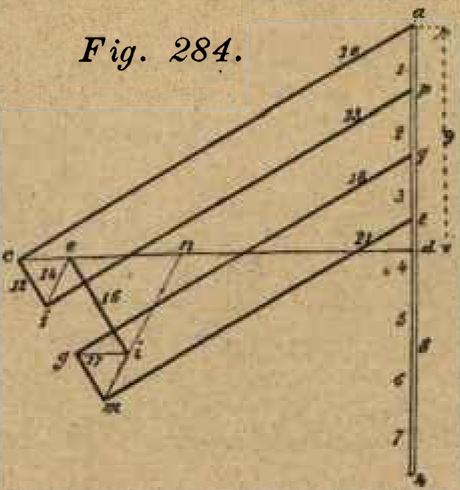
577. Armadura de tres bielas.—Como la circunstancia de que el cordón inferior sea recto ó quebrado, no implica

Fig. 283.



ninguna modificación en la marcha general para construir el diagrama de fuerzas, consideraremos cualquier caso; por ejemplo, cuando el cordón inferior es recto (figuras 283 y 284).

Fig. 284.



La aplicación del método de las figuras recíprocas no ofrece dificultad alguna para los nudos A, *m*, *n*; pero sí la hay al pasar al nudo *r* ó al *s*; pues en cualquiera de ellos se verifica que se desconocen las recíprocas de tres barras, por lo que aquel método resulta inaplicable en tales nudos.

Si llegáramos á conocer la tensión de la barra **23**, el polígono recíproco del nudo *s* se podrá construir; y conociendo así la tensión de la barra **16**, también se podrá construir el polígono recíproco del nudo *r*, en cuyo caso no habrá dificultad en continuar hasta el nudo B, último que hace falta considerar, teniendo en cuenta la simetría de la figura directa con relación á la vertical que pasa por la hilera y la simetría de la recíproca con respecto á la horizontal que pasa por el punto medio del polígono de las fuerzas exteriores.

De suerte que la dificultad estriba, como vemos, en calcular ó determinar la tensión desarrollada por el tirante central **23**.

Para esto podemos aplicar el método de *Culmann*, imaginando que se corta el sistema por el plano XX (figura 285), que encuentra sólo á tres barras, de las cuales una es el tirante central; y esto lo haríamos de la manera que se explicó en el tomo I, números **109** y **145**.

También es posible hallar las tensiones de las barras cortadas por el referido plano, por medio del método de *Ritter*, de que vamos á ocuparnos.

578. Método de Ritter.—Sea XX el plano secante (figura 285) el cual corta á las barras *m*B, B*n* y G*c*. La sección *a* está en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas iguales y contrarias, que llamaremos α y α_1. La primera, α, representa la tensión desarrollada en la barra *ma*, y la segunda, α_1, es la reacción desarrollada por el otro segmento *a*B. Si la barra *m*B está comprimida α y α_1 serán atractivas, y si dicha barra estuviera extendida, tales fuerzas serían repulsivas.

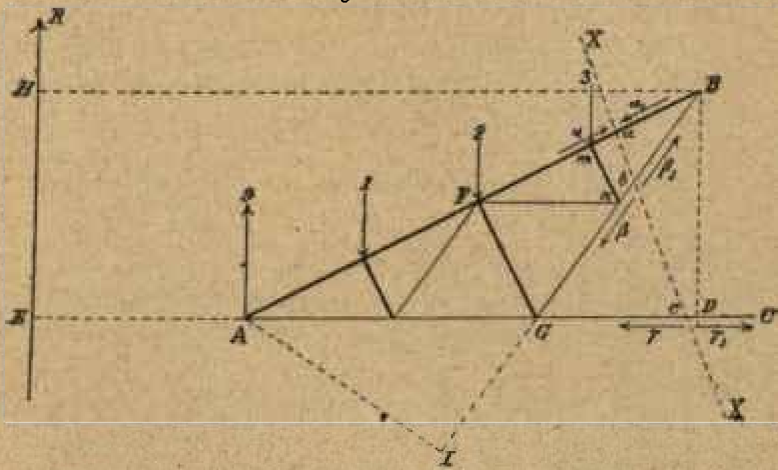
Lo mismo puede decirse respecto á las secciones *b* y *c*.

Sin que el equilibrio deje por ello de subsistir, podemos separar la parte de la armadura que queda á la derecha del plano XX, con tal de introducir en los puntos *a, b, c,* las fuerzas α_1, β_1, γ_1.

Si R es la resultante de las fuerzas exteriores **1, 2, 3, 9,** que quedan á la izquierda del plano secante, es claro que R, α_1, β_1,

γ_1 formarán un sistema en equilibrio; de donde resulta que las fuerzas α, β, γ, iguales y contrarias á α_1, β_1, γ_1, constituirán un sistema equivalente á la fuerza R; y, por tanto, podremos afir-

Fig. 285.



mar que el momento de R, con relación á un punto cualquiera del plano de la figura, será igual en magnitud y en signo á la suma de los momentos de α, β y γ, con relación al mismo punto.

Así, para calcular una cualquiera de estas fuerzas, bastará tomar como centro de momentos el punto de encuentro de las barras en que actúan las otras dos; pues para estas sus momentos serán nulos, y entonces la condición de equilibrio se reducirá á la igualdad del momento de R y del de la fuerza que se quiere calcular.

Si quisiéramos calcular α, tomaremos como punto fijo el G, en que se cortan las barras sobre que actúan las fuerzas β y γ.

El brazo de palanca de R será EG, y como el de α es FG, tendremos

$$R \times EG = \alpha \times FG, \text{ de donde } \quad \alpha = \frac{R \times EG}{FG}.$$

Para calcular β hay que tomar como centro de momentos el punto A en que se cortan las barras que desarrollan las tensiones α y γ, y será

$$R \times EA = \beta \times AI, \text{ de donde } \quad \beta = \frac{R \times EA}{AI}.$$

Finalmente, para el cálculo de γ, tomaremos como centro de rotación el punto B, en que se cortan las barras que desenvuelven las tensiones α y β, y tendremos

$$R \times HB = \gamma \times BD, \text{ de donde } \quad \gamma = \frac{R \times HB}{BD}.$$

Conociendo la tensión γ que desarrolla la barra **23**, ya no hay dificultad en seguir aplicando el método de las figuras recíprocas para la construcción del diagrama de tensiones totales.

Se conocerá el sentido de las fuerzas α, β, γ, observando que el momento de cada una de ellas, con relación al punto elegido para su cálculo, ha de ser del mismo signo que el momento de R.

Así, por ejemplo: como con relación al punto G, la fuerza R tiende á girar de izquierda á derecha, lo mismo debe suceder con α, lo que exige que su sentido sea el marcado por la flecha.

La rotación de R alrededor del punto A es también de izquierda á derecha; otro tanto ha de suceder con β, y su sentido será el que se indica en la figura.

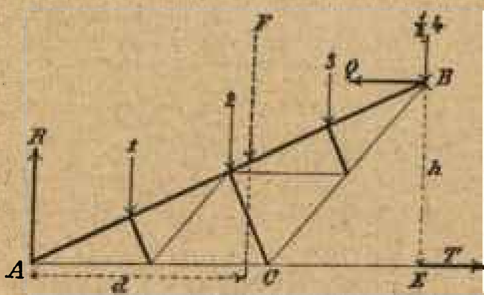
Lo propio diríamos respecto á γ.

Vemos pues, que cuando las fuerzas α, β, γ (cuyos sentidos se definen con toda seguridad) se dirigen al plano secante, las piezas correspondientes están comprimidas, y extendidas en el caso contrario, es decir, si las respectivas tensiones se separan del referido plano.

No hay para qué decir que la resultante R se hallará fácilmente coustruyendo un polígono funicular correspondiente á las fuerzas **1, 2, 3, 9** y relativo á un polo arbitrario. La línea de acción de R puede caer bastante lejos del apoyo izquierdo, y por este motivo suele preferirse el siguiente procedimiento para el cálculo de la tensión del tirante central.

579. Método particular.—Si imaginamos cortada la armadura por un plano vertical que pase por la hilera (figura 286), podemos reemplazar la acción de la semiarmadura derecha por un empuje horizontal Q, aplicado al extremo superior del par de la izquierda, y una fuerza T, aplicada al tirante, igual á la tensión que éste desarrolla.

Fig. 286.



Es necesario observar que al suprimir la semiarmadura derecha suprimimos también la mitad de la fuerza **4**, que actuaba en B; porque dicha mitad procede de la carga aplicada á la parte suprimida; y así, las fuerzas verticales que ahora solicitan al par son **1**, **2**, **3**, y $\frac{1}{2}$ **4**. Su resultante F vale $F = \frac{7}{16}$ P, siendo P la carga total, y es evidente que no pasará por el punto medio de AB, sino más cerca de B que de A. Además en el apoyo A se desarrolla una reacción igual y contraria á F.

De suerte que podemos considerar en equilibrio á la semiarmadura de la izquierda bajo la acción de las fuerzas R, F, Q, y T; pero como R y F componen un par, puesto que son paralelas, iguales y de sentido contrario, las Q y T, que con las anteriores constituyen un sistema en equilibrio, formarán necesariamente otro par.

El equilibrio exige que la suma de los momentos de ambos pares sea nula; por consiguiente, llamando *d* y *h* á los respectivos brazos de palanca, tendremos:

$$R \times d = T \times h, \text{ de donde } \qquad T = \frac{R \times d}{h} \qquad (1)$$

Aun cuando no se conozca el brazo de palanca d, puede calcularse fácilmente el momento $R \times d$ del primer par, haciendo la suma de los momentos de las fuerzas **1, 2, 3,** $\frac{1}{2}$ **1**, con relación al punto A. En efecto, siendo l la luz de la armadura, el brazo de palanca de la resultante parcial $\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} = \frac{3}{8}$ P, es $\frac{1}{4}\,l$, así como el de la fuerza $\frac{1}{2}\,\mathbf{4} = \frac{1}{16}$ P, es $\frac{1}{2}\,l$. Por tanto, tendremos

$$R \times d = \frac{3}{8} P \times \frac{1}{4}\, l + \frac{1}{16} P \times \frac{1}{2}\, l = \frac{1}{8} P\, l$$

y el valor de T (expresión (1)) será

$$T = \frac{1}{8} P \frac{l}{h},$$

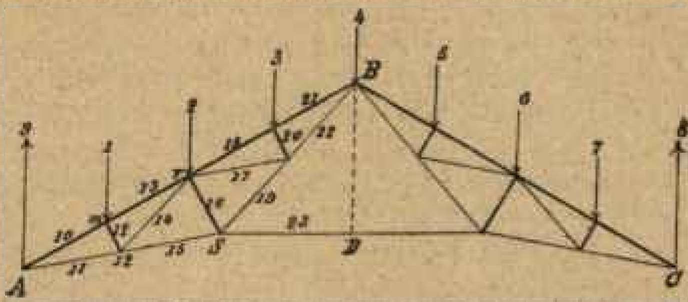
expresión que también se deduce fácilmente del diagrama de fuerzas.

El mismo resultado se hallará por el método de Ritter ó el método de Culmann, como es fácil comprobar.

Cuando en la figura directa hay simetría de líneas y de cargas con respecto á la vertical que pasa por la hilera, y en consecuencia la hay también en la recíproca con relación á la horizontal que pasa por el punto medio del polígono de fuerzas exteriores, puede excusarse la aplicación de los métodos auxiliares que anteceden para determinar la tensión del tirante central **23**.

Basta para ello observar (figura 284) que los puntos *c, f, g, m*, están en línea recta, lo mismo que los *m, i, n*; que las líneas *cf*, *gm* y *ei* son paralelas y que también lo son las *fe* y *mn*, lo mismo que las *ce* y *gi*. Estas particularidades son suficientes para construir el diagrama de fuerzas, sin recurrir, en este caso, á los métodos indicados.

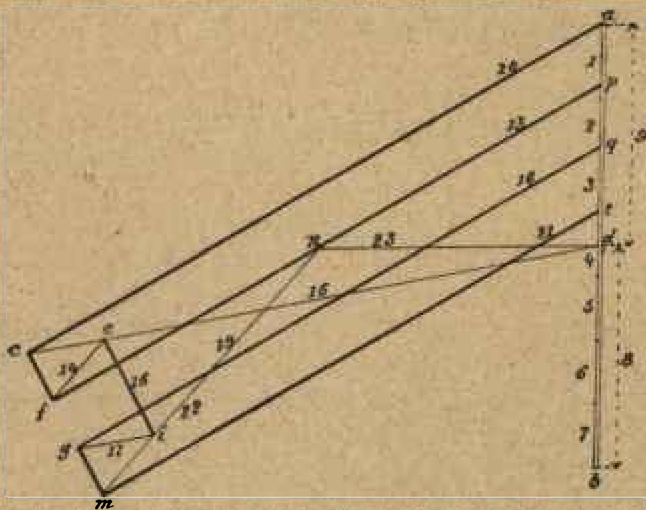
Fig. 287.



Podemos proceder, por lo tanto, de la manera siguiente:

Las líneas $ac = 10$, $cd = 11$, $pf = 13$, $fc = 12$, $fe = 14$ y $ed = 15$,

Fig. 288.



se obtienen construyendo los polígonos recíprocos de los nudos A, *m*, *n*, (figura 283) en el orden que se indican.

El polígono recíproco del nudo *r* se obtendrá trazando *qg* y *tm* paralelamente á **13** y **18**, es decir á AB, y limitándolas por la recta *gm*, prolongación de la *cf*. Por *m* se traza la *mn* paralela á las barras **19** y **22**, es decir á *s*B, y por *c* la paralela *ei* á la barra **16**. El punto *g* unido con el *i*, ha de dar, como comprobación, una recta paralela á la barra **17**, y, por tanto á *ce*.

Así tendremos terminada la mitad del diagrama de fuerzas, única que se necesita, por la simetría del mismo respecto á la recta *cd*.

Las tensiones que, por no complicar la figura 284, no llevan el número de la barra á que se refieren son las siguientes:

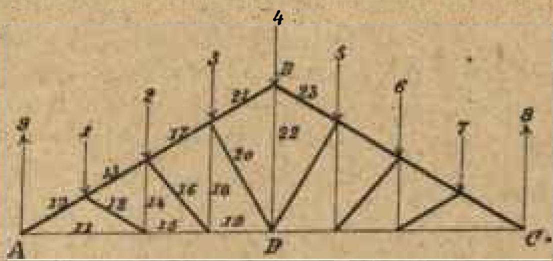
$$cd = 11,\ ed = 15,\ in = 19,\ mn = 22 \text{ y } nd = 23.$$

La figura 287 representa una armadura Polonceau de tres bielas y tirante quebrado, y la figura 288 el diagrama de fuerzas correspondiente, el cual se construye del mismo modo que en el caso anterior.

La línea BD representa un pendolón que suele añadirse, cuando hay necesidad de sustentar el tirante central, evitando su pandeo.

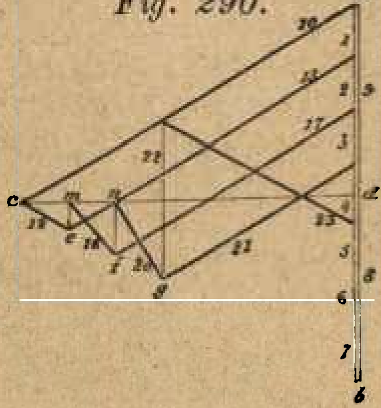
580. Armadura inglesa.—Se componen las armaduras inglesas de dos pares AB y BC (figuras 289 y 291) divididos ca-

Fig. 289.



da uno en el mismo número N de tramos iguales; de un tirante ADC, que puede ser recto ó quebrado, y de una serie de barras

Fig. 290.



verticales y otra de barras inclinadas y convergentes hacia abajo, que convierten la figura en un sistema reticular ó triangulado estrictamente indeformable. Las barras verticales se llaman *péndolas;* la que parte de la hilera, *pendolón* y las inclinadas, *tornapuntas.*

De los nudos inmediatos á los apoyos no nace ninguna péndola.

Si N es el número de tramos iguales de cada par, claro es que habrá 2N — 4 péndolas y 2N — 2 tornapuntas.

Conocidas las cargas exteriores es muy fácil construir el diagrama de fuerzas, como lo indica la figura 290 para el caso en el tirante es recto y la 292 cuando es quebrado.

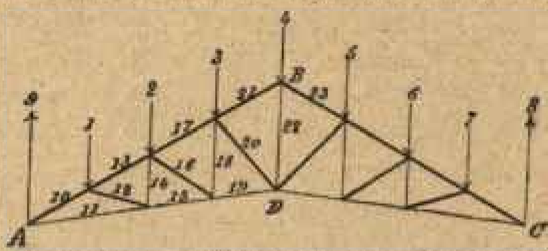
En ambas, las tensiones que no se han marcado con el número de la barra correspondiente, para no complicar la figura, son las siguientes:

$$cd = 11, \; md = 15, \; nd = 19, \; me = 14, \; nf = 18.$$

A semejanza de lo que hemos hecho para las armaduras de madera, sería fácil deducir de los diagramas de fuerzas, fórmulas sencillas para calcular las tensiones de las piezas diferentes: pero vamos á hacer algunas indicaciones para dar á este problema mayor carácter de generalidad.

581. Fórmulas generales de las tensiones.—Se dice que un grupo de armaduras, en número cualquiera, pertenecen al mismo tipo, cuando la disposición de sus elementos obedece á reglas determinadas, ofreciendo en consecuencia caracteres esenciales, comunes á todas ellas. Podrán diferenciarse en la luz, en el ángulo de los pares con el horizonte y en el número de tramos de cada par, etc.; pero si la organización de todas responde al mismo principio pertenecerán á un mismo tipo.

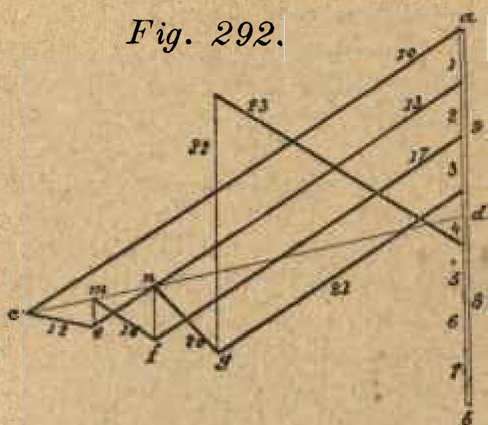
Fig. 291.



Tal sucede con las armaduras de distinto tipo representadas por las figuras 289 y 291.

Así, por ejemplo, fijándonos en la primera se observa que su organización obedece á las reglas siguientes:

Fig. 292.



1.ª El par queda dividido en tramos iguales por los nudos intermedios.

2.ª El tirante ó cordón inferior es recto y horizontal.

3.ª De cada nudo intermedio nace una barra vertical ó péndola (contando ahora el pendolón), excepción hecha de los nudos inmediatos á los apoyos, de los cuales no parte ninguna.

4.ª Las tornapuntas que unen los extremos opuestos de las barras verticales inmediatas son convergentes hacia abajo.

Pues bien; todas las armaduras que satisfagan á las condiciones anteriores pertenecerán al mismo tipo que la propuesta (figura 289), cualquiera que sea el número N de tramos de cada par, la luz salvada l, la distancia d entre cerchas, y los ángulos α, φ_1, φ_2..... etc., que respectivamente forman con el horizonte el par, y las diversos tornapuntas (véase figura 293).

Vemos así que dentro de un mismo tipo hay infinito número de armaduras diferentes; pero vamos á demostrar que es posible deducir para un tipo dado, fórmulas generales que permitan calcular el valor absoluto de las tensiones que se desarrollan en las diversas piezas.

En efecto: sean

p	la carga por metro cuadrado de vertiente;
d	la distancia entre cerchas;
l	la luz de la armadura;
α	el ángulo de los pares con el horizonte;
β	el ángulo del tirante principal con el par;
φ_1, φ_2..	los ángulos que forman las tornapuntas con el tirante;
N	el número de tramos iguales de que se compone cada par;
A_1, A_2	las compresiones de los diversos tramos de par;
B_1, B_2..	las extensiones de los diversos tramos del tirante;
C_1, C_2..	las extensiones de las diversas péndolas;
D_1, D_2..	las compresiones de las diversas tornapuntas;
E	la extensión del pendolón;
n	el número de orden de una pieza cualquiera de la semiarmadura, dentro de las de su misma clase, contadas de izquierda á derecha, partiendo del apoyo izquierdo.

En el tipo de la figura 293 tenemos que:

El número de tramos del par es N, mientras que el semitirante se compone sólo de N — 1 tramos.

Fig. 293.

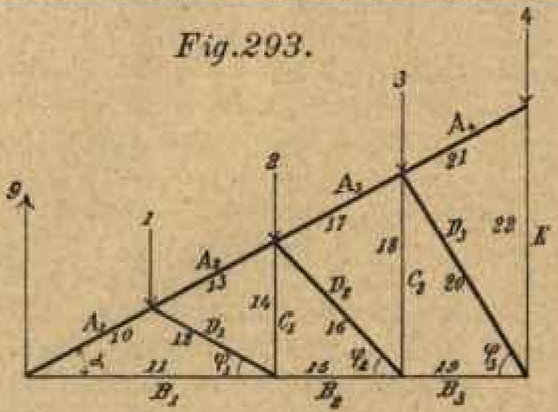
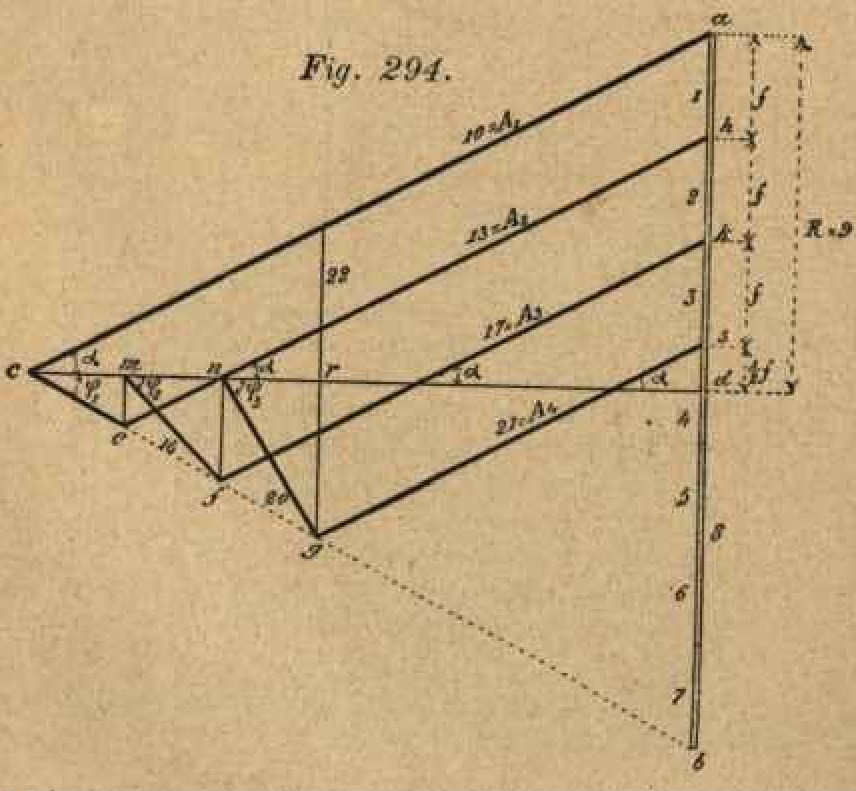


Fig. 294.



El número de tornapuntas es también $N - 1$ y el de péndolas $N - 2$, contando el pendolón aparte.

De suerte que en las aplicaciones, el número de orden n tendrá por límltes:

Para los tramos de par.........	$n = 1$	y	$n = N$
Para los de tirante............	$n = 1$	y	$n = N - 1$
Para las diversas tornapuntas...	$n = 1$	y	$n = N - 1$
Y para las péndolas...........	$n = 1$	y	$n = N - 2$

El pendolón lo consideraremos como pieza única.

La carga total sobre la armadura entera será evidentemente:

$$P = pdl \frac{1}{\cos \alpha}.$$

El número de fuerzas exteriores, que podemos suponer aplicadas á los nudos distintos de los apoyos, será $2N - 1$. Una cualquiera de ellas, que llamaremos f, tendrá por expresión

$$f = \frac{pdl}{2N} \frac{1}{\cos \alpha}.$$

La carga total que hay que tener en cuenta para el cálculo de las tensiones es

$$\Sigma(f) = \frac{2N - 1}{2N} pdl \frac{1}{\cos \alpha},$$

y por lo tanto, cualquiera de las reacciones en los apoyos que se necesita considerar con tal objeto, tendrá por expresión

$$R = \frac{2N - 1}{4N} pdl \frac{1}{\cos \alpha};$$

puesto que ha de ser

$$2R = \Sigma(f).$$

En el diagrama de fuerzas de la armadura que consideramos, y lo mismo puede decirse para todas las del mismo tipo, se verifica (figura 294):

1.° Que los puntos *c, e, f, g,* etc., están en línea recta.

2.° Que las distancias *cm, mn, nr,* etc., son iguales entre sí, así como las *ce, ef, fg.....,* etc., cuya relación con *dc*, cualquiera de las primeras y con *cb*, cualquiera de las segundas, es la misma que existe entre $ah = hk = ... = f$, y $ab = (2N - 1) f$.

3.° Que los ángulos que forman con *cd* las compresiones *ac, he,* etc., son iguales á α, y los *ecm, fmn, gnr....*, etc., son iguales respectivamente á φ_1, φ_2, φ_3..... etc.

Como estos caracteres son comunes á todos los diagramas de fuerzas de todas las armaduras del mismo tipo á que pertenece la que se considera, es claro que la expresión de la tensión de una pieza cualqniera del orden *n*, será general.

582. Compresiones en el par.—Consideremos las diversas compresiones que experimenta el par en sus tramos sucesivos. Desde luego se observa (figura 294) que tales compresiones se proyectan sobre el eje *ab*, según magnitudes que se diferencian en la cantidad constante $\frac{1}{2} f$; y puesto que del triángulo rectángulo *adc* se deduce que

$$A_1 \operatorname{sen} \alpha = R,$$

resultará inmediatamente

$$A_2 \operatorname{sen} \alpha = R - \frac{1}{2} f;$$

$$A_3 \operatorname{sen} \alpha = R - \frac{2}{2} f;$$

$$A_4 \operatorname{sen} \alpha = R - \frac{3}{2} f; \qquad \text{etc.,}$$

y en general

$$A_n \operatorname{sen} \alpha = R - \frac{n-1}{2} f.$$

Sustituyendo los valores de R y f, y despejando A_n, tendremos

$$A_n = \frac{2N - n}{4N} pdl \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}, \qquad (1)$$

expresión general de la compresión que experimenta un tramo cualquiera del par, definido por el número de orden n que le corresponde, entre los N tramos sucesivos.

583. Extensiones en el tirante.—Como se ve en la figura 294, la extensión que sufre un tramo cualquiera del tirante es precisamente la proyección sobre el eje cd, de la compresión del tramo de par del mismo orden.

También se verifica que las extensiones sucesivas en el tirante se diferencian en la cantidad constante

$$cm = mn = \ldots\ldots = \frac{cd}{2N - 1}.$$

Utilizando la primera propiedad, tendremos, desde luego,

$$B_n = A_n \cos\alpha,$$

y poniendo en vez de A_n la expresión (1) antes encontrada, será:

$$B_n = \frac{2N - n}{4N} pdl \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (2)$$

584. Extensión de las péndolas.—Las extensiones de las péndolas sucesivas, como se observa en el diagrama de fuerzas, se diferencian en la cantidad constante $\frac{1}{2}f$; y como la de la primera es también $\frac{1}{2}f$, y van creciendo, la del orden n tendrá por expresión

$$C_n = \frac{n}{2} f,$$

ó bien, reemplazazando f por su exprexión conocida,

$$C_n = \frac{n}{4N} pdl \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (3).$$

585. Compresión de las tornapuntas.—Puede verse en el diagrama que la compresión que experimenta una tornapunta cualquiera es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, que tiene por cateto paralelo al eje *ab* la extensión de la péndola del mismo orden, y por ángulo opuesto á este cateto el que forma la tornapunta con el tirante; luego podremos escribir que

$$D_n = \frac{C_n}{\operatorname{sen}\varphi_n}$$

ó bien

$$D_n = \frac{n}{4N} pdl \frac{1}{\cos\alpha} \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi_n} \qquad (4).$$

586. Extensión del pendolón.—Del diagrama se deduce que la extensión del pendolón es igual á

$$R - \frac{1}{2} f = ad - ds\,,$$

ó también que es doble de la proyección paralela al eje *ab*, de la compresión de la última tornapunta, de orden N — 1.

De cualquier modo se obtiene

$$E = \frac{2(N-1)}{4N} pdl \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (5).$$

Si representamos por una letra cada una de las funciones trigonométricas que figuran en las expresiones anteriores, haciendo

$$\frac{1}{\text{sen}} = K\,, \quad \frac{1}{\cos} = R\,, \quad \frac{1}{\text{sen}\cos} = S\,,$$

aquellas podrán escribirse en la forma que se indica en el siguiente cuadro:

PIEZAS	TENSIONES		LÍMITES DE n
	NATURALEZA.	FÓRMULA.	
Pares.	Compresión.	(1) $A_n = \frac{2N - n}{4N} pdlS_\alpha$. . .	1 y N
Tirante	Extensión . .	(2) $B_n = \frac{2N - n}{4N} pdlK_\alpha$. . .	1 y N — 1
Péndolas . . .	Extensión . .	(3) $C_n = \frac{n}{4N} pdlR_\alpha$. . .	1 y N — 2
Tornapuntas.	Compresión.	(4) $D_n = \frac{n}{4N} pdlR_\alpha K_\varphi$	1 y N — 1
Pendolón. . .	Extensión . .	(5) $E = \frac{2(N - 1)}{4N} pdlR_\alpha$. . .	

Disponiendo de una tabla, en que al lado de los diversos valores angulares figuren las correspondientes de K, R y S, la aplicación de las fórmulas precedentes es sumamente sencilla.

Las expresiones particulares que conciernen á un caso cualquiera se obtienen dando á N el valor que corresponda. Así, por ejemplo, en el caso de la figura es N = 4, y resultará:

Compresiones en el par. . . . .

$$\begin{cases} 10 = A_1 = \frac{7}{16} pdlS_\alpha \\ 13 = A_2 = \frac{6}{16} pdlS_\alpha \\ 17 = A_3 = \frac{5}{16} pdlS_\alpha \\ 21 = A_4 = \frac{4}{16} pdlS_\alpha \end{cases}$$

Extensiones en el tirante . . . .

$$\begin{cases} 11 = B_1 = \frac{7}{16} pdlK_\alpha \\ 15 = B_2 = \frac{6}{16} pdlK_\alpha \\ 19 = B_3 = \frac{5}{16} pdlK_\alpha \end{cases}$$

Extensiones de las péndolas........

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{14} = C_1 = \frac{1}{16} pdlR_\alpha \\ \mathbf{18} = C_2 = \frac{2}{16} pdlR_\alpha \end{array}\right.$$

Compresiones de las tornapuntas......

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{12} = D_1 = \frac{1}{16} pdlR_\alpha K_{\varphi_1} \\ \mathbf{16} = D_2 = \frac{2}{16} pdlR_\alpha K_{\varphi_2} \\ \mathbf{20} = D_3 = \frac{3}{16} pdlR_\alpha K_{\varphi_3} \end{array}\right.$$

Extensión del pendolón...........

$$\mathbf{22} = E = \frac{6}{16} pdlR_\alpha.$$

De modo análogo puede hacerse el estudio para otros tipos de armaduras, partiendo siempre de los caracteres generales del diagrama respectivo de fuerzas.

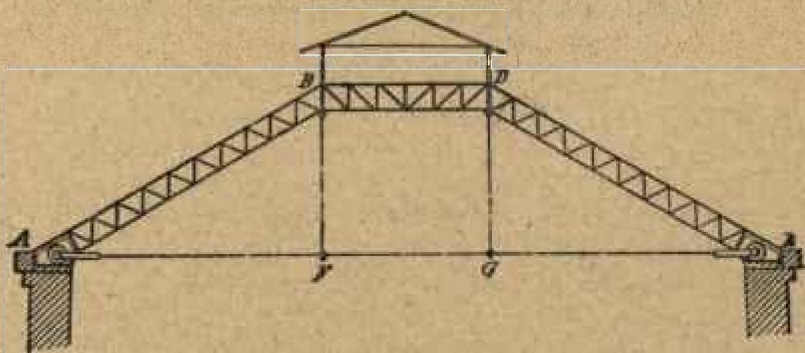
En la obra del ingeniero M. L. Durand, titulada *Calcul inmediat des fermes des charpente en fer et en bois,* Saint-Etienne, 1896, se encontrarán las fórmulas correspondientes á numerosos casos particulares de tipos diversos de armaduras, y al final la tabla de constantes, que, como hemos dicho, facilita mucho los cálculos.

Teniendo en cuenta el objeto de la referida obra, el autor ha tenido á bien no dar á conocer las fórmulas generales, de las que deben deducirse inmediatamente las particûlares á un caso cualquiera; pero se comprende lo fácil que es obtener las segundas disponiendo de las primeras, como hemos visto en el caso que hemos estudiado.

587. Armadura Oppermann.—Se compone esta armadura (figura 295) de un cordón superior poligonal ABDE, constituído por una viga de alma calada y además de un tirante horizontal AE, pues las péndolas BF y DG no son piezas necesarias, y sólo tienen por objeto evitar el pandeo del tirante, que de otra suerte sería muy visible, teniendo en cuenta la importancia de la luz salvada.

Los tramos inclinados del cordón superior, AB y DE, des-

Fig. 295.



empeñan las funciones de pares, y sobre ellos se apoyan las diferentes correas, no representadas en la figura.

Las montantes que parten de B y D mantienen el lucernario que dicha figura indica, de suerte que el tramo central no soporta ninguna carga directamente aplicada más que su propio peso.

Veamos las condiciones en que trabajan los diversos elementos de esta armadura.

Si cada uno de los pares AB y DE está dividido en N tramos iguales por N — 1 correas intermedias, y llamamos p á la carga por metro cuadrado de vertiente, d á la distancia entre formas y L á la longitud AB = DE, la carga f transmitida por cada correa tendrá por expresión

$$f = \frac{pdL}{N};$$

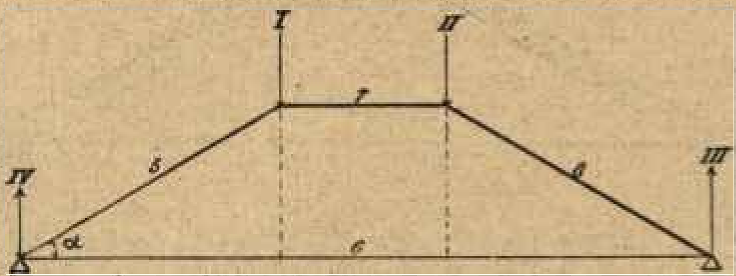
por tanto, las N — 1 correas transmitirán una carga total

$$\Sigma(f) = \frac{N-1}{N} pdL,$$

sin contar, por supuesto, con la que la solera transmite directamente al apoyo respectivo, que vale $\frac{1}{2} f$, y queda anulada como sabemos, por una fracción de igual valor, de la reacción efectiva.

Además, tanto en B como en D gravita una carga igual á la

Fig. 296.



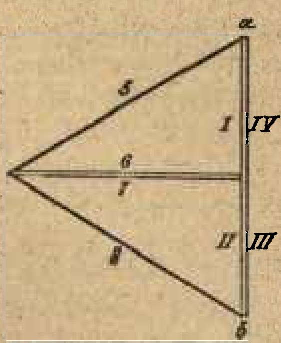
mitad del peso del lucernario. Si este peso lo representamos por P_1, la carga total sobre la armadura entera será

$$F = 2\Sigma(f) + P_1$$

y la que solicita á la semiarmadura será

$$\frac{1}{2} F = \frac{N-1}{N} pdL + \frac{1}{2} P_1.$$

Fig. 297.



Si suponemos reducida la armadura á sus ejes (figura 296) las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas á los nudos simétricos B y D tendrán por expresión

$$I = II = \frac{1}{2} \frac{N-1}{N} pdL + \frac{1}{2} P_1.$$

Claro es que las reacciones verticales **III** y **IV** que hay que considerar para construir el diagrama de fuerzas serán iguales á **I** = **II**.

Como el contorno de esta armadura constituye uno de los polígonos funiculares correspondientes á las fuerzas exteriores **I** y **II**, el diagrama se construirá con toda facilidad y será el que indica la figura 297.

Midiendo con la escala de fuerzas sus diversas líneas se tendrá el valor de la compresión de los pares, la del puente y la extensión del tirante, pues la tensión de las péndolas es nula.

También pueden calcularse tales tensiones mediante expresiones muy sencillas que se deducen del expresado diagrama.

En efecto, si llamamos α al ángulo que forman los pares con el tirante horizontal, P á la compresión de los pares, Q á la del puente y T á la extensión del tirante, tendremos evidentemente

$$P = \frac{\mathbf{IV}}{\operatorname{sen} \alpha}; \qquad Q = T = P \cos \alpha = \frac{\mathbf{IV}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

El par AB es una viga compuesta de alma calada, que podemos suponer apoyada por sus extremos y formando el ángulo α con el horizonte. Las cabezas han de poder resistir, no sólo á la fuerza de compresión P, sino al momento máximo de flexión M que originan las cargas que transmiten las correas intermedias; así como el alma ha de poder resistir por sí sola al esfuerzo cortante máximo que obra perpendicularmente al eje de la pieza.

Las componentes normales de aquellas cargas son las que provocan la flexión. Cada una de ellas vale

$$p_1 = \frac{1}{N} \, pd\mathrm{L} \cos \alpha.$$

La resultante aplicada al punto medio será:

$$\Sigma(p_1) = \frac{N - 1}{N} \, pd\mathrm{L} \cos \alpha,$$

y las reacciones normales en los apoyos A y B serán iguales entre sí y tendrán por expresión

$$R = \frac{1}{2} \frac{N-1}{N} pdL \cos\alpha .$$

Para hallar la expresión general de M, observaremos que la resultante de las $\frac{N-2}{2}$ cargas intermedias que obran en la mitad del par, dan un momento, con respecto al punto medio del mismo, que vale

$$\frac{N-2}{2} p_1 \times \frac{1}{4} L = \frac{1}{8} (N-2) p_1 L,$$

y como el momento de la reacción R, con respecto al mismo punto, es $R \times \frac{1}{2} L$, tendremos

$$M = \frac{1}{2} RL - \frac{1}{8} (N-2) p_1 L,$$

ó sustituyendo los valores de R y p_1,

$$M = \frac{1}{4} \frac{N-1}{N} pdL^2 \cos\alpha - \frac{1}{8} \frac{N-2}{N} pdL^2 \cos\alpha,$$

expresión que se reduce á

$$M = \frac{1}{8} pdL^2 \cos\alpha. \qquad (1)$$

La ecuación de resistencia para el cálculo de las cabezas de los pares, que, como hemos visto, están sometidas á flexión compuesta, será, por tanto, la siguiente:

$$K = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{Z},$$

en la cual los valores de P y M son, según se ha dicho,

$$P = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{N-1}{N} pdL + P_1\right)}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad M = \frac{1}{8} pdL^2 \cos\alpha .$$

El esfuerzo cortante máximo es igual á R; pero como en B obra además $\frac{1}{2}P_1$, puede tenerse en cuenta su suma $R + \frac{1}{2}P_1$ para el cálculo del alma.

Fig. 298.

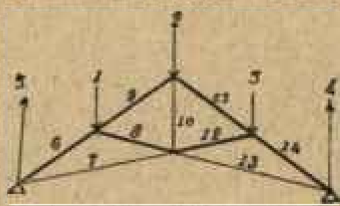


Fig. 299.

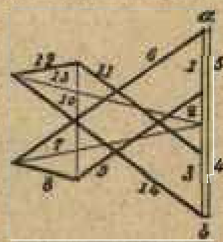
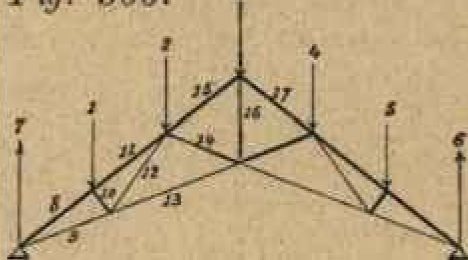


Fig. 300.

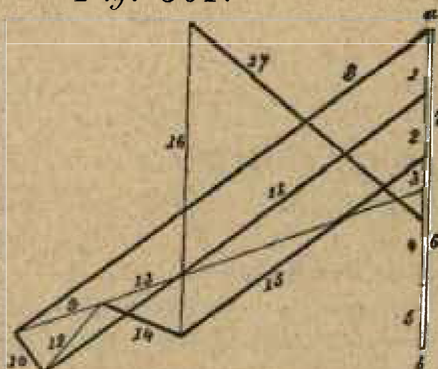


El cálculo de las cabezas del puente no ofrece ninguna dificultad, y puede admitirse que por sí solas han de resistir á la compresión Q, teniendo en cuenta la influencia de la flexión lateral.

En cuanto al tirante sometido á la extensión $T = Q$, el área de su sección recta será

$$\omega = \frac{T}{K}.$$

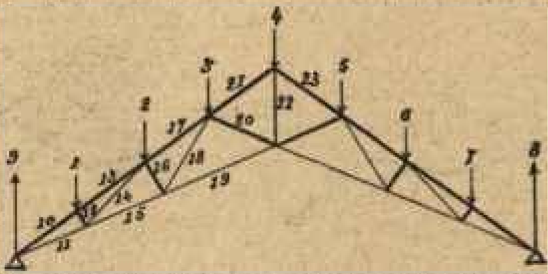
Fig. 301.



588. Otros tipos de armaduras. — Mencionaremos, para terminar, solamente dos tipos: el suizo y el alemán.

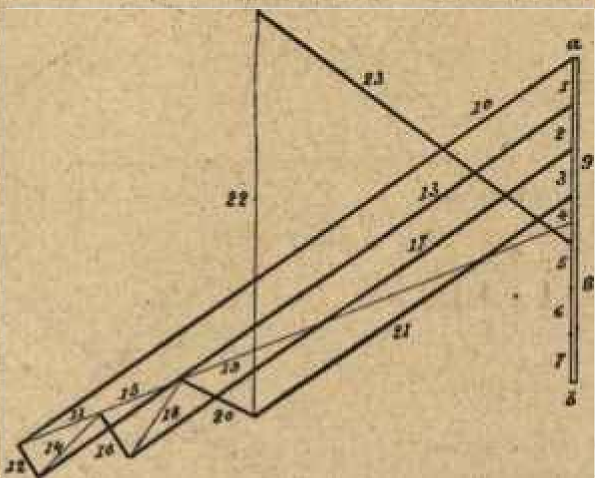
Al primero corresponden las armaduras representadas por las figuras 298, 300 y 302. Al segundo se refieren las 304, 306 y 308.

Fig. 302.



En todos ellos, la construcción del diagrama de fuerzas no presenta ninguna dificultad, como puede comprobarse inspec-

Fig. 303.



cionando atentamente las figuras 299, 301, 303, 305, 307 y 309.

Otros muchos tipos de armaduras pudieran presentarse; pero su estudio se haría de modo análogo que para las que hemos examinado.

En cuanto á las armaduras sin tirante en forma de arco por

Fig. 304.

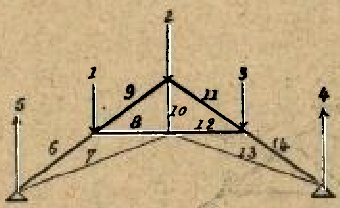


Fig. 305.

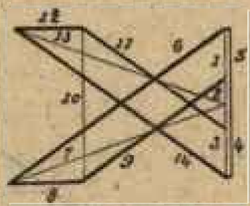
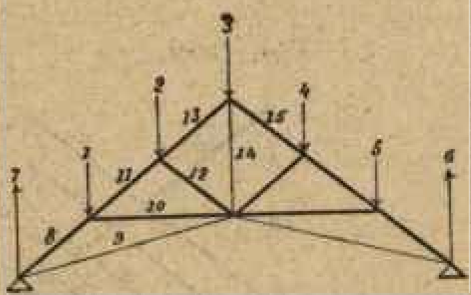
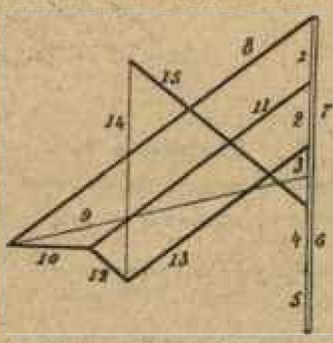


Fig. 306.



el intrados y con aplicación á luces extraordinarias, nada diremos, porque en realidad no nos interesan. Su estudio completo exige grandes desarrollos, cuya síntesis puede consultarse en las ya citadas obras del Ingeniero Sr. Marvá, de M. Planat y en otras varias, que con la debida extensión se ocupan en tan delicada materia.

Fig. 307.



589. Problemas sobre armaduras. — Resolveremos por vía de ejemplo los siguientes:

Fig. 308.

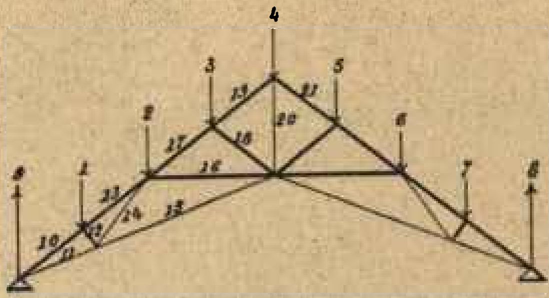
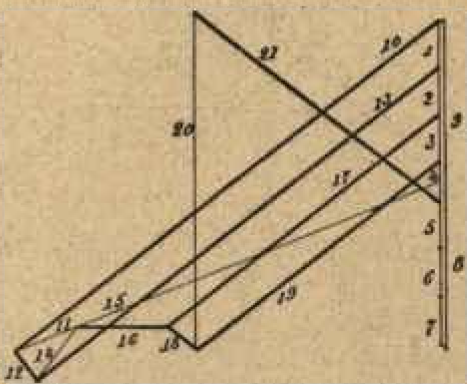


Fig. 309.



590. Problema 1.º—*Armadura de madera, de pares, tirante, tornapuntas y pendolón* (figura 310).—Calcular la escuadría de sus diferentes piezas con los siguientes datos:

Luz de la armadura......	$l = 10^{m}$	$= 1000$ cm.
Flecha.................	$f = 3^{m}$	$= 300$ cm.
Distancia entre formas...	$d = 3^{m},50$.	

El tejado será de teja ordinaria ó lomuda y las correas insistirán únicamente sobre los nudos para que los pares no trabajen por flexión.

El ángulo α que forman los pares con el horizonte tiene por tangente trigonométrica

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2f}{l} = \frac{2 \times 3}{10} = 0{,}6,$$

pudiendo, por tanto, admitir sin gran error que

$$\alpha = 31^{\circ} \left| \begin{array}{l} \cos\alpha = 0{,}857 \\ \operatorname{sen}\alpha = 0{,}515 \end{array} \right.$$

Suponiendo la armadura reducida á sus ejes, y que el extremo superior de la tornapunta divide á cada par en dos partes iguales, la longitud de los pares será doble de la distancia d_1, entre correas, y así tendremos

$$2d_1 = \frac{\frac{1}{2}l}{\cos\alpha} = \frac{5}{0{,}857} = 5^{\text{m}},84, \text{ próximamente por exceso,}$$

$$\text{y} \qquad d_1 = 2^{\text{m}},92 = 292 \text{ cm.}$$

La distancia entre cabios la fijaremos en $\frac{d}{8}$, y así será

$$d_2 = \frac{350}{8} = 43{,}75 \text{ cm.}$$

Esta distancia suele variar entre 30 y 60 centímetros.

591. Enlatado.—La carga total sobre un metro cuadrado de enlatado, suponiendo que la capa de nieve no ha de exceder de $0^{\text{m}},20$, y con arreglo á los datos y fórmulas que se han establecido, es la siguiente:

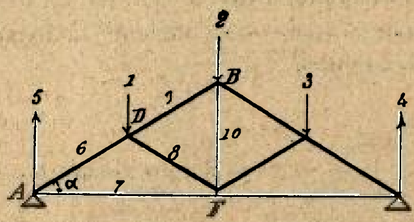
Peso del tejado por m² de vertiente........	120,00 kg.
Peso debido á la nieve, siendo $h = 0^{\text{m}},20$...	21,42 »
Presión vertical del viento..................	56,75 »
Suma........	198,17 kg.

Esta carga la hemos representado por p_3. Aceptaremos en números redondos

$$p_3 = 200 \text{ kg.}$$

Si acudimos al cuadro de la página 584 veremos que la tabla de ripia, colocada á $0^m,75$ entre apoyos puede resistir una carga normal uniformemente repartida de 200 kilogramos por metro cuadrado; por consiguiente aceptaremos para enlatado la ripia, cuya resistencia en este caso es mayor que la necesaria, puesto que la distancia entre apoyos (cabios) no llega á $0^m,44$.

Fig. 310.



El peso por metro cuadrado de enlatado es insignificante; pero si queremos tenerlo en cuenta, recordaremos que el espesor de dicha tabla es $0^m,013$; y como podemos atribuir al metro cúbico de madera un peso de 600 kilogramos próximamente, tendremos que la carga por metro cuadrado que tenemos que añadir á p_3 para el cálculo de los cabios, es

$$0{,}013 \times 600 = 7{,}8 \text{ kg.}$$

En números redondos aceptaremos, para calcular los cabios, que

$$p_2 = 208 \text{ kg.}$$

592. Cabios.—La superficie de carga para cada tramo de cabio es, por exceso:

$$S_2 = d_2\, d_1 = 2^m{,}92 \times 0^m{,}44 = 1^{m^2}{,}2848.$$

La carga total P_2 uniformemente repartida sobre el tramo de cabio valdrá

$$P_2 = S_2 p_2 = 1{,}2848 \times 208 = 267{,}24 \text{ kg.}$$

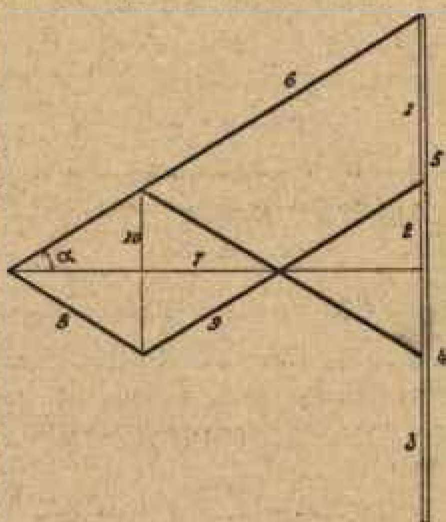
ó en números redondos

$$P_2 = 268 \text{ kg.}$$

La componente normal que produce la flexión es

$$P_2 \cos \alpha = 268 \times 0{,}857 = 229{,}68 \text{ kg.}$$

Fig. 311.



La componente tangencial que produce compresión, es

$$P_2 \operatorname{sen} \alpha = 268 \times 0{,}515 = 138{,}02 \text{ kg.}$$

Aceptaremos en números redondos, para el cálculo

$$P_2 \cos \alpha = 230 \text{ kg.} \qquad P_2 \operatorname{sen} \alpha = 138 \text{ kg.}$$

La ecuación de resistencia es, como sabemos

$$K = \frac{P_2 \operatorname{sen} \alpha}{\omega} + \frac{M}{Z} \qquad (1)$$

El valor de M es

$$M = \frac{1}{8} P_2 \cos \alpha \, d_1 = \frac{1}{8} \times 230 \times 292 = 8395 \text{ kg.-cm.}$$

Si provisionalmente aceptamos la relación $\frac{b}{h} = \frac{3}{4}$ entre los lados de la escuadría de los cabios, tendremos

$$\omega = bh = \frac{3}{4} h^2, \qquad Z = \frac{1}{6} bh^2 = \frac{1}{8} h^3$$

y así la ecuación (1) tomará la siguiente forma, haciendo $K = 60$;

$$60 = \frac{138}{\frac{3}{4} h^2} + \frac{8395}{\frac{1}{8} h^3}$$

ó

$$h^3 - 3{,}066\, h - 1119{,}33 = 0.$$

La raíz real positiva de esta ecuación está comprendida entre 10,4 y 10,5. Podemos aceptar, por tanto,

$$h = 10{,}5 \text{ cm.}$$

en cuyo caso será $b = \frac{3}{4} h = 7{,}9$ cm. próximamente.

Aserrando en cuatro partes una vigueta del marco de Guadarrama, pueden obtenerse piezas del largo necesario y con una escuadría de $7{,}3 \times 10{,}8$ cm. á la cual corresponden para ω y Z los siguientes valores:

$$\omega = 78{,}8 \text{ cm.}^2, \qquad Z = 141{,}9.$$

Para estas piezas resultará el siguiente coeficiente de trabajo:

$$K = \frac{138}{78{,}8} + \frac{8395}{141{,}9} = 60{,}9 \text{ kg.}$$

que, como se ve, es perfectamente aceptable.

593. Correas.—La superficie de carga para una correa, es

$$S_1 = dd_1 = 3{,}50 \times 2{,}92 = 10^{m^2}{,}22.$$

Al peso $p_2\ S_1 = 208 \times 10{,}22 = 2125{,}76$ kilogramos, hay que añadir ahora el de los ocho tramos de cabio que gravitan sobre dicha superficie. Como cada uno tiene $2^m{,}92$ de largo y su escuadría es $0^m{,}073 \times 0^m{,}108$, representan el siguiente peso total:

$$8 \times 2{,}92 \times 0{,}073 \times 0{,}108 \times 600 = 110{,}5 \text{ kg.}$$

De suerte que la carga total uniformemente repartida que podemos suponer aplicada á una correa, es

$$P_1 = 2125{,}76 + 110{,}5 = 2236{,}26 \text{ kg.}$$

ó en números redondos

$$P_1 = 2237 \text{ kg.}$$

Si aceptamos provisionalmente la relación $b = \frac{3}{4}\ h$ entre los lados de la escuadría, tendremos (v. la pág. 630)

$$Z' = \frac{1}{6}\ bh^2 = \frac{1}{8}\ h^3, \qquad Z'' = \frac{1}{6}\ hb^2 = \frac{3}{32}\ h^3.$$

Veamos qué diferencias se encuentran, aplicando los tres métodos de cálculo, indicados en el n.º **558**; siendo $K = 60$:

1.º La ecuación de resistencia es

$$Z = \frac{1}{8}\ \frac{P_1\ d \cos \alpha}{K} = \frac{1}{8} \times \frac{2237 \times 350 \times 0{,}857}{60} = 1397{,}892 = \frac{1}{8}\ h^3;$$

de donde

$$h = \sqrt[3]{11183{,}136} = 22{,}4 \text{ cm. próximamente,}$$

y

$$b = \frac{3}{4} \times 22{,}4 = 16{,}8 \text{ cm.}$$

2.º La ecuación de resistencia es

$$K = \frac{1}{8}\ P_1\ d \left(\frac{\cos \alpha}{Z'} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{Z''}\right),$$

la cual se convierte en

$$60 = \frac{1}{8} \times 2237 \times 350 \left(\frac{0,857}{\frac{1}{8} h^3} + \frac{0,515}{\frac{3}{32} h^3} \right);$$

de donde

$$h = \sqrt[3]{\frac{362584,14}{18}} = 27,3 \text{ cm. próximamente.}$$

3.° La ecuación de resistencia, en este tercer método, es

$$Z = \frac{1}{8} \frac{P_1 d}{K} = \frac{1}{8} \times \frac{2237 \times 350}{60} = 1631,15$$

y como

$$Z = \frac{1}{8} h^3$$

resultará

$$h = \sqrt[3]{1631,15 \times 8} = \sqrt[3]{13049,2} = 23,6 \text{ cm. próximamente;}$$

de donde

$$b = \frac{3}{4} \times 23,6 = 17,7 \text{ cm.}$$

Desechando la solución que da el 2.° método, por tratarse de cabios de una sola pieza que han de ir perfectamente sujetos á la cumbrera y solera, vemos que entre el 1.° y 3.° métodos la diferencia no es importante; pero es claro que suprimida la flexión paralela á la vertiente, podrá aceptarse sin inconveniente el valor de h dado por el primer método.

La pieza del marco de Guadarrama, cuya escuadría se aproxima más á la calculada, es la sesma, para la cual se tiene $Z = 1336,4$.

Adoptándola para correas, resultaría el siguiente coeficiente de trabajo:

$$K = \frac{P_1 d \cos\alpha}{8Z} = \frac{2237 \times 350 \times 0,857}{8 \times 1336,4} = 62,7 \text{ kg. por cm.,}$$

resultado admisible por diferir muy poco de $K = 60$, que habíamos fijado como coeficiente de seguridad.

594. Armadura propiamente dicha.—La carga que podemos suponer aplicada á cada nudo, se compone de la que actúa sobre una correa, mas el peso de ésta, que vale

$$3{,}50 \times 0{,}157 \times 0{,}226 \times 600 = 74{,}5 \text{ kg.},$$

y como la que sustenta la correa es $P_1 = 2237$ kilogramos, aquella carga valdrá

$$2237 + 74{,}5 = 2311{,}5 \text{ kg.}$$

Habiendo calculado el valor de P_1 por exceso, como es fácil comprobar, aceptaremos en números redondos 2300 kilogramos ([a]). Este peso es el que, aplicado á cada nudo, representa la fracción $\frac{P}{2N}$ de la carga total P sobre la armadura entera, siendo N el número de tramos iguales de cada par; y como en el presente caso es $N = 2$, el valor de P en función del cual se calculan las tensiones de las diferentes piezas, será

$$P = 2300 \times 4 = 9200 \text{ kg.}$$

Las fuerzas exteriores en equilibrio para el trazado del diagrama de fuerzas, serán, por tanto,

$$\mathbf{1} = \mathbf{2} = \mathbf{3} = \frac{1}{4} P = \frac{1}{4} \times 9200 = 2300 \text{ kg.}$$

$$\mathbf{4} = \mathbf{5} = \frac{3}{8} P = \frac{3}{8} \times 9200 = 3450 \text{ »}$$

El diagrama de fuerzas es el que indica la figura 311, habiendo aceptado la escala de *un centímetro por metro* para las longitudes, y la de *un milímetro por cien kilogramos* para la re-

(a) Si se hiciera el cálculo más riguroso, se encontraría próximamente unos 2295,75 kilogramos, en lugar de los 2300 que aceptamos.

presentación lineal de las fuerzas. Fácil es, por tanto, deducir el valor de las tensiones de las diferentes piezas; pero si utilizamos las fórmulas establecidas en la pág. 643 para este tipo de armadura, tendremos (véanse figuras 310 y 311):

$$\text{Compresiones...}\left\{\begin{array}{lll} \text{Par ...... AD..} & \mathbf{6} = \frac{3}{8}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{3}{8}\times\frac{9200}{0,515} & = 6699 \text{ kg.} \\ \text{Par .... DB..} & \mathbf{9} = \frac{1}{4}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{4}\times\frac{9200}{0,515} & = 4466 \text{ »} \\ \text{Tornapunta DF..} & \mathbf{8} = \frac{1}{8}\,\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{8}\times\frac{9200}{0,515} & = 2233 \text{ »} \end{array}\right.$$

$$\text{Extensiones...}\left\{\begin{array}{lll} \text{Tirante ... AF..} & \mathbf{7} = \frac{3}{8}\,\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{8}\times\frac{9200}{0,6} & = 5750 \text{ »} \\ \text{Pendolón.. BF..} & \mathbf{10} = \frac{1}{4}\,P = \frac{1}{4}\times 9200 & = 2300 \text{ »} \end{array}\right.$$

595. Pares.—Los pares han de tener una sección recta capaz de resistir á la compresión máxima de 6699 kilogramos, teniendo en cuenta la influencia de la flexión lateral. Supondremos para esto que el tramo inferior se halla en el segundo caso del núm. **302**, es decir, que tiene una base plana y la otra redondeada, y así la carga que es necesario considerar es, como sabemos, los $\frac{7}{4}$ de la compresión efectiva á que ha de resistir, de modo que el valor de dicha carga será igual á

$$\frac{7}{4} \times 6699 = 11723,25 \text{ kg.}$$

Si provisionalmente aceptamos que la relación entre el largo de la pieza y la menor dimensión de su escuadría es igual á 20, en el cuadro de la página 272, fórmula (α), encontraremos que el número por quien hay que multiplicar el coeficiente de seguridad $K = 60$ para ejemplares cortos, es $m = 0,607$; por consiguiente, el coeficiente de trabajo por compresión que debe aceptarse para los pares, será igual á $0,607 \times 60 = 36,42$ kilogramos por centímetro cuadrado.

La sección necesaria sería, por tanto,

$$\omega = \frac{11723,25}{36,42} = 321,89 \text{ cm}^2.$$

El área de la sección transversal de la sesma del marco de Guadarrama, es de 354,8 centímetros cuadrados. Veamos si puede aceptarse, suponiendo que la ensambladura con la tornapunta reduzca dicha sección á 307,7 centímetros cuadrados.

La relación entre el largo de la pieza (292 centímetros) y la menor dimensión de la escuadría (15,7 centímetros) vale 18,6; así es que un valor más exacto de m es, como fácilmente puede calcularse, $m = 0,639$. El coeficiente de trabajo admisible será $K = 0,639 \times 60 = 38,34$ kilogramos por centímetro cuadrado, y por consiguiente, la sección necesaria será

$$\omega = \frac{11723,25}{38,34} = 305,9 \text{ cm}^2.$$

Puede, por tanto, aceptarse para pares la sesma del marco de Guadarrama.

596. Tornapunta.—Considerándola como pieza de bases redondeadas, la compresión para el cálculo será

$$\frac{7}{2} \times 2233 = 7815,5 \text{ kg}.$$

Si admitimos provisionalmente que $\frac{L}{B} = 20$, será $m = 0,607$ y $K' = 0,607 \times 60 = 36,42$, de donde

$$\omega = \frac{7815,5}{36,42} = 214,6 \text{ cm}^2. \text{ próximamente.}$$

El área de la sección del madero ó medio madero de á 6, es de 241,8 centímetros cuadrados, siendo su escuadría igual á $13,9 \times 17,4$ centímetros, que puede aceptarse, como vemos, aun teniendo en cuenta el verdadero valor de la relación $\frac{L}{B}$ que ahora es $\frac{292}{13,9} = 21$.

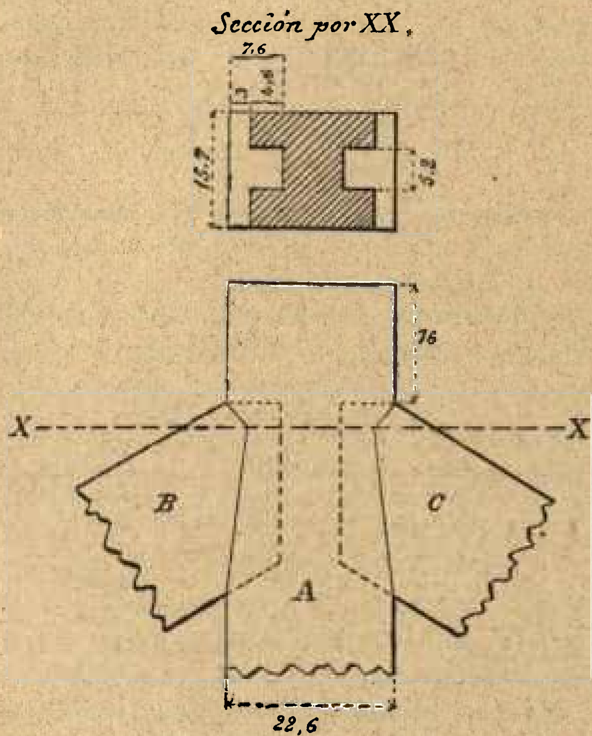
597. Pendolón.—La sección necesaria de esta pieza es

$$\omega = \frac{2300}{60} = 38{,}33 \text{ cm}^2.,$$

pero como es necesario que la escuadría sea tal, que la unión con los pares se haga en buenas condiciones, elegiremos la sesma.

La figura 312 indica la ensambladura correspondiente y hace

Fig. 312.



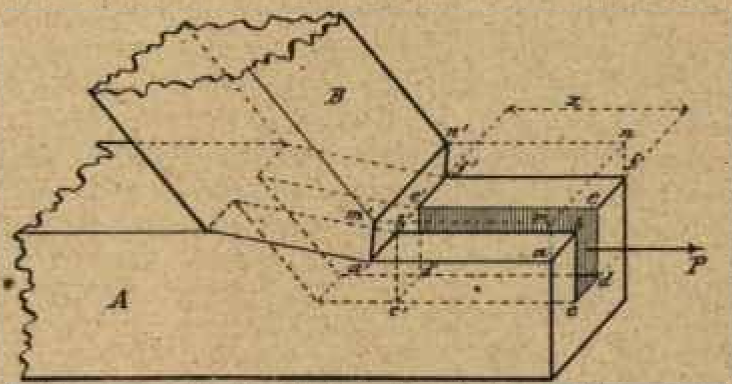
ver que, penetrando la espiga de los pares en el pendolón 7,6 centímetros, todavía queda una sección útil ó resistente de unos 122,38 centímetros cuadrados, mucho mayor que la necesaria.

Pero la fuerza de compresión que trasmite el tramo superior de par, engendra una componente vertical que vale

$$\mathbf{9} \times \operatorname{sen} \alpha = 4466 \times 0{,}515 = 2300 \text{ kg.}$$

Esta fuerza tiende á separar por desgarramiento el prisma comprendido entre el extremo superior del pendolón y el origen de la ensambladura con el par (véase figura 313).

Fig. 313.



La superficie resistente será, como la figura indica

$$\omega = (af + 2\,bc)\,x = (15{,}7 + 2 \times 4{,}6)\,x = 24{,}9\,x \text{ cm}^2.$$

Si aceptamos para coeficiente de seguridad al desgarramiento K = 6 kilogramos por centímetro cuadrado, la ecuación de resistencia será

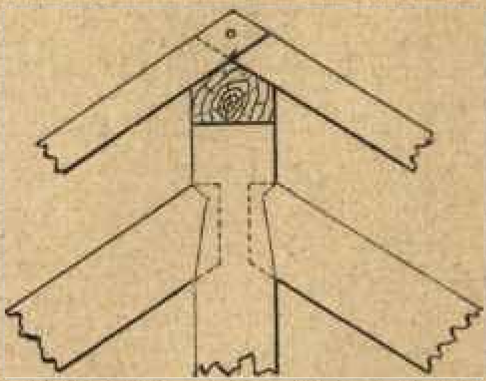
$$2300 = 6 \times 24{,}9\,x$$

de donde

$$x = \frac{2300}{149{,}4} = 15{,}4 \text{ cm. próximamente.}$$

Ahora bien, como la distancia entre el origen de la ensambladura y el extremo superior del pendolón es de unos 16 centímetros (figuras 312 y 314), resulta que, bajo el concepto de la imposibilidad del desgarramiento, el pendolón aceptado es suficientemente resistente.

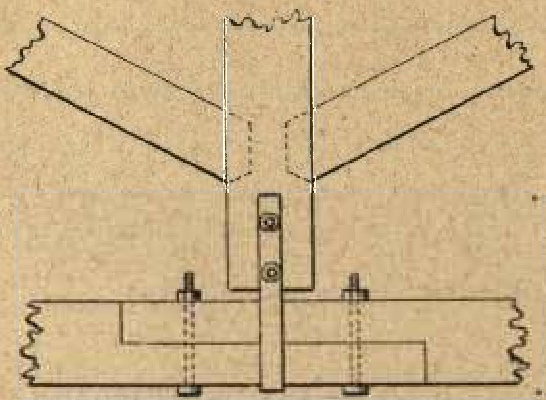
Fig. 314.



Se supone que la espiga del par ocupa el tercio medio de la cara del pendolón.

Del propio modo veríamos que para que esta pieza resista á la fuerza de desgarramiento engendrada por la componente vertical de la compresión que la tornapunta transmite, es necesario que la distancia entre el extremo inferior del pendolón y el origen de su

Fig. 315.



ensambladura con las tornapuntas sea igual ó mayor que unos 18 centímetros, disponiendo dicha ensambladura como indica la figura 315.

598. Tirante.—La sección resistente del tirante, parece que ha de ser

$$\omega = \frac{5750}{60} = 95,83 \text{ cm}^2.;$$

pero como hay que atender á la resistencia á la extensión en las secciones más débiles; á la resistencia al desgarramiento en el empalme central y en las uniones extremas con los pares, y como conviene, además, que las caras laterales de los pares, tirante y pendolón queden á los haces, examinaremos si puede aceptarse la escuadría de la sesma.

Veamos cuáles son las condiciones de resistencia del empalme central y de las ensambladuras del tirante con los pares.

599. Empalme central.—Supongamos que se dispone á media madera, como indica la figura 315, consolidándolo con cuatro pernos ó pasadores de hierro, cuyas tuercas se apretarán fuertemente.

Si el diámetro de la sección transversal de los pernos es de 2 centímetros, la sección resistente será de

$$4 \times 3,14 = 12,56 \text{ cm}^2.,$$

admitiendo que el esfuerzo cortante de 5750 kilogramos se distribuye por igual entre todos ellos.

El coeficiente de trabajo resultará, por tanto, igual á

$$k = \frac{5750}{12,56} = 457,8 \text{ kg. por cm}^2.,$$

valor aceptable; pues sabemos que k puede variar entre 400 y 800 kgs. por centímetro cuadrado.

Reducidos los extremos que han de empalmarse á media madera, á una escuadría de 11,3 × 15,7 centímetros, como indica la figura 316, la sección peligrosa corresponderá al plano que contiene los ejes de los taladros que han de atravesar los pasadores. Por tal región, la sección resistente es

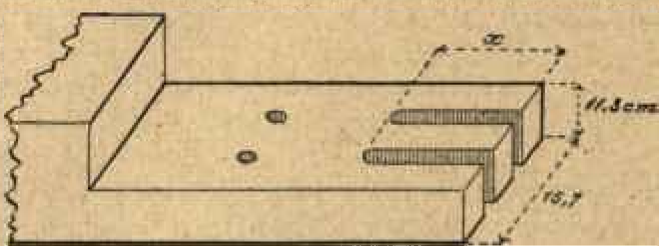
$$\omega = 11,3 \times (15,7 - 2 \times 2) = 132,21 \text{ cm}^2.$$

y el coeficiente de trabajo será, por tanto,

$$K = \frac{5750}{132,21} = 43,49 \text{ kg. por cm}^2.,$$

lo que prueba la sobrada resistencia á la extensión de la sección más débil.

Fig. 316.



Para determinar la distancia x que debe haber entre los pernos más próximos y el extremo libre del empalme, admitiremos, como caso más desfavorable, que los dos pasadores más cercanos á dicho extremo sean los que por sí solos resistan el esfuerzo de 5750 kilogramos, y, por lo tanto, que la superficie resistente al desgarramiento sea únicamente, como la figura 316 indica,

$$\omega = 4 \times 11,3 \times x,$$

en cuyo caso, aceptando $K = 6$, la ecuación de resistencia será

$$5750 = K\omega = 6 \times 4 \times 11,3\, x,$$

de donde

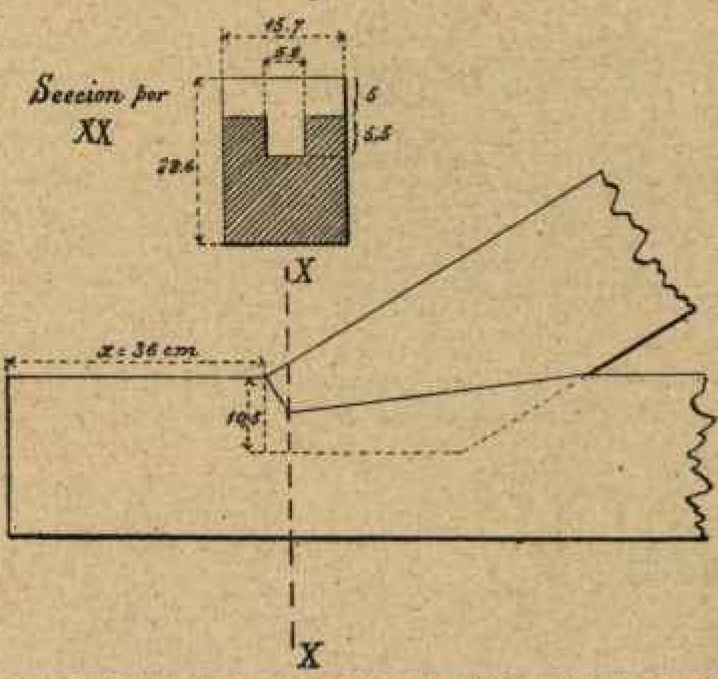
$$x = \frac{5750}{271,2} = 21,2 \text{ cm}.$$

Tal es la distancia mínima que conviene que haya entre el extremo de las piezas empalmadas y los taladros más próximos, así como entre las dos filas de pasadores.

600. Ensambladura del tirante con los pares.—La superficie resistente al desgarramiento, dada la disposición que indica la figura 317, es

$$\omega = (15,7 + 2 \times 5,5)\, x = 26,7\, x.$$

Fig. 317.



La ecuación de resistencia será, haciendo K = 6,

$$5750 = 6 \times 26,7\, x = 160,2\, x$$

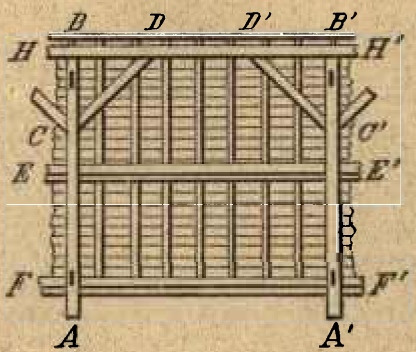
de donde

$$x = \frac{5750}{160,2} = 35,89 \text{ cm.},$$

de donde resulta que la distancia entre los extremos libres del tirante y el origen de su ensambladura con los pares, ha de ser igual ó mayor que 36 centímetros, á fin de asegurar la imposibilidad de la rotura por desgarramiento de la pieza de que se trata.

601. Observación.—La hilera queda reforzada por los jabalcones CD_1 $C'D'$ (figura 318) los cuales aseguran además la indeformabilidad del conjunto en sentido longitudinal. Por este motivo no hay inconveniente en emplear para hilera la escuadría de la sesma, poniendo las piezas de tabla y no de canto, para lograr así que la distancia entre el extremo superior del pendolón y el origen de su ensambladura con los pares sea la mayor posible.

Fig. 318.



602. Problema 2.º *Armadura de hierro, sistema Polonceau.*—Calcular la escuadría de sus diferentes piezas, con los siguientes datos:

Luz de la armadura	$l = 16^{m} = 1600$ cm.
Flecha	$f = 4^{m} = 400$ »
Distancia entre formas ...	$d = 4^{m} = 400$ »

La armadura ha de ser de una biela en cada par.

La cubierta será de teja ordinaria.

Las correas serán de madera de pino, colocadas como se indica en el dibujo correspondiente (figura 319).

El peso del metro cuadrado de teja, colocada, es....	110,00 kg.
El peso de la nieve por m^2 de vertiente, se estima en.	22,36 »
Y la presión vertical del viento por m^2 de ídem en.	45,10 »

Llamando α al ángulo que forma con el horizonte el tirante AE (figura 318) y β el que forma esta pieza con el par, la tangente trigonométrica del ángulo $(\alpha + \beta)$ que forman los pares con el horizonte, será

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2f}{l} = \frac{2 \times 4}{16} = 0{,}5 \; ;$$

de donde

$\alpha + \beta = 26^{\circ}, 34'$, con la aproximación necesaria;

y $\cos(\alpha + \beta) = 0{,}89441$; $\quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 0{,}44724$.

La longitud del par es

$$AB = \frac{\frac{1}{2} l}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{8}{0{,}89441} = 8^{m}{,}94 \text{ próximamente.}$$

La biela divide al par en dos tramos iguales de $4^{m}{,}47$ cada uno; y debiendo haber correas intermedias apoyadas en los puntos medios de dichos tramos, la distancia entre correas será

$$d_1 = \frac{4{,}47}{2} = 2^{m}{,}235 = 223{,}5 \text{ cm.}$$

La distancia entre cabios, teniendo en cuenta el peso relativamente pequeño de la teja, la fijamos en

$$d_1 = 0^{m}{,}50 = 50 \text{ cm.}$$

603. Enlatado.—La carga sobre un metro cuadrado de enlatado es la siguiente

Peso del tejado	110,00 kg.
Id. debido á la nieve.............	22,36 »
Presión vertical del viento..	45,10 »
Suma............	177,46 kg.

En números redondos

$$p_3 = 178 \text{ kg.}$$

El cuadro de la página 584 nos dice que puede aceptarse la tabla de ripia para enlatado.

En el ejemplo anterior, hemos visto que el metro cuadrado de este enlatado pesa unos 7,8 kilogramos; por tanto, para calcular los cabios podemos aceptar una carga por metro cuadrado de vertiente, igual á

$$p_2 = 178 + 7{,}8 = 185{,}8 \text{ kg.}$$

ó en números redondos

$$p_2 = 186 \text{ kg.}$$

604. Cabios.—Los cabios descansan sobre las correas que, como hemos dicho, distan entre sí, $d_1 = 2^m{,}235$; y como la distancia entre cabios es $d_2 = 0^m{,}5$, la superficie de carga para un tramo de cabio será

$$S_2 = d_1\, d_2 = 2{,}235 \times 0{,}5 = 1^{m^2}{,}1175.$$

La carga total P_2, uniformemente repartida sobre la longitud d_1 de cabio será

$$P_2 = S_2 p_2 = 1{,}1175 \times 186 = 207{,}85 \text{ kg.}$$

ó en números redondos

$$P_2 = 208 \text{ kg.}$$

La componente normal que produce la flexión es

$$P_2 \cos(\alpha + \beta) = 208 \times 0{,}89441 = 186 \text{ kg.}$$

La componente tangencial que produce compresión es

$$P_2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 208 \times 0{,}44724 = 93 \text{ kg.}$$

El momento máximo de flexión M, que origina la carga normal $P_2 \cos(\alpha + \beta)$, vale

$$M = \frac{1}{8} P_2 \cos(\alpha + \beta)\, d_1 = \frac{1}{8} \times 186 \times 223{,}3 = 5196{,}375$$

ó bien

$$M = 5196{,}4.$$

Si los cabios han de ser de sección cuadrada, de lado b, el área ω de dicha sección y el módulo Z, tendrán por expresión:

$$\omega = b^2 \qquad \text{y} \qquad Z = \frac{1}{6} b^3.$$

Sustituyendo en la ecuación de resistencia, que es, como sabemos,

$$K = \frac{P_2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\omega} + \frac{M}{Z},$$

se obtiene, haciendo $K = 60$

$$60 = \frac{93}{b^2} + \frac{5196,4}{\frac{1}{6} b^3}$$

ó bien

$$b^3 - 1,55\, b - 519,64 = 0.$$

La raíz real positiva de esta ecuación está comprendida entre 8 y 8,1; pudiendo tomarse $b = 8,1$ con muy poco error.

Aceptaremos, sin embargo,

$$b = 8,5 \text{ cm}.$$

En tal supuesto, como $\omega = 8,5^2 = 72,25$ centímetros cuadrados y $Z = \frac{1}{6} \times 8,5^3 = 102,35$, el coeficiente de trabajo para los cabios resultará:

$$K = \frac{93}{72,25} + \frac{5196,4}{102,35} = 52,06 \text{ kg., próximamente,}$$

en lugar de $K = 60$ que habíamos fijado como límite.

605. Correas.—Para una correa cualquiera, la superficie de carga es

$$S_1 = dd_1 = 4 \times 2,235 = 8^{m^2},94.$$

Sobre esta superficie gravita el peso de los ocho tramos de cabio, que vale

$$8 \times 0{,}085 \times 0{,}085 \times 2{,}235 \times 600 = 77{,}5 \text{ kg.}$$

y además

$$p_2 S_1 = 186 \times 8{,}94 = 1662{,}8 \text{ kg.};$$

por consiguiente, sobre una correa actuará un peso total, que supondremos uniformemente repartido,

$$P_1 = 1662{,}8 + 77{,}5 = 1740{,}3 \text{ kg.},$$

ó en números redondos

$$P_1 = 1740 \text{ kg.}$$

Aceptando provisionalmente la relación $\frac{b}{h} = \frac{3}{4}$, entre los lados de la escuadría de las correas, será $Z = \frac{1}{8} h^3$, y empleando el primer método de cálculo (pág. 630) y sustituyendo en la expresión

$$Z = \frac{1}{8} \cdot \frac{P_1 d \cos(\alpha + \beta)}{K},$$

tendremos

$$\frac{1}{8} h^3 = \frac{1}{8} \times \frac{1740 \times 400 \times 0{,}89441}{60},$$

ó bien

$$h^3 = 290 \times 40 \times 0{,}86441 = 10375{,}156;$$

de donde

$$h = \sqrt[3]{10375{,}156} = 21{,}8 \text{ cm. próximamente},$$

y

$$b = \frac{3}{4} h = \frac{3}{4} \times 21{,}8 = 16{,}35 \text{ cm.}$$

Aceptaremos, sin embargo, la escuadría de la sesma, para la cual se tiene

$$b = 15{,}7 \text{ cm.} \;;\; h = 22{,}6 \text{ cm.} \;;\; \omega = 354{,}8 \text{ cm}^2 \text{ y } Z = 1336{,}4;$$

y así resultará el siguiente coeficiente de trabajo:

$$K = \frac{1}{8} \times \frac{1740 \times 400 \times 0{,}89441}{1336{,}4} = 58{,}2 \text{ kg. por cm}^2.$$

606. Armadura propiamente dicha.—La carga que podemos suponer aplicada á cada nudo se compone:

1.º De la que actúa sobre dos correas.

2.º Del peso de éstas.

3.º Del peso de las escuadras que hacen las veces de egiones.

4.º De la fracción $\frac{1}{2N}$ del peso propio P′ de la armadura, siendo N el número de tramos del par, y como $N = 2$, dicha fracción será en este caso $\frac{1}{4}$ P′.

La carga sobre dos correas es

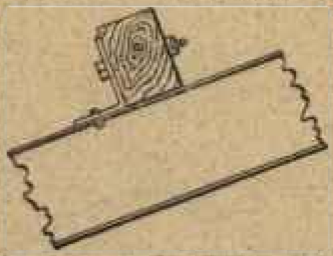
$$2P_1 = 2 \times 1740 = 3480 \text{ kg.}$$

El peso de las dos correas es

$$2 \times 0{,}157 \times 0{,}226 \times 4 \times 600 = 170{,}31 \text{ kg.}$$

El peso de las escuadras que hacen las veces de egiones (figura 319) supondremos que valga 1,69 kg.

Fig. 319.



La suma de los tres pesos que preceden vale

$$3480 + 170{,}31 + 1{,}69 = 3652 \text{ kg.}$$

En cuanto á $\frac{1}{4}$P′, no lo conocemos; pero tomando como valor provisional $\frac{1}{15}$ del peso anterior, admitiremos que la carga total sobre cada nudo es, en números redondos

$$\frac{P}{2N} = 3900 \text{ kg.}$$

y como N = 2, la carga total sobre la armadura entera será

$$P = 15600 \text{ kg.}$$

Las fuerzas exteriores, para la construcción del diagrama de tensiones totales, serán, por tanto,

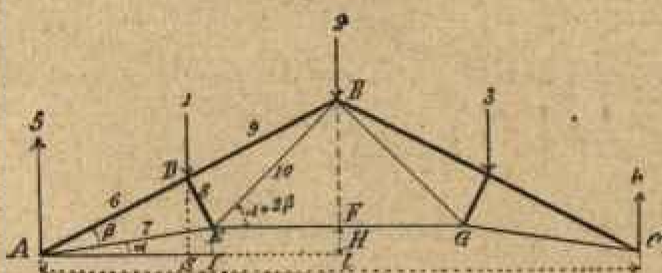
$$\mathbf{1} = \mathbf{2} = \mathbf{3} = \frac{1}{4} P = 3900 \text{ kg.}$$

$$\mathbf{4} = \mathbf{5} = \frac{3}{8} P = 5850 \text{ kg.}$$

Estudiaremos, por vía de ejercicio, dos soluciones: 1.ª cuando la biela tenga $1^m,50$ de longitud y resulte el tirante central á $0^m,657$ sobre la horizontal de los apoyos; y 2.ª cuando dicho tirante coincida con esta horizontal, en cuyo caso será $\alpha = 0$ y $\beta = 26^o,34'$.

607. 1.ª SOLUCIÓN. El diagrama de fuerzas es el indicado en la figura 321. La escala de la armadura reducida á sus ejes

Fig. 320.



(figura 320) es de *medio centímetro por metro.* Las fuerzas se representan á razón de 200 kilogramos *por milímetro.*

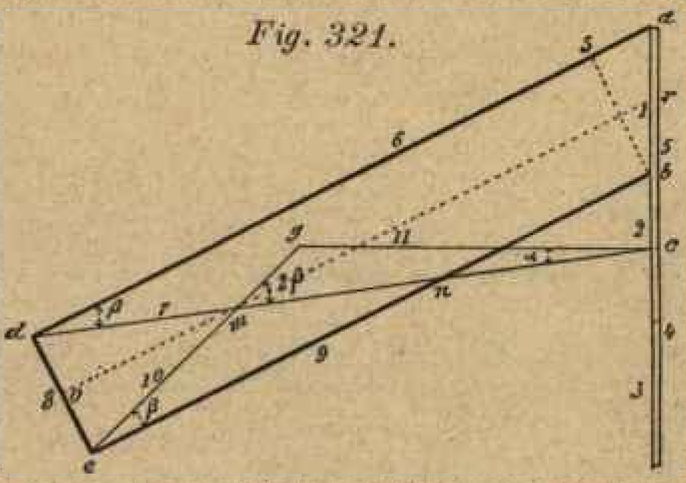
En cuanto á la longitud de las diferentes piezas, es fácil deducir los valores siguientes:

Par...............		AB = $8^m,94$
Tirantes.....	AE =	EB = $4^m,715$
Tirante central.....		EG = $6^m,663$
Biela.............		DE = $1^m,50$
Distancia..........		FH = $0^m,657$

Claro es que midiendo con la escala de fuerzas las líneas del diagrama correspondiente, se averiguará, con la aproximación propia de la escala de la figura y del esmero con que se haya construído, el valor de las tensiones totales desarrolladas en las diversas piezas; pero á semejanza de lo que hemos hecho otras veces, tratemos de deducir del expresado diagrama fórmulas con las cuales sea posible calcular directamente tales tensiones.

608. Cálculo de las tensiones.—Hemos llamado P á la carga total; y como $ab = 1$, $bc = \frac{1}{2} 2$, $ac = 5$ (figura 321), ten-

Fig. 321.



dremos desde luego

$$ab = \frac{1}{4} P ; \quad bc = \frac{1}{8} P ; \quad ac = \frac{3}{8} P.$$

609. Compresiones en el par.—En el triángulo rectángulo *acd* se tiene

$$\frac{ac}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{ad}{\operatorname{sen}(90+\alpha)}, \quad \text{de donde} \quad ad = ac\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta};$$

y por tanto

$$\mathbf{6} = \frac{3}{8}\,P\,\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Si trazamos *bs* perpendicular á *ad*, en el triángulo rectágulo *asb*, el ángulo en *b* será

$$sba = \alpha + \beta;$$

y tendremos

$$as = ab \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}\,P \operatorname{sen}(\alpha+\beta).$$

Además

$$eb = \mathbf{9} = ad - as = \mathbf{6} - as;$$

luego

$$\mathbf{9} = \frac{3}{8}\,P\,\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta} - \frac{1}{4}\,P \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

ó bien

$$\mathbf{9} = \frac{1}{8}\,P\left(\frac{3\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta} - 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right)$$

610. Extensión en el tirante AE.—En el triángulo *acd* se verifica:

$$\frac{cd}{ac} = \frac{\operatorname{sen}\left(90-(\alpha+\beta)\right)}{\operatorname{sen}\beta},$$

de donde

$$cd = ac\,\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\beta},$$

ó bien

$$\mathbf{7} = \frac{3}{8}\,P\,\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\beta}$$

611. Extensión en el tirante BE.—Desde luego tenemos

$$eg = 10 = em + mg.$$

Pero $em = md = \frac{1}{3} dc$. En efecto: las rectas me y dm forman por construcción el mismo ángulo β, la primera con be y la segunda con da; luego el triángulo med es isósceles, y, por tanto, el punto m está sobre la recta omr, paralela á las da y eb, trazada por el punto medio o de la de, á la cual son aquellas perpendiculares por construcción. Vemos, pues, que $dm = em$; pero como el punto r divide á ab en dos partes iguales y sabemos que $bc = \frac{1}{2} ab$, claro es que será $ar = rb = bc$; por esto también será $dm = mn = nc$, y finalmente $em = \frac{1}{3} cd$, como queríamos demostrar.

En el triángulo gmc se verifica

$$\frac{mg}{mc} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + 2\beta)},$$

de donde

$$mg = mc \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + 2\beta)};$$

pero como $mc = \frac{2}{3} cd$, será $mg = \frac{2}{3} cd \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + 2\beta)}$,

y por tanto tendremos

$$10 = \frac{1}{3} cd + \frac{2}{3} cd \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + 2\beta)} = \frac{1}{3} cd \left(1 + \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + 2\beta)} \right)$$

y poniendo en lugar de cd su valor resultará

$$10 = \frac{1}{8} P \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \beta} \left(1 + \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + 2\beta)} \right) \qquad (a)$$

Veamos si es posible dar á esta expresión otra forma más sencilla.

Siendo f = BH la flecha de la armadura, representemos por e = HF la distancia entre el tirante central y la horizontal de los apoyos, y llamemos t á la longitud de los tirantes inclinados AE = EB.

Del triángulo rectángulo BEF se deduce

$$\mathrm{BF} = f - e = t \operatorname{sen}(\alpha + 2\beta); \qquad (1)$$

y del triángulo rectángulo AEI se deduce asimismo

$$\mathrm{EI} = e = t \operatorname{sen}\alpha \qquad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2), tendremos

$$f = t\left[\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta) + \operatorname{sen}\alpha\right] \qquad (3)$$

y dividiendo la (3) por la (2), y suprimiendo el factor t,

$$\frac{f}{e} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta) + \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

de donde

$$\frac{f+e}{f-e} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta) + 2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta)},$$

ó bien

$$\frac{\frac{f}{e} + 1}{\frac{f}{e} - 1} = 1 + \frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta)}$$

Por último, representando por q la relación $\frac{f}{e}$ entre la flecha de la armadura y la distancia del tirante central á la horizontal de los apoyos, tendremos

$$1 + \frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta)} = \frac{q+1}{q-1},$$

y así la expresión (a) se convertirá en la siguiente

$$10 = \frac{1}{8}\,\mathrm{P}\,\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}\beta}\,\frac{q+1}{q-1}$$

612. Extensión en el tirante central.—En el triángulo mgc se verifica que

$$\frac{cg}{mc} = \frac{\text{sen } 2\beta}{\text{sen }(\alpha + 2\beta)} = \frac{2 \text{ sen } \beta \cos \beta}{\text{sen }(\alpha + 2\beta)},$$

de donde
$$cg = mc \frac{2 \text{ sen } \beta \cos \beta}{\text{sen }(\alpha + 2\beta)};$$

y puesto que $mc = \frac{2}{3} cd$ y $cd = \frac{3}{8} \text{P} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\text{sen } \beta}$,

resultará

$$\mathbf{11} = \frac{1}{4} \text{P} \cos(\alpha + \beta) \frac{2 \cos \beta}{\text{sen }(\alpha + 2\beta)} \qquad (b)$$

La fracción $\frac{2 \cos \beta}{\text{sen }(\alpha + 2\beta)}$ puede escribirse en función de $\frac{f}{e} = q$.

En efecto, tenemos en el triángulo rectángulo BEF

$$f - e = t \text{ sen }(\alpha + 2\beta),$$

y en el ADS

$$\text{DS} = \frac{1}{2} f = \text{AD sen }(\alpha + \beta);$$

pero $\text{AD} = t \cos \beta$, luego

$$f = 2\, t \cos \beta \text{ sen }(\alpha + \beta),$$

de donde

$$\frac{f}{f - e} = \frac{2 \cos \beta}{\text{sen }(\alpha + 2\beta)} \text{ sen }(\alpha + \beta);$$

y por tanto

$$\frac{2 \cos \beta}{\text{sen }(\alpha + 2\beta)} = \frac{1}{\text{sen }(\alpha + \beta)} \frac{f}{f - e} = \frac{1}{\text{sen }(\alpha + \beta)} \frac{q}{q - 1},$$

Así la expresión (b) se convierte en la siguiente

$$\mathbf{11} = \frac{1}{4} \text{P} \cos(\alpha + \beta) \frac{1}{\text{sen }(\alpha + \beta)} \frac{q}{q - 1}$$

ó finalmente

$$11 = \frac{1}{4} \mathrm{P} \cot(\alpha + \beta) \frac{q}{q - 1}.$$

613. Compresión de la biela. — Siendo $de = sb$, tendremos en el triángulo rectángulo asb; $sb = ab \cos(\alpha + \beta)$, y como $ab = \frac{1}{4}$ P resultará

$$8 = \frac{1}{4} \mathrm{P} \cos(\alpha + \beta)$$

Resumiendo, tendremos las siguientes fórmulas:

Compresiones.	Par....	AD....	$6 = \frac{3}{8} \mathrm{P} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$
	Par....	DB....	$9 = \frac{1}{8} \mathrm{P} \left(\frac{3 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta} - 2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\right)$
	Biela...	DE...	$8 = \frac{1}{4} \mathrm{P} \cos(\alpha + \beta)$
Extensiones.	Tirante.	AE....	$7 = \frac{3}{8} \mathrm{P} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \beta}$
	Tirante.	EB....	$10 = \frac{1}{8} \mathrm{P} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \beta} \frac{q + 1}{q - 1}$
	Tirante.	EG....	$11 = \frac{1}{4} \mathrm{P} \cot(\alpha + \beta) \frac{q}{q - 1}$

Apliquemos las fórmulas que preceden al caso actual.

El ángulo $\alpha + \beta$ es ya conocido y vale $26^{\circ}, 34'$.

El ángulo β depende de la longitud asignada á la biela, y recordando que en el triángulo rectángulo ADE se tiene

$$\mathrm{AD} = 4^{\mathrm{m}},47 \quad \text{y} \quad \mathrm{DE} = 1^{\mathrm{m}},50,$$

será: $\operatorname{tg} \beta = \frac{1,5}{4,47} = 0,33557$ y $\beta = 18^{\circ}\, 33'$, con muy poco error.

Tendremos, pues, con la aproximación necesaria:

$$\alpha = 8^{\circ},1' \ldots\ldots \begin{cases} \text{sen } \alpha = 0{,}13946 \\ \cos \alpha = 0{,}99023 \end{cases}$$

$$\beta = 18^{\circ},33' \ldots\ldots \begin{cases} \text{sen } \beta = 0{,}31813 \\ \cos \beta = 0{,}94805 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = 26^{\circ},\ 34' \begin{cases} \text{sen } (\alpha + \beta) = 0{,}4472 \\ \cos (\alpha + \beta) = 0{,}8944 \\ \cot (\alpha + \beta) = 2{,}0 \end{cases}$$

$$q = \frac{4}{0{,}657} = 6{,}088$$

$$\frac{q+1}{q-1} = 1{,}393$$

$$\frac{q}{q-1} = 1{,}1965$$

Sustituyendo en las fórmulas anteriores estos valores, y recordando que P = 15600 kilogramos, se encontrarán los siguientes resultados:

Compresiones.	Par........	AD....	**6** = 18209 kg.
	Par........	DB....	**9** = 16465 »
	Biela......	DE....	**8** = 3488 »
Extensiones..	Tirante....	AE....	**7** = 16447 »
	Tirante....	EB....	**10** = 7637 »
	Tirante....	EG....	**11** = 9333 »

614. Cálculo de los pares.—Cada tramo de par lo consideraremos camo una viga inclinada, apoyada por sus extremos y sometida, por tanto, á flexión compuesta. En los dos tramos del par, el momento máximo de flexión es el mismo; pero el esfuerzo de compresión es mayor en el inferior AD que en el superior DB.

Tendremos en cuenta para el cálculo solamente el primero, que es el que se halla en condiciones más desfavorables.

La carga P_1 que la correa transmite al punto medio del tramo de par, es $P_1 = \frac{1}{8} P = 1950$ kilogramos; y como la proyección horizontal de dicho tramo es precisamente la cuarta parte de la luz, es decir, $l_1 = \frac{1}{4} l = 4^{m} = 400$ cm.; el momento máximo de flexión será:

$$M = \frac{1}{4} P_1 l_1 = \frac{1}{4} \times 1950 \times 400 = 195000 \text{ kg.-cm.}$$

La fuerza de compresión á que ha de resistir el tramo inferior de par que consideramos, sabemos que vale

$$P_2 = 18209 \text{ kg.},$$

y como la ecuación de resistencia es

$$K = \frac{P_2}{\omega} + \frac{M}{Z},$$

tendremos

$$K = \frac{18209}{\omega} + \frac{195000}{Z} \qquad (a)$$

siendo $K \leqq 600$ kg. por cm².

Si los pares pudieran ser vigas laminadas en doble T, la cuestión queda reducida, para resolver prácticamente el problema, á buscar en el catálogo de hierros un perfil al que correspondan para ω y Z valores tales, que, sustituídos en el segundo miembro de la ecuación (*a*), den para K un valor igual ó algo menor que 600.

Si acudimos al cuadro de hierros de Altos Hornos, Bilbao, (pág. 469) veremos que el perfil núm. 18 puede aceptarse, y el número 17 no, si ha de ser $K \leqq 600$.

En efecto; para el núm. 17 se tiene

$$\omega = 61{,}40 \text{ cm}^2.; \qquad Z = 547; \qquad p = 47{,}9 \text{ kg.},$$

de donde resulta

$$K = \frac{18209}{61{,}4} + \frac{195000}{547} = 653{,}05 \text{ kg.}$$

Para el perfil núm. 18, encontramos

$$\omega = 69{,}4 \text{ cm}^2; \qquad Z = 659; \qquad p = 54{,}1 \text{ kg.}$$

y resulta

$$K = \frac{18209}{69{,}4} + \frac{195000}{659} = 558{,}28 \text{ kg.}$$

Consultando el cuadro de la página 504, veremos que también pueden aceptarse para pares, vigas compuestas de un alma y cuatro escuadras.

En efecto; á un alma de 30 centímetros de altura y 1,1 centímetros de espesor corresponde una sección $\omega_1 = 33\ \text{cm}^2$ y un módulo de flexión $Z_1 = 165$.

A cuatro escuadras de $\dfrac{6 \times 6}{0{,}8}$ centímetros corresponde una sección $\omega_2 = 35{,}84\ \text{cm}^2$ y un módulo $Z_2 = 424$.

Para la sección resultante tendremos

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = 33 + 35{,}84 = \ldots\ldots\ldots \quad \omega = 68{,}84\ \text{cm}^2$$
$$Z = Z_1 + Z_2 = 165 + 424 = \ldots\ldots \quad Z = 589,$$

y el coeficiente de trabajo será

$$K = \frac{18209}{68{,}84} + \frac{195000}{589} = \ldots\ldots\ldots \quad K = 595{,}58\ \text{kg}.$$

valor aceptable, por ser muy poco menor que el señalado para coeficiente de seguridad.

El peso por metro lineal de esta viga es el siguiente:

Peso del alma..............	25,74 kg.
Peso de las cuatro escuadras.	27,96 »
Peso del metro linéal de par..	53,70 kg.

615. Cálculo de las bielas.—Las bielas suelen ser piezas fundidas de sección cruciforme variable; pero también pueden ser de hierro laminado, formadas por hierros en simple T, cosidos con roblones, resultando así una pieza de sección cruciforme constante.

Supongamos que hayan de ser de fundición las bielas.

Aceptando provisionalmente que la relación entre la longitud L de la biela y la menor dimensión D de su sección transversal sea $\frac{L}{D} = 18$, veremos en el cuadro de la pág. 318 que, bajo el supuesto de que la pieza fuera de bases planas, el coeficiente de seguridad K' que habría que adoptar es $K' = 492$ kilogramos por cm^2.

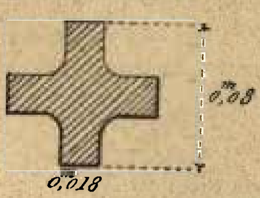
Pero las bielas se hallan en el caso III del núm. **301**, es decir, son piezas articuladas por los dos extremos, de suerte que para poder aplicar el coeficiente que precede, $K' = 492$, es preciso, como sabemos, multiplicar por $\frac{7}{2}$ la compresión efectiva que la biela ha de soportar; y así la carga que hay que tener en cuenta para el cálculo de la sección recta es $P = \frac{7}{2} \times 3488 = 12208$ kilogramos.

La sección necesaria será, por tanto,

$$\omega = \frac{P}{K'} = \frac{12208}{492} = 24{,}81 \text{ cm}^2 \text{ próximamente.}$$

Veamos si puede aceptarse el perfil indicado por la figura 322.

Fig. 322.



El área ω de la sección transversal propuesta es

$$\omega = 25{,}56 \text{ cm}^2$$

La relación $\frac{L}{D}$ vale

$$\frac{L}{D} = \frac{150}{8} = 18{,}75;$$

por lo tanto, del referido cuadro se deducirá que el coeficiente aplicable ha de ser $K' = 474{,}75$ kg.

El coeficiente de trabajo resultará

$$K' = \frac{12208}{25{,}56} = 477{,}62 \text{ kg.}$$

que como vemos es perfectamente aceptable.

Los extremos de la biela serán de sección circular, cuya área ha de ser por lo menos igual al cociente de dividir la compresión efectiva por el coeficiente de seguridad para ejemplares cortos; pero generalmente se suele dar un diámetro algo mayor que el que resulta del cálculo que queda indicado.

616. Cálculo de los tirantes.—Para todos, la ecuación de resistencia es la misma, $\omega = \frac{P}{K}$, siendo P la fuerza de extensión que los solicita y K el coeficiente de seguridad.

Si suponemos que por la bondad del hierro puede aceptarse K = 800, tendremos:

$$\text{Tirante AE} \ldots \; \omega = \frac{16447}{800} = 20{,}56 \text{ cm}^2 \ldots\ldots d = 5{,}12 \text{ cm.}$$

$$\text{» EB} \ldots \; \omega_1 = \frac{7637}{800} = 9{,}55 \text{ cm}^2 \ldots\ldots d_1 = 3{,}49 \text{ cm.}$$

$$\text{» EG} \ldots \; \omega_2 = \frac{9333}{800} = 11{,}67 \text{ cm}^2 \ldots\ldots d_2 = 3{,}86 \text{ cm.}$$

Si se emplearan barras de acero, para las cuales pudiera aceptarse un coeficiente de trabajo, K = 1000 kg. por cm², entonces las secciones necesarias y los diámetros correspondientes serán los que se indican á continuación; pero advirtiendo que dichos diámetros deben aumentarse en dos veces lo que valga la profundidad del filete de la rosca en que terminan los extremos de los tirantes.

$$\omega = 16{,}45 \text{ cm}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d = 4{,}58 \text{ cm.}$$

$$\omega_1 = 7{;}64 \text{ cm}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d_1 = 3{,}12 \text{ cm.}$$

$$\omega_2 = 9{,}34 \text{ cm}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d_2 = 3{,}45 \text{ cm.}$$

617. 2.ª SOLUCIÓN (figura 323).—El diagrama de fuerzas es el que indica la figura 324. Las escalas son las mismas que empleamos en el caso anterior.

Las longitudes de las diferentes piezas son, como se deduce con toda facilidad, las siguientes:

Par..................	AB = 8^{m},94
Tirantes.............	AE = EB = 5^{m},00
Tirante central.......	EG = 6^{m},00
Biela.............. .	DE = 2^{m},236

Fig. 323.

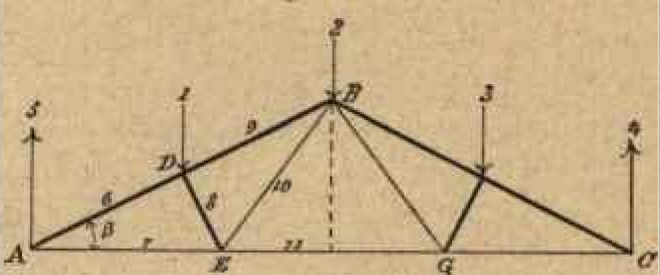
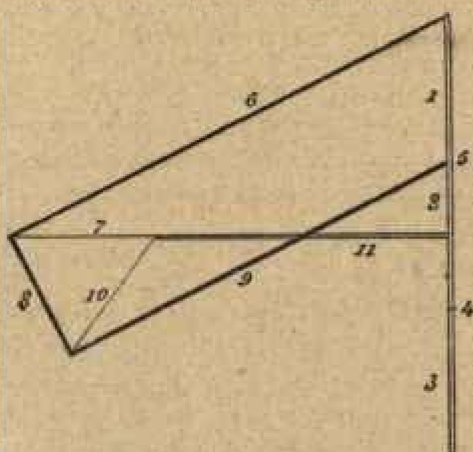


Fig. 324.



La fórmula de las tensiones pueden hallarse sin ninguna dificultad acudiendo al diagrama correspondiente, ó mediante las encontradas en el caso anterior, haciendo en ellas $\alpha = 0$ y $e = 0$. Son las que á continuación se expresan:

Compresiones.	Par	AD ...	$6 = \frac{3}{8} P \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}$
	Par	DB ...	$9 = \frac{1}{8} P \left(\frac{3}{\operatorname{sen}\beta} - 2 \operatorname{sen}\beta\right)$
	Biela ...	DE ...	$8 = \frac{1}{4} P \cos\beta$
Extensiones..	Tirante..	AE ...	$7 = \frac{3}{8} P \cot\beta$
	Tirante..	EB ...	$10 = \frac{1}{8} P \cot\beta$
	Tirante..	EG ...	$11 = \frac{1}{4} P \cot\beta$

Siendo $\beta = 26^{\circ},34'$ tendremos ahora

$$\operatorname{sen}\beta = 0{,}4472\,, \qquad \cos\beta = 0{,}8944\,, \qquad \cot\beta = 2$$

Recordando que P = 15600 kg., tendremos los siguientes resultados:

Compresiones.....	Par........	AD..	6 =	13081 kg.
	Par........	DB..	9 =	11337 »
	Biela... ..	DE..	8 =	3488 »
Extensiones.......	Tirante....	AE..	7 =	11700 »
	Tirante....	EB..	10 =	3900 »
	Tirante....	EG..	11 =	7800 »

618. Pares.—Recordaremos que el momento máximo de flexión vale

$$M = 195000 \text{ kg.-cm.}$$

La fuerza de compresión á que ha de resistir el tramo inferior del par, que es el que consideramos, tiene por valor $P_2 = 6 = 13081$ kilogramos; por consiguiente, la ecuación de resistencia será

$$K = \frac{13081}{\omega} + \frac{195000}{Z},$$

debiendo ser, como en el caso anterior, $K \overline{\overline{<}} 600$ kg. por cm^2.

Puede aceptarse muy bien para pares el perfil núm. 17 del cuadro de hierros en doble T de la Sociedad de Altos Hornos, Bilbao; porque siendo, como puede verse en la pág. 469,

$$\omega = 61,4 \text{ cm.}^2, \quad Z = 547, \quad p = 47,9 \text{ kg.},$$

el coeficiente de trabajo que resulta es

$$K = \frac{13081}{61,4} + \frac{195000}{547} = 569,56 \text{ kg.}$$

Las dimensiones de este perfil, que es el que aceptaremos, son:

$$h = 28 \text{ cm.}, \quad b = 11,9 \text{ cm.}, \quad e = 1,01 \text{ cm.}, \quad e' = 1,52 \text{ cm.}$$

Los dos pares de una forma, pesan próximamente

$$2 \times 8,94 \times 47,9 = 856,45 \text{ kg.}$$

619. Bielas.—La longitud de estas piezas hemos visto que es de $2^m,236$; pero teniendo en cuenta la manera como se unen con los pares, dicha longitud podemos reducirla, para el cálculo de la sección transversal, á unos 2 metros.

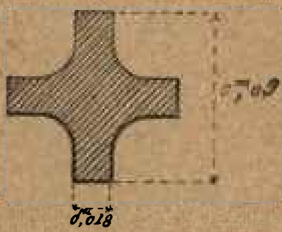
Supongamos que las bielas hayan de ser de fundición y aceptemos provisionalmente como valor de la relación $\frac{L}{D}$, $\frac{L}{D} = 20$.

En el cuadro de la pág. 318 encontramos, para el caso de que la pieza fuera de bases planas, que á aquella relación corresponde un coeficiente de seguridad, $K' = 446$, y como la carga que hay que suponer, por tratarse de una pieza de bases redondeadas, es $\frac{7}{2}$ de la carga efectiva, es decir $\frac{7}{2} \times 3488 = 12208$ kilogramos, la secesión necesaria será

$$\omega = \frac{12208}{446} = 27,37 \text{ cm}^2, \text{ próximamente.}$$

Aceptaremos una sección máxima, en el punto medio de la biela, en formo de cruz, cuyas dimensiones serán las que se indican en la figura 325.

Fig. 325.



En tal supuesto la relación $\frac{L}{D}$ vale próximamente 22 y en el cuadro á que nos hemos referido hallaremos que $K' = 405$.

La sección es ahora

$$\omega = 29{,}16 \text{ cm}^2;$$

por consiguiente resultará un coeficiente de trabajo igual á

$$K' = \frac{12208}{29{,}16} = 418{,}66 \text{ kg.},$$

por donde vemos que el perfil propuesto puede aceptarse sin inconveniente alguno.

620. Tirantes.—Aceptando para coeficiente de seguridad $K = 1000$, si los tirantes son de acero, las secciones resistentes necesarias son las siguientes:

$$\text{Tirante.. AE.. } \omega = \frac{11700}{100} = 11{,}7 \text{ cm}^2\text{.. } d = 3{,}86 \text{ cm.}$$

$$\text{Id. EB.. } \omega_1 = \frac{3900}{1000} = 3{,}9 \text{ » } d_1 = 2{,}23 \text{ »}$$

$$\text{Id. EG.. } \omega_2 = \frac{7800}{1000} = 7{,}8 \text{ » } d_2 = 3{,}16 \text{ »}$$

Ahora bien; como los extremos hay que terrajarlos para unirlos á las horquillas correspondientes por medio de una tuerca, y por tal motivo la sección queda reducida en cuanto corresponde á la profundidad del filete, aceptaremos los siguientes diámetros definitivos:

$$d = 4{,}3 \text{ cm.}, \quad d_1 = 2{,}7 \text{ cm.}, \quad d_2 = 3{,}6 \text{ cm.}$$

Si los tirantes hubieran de ser de hierro de buena calidad, para el que pudiera tomarse $K = 800$, las secciones y diámetros serían los que se indican á continuación:

$$\omega = \frac{117000}{800} = 14{,}625 \text{ cm}^2 \ldots \ d = 4{,}32 \text{ cm.}$$

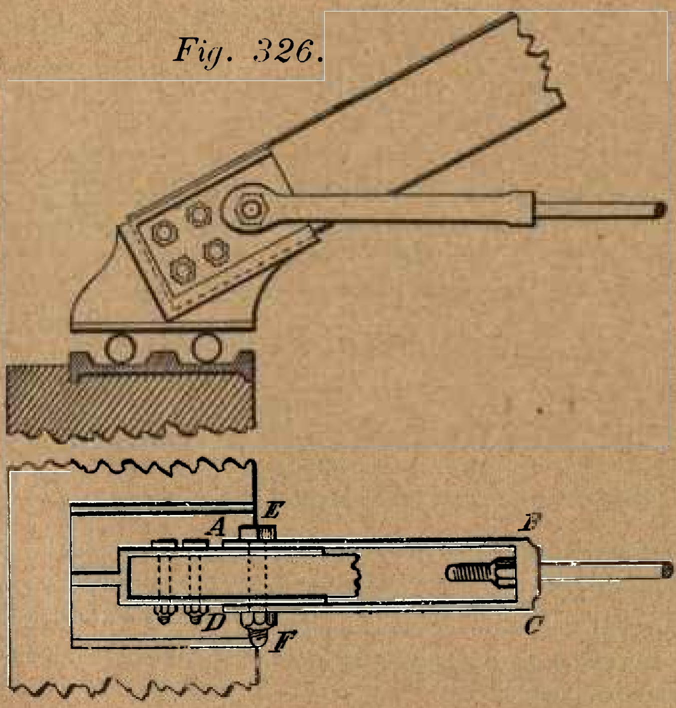
$$\omega_1 = \frac{3900}{800} = 4{,}875 \text{ cm}^2 \ldots \ d_1 = 2{,}5 \text{ cm.}$$

$$\omega_2 = \frac{7800}{800} = 9{,}75 \text{ cm}^2 \ldots \ d_2 = 3{,}53 \text{ cm.}$$

pudiendo aceptar, como diámetros definitivos

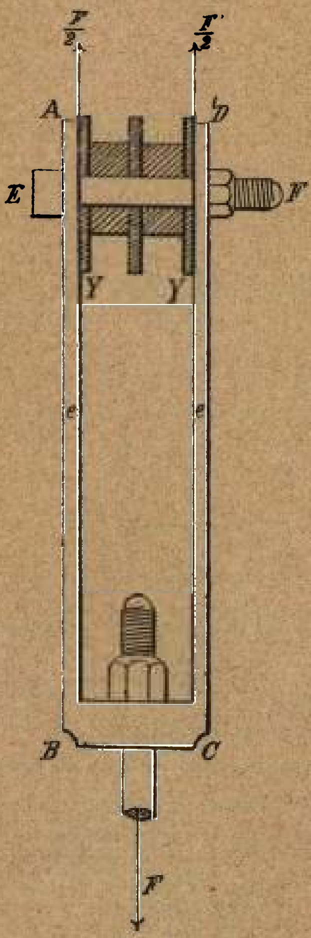
$$d = 4{,}8 \text{ cm.}, \qquad d_1 = 3{,}0 \text{ cm.}, \qquad d_2 = 4{,}0 \text{ cm.}$$

Fig. 326.



De las soluciones que acabamos de estudiar, aceptaremos la segunda (figura 323), toda vez que no resultando la biela de longitud excesiva no hay razón para preferir la primera, en la cual, según hemos visto oportunamente, se desarrollan tensiones más considerables y resultan todas las piezas principales con mayor escuadría.

Fig. 327.



621. *Cálculo de los enlaces principales.*—Consideraremos los siguientes:

622. Unión de los pares con los tirantes. — Consiste esta unión, como indican las figuras 326 y 327, en un estribo ú horquilla cuyas ramas abrazan al par quedando á él sujetas por medio del pasador EF. El extremo del tirante, terrajado en una cierta longitud, penetra por el agujero que lleva la base BC de la horquilla, con la que se hace solidaria apretando la tuerca correspondiente indicada en la figura.

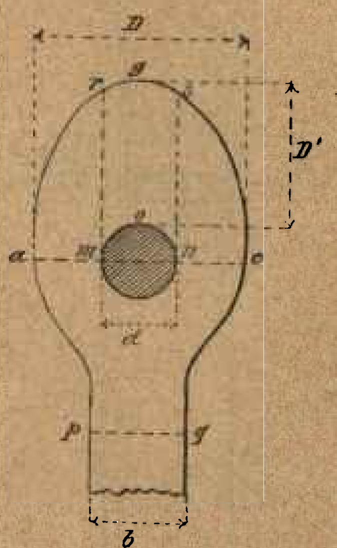
Los extremos de las ramas de la horquilla se ensanchan afectando la forma que representa la figura 328.

La fuerza F que soporta el tirante, se distribuye por igual entre las ramas AB y CD de la horquilla (figura 327).

Esta puede romperse por las cabezas, por el cuerpo de las ramas ó por la base.

Las cabezas pueden romperse por extensión, por *ac* (figura 328); por desgarramiento longitudinal, á lo largo de los planos *mr* y *ns*; ó finalmente, abriéndose por *m*, por *n* y por *g*.

Fig. 328.



El cuerpo de las ramas puede romperse por extensión, por un plano cualquiera, tal como *pq*, y la base puede romperse á virtud de la flexión que engendra la fuerza F que transmite el tirante, por el punto medio donde está el taladro ó por los extremos B y C (figura 327.)

El pasador EF puede romperse por esfuerzo cortante á lo largo de los planos YY.

En el semicilindro *mon*, (figura 328) se desarrolla una presión variable, que es nula en *m* y en *n* y adquiere un valor considerable en *o*.

Como la ley de variación de las presiones unitarias que se desarrollan en aquel semicilindro es desconocida, es necesario valerse de las siguientes fórmulas empíricas, que representan los resultados de las experiencias ejecutadas con el objeto de fijar las relaciones más convenientes entre las dimensiones principales del enlace que nos ocupa, de manera que la rotura por el pasador ó por la cabeza sea siempre imposible, debiendo efectuarse necesariamente por el cuerpo de las ramas.

Si llamamos

d al diámetro del pasador;

b al ancho de la barra en el cuerpo de la horquilla;

e al espesor de la barra;

D al ancho de la cabeza por el centro del taladro;

D′ á la distancia entre el vértice de la cabeza y la circunferencia de dicho taladro,

las fórmulas referidas son:

$$d = 1{,}9\sqrt[3]{b\,e^2} \quad (1); \qquad D = d + \left(1{,}25 + 0{,}25\,\frac{d}{b}\right) b \quad (2);$$

$$D' = \left(1{,}13 + 0{,}5\,\frac{d}{b}\right) b \quad (3)$$

Como el pasador ofrece dos secciones resistentes al esfuerzo cortante F, es claro que el valor de *d* obtenido por la fórmula (1) será aceptable siempre que satisfaga á la condición

$$\frac{\pi d^2}{4}\,k \geqq \frac{1}{2}\,F \qquad (4)$$

y no lo será en el caso contrario.

Si esta condición no queda satisfecha, el valor de *d* se calculará por medio de la ecuación de resistencia al esfuerzo cortante

$$\frac{\pi d^2}{4}\,k = \frac{1}{2}\,F \qquad (5)$$

Las fórmulas (1), (2) y (3) se han deducido con aplicación especial al cálculo de los puentes, en los que hay que tener en cuenta los efectos de las cargas dinámicas; pero en las armaduras, como la que nos ocupa, sometidas solamente á cargas estáticas y no muy considerables, la fórmula (1) la reemplazaremos por la siguiente:

$$d = 0{,}66\,b$$

debiendo repetir aquí la misma observación que antes; es decir, que para que sea aceptable el valor del diámetro *d*, deducido de la expresión que precede, es necesario que satisfaga á la condición (4); pues en otro caso dicho diámetro se calcularía por medio de la ecuación (5).

Atendiendo además á la imposibilidad de la rotura por el cuerpo de las ramas, las ecuaciones de que hemos de hacer uso son las siguientes:

$$Kbe = \frac{1}{2}F \quad (a); \qquad d = 0{,}66\,b \quad (b)$$

$$D = d + \left(1{,}25 + 0{,}25\,\frac{d}{b}\right)b \; (c); \quad D' = \left(1{,}13 + 0{,}5\,\frac{d}{b}\right)b \; (d)$$

teniendo presente la condición

$$\frac{\pi d^2}{4}k \geqq \frac{1}{2}F$$

Como las incógnitas son cinco y las ecuaciones disponibles son cuatro, en la (a) daremos á b ó á e el valor que se juzgue más conveniente, con lo que se deducirá el de la otra cantidad, en cuyo caso ya no hay dificultad en calcular las restantes.

Si aceptamos como coeficiente de seguridad á la extensión $K = 600$ kilogramos por centímetro cnadrado y hacemos $b = 5$ centímetros, tendremos, recordando que $F = 11700$ kg.,

$$600 \times 5 \times e = \frac{11700}{2};$$

de donde

$$e = \frac{11700}{6000} = 1{,}95 \text{ cm.}$$

El diámetro deducido de la fórmula (b) será

$$d = 0{,}66 \times 5 = 3{,}3 \text{ cm.}$$

Veamos si este valor es aceptable, suponiendó que el pasador ha de ser de hierro de buena calidad, para el que puede tomarse $k = 500$ kilogramos por centímetro cuadrado.

El área de la sección es $\frac{\pi d^2}{4} = 8{,}553$ centímetros cuadrados, y por tanto resultará

$$8{,}553 \times 500 = 4276{,}5 < \frac{1}{2}F;$$

por consiguiente no puede admitirse $d = 3{,}3$ centímetros.

La ecuación de resistencia al esfuerzo cortante nos da

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{5850}{500} = 11,7 \text{ cm}^2,$$

de donde resulta $d = 3,86$ centímetros; pero aceptaremos $d = 3,8$ centímetros; porque el coeficiente de trabajo efectivo resultará

$$k = \frac{\frac{1}{2} F}{\omega} = \frac{5850}{11,34} = 515,8 \text{ kg. por cm}^2.$$

Los valores de D y D′ serán los siguientes:

$$D = 3,8 + \left(1,25 + 0,25 \times \frac{3,8}{5}\right) \times 5 = 11 \text{ cm.}$$

$$D' = \left(1,13 + 0,5 \times \frac{3,8}{5}\right) \times 5 = 7,55 \text{ cm.}$$

pudiendo aceptar en números redondos

$$D = 11 \text{ cm.} \qquad D' = 7,6 \text{ cm.},$$

En cuanto á la base del estribo, cuya robustez suele ser excesiva, puede considerarse como un prisma empotrado por sus extremos y sometido á la carga F aplicada en el punto medio.

Si la distancia de las ramas en la base la fijamos en 15 centímetros no sólo para que abarque al par, sino para que pueda manejarse la tuerca del tirante, el momento máximo de flexión sabemos que es

$$M = \frac{1}{8} PL,$$

y como en el caso actual tenemos

$$P = F = 11700 \text{ kg.} \quad , \quad L = 15 \text{ cm.}$$

será

$$M = \frac{1}{8} \times 11700 \times 15 = 21938 \text{ kg.-cm.}$$

El esfuerzo cortante máximo es

$$T = \frac{1}{2} F \ 5850 \text{ kg.}$$

Para que la base del estribo tenga las condiciones necesarias de resistencia, es preciso que su módulo Z y su sección menor ω valgan respectivamente

$$Z = \frac{M}{K} = \frac{21938}{600} = 36{,}56; \quad \omega \gtreqless \frac{\frac{1}{2} F}{k} = \frac{5850}{500} = 11{,}7 \text{ cm}^2.$$

Las secciones peligrosas corresponden, como sabemos, á los extremos y al punto medio.

Si hacemos á la dimensión perpendicular al eje del tirante $B = 6{,}4$ centímetros, y á la paralela $H = 6$ centímetros, tendremos

$$Z = \frac{1}{6} BH^2 = 38{,}4 \qquad \omega = 38{,}4 \text{ cm}^2.$$

El coeficiente de trabajo á la flexión, será

$$K = \frac{21938}{38{,}4} = 571{,}3 \text{ kg. por cm}^2,$$

y el del esfuerzo cortante será

$$k = \frac{5850}{38{,}4} = 152{,}34 \text{ kg. por cm}^2.$$

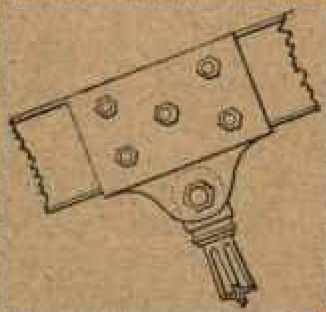
Vemos, pues, que con las dimensiones aceptadas, la unión que estudiamos es perfectamente resistente.

Finalmente, la tuerca debe comprender el número suficiente de filetes del tornillo en que termina el tirante, para que, repartiéndose la presión total en una superficie bastante extensa, resulte imposible la rotura del material por esfuerzo cortante y la materia lubrificante no sea expulsada.

Del mismo modo se estudiaría la resistencia y se fijarían dimensiones convenientes á la horquilla análoga con la que se une el tirante inclinado al extremo superior del par.

623. Unión de la biela con el par.—Dispuesta como indica la figura 329, y suponiendo que el extremo agujereado de la biela tiene una resistencia mayor que la necesaria, como acontece generalmente, sólo hay que determinar el diámetro del pasador.

Fig. 329.



Hemos visto que la biela ha de resistir á una compresión F = 3488 kilogramos, y como el pasador ha de resistir á este esfuerzo cortante, que se distribuye por igual entre las dos secciones resistentes, la ecuación de resistencia será, haciendo $k = 500$,

$$\frac{1}{2} F = \frac{\pi d^2}{4} k$$

de donde

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{F}{2k} = \frac{3488}{2 \times 500} = 3{,}488 \text{ cm}^2,$$

sección cuyo diámetro es $d = 2{,}11$ centímetros.

Aceptaremos, para mayor seguridad, $d = 2{,}2$ centímetros, y así resultará el siguiente coeficiente de trabajo:

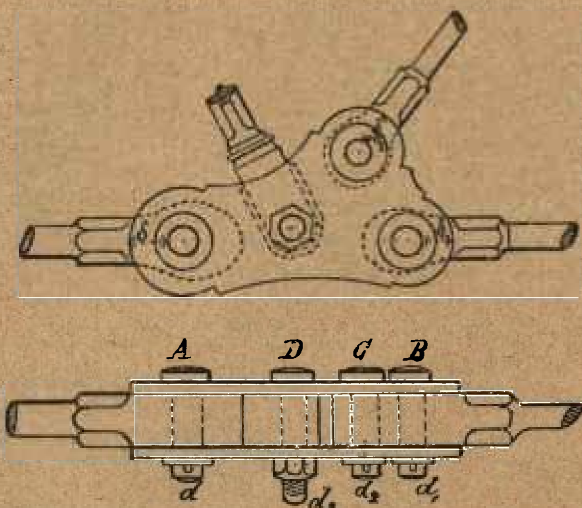
$$k = \frac{1744}{3{,}8013} = 458{,}79 \text{ kg. por cm}^2.$$

624. Unión de los tirantes con la biela.—Consiste, como indica la figura 330, en dos placas entre las cuales quedan encepados los extremos de la biela y de los tres tirantes, y cuyo conjunto se consolida por medio de los correspondientes pasadores.

Las placas pueden romperse principalmente por desgarramiento longitudinal, y es claro que la región peligrosa estará donde se articula el tirante que desarrolla la mayor de las tensiones, que vale, como sabemos, 11700 kilogramos.

Si representamos por e el grueso de cada placa, y por δ la distancia que debe haber entre la circunferencia del taladro y el

Fig. 330.



borde de la placa, contada tal distancia sobre el eje del tirante, es claro que la superficie total resistente al desgarramiento será $\omega = 4\,e\,\delta$.

La ecuación de resistencia es $F = \omega\,k = 4\,k\,e\,\delta$, de donde

$$\delta = \frac{F}{4\,k\,e}.$$

Pero $F = 11700$, $k = 400$ y tomando para e, $e = 1{,}5$ centímetros, tendremos,

$$\delta = \frac{11700}{4 \times 400 \times 1{,}5} = 4^{\text{cm}}{,}88 \text{ próximamente.}$$

Haremos, pues

$$\delta \gtreqless 5 \text{ cm.}$$

Para $\delta = 5$ centímetros, corresponde, como es fácil calcular, $k = 390$ kilogramos por centímetro cuadrado.

Para $\delta = 6$ centímetros, será $k = 325$ kilogramos.

Si las placas son de fundición, es prudente que $\delta \geqq 6$ centímetros.

Del mismo modo veríamos que es conveniente que las distancias análogas δ_1, δ_2, para los tirantes B y C, sean respectivamente

$$\delta_1 \geqq 4,5 \text{ cm.}, \qquad \delta_2 \geqq 2,5 \text{ cm.}$$

Los pasadores A, B, C, D, se calculan como ya sabemos.

Las áreas ω, ω_1, ω_2, ω_3, de sus secciones transversales respectivas, serán, por tanto, las siguientes, haciendo $k = 500$ kilogramos por centímetro cuadrado:

$$\omega = \frac{11700}{2 \times 500} = 11,70 \text{ cm}^2, \qquad \omega_1 = \frac{7800}{2 \times 500} = 7,80 \text{ cm}^2$$

$$\omega_2 = \frac{3900}{2 \times 500} = 3,90 \text{ cm}^2, \qquad \omega_3 = \frac{3488}{2 \times 500} = 3,49 \text{ cm}^2.$$

A estas secciones corresponden los siguientes diámetros:

$$d = 3,86 \text{ cm.}; \quad d_1 = 3,15 \text{ cm.}; \quad d_2 = 2,23 \text{ cm.}; \quad d_3 = 2,11 \text{ cm.};$$

pudiendo aceptar, en números redondos,

$$d = 3,9 \text{ cm.}; \quad d_1 = 3,2 \text{ cm.}; \quad d_2 = 2,3 \text{ cm.}; \quad d_3 = 2,2 \text{ cm.}$$

625. Rectificación de la carga total.— Hemos partido, en los cálculos que preceden, de una carga total, $P = 15600$ kilogramos; pero como al ir calculando los diversos elementos se han forzado algo los pesos por metro cuadrado de vertiente, y por otra parte hemos atribuído un valor convencional al peso propio de la forma de armadura, conviene rectificar la carga total, para ver si los resultados de los cálculos precedentes son aceptables.

La superficie cubierta correspondiente á una forma, como fácilmente puede comprobarse, asignando á los pares una longitud de $8^{m},94$, es

$$S = 8{,}94 \times 2 \times 4 = 71^{m^2}{,}52,$$

y así tendremos:

		Kilogramos.
Peso del tejado, nieve y presión del viento............	$71{,}52 \times 177{,}46.$ =	12691,9
Enlatado..............	$7{,}8 \times 71{,}52..$ =	557,8
Cabios.....	$143 \times 0{,}007225 \times 600...$ =	619,9
Correas...	$7 \times 4 \times 0{,}03548 \times 600...$ =	596,1
Egiones................	$8 \times \frac{1{,}69}{2}.$ =	6,8
	Suma............	14472,5

A esta carga tenemos que agregar el peso propio de la forma, que vamos ahora á rectificar, pues recordaremos que provisionalmente se fijó en $\frac{1}{15}$ del peso que, según calculamos, gravitaba sobre la forma, con poca diferencia.

La sección recta de los pares tiene por área

$$\omega_1 = 61{,}4 \text{ cm}^2 = 0^{m^2}{,}00614.$$

Entre los dos pares dan una longitud

$$L_1 = 2 \times 8{,}94 = 17^{m}{,}88.$$

El volumen será

$$V_1 = 0{,}00614 \times 17{,}88 = 0^{m^3}{,}109783.$$

Los tirantes que parten de los extremos inferiores de los pares dan una longitud efectiva de $9^{m},90$, y como el diámetro es de 4,3 centímetros $= 0^{m},043$, la sección recta valdrá $0^{m^2},001452$, y por tanto su volumen será

$$V_2 = 0{,}001452 \times 9{,}9 = 0{,}014375.$$

Los tirantes inclinados suman una longitud también de $9^{m},90$

y como la sección correspondiente á su diámetro es de $0^{m^2},0005725$, su volumen es

$$V_3 = 0,0005725 \times 9,9 = 0^{m^3},005668.$$

El tirante central, cuyo diámetro es de 3,6 cm. $= 0^m,036$, y cuya longitud es de unos 6 metros, tendrá un volumen

$$V_4 = 0,0010179 \times 6 = 0^{m^3},006107.$$

Las bielas dan una longitud aproximada de $2 \times 2,1 = 4^m,2$ y suponiendo, para compensar otras pequeñas omisiones, que la sección recta sea constante é igual á la máxima que hemos calculado, el volumen correspondiente será

$$V_5 = 0,002916 \times 4,2 = 0^m,012247.$$

Aun cuando no sea pieza necesaria, si para evitar el pandeo del tirante central se emplea un pendolón de 1,6 centímetros de diámetro, como su sección recta vale $0^{m^2},000201$, y su longitud es de unos $3^m,85$, el volumen será

$$V_6 = 0,000201 \times 3.85 = 0^{m^3}000774.$$

Sumando los volúmenes calculados, tendremos:

$$
\begin{array}{lll}
 & V_1 & = 0^{m^3},109783 \\
 & V_2 & = 0^{m^3},014375 \\
 & V_3 & = 0^{m^3},005668 \\
 & V_4 & = 0^{m^3},006107 \\
 & V_5 & = 0^{m^3},012247 \\
 & V_6 & = 0,^{m^3}000774 \\
\hline
\text{Suma.....} & V & = 0^{m^3},148954
\end{array}
$$

Si asignamos 7800 kilogramos al peso del metro cúbico de hierro, el peso propio P' de una forma será

$$P' = 0,148954 \times 7800 = 1161,8 \text{ kg}.$$

Recordando que la carga que gravita sobre una forma, según antes hemos visto, es de 14472,5 kilogramos, la carga total

P resultará igual á

$$P = 14472{,}5 + 1161{,}8 = 15634{,}3 \text{ kg.}$$

Vemos, pues, que el valor P = 15600 kilogramos que habíamos aceptado, no necesita en rigor rectificación alguna, toda vez que la diferencia que ofrece con el que acabamos de calcular es insignificante.

626. **Influencia de la temperatura.**—Las armaduras de hierro, cuando no quedan suficientemente resguardadas de los cambios exteriores de temperatura, experimentan modificaciones, que deben tenerse en cuenta, tanto en la longitud de sus diferentes piezas como en las tensiones totales que éstas desarrollan.

En efecto: sea l_1 la longitud de una pieza cualquiera, en la época de la colocación ó montaje de la armadura, cuando la temperatura era t_α, y l' la longitud que adquiere dicha pieza en otra época, cuando la temperatura es t_β.

Si llamamos c al coeficiente de dilatación lineal del metal de que se trate, es decir, á la variación de longitud de una barra de un metro de largo á 0°, por cada grado centigrado, es claro que si representamos por $t = t_\alpha - t_\beta$, la diferencia de las temperaturas extremas que se consideran, la variación de la longitud correspondiente Δl_1 tendrá por expresión

$$\Delta l_1 = l_1 ct$$

y será por tanto

$$l' = l_1 (1 + ct).$$

Para otra pieza cualquiera, cuyas longitudes correspondientes á las expresadas temperaturas sean l_2 y l'', tendremos también

$$l'' = l_2 (1 + ct),$$

de donde

$$\frac{l'}{l''} = \frac{l_1}{l_2},$$

lo que prueba, como debía suponerse por ser evidente, que las longitudes nuevas son proporcionales á las antiguas, y por consiguiente, que la armadura, al pasar por sus diversos estados de magnitud, se conservará siempre semejante á la figura primitiva.

Esto sucederá, indudablemente, cuando nada se oponga á que las dilataciones ó contracciones de las piezas se realicen con entera libertad; y entonces las tensiones desarrolladas no experimentarán variación alguna, porque aquellas sólo dependen de la carga total, que sigue siendo la misma, y de los ángulos que forman las diversas piezas entre sí, los cuales tampoco han sufrido alteración.

Así, por ejemplo, si suponemos que la armadura se colocó en verano, cuando la temperatura t_α era igual á $+35°$, y que en invierno desciende aquella hasta $t_\beta = -10°$, la variación máxima será

$$t = t_\alpha - t_\beta = 35° + 10° = 45°.$$

En tal supuesto, y recordando que el coeficiente de dilatación lineal del acero es, próximamente

$$c = 0{,}000012,$$

la longitud del tirante horizontal, formado por las barras AE, EG y GC, que á la temperatura t_α era $l = 16^m$, habrá sufrido un acortamiento á virtud del cambio de temperatura, $t = 45°$, que será

$$\Delta l = lct = 16 \times 0{,}000012 \times 45$$

ó bien

$$\Delta l = 0^m{,}00864.$$

Para que este acortamiento pueda realizarse por completo, es necesario que los extremos inferiores de los pares obedezcan á la contracción del tirante, moviéndose libremente sobre las superficies de apoyo en que descansan.

El desplazamiento de cada uno de los extremos, será en este caso

$$\frac{1}{2}\Delta l = 0^{m},00432.$$

Para lograr esto, se disponen los pares como indica la figura 325, de modo que descansando las cajas en que aquellos se alojan sobre *rodillos* llamados *de dilatación*, sean fáciles tales desplazamientos; en cuyo caso, como ya hemos dicho, las tensiones totales de todas las piezas no experimentarán variación alguna.

Pero veamos lo que sucedería si los pares quedasen invariablemente unidos ó amarrados á los apoyos, (muros, columnas ó piés derechos) y bajo el supuesto de que la luz de la crujía sea absolutamente fija.

En este caso, no pudiendo contraerse el tirante la cantidad Δl, experimentará sobre su tensión normal K, un aumento K′ de tensión unitaria, que vamos á calcular.

Recordaremos que oportunamente hemos definido el coeficiente de elasticidad, diciendo que es la relación constante que hay, dentro de los límites de la elasticidad, entre la carga y deformación proporcionales, es decir, entre la tensión por unidad de sección y la deformación por unidad de longitud, y como ahora esta tensión la representamos por K′ y la deformación por unidad de longitud es $\frac{\Delta l}{l}$, tendremos

$$E = \frac{K'}{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)},$$

de donde

$$K' = \frac{E}{l}\Delta l;$$

pero antes hemos establecido que

$$\Delta l = lct;$$

luego será

$$K' = Ect.$$

En el caso que nos ocupa es: $E = 2.000000$; $c = 0,000012$ y $t = 45$; y por lo tanto el aumento de tensión unitaria que experimente el tirante, en la imposibilidad de contraerse la cantidad $\Delta l = 0^{m}, 00864$, será:

$$K' = 2.000000 \times 0,000012 \times 45 = 1080 \text{ kg.}$$

Pero como esta pieza se había calculado para una tensión máxima de $K = 1000$ kilogramos por cm^2, el coeficiente de trabajo resultante del cambio supuesto de temperatura será

$$K_t = K + K' = 2080 \text{ kg. por } cm^2.$$

valor considerable que por estar muy cerca del límite de elasticidad no debe admitirse.

En la práctica, la hipótesis de invariabilidad de la luz, ó de indeformabilidad absoluta de los apoyos no se realiza; porque éstos, cualquiera que sea su naturaleza, ceden en parte á la acción del tirante, y así se explica que el valor de K_t no llegue al límite calculado.

Otras veces, los pares descansan libremente sobre platinas ó losas de apoyo, y así pueden resbalar á lo largo de ellas cuando la acción del tirante es capaz de vencer el rozamiento que desarrollan las superficies en contacto.

En el caso de la armadura que nos ocupa, la carga normal que obra sobre cada apoyo es $\frac{1}{2} P = \frac{15600}{2} = 7800$ kilogramos, y aceptando un coeficiente de frotamiento $f = 0,6$, la resistencia que ha de vencer el tirante al acortarse será

$$\frac{1}{2} Pf = 7800 \times 0,6 = 4680 \text{ kg.}$$

Recordando que la fuerza F que solicita al tirante cuando la temperatura es t_x, vale $F = 11700$ kilogramos; y siendo P la carga total sobre la armadura, la ecuación de resistencia para el cálculo del tirante AE y su simétrico, sería en tal supuesto,

$F + \frac{1}{2} Pf = K\omega$; ó haciendo $K = 1000$,

$$11700 + 4680 = 1000\,\omega;\ \text{de donde}\ \omega = \frac{16380}{1000} = 16{,}38\ \text{cm}^2,$$

que corresponde á un diámetro, $d = 4{,}47$ centímetros; y teniendo en cuenta el aumento necesario que exijen las roscas en que terminan los extremos, resultará $d = 5{,}1$ centímetros, dimensión que cuando se considera exagerada motiva el empleo de los rodillos de dilatación.

627. Rodillos de dilatación.—Los rodillos de dilatación, como indica la figura 326 quedan comprendidos entre dos planchas; y suponiendo que unos y otras sean de la misma naturaleza, vamos á demostrar que entre el número n de rodillos, su longitud l, la carga total P que entre todos se reparte, su radio r, el coeficiente de elasticidad E y el de seguridad K, ha de verificarse, como condición de resistencia, la relación

$$r \geqq \frac{3}{8}\,\frac{\left(\frac{P}{n}\right)}{lK}\sqrt{\frac{E}{K}}.$$

Fig. 331.

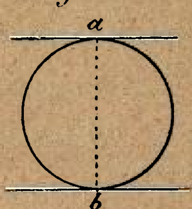
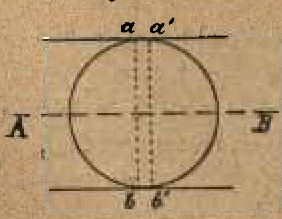


Fig. 332.

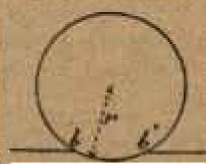


En efecto; consideremos un solo rodillo, de sección circular de radio r y de longitud l. Antes de la compresión, y si las planchas son horizontales, el contacto se verificará según las generatrices opuestas proyectadas en a y b, (figura 331).

Pero una vez comprimido por la carga correspondiente $\frac{P}{n}$, el rodillo y las planchas se deforman y el contacto se verifica según superficies muy estrechas, proyectadas según aa' y bb' (figura 332), y cuya forma hipotética determinaremos por las consideraciones siguientes. Como los semicilindros separados por el plano diametral AB paralelo á las planchas, están en condiciones simétricas, consideraremos uno de ellos, por ejemplo, el inferior.

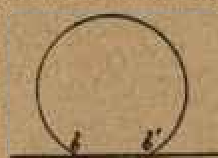
Si el rodillo fuera indeformable y la plancha no, ésta cedería y la superficie de contacto sería cilíndrica de radio r (figura 333).

Fig. 333.



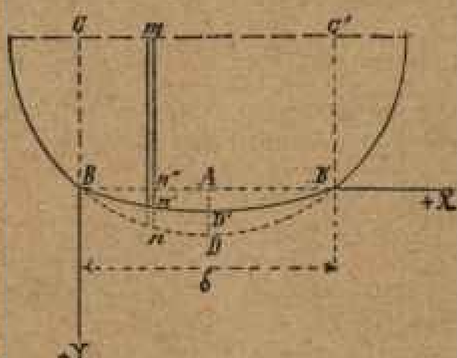
Si por el contrario, el rodillo fuera deformable y la plancha indeformable, entonces cedería el rodillo aplastándose (figura 334), y la superficie de contacto sería plana.

Fig. 334.



Pero suponiendo que el cilindro y la plancha sean de la misma naturaleza, admitiremos que se deforman simultáneamente por partes iguales. En este caso (figura 335), la superficie de contacto será cilíndrica, pero no de radio r, sino la que tiene por directriz la línea media BD'B' del segmento BDB'B, en el cual las ordenadas verticales representan la suma de las deformaciones iguales entre sí $nn' = n'n''$ que experimentan las fibras mn del rodillo y las correspondientes de la plancha.

Fig. 335.



Teniendo en cuenta que la superficie de contacto, cuyo ancho BB' representaremos por δ, es muy estrecha, admitiremos que las distancias CB y C'B' entre el plano diametral horizontal y los puntos B y B′ son sensiblemente iguales á r.

Por ser AD la proyección sobre el diámetro vertical de la cuerda BD, (no representada en la figura), tenemos

$$(\mathrm{BD})^2 = 2r \times \mathrm{AD}.$$

Además $(\mathrm{BD})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{AD})^2 = \frac{1}{4}\delta^2 + (\mathrm{AD})^2$, luego

$$\mathrm{AD} = \frac{1}{8}\,\frac{\delta^2}{r} + \frac{(\mathrm{AD})^2}{2r}$$

Pero dada la pequeñez de AD, su cuadrado y con mayor razón el término $\frac{(\mathrm{AD})^2}{2r}$, puede despreciarse; y así podremos admitir que $\mathrm{AD} = \frac{1}{8}\,\frac{\delta^2}{r}$; y como $\mathrm{AD}' = \frac{1}{2}\,\mathrm{AD}$, tendremos también

$$\mathrm{AD}' = \frac{1}{16}\,\frac{\delta^2}{r}$$

La carga $\frac{\mathrm{P}}{n}$ se distribuye con arreglo á una cierta ley entre todas las capas elementales de fibras, tales como la mn. Sobre una cualquiera de estas, la carga elemental que produce el acortamiento $y = n'n'' = nn'$, será $d\left(\frac{\mathrm{P}}{n}\right)$.

Ahora bien; como el área de la sección transversal del haz de fibras que consideramos es ldx, y la deformación proporcional es $\frac{y}{r}$, tendremos

$$d\left(\frac{\mathrm{P}}{n}\right) = \frac{\mathrm{E}}{r}\,ly\,dx, \qquad (a)$$

y por tanto

$$\frac{\mathrm{P}}{n} = \frac{\mathrm{E}}{r}\,l\int_0^{\delta} y\,dx.$$

Pero esta integral no representa otra cosa que el área limitada por la cuerda BB′ y por la curva BD′B′; y como la flecha AD′ es muy pequeña, podemos considerar que dicha curva se confunde sensiblemente con un arco de parábola ordinaria; y así podremos admitir que

$$\int_0^{\delta} y\,dx = \frac{2}{3}\,\delta \times \mathrm{AD}';$$

y recordando que $\mathrm{AD}' = \frac{1}{16}\,\frac{\delta^2}{r}$, tendremos finalmente

$$\frac{\mathrm{P}}{n} = \frac{\mathrm{E}l}{24}\,\frac{\delta^3}{r^2}. \qquad (1).$$

La expresión general de la tensión unitaria, que llamaremos K_x, es según se deduce de la ecuación (*a*),

$$\mathrm{K}_x = \frac{d\left(\frac{\mathrm{P}}{n}\right)}{l\,dx} = \frac{\mathrm{E}}{r}\,y.$$

Esta expresión será máxima para $y = \mathrm{AD}' = \frac{1}{16}\,\frac{\delta^2}{r}$; y como para la seguridad de la resistencia en la región peligrosa es necesario que el máximo de K_x no exceda del coeficiente de seguridad K, deberá satisfacerse la condición

$$\frac{\mathrm{E}}{16}\,\frac{\delta^2}{r^2} \leqq \mathrm{K}. \qquad (2).$$

Elevando al cuadrado la ecuación (1) y al cubo la condición (2) tendremos

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{n}\right)^2 = \frac{\mathrm{E}^2 l^2}{3^2 \times 2^6} \times \frac{\delta^6}{r^4} \quad (1') \qquad \mathrm{K}^3 \geqq \frac{\mathrm{E}^3}{2^{12}} \times \frac{\delta^6}{r^6} \quad (2').$$

De la ecuación (1′) se saca

$$\delta^6 = \frac{3^2 \times 2^6 \times \left(\frac{\mathrm{P}}{n}\right)^2 r^4}{\mathrm{E}^2\, l^2}.$$

y sustituyendo este valor de δ^6 en la expresión (2') resultará

$$K^2 \geqq \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \frac{\left(\frac{P}{n}\right)^2 E}{l^2 r^4},$$

ó bien

$$r^4 \geqq \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{\left(\frac{P}{n}\right)^2 E}{l^2 K^2},$$

de donde

$$r \geqq \frac{3}{8} \frac{\left(\frac{P}{n}\right)}{l K} \sqrt{\frac{E}{K}} \qquad (\alpha)$$

como queríamos demostrar.

Esta fórmula tiene algo de empírica; porque se funda en una hipótesis, acerca de la manera como se efectúan las deformaciones del rodillo y de la plancha, que no tiene la necesaria justificación; pero como en la práctica conduce á resultados aceptables, no hay inconveniente alguno en emplearla.

Dicha fórmula nos dice que el material más conveniente es aquel en que E tenga el menor valor posible, y K por el contrario, un valor grande. Ambas condiciones las reune la fundición y por eso suele preferirse.

Utilicemos la fórmula (α) para determinar el radio de los rodillos de dilatación que indica la figura 326. Tenemos

$$n = 2, \qquad \frac{P}{n} = \frac{7800}{2} = 3900 \text{ kg.} \qquad E = 1.000000, \qquad l = 30 \text{ cm.}$$

Por tanto el menor valor que debe darse al radio r será, haciendo K = 800

$$r = \frac{3}{8} \times \frac{3900}{30 \times 800} \sqrt{\frac{1.000000}{800}} = 2,15 \text{ cm.}$$

Así pues, pudiendo ser el diámetro igual ó mayor que 4,3 centímetros, aceptaremos

$$d = 5 \text{ cm.}$$

Finalmente, para la resistencia del muro, que supondremos de ladrillo ordinario, se necesita que la presión total que la armadura transmite se reparta sobre una superficie bastante extensa, de modo que la presión por centímetro cuadrado no exceda, en este caso, de 5 kilogramos.

En la figura 326 aparece la plancha de apoyo con una superficie de $38 \times 50 = 1900$ cm^2.

El coeficiente de trabajo de la fábrica del muro será, recordando que la compresión que recibe es de 7800 kilogramos,

$$K = \frac{7800}{1900} = 4{,}1 \text{ kg. por cm}^2 \text{. próximamente,}$$

valor perfectamente aceptable.

CIMBRAS DE MADERA

628. Las cimbras de madera son verdaderas armaduras, sobre cuya cubierta, compuesta de tablas ó listones llamados *costillas,* se ejecuta la fábrica de las bóvedas, constituyendo, por decirlo así, el molde de estas obras.

Las diversas *formas* ó *cerchas* de una cimbra quedan enlazadas entre sí, no solamente por las costillas, sino por *riostras* que aseguran la verticalidad de las primeras, y, por tanto, la invariabilidad del conjunto.

El estudio de las cimbras es completamente análogo al de las armaduras de madera; pero así como en éstas las fuerzas exteriores que hemos considerado eran siempre verticales, en las cimbras tales fuerzas se considerarán por lo común normales al intrados. De suerte que, en realidad, el único problema nuevo que ahora tenemos que resolver se reduce á determinar las cargas ó fuerzas exteriores normales al intrados que podemos suponer aplicadas á los diversos nudos.

Si la bóveda fuera muy rebajada, puede considerarse sin gran error que las fuerzas exteriores son verticales, y cualquiera de ellas, con la aproximación necesaria, se calcularía del modo siguiente: Sea

δ el peso de la unidad de volumen de la fábrica de la bóveda;

d la distancia entre cerchas ó cuchillos;

c el desarrollo de la línea media de la bóveda comprendida entre dos nudos consecutivos;

e', e'' el espesor medio de la bóveda en los macizos anterior y posterior al nudo de que se trate;

F valor de la fuerza exterior que se quiere calcular, aplicada sobre dicho nudo.

La expresión de F, suficientemente aproximada, será

$$F = \delta dc \frac{e' + e''}{2}$$

Y si la bóveda fuera de espesor constante e, sería

$$F = \delta dce.$$

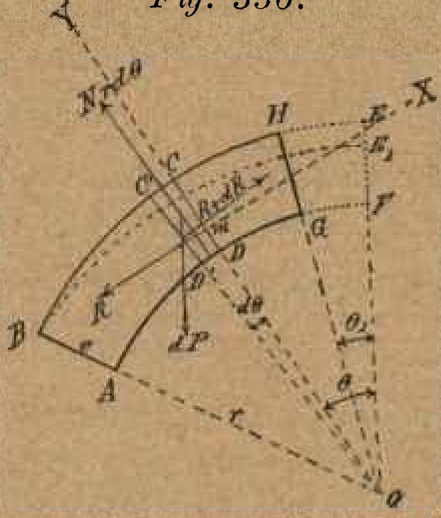
Si, por el contrario, la bóveda no es muy rebajada, la determinación de las cargas normales al intrados sobre cada nudo puede hacerse por un procedimiento racional ó siguiendo un método expedito, y, por tanto, de carácter empírico, que ya veremos si es aceptable.

629. Método racional para determinar las fuerzas exteriores.—Fúndase el método racional en el conocimiento de la ley de variación de las presiones normales unitarias que se desarrollan sobre la cimbra, en cualquier fase de la construcción de la bóveda, admitiendo, como es práctica usual, que ésta se eleva simétricamente, avanzando desde los arranques hacia la clave.

En beneficio de la resistencia y para facilitar el cálculo, supondremos siempre que el trasdos es paralelo al intrados, porque cuando no haya de serlo en realidad, admitiremos para la resolución del problema actual un trasdos hipotético que parta de los arranques del verdadero y sea paralelo al intrados. De suerte que e representará el espesor efectivo en la clave para bóvedas de espesor constante, y el de los arranques, para aquellas cuyo espesor sea variable.

Sea ABE_1F el perfil verdadero de una semibóveda (figura 336) y ABEF el que admitimos para la resolución del problema que nos ocupa, y consideremos, como de costumbre, una zona de bóveda cuya longitud sea igual á la unidad.

Fig. 336.



Sea D un punto cualquiera de la cimbra y CD la junta correspondiente, que forma con la vertical el ángulo θ; y supongamos que la construcción alcanza una altura cualquiera, y llega, por ejemplo, hasta la junta GH, definida por el ángulo θ_1 que forma con la vertical.

La junta C'D', infinitamente próxima á la CD, formará con ésta el ángulo $d\theta$, y el peso de la dovela elemental que entre ambas limitan, será $dP = \delta \frac{(CC'+DD')e}{2}$, siendo δ el peso de la unidad de volumen de la fábrica; pero si r es el radio del intrados, tendremos $CC' = (r+e)d\theta$ y $DD' = rd\theta$; y, por tanto, la expresión de dP, será

$$dP = \delta\left(r + \frac{e}{2}\right) ed\theta.$$

Si llamamos R á la resultante de las presiones normales que el macizo CDGH transmite al plano CD, claro es que $R + dR$ será la reacción normal desarrollada en el plano C′D′.

La cimbra, en el punto D desenvolverá una reacción normal unitaria, que llamaremos N; y, por tanto, la reacción desarrollada en el rectángnlo elemental proyectado en DD′ será $Nrd\theta$.

La dovela elemental que consideramos está en equilibrio bajo la acción simultánea de las cuatro fuerzas R, $R + dR$, $dP = \delta\left(r + \frac{e}{2}\right) ed\theta$ y $Nrd\theta$; por consiguiente las sumas de sus proyecciones sobre los ejes perpendiculares mC y mR serán separadamente nulas.

Considerando como positivos los sentidos de las fuerzas $R + dR$ y $Nrd\theta$, tendremos las siguientes ecuaciones de equilibrio.

Con relación al eje mX

$$-R + (R + dR)\cos d\theta - \delta\left(r + \frac{e}{2}\right) e \operatorname{sen} \theta d\theta = 0,$$

pero como lim. $\cos \Delta\theta = 1$, esta ecuación se reduce á la siguiente:

$$dR - \delta\left(r + \frac{e}{2}\right) e \operatorname{sen} \theta d\theta = 0. \qquad (1)$$

Con relación al eje mY,

$$Nrd\theta + (R + dR)\, d\theta - \delta\left(r + \frac{e}{2}\right) e \cos \theta d\theta = 0,$$

y despreciando el infinitamente pequeño de segundo orden $dRd\theta$, y suprimiendo el factor común $d\theta$, será

$$Nr + R - \delta\left(r + \frac{e}{2}\right) e \cos \theta = 0. \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se deduce

$$N = \frac{\delta\left(r + \frac{e}{2}\right) e \cos \theta - R}{r}. \qquad (3)$$

De la (1)

$$R = \delta \left(r + \frac{e}{2}\right) e \int_{\theta_1}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta,$$

y efectuando la integración

$$R = \delta \left(r + \frac{e}{2}\right) e (\cos \theta_1 - \cos \theta). \qquad (4)$$

Este valor de R sustituído en la expresión (3), nos da, por último,

$$N = \delta \left(e + \frac{e^2}{2r}\right) (2 \cos \theta - \cos \theta_1). \qquad (5)$$

Tal es la ley según la cual varía la presión normal unitaria sobre la cimbra en sus diferentes puntos, cualquiera que sea el estado de la obra, definido por el ángulo θ_1.

Claro es que el máximo de N corresponderá al caso en que $\theta = 0$ y $\theta_1 = 0$, y en la práctica cuando la obra esté á punto de terminarse y antes de que el cierre de la bóveda sea completo.

No hay para que decir que, como los prismas que gravitan sobre la cimbra tienen todos por altura la distancia *d* entre cerchas, la presión normal por unidad de arco de intrados, que en las aplicaciones llamaremos también presión unitaria, será N*d*.

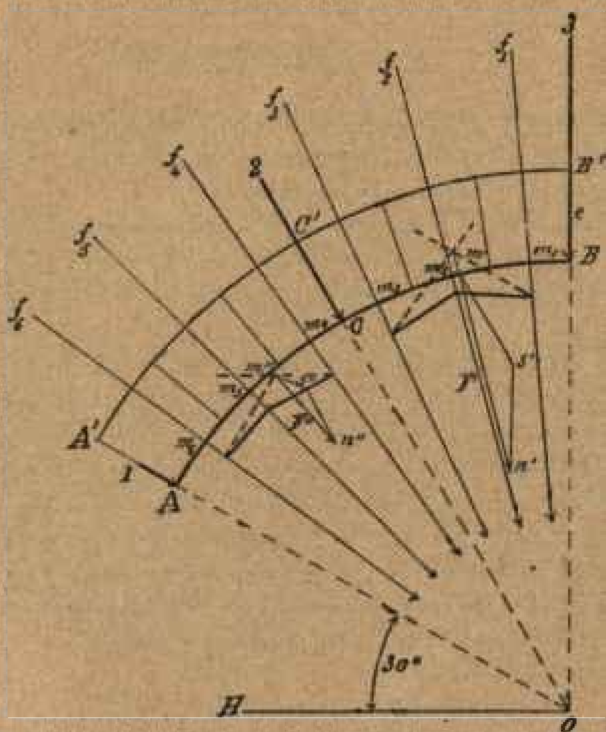
Hay que observar, atendiendo á la expresión (5) que cualquiera que sea el valor de θ_1, el máximo de N corresponde evidentemente á la condición $\theta = \theta_1$. Si, pues, θ_1 conserva un valor fijo, es decir, si consideramos una fase determinada de la obra y θ crece, N disminuye; y N será igual á cero cuando

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \cos \theta_1.$$

A este valor particular de θ lo llamaremos θ_2; y es claro que si $\theta > \theta_2$ los valores que se obtengan para N serán negativos, lo que parece probar que entre la cimbra y la bóveda, en aquellas regiones en que el valor de N es negativo, habrán de desarrollarse esfuerzos de extensión; pero como esto es imposible porque aquéllas son completamente independientes y no las une ninguna fuerza de cohesión, será forzoso admitir que para todo punto del intrados en que se verifique que $\theta \geqq \theta_2$, la bóveda no carga, sobre la cimbra, y, por tanto, que la presión normal sobre ésta es nula.

Si la bóveda estuviera á punto de cerrarse, y por consiguien-

Fig. 337.

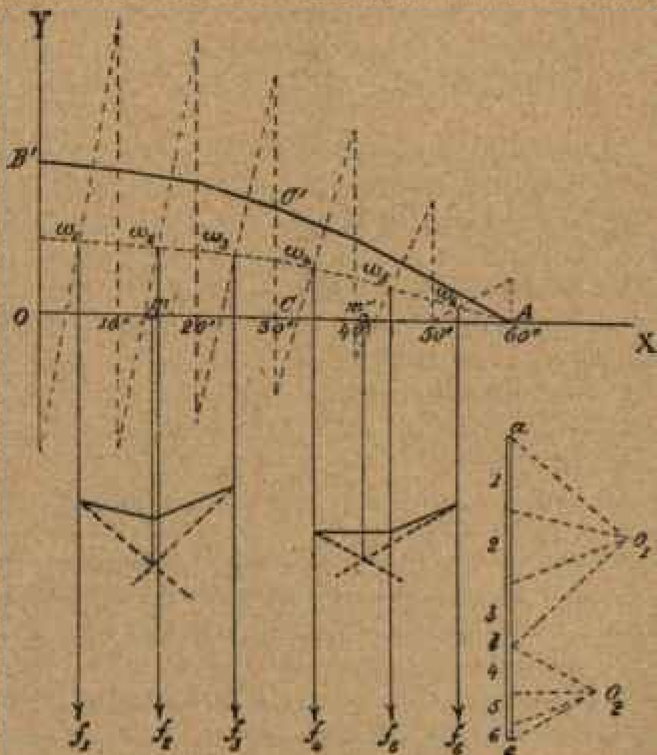


te pudiéramos establecer que $\theta_1 = 0$, la expresión de N sería entonces

$$N = \delta\left(e + \frac{e^2}{2r}\right)(2\cos\theta - 1), \qquad (6)$$

y será N = o si $\cos \theta = \frac{1}{2}$, ó lo que es lo mismo si $\theta = 60°$. En este caso podemos afirmar que, si la cimbra es semicircular, en todo el arco de 30°, á contar del arranque y comprendido por tanto entre $\theta = 90°$ y $\theta = 60°$, la presión normal unitaria será

Fig. 338.



nula; y á medida que θ decrezca, variando desde 60° hasta 0°, N crecerá variando de una manera continua desde o hasta

$$N = \delta\left(e + \frac{e^2}{2r}\right).$$

Resuelta, como hemos visto, la primera parte del problema, es necesario ahora determinar las fuerzas normales, que podemos suponer aplicadas á los diversos nudos, originadas por la carga total, repartida en la semicimbra con arreglo á la ley que expresa la ecuación (5).

Consideremos para fijar las ideas, la semibóveda rebajada que representa la figura 337, siendo el ángulo AOH de 30°. Los límites de θ serán, por tanto, 0° y 60°.

Si en un sistema de ejes rectangulares (figura 338) tomamos como abscisas los desarrollos de los arcos de intrados, cuyo radio es r, entre los límites 0 y $\frac{\pi r}{3}$, es decir, entre los límites 0° y 60° de θ, y levantamos como ordenadas los valores correspondientes de Nd, calculados por la ecuación (5), obtendremos un lugar geométrico que será la curva de presiones normales unitarias para el arco AB de cimbra (figura 337), en que tales presiones son positivas y tienen, por lo tanto, existencia real.

El área elemental ydx de esta curva (figura 338), representa para cada valor de x la presión normal elemental que se ejerce sobre el elemento correspondiente ds de arco de cimbra; pero no podemos decir que una porción finita cualquiera de área $\int_{x_0}^{x} ydx$, ni menos el área total $\int_{0}^{\frac{\pi r}{3}} ydx$, represente la resultante normal sobre el arco correspondiente, porque para ello sería necesario que las presiones elementales fueran paralelas, y no lo son, puesto que siendo normales al intrados, sus direcciones son distintas.

Como no intentamos resolver de una manera rigorosa esta segunda parte del problema, admitiremos que el área, limitada por la curva de presiones normales unitarias, dos ordenadas próximas cualesquiera y el eje de abscisas, representa la resultante normal que se ejerce sobre el arco de cimbra correspondiente. El punto de aplicación quedará definido, con la necesaria aproximación, por la abscisa del centro de gravedad del área indicada.

Supongamos, pues, para fijar las ideas, que la semicimbra presente un solo nudo intermedio C (figura 337), equidistante de los extremos A y B, y dividamos cada uno de los arcos iguales BC y CA en el mismo número de partes iguales, por ejemplo, en tres. El arco BA quedará dividido en seis partes iguales, y como el arco BA $= \frac{\pi r}{3}$, el desarrollo de cada arco parcial será $a = \frac{\pi r}{18}$.

Si calculamos ahora los valores de las ordenadas Nd, que corresponden á las abscisas 0, a, $2a$,... $6a$, dando para ello á θ en la expresión de Nd los valores 0°, 10°, 20°..... 50°, 60°, construiremos la línea poligonal que indica la figura 338, la cual diferirá tanto menos de la curva de presiones unitarias, cuanto menor sea el valor de a y mayor, por tanto, el número de partes iguales en que se divida el arco total BA.

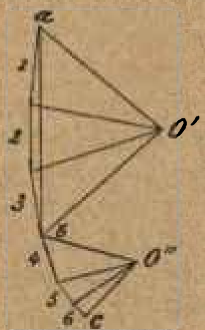
Así resultarán seis áreas parciales. Las tres primeras ω_1, ω_2, ω_3, corresponden al arco BC y las tres últimas ω_4, ω_5, ω_6 al arco CA. Los valores numéricos de estas áreas representan la intensidad de las resultantes parciales que obran sobre cada una de las partes en que hemos dividido la semicimbra. El punto de aplicación de cada una, quedará definido por la abscisa del centro de gravedad del área respectiva.

Como estas determinaciones son muy fáciles, pues las figuras de que se trata son diversos trapecios y un triángulo, los puntos de aplicación sobre la cimbra de las resultantes normales parciales serán los m_1, m_2..... m_6 (figura 337), y estas quedarán gráficamente representadas por las lineas $f_1 = \omega_1$, $f_2 = \omega_2$..... $f_6 = \omega_6$ (figura 338).

Habiendo así obtenido un sistema de fuerzas normales al intrados, equivalente sin gran error á la suma total de presiones elementales, el problema queda reducido á descomponer el grupo de fuerzas f_1, f_2, f_3 en dos componentes normales, una aplicada en B y otra en C, y el grupo f_4, f_5, f_6 en otras dos, aplicada la primera en C y la segunda en A (figura 337), problema que ya sabemos resolver.

Para esto construiremos el polígono 1. 2. 3 (figura 339) de las fuerzas del primer grupo y un polígono funicular relativo á un polo arbitrario; por el punto de intersección de los lados extremos, trazaremos una paralela á la suma geométrica *ab* de las fuerzas dadas, y el punto m' en que corte al intrados será el de aplicación de la resultante $F' = ab$ [a] (figura 337). Sus componentes paralelas á los radios OB y OC, serán $s'n'$ y $m's'$, la primera aplicada en B y la segunda en C. Claro es que del arco simétrico al BC, resultará en B aplicada otra componente normal igual á $s'n'$, de donde resulta que la fuerza que podemos suponer aplicada en B, es igual á $2s'n'$.

Fig. 339.



Haciendo exactamente lo mismo con el grupo de fuerzas zas f_4, f_5, f_6, obtendremos la resultante F'', y en seguida sus componentes normales, $s''n''$ aplicada en C y $m''s''$ en A.

De suerte que, en definitiva, las fuerzas **1, 2, 3** que podemos suponer aplicadas á los nudos A, C, B de la cimbra, son:

$$\mathbf{1} = m''s'', \qquad \mathbf{2} = s''n'' + m's', \qquad \mathbf{3} = 2s'n',$$

quedando así resuelto el problema que nos proponíamos.

630. Observación.—Como no es grande la diferencia entre la suma geométrica y la suma aritmética de las fuerzas que componen los grupos que hemos considerado, pudieran utilizarse las líneas de acción de la figura 338, y proceder con la transformada del intrados del mismo modo que procedimos con éste en la figura 337, para determinar las resultantes parciales F' y F'' y sus puntos de aplicación.

(*a*) Las resultantes F' y F'', deben pasar por el centro del intrados, porque sus componentes concurren en dicho centro.

Los resultados obtenidos serán erróneos por exceso; pero esto importa poco, porque las cimbras conviene siempre calcularlas con un exceso de resistencia, á fin de obtener sistemas de gran rigidez.

Las construcciones necesarias se indican en la expresada figura 338, y son las mismas en el fondo que las que anteriormente hemos explicado.

631. Método expedito.—Fundándonos en la observación que precede, puede simplificarse la determinación aproximada y errónea por exceso de las fuerzas exteriores, procediendo de la manera siguiente:

Sean M' y M'' (figura 340) los macizos que cargan el primero sobre el arco BC y el segundo sobre el CA de la cimbra; m' y m'' los centros de gravedad de aquéllos; $P' = m'a'$ y $P'' = m''a''$ la representación gráfica de sus pesos, con arreglo á una escala de fuerzas convenientemente elegida.

Descompongamos el peso P' en dos fuerzas, una $m'n'$ normal al intrados, y otra $m'b'$ perpendicular al radio m'O. La primera equivale á dos componentes, también normales al intrados, una aplicada en C y otra en B. Para obtener éstas no hay más que trazar por los extremos de $m'n'$, paralelas á los radios OB y OC y resultará el triángulo $m's'n'$, en el cual representan; $m's'$ la componente aplicada en C y $s'n'$, la aplicada en B.

Sobre el macizo M'' obran las fuerzas $P'' = m''a''$ y la componente $m_1''b_1' = m'b'$. La resultante será $m_1''r$. Trasladada al punto en que su línea de acción corta al radio prolongado que pasa por el centro de gravedad m'', y descompuesta perpendicularmente al intrados y al radio m''O, la carga normal sobre la cimbra en el tramo AC será $m_2''n''$. Las componentes aplicadas á los nudos contiguos, normales al intrados, se determinan lo mismo que antes, y serán: $m_2''s''$ la aplicada en A, y $s''n''$ la aplicada en C.

Como en la otra semibóveda sucede exactamente lo mismo, resulta que las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas en los diversos nudos de la semicimbra, normalmente al intrados, serán:

$$1 = m_2''s'', \qquad 2 = s''n'' + m' s', \qquad 3 = 2s'n'.$$

El procedimiento que acabamos de exponer es inadmisible en teoría, porque, siendo agudos los ángulos $m't$C y $m_2''t'$A, supone esto que los macizos M′ y M″ tienden á resbalar hacia el exterior, á lo largo de las juntas CC′ y AA′, respectivamente; y esto es absurdo, porque aquellos ángulos serán obtusos habiendo rozamiento, ó si no lo hubiera serían rectos á lo sumo.

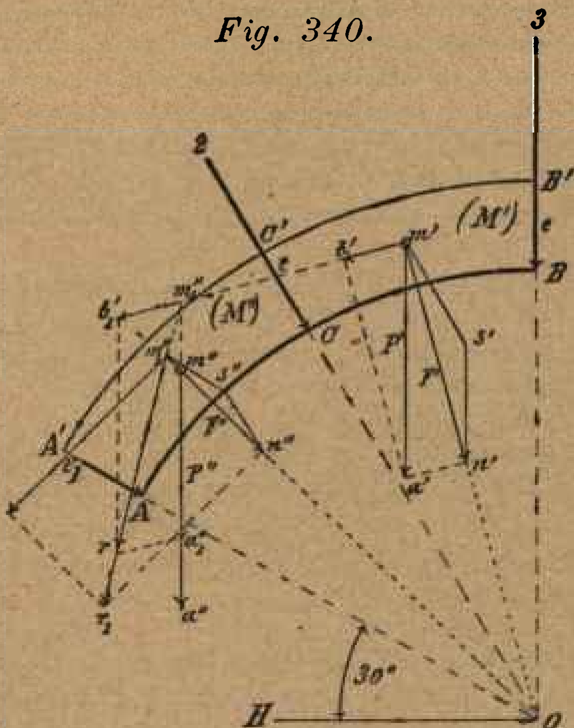
Si admitiéramos, con algunos autores, que las reacciones formaran un ángulo de unos 15° con la normal á la junta correspondiente, entonces el ángulo $m'b'a'$ no sería recto, sino obtuso; la figura $m'b'a'n'$ no sería un rectángulo, sino un paralelógramo, y el punto t caería más cerca del intrados que antes, la componente $m'b'$ sería mayor, y la $m'n'$ menor. Si el punto t cayera fuera de la junta rebasando el intrados, entonces la descomposición de P′ se haría tomando la arista C de intrados como punto de paso de la resultante de las presiones.

Finalmente, si procediendo así y en lugar de considerar la semibóveda dividida en dos grandes dovelas ó macizos, considerásemos el número de dovelas efectivas si aquélla fuese de sillería, ó macizos del tamaño de dovelas ordinarias si fuera de ladrillo, encontraríamos sin dificultad las resultantes parciales correspondientes á cada uno de los pequeños arcos en que la semicimbra quedara dividida.

Sólo faltaría hallar las resultantes parciales sobre cada tramo separado por nudos contiguos y descomponer aquéllas en las componentes normales aplicadas á dichos nudos; y todo esto lo haríamos de la manera que al principio hemos visto.

Los resultados así obtenidos se acercan á los hallados por el método racional; pero como algunos suelen resultar de menor valor que los que da este último, juzgamos preferible el método expedito, no sólo por la mayor sencillez de las operaciones que lleva consigo, sino porque, respecto á las fuerzas exteriores, no se cometen jamás errores por defecto, y esto ya hemos dicho que es perfectamente aceptable tratándose de las cimbras.

Fig. 340.



Algunos constructores, para simplificar el problema, admiten que la presión normal por unidad de arco de intrados es constante, y la calculan por la expresión

$$Nd = \delta d \left(e + \frac{e^2}{2r}\right)$$

lo que equivale á suponer que la carga normal total está uniformemente repartida; y otros, por último, aceptan para la construcción del diagrama de tensiones que aquellas presiones son verticales; pero ya hemos dicho que esto puede hacerse sin gran error cuando la bóveda es muy rebajada.

632. **Fases de la construcción de la bóveda, que hay que considerar.**—Hay que advertir que en el transcurso de la ejecución de la fábrica, á medida que ésta avanza simétricamente desde los arranques hacia la clave, la tensión máxima unitaria que se desarrolla en algunas piezas no corresponde al caso en que la cimbra esté cargada por completo; y por este motivo conviene determinar las fuerzas exteriores en dos nuevas fases: cuando la carga ocupa las tres cuartas partes de la cimbra y cuando sólo ocupa la mitad; pero entendiendo que tales partes son del arco de cimbra en que las presiones son positivas; y por tanto sólo podrán referirse á la totalidad del arco de intrados cuando éste sea igual ó menor que 120°.

Si el intrados circular estuviera comprendido entre 120° y 180°, entonces las dos nuevas fases que hay que considerar estarán definidas, la primera por $\theta_1 = 15°$ y la segunda por $\theta_1 = 30°$.

Cualquiera que sea el método que se siga, las operaciones son exactamente las mismas que en el caso de la carga completa, que ya hemos estudiado.

La consideración de la carga en los tres estados anteriores, y sobre todo en los dos primeros, cuando es completa y cuando ocupa las tres cuartas partes de la cimbra, es importante, no sólo para tener en cuenta, en el cálculo de las diversas piezas, la mayor tensión á que trabajan, sino para poner en evidencia si algunas tensiones cambian de signo en el transcurso de la ejecución de la bóveda, pues en tal caso es indispensable que las ensambladuras se dispongan de manera que sean capaces de resistir lo mismo á esfuerzos de compresión que á esfuerzos de extensión.

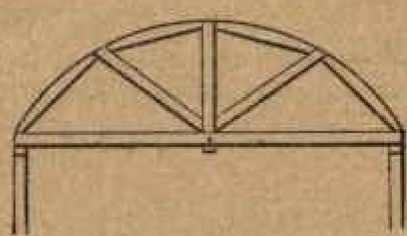
633. **Diagrama de tensiones.**— Conocidas las fuerzas exteriores que podemos suponer aplicadas á los diversos nudos

de la cimbra, dada la organización de ésta y su figura, reducida á los ejes de las piezas fundamentales, prescindiendo, por tanto, de las accesorias, la construcción del diagrama de tensiones totales se hará lo mismo exactamente que si se tratara de una armadura. Nada tenemos, pues, que añadir sobre este particular, porque sería repetir una vez más lo que tantas veces hemos dicho.

Con objeto de fijar las ideas y poder comparar los resultados de los métodos propuestos para determinar las fuerzas exteriores, estudiaremos el siguiente

634. Ejemplo.— Calcular una cimbra organizada, como indica la figura 341, para una bóveda escarzana, cuyo arco de intrados sea de 120°, con los siguientes datos:

Fig. 341.



Distancia entre cuchillos............	$d = 1^m,50$
Peso del metro cúbico de fábrica....	$\delta = 2000$ kg.
Radio del intrados..................	$r = 3^m,00$
Espesor constante de la bóveda.....	$e = 0^m,60$

Considerando solamente la mitad de la cimbra, el desarrollo del arco de intrados será $\dfrac{\pi r}{3} = \dfrac{3,14 \times 3}{3} = 3^m,14$.

Si dividimos este arco en seis partes iguales, cada una valdrá

$$a = \frac{3,14}{6} = 0^m,523.$$

Determinemos ahora las fuerzas exteriores en las tres fases y por los dos métodos indicados.

635. Aplicación del método racional. — Como el arco $\frac{\pi r}{3}$ corresponde al ángulo en el centro $\theta = 60°$, $\frac{\pi r}{18} = a$ será el arco correspondiente al ángulo $\Delta\theta = 10°$; por lo tanto, los valores de θ que hemos de sustituir en la expresión (6) serán: 0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50° y 60°, cuando se trate de la carga completa, es decir, en la primera fase.

En la segunda será $\theta_1 = 15°$, y los valores de θ que hemos de sustituir en la expresión (5) serán: 15°, 20°, 30°, 40°, 50° y 60°.

Finalmente, en la tercera fase haremos $\theta_1 = 30°$, y daremos á θ en la misma expresión (5) los valores 30°, 40°, 50° y 60°.

Tanto en la expresión (5) como en la (6) entra el factor constante $\delta\left(e + \frac{e^2}{2r}\right)$, que vale $2000\left(0{,}60 + \frac{0{,}36}{6}\right) = 1320$; pero como los valores que tenemos que calcular son los de Nd, siendo $d = 1{,}50$, el coeficiente aplicable será en este caso

$$1320 \times 1{,}50 = 1980,$$

y puesto que $\cos 15° = 0{,}966$ y $\cos 30° = 0{,}866$, las fórmulas que hemos de emplear son las siguientes:

Para la primera fase

$$\mathrm{N}d = 1980\,(2 \cos \theta - 1) \qquad (a)$$

Para la segunda fase

$$\mathrm{N}d = 1980\,(2 \cos \theta - 0{,}966) \qquad (b)$$

Para la tercera fase

$$\mathrm{N}d = 1980\,(2 \cos \theta - 0{,}866) \qquad (c)$$

Si convenimos que un milímetro represente 100 kilogramos y en las fórmulas que preceden damos á θ los valores que anteriormente hemos indicado, podremos formar los siguientes cuadros, que servirán para construir el polígono de presiones normales en cada fase.

PRIMERA FASE

θ	cos θ	2 cos θ — 1	Nd		OBSERVACIONES
			Valor en kg.	Representación gráfica en milíms.	
0°	1,000	1,000	1980	19,8	1.ª FASE — La carga ocupa toda la cimbra. — El polígono de presiones normales unitarias es el que indica la figura 336. Véase también la figura 337.
10°	0,985	0,970	1921	19,2	
20°	0,940	0,880	1743	17,4	
30°	0,866	0,732	1449	14,5	
40°	0,766	0,532	1053	10,5	
50°	0,643	0,286	566	5,7	
60°	0,500	0,000	0	0,0	

SEGUNDA FASE

θ	cos θ	2 cos θ — 0,966	Nd		OBSERVACIONES
			Valor en kg.	Representación gráfica en milíms.	
15°	0,966	0,966	1913	19,1	La carga ocupa los $\frac{3}{4}$ de la cimbra. — El polígono de presiones normales unitarias es el que indica la figura 343. Véase también la figura 342.
20°	0,940	0,914	1810	18,1	
30°	0,866	0,766	1517	15,2	
40°	0,766	0,566	1121	11,2	
50°	0,643	0,320	634	6,3	
60°	0,500	0,034	67	6,7	

TERCERA FASE

θ	cos θ	2 cos θ — 0,866	Nd		OBSERVACIONES
			Valor en kg.	Representación gráfica en milíms.	
30°	0,866	0,866	1715	17,2	La carga ocupa la mitad de la cimbra.
40°	0,766	0,666	1319	13,2	—
50°	0,643	0,420	832	8,3	El polígono de presiones normales se indica en la figura 345. Véase también la figura 344.
60°	0,500	0,134	265	2,7	

Los valores de las áreas ω_1, ω_2 ..... etc., midiendo las horizontales con la escala de longitudes (2 centímetros por metro) y las verticales con la escala de fuerzas (1 milímetro por 100 kilogramos); y á cuyos valores llamaremos f_1, f_2, etc., son los siguientes en cada fase.

FUERZAS — Designación.	1.ª fase.		2.ª fase.		3.ª fase.	
	Kg.	Milíms.	Kg.	Milíms.	Kg.	Milíms.
f_1	1020	10,2	0	0	0	0
f_2	958	9,6	487	4,9	0	0
f_3	834	8,3	870	8,7	0	0
f_4	654	6,5	690	6,9	793	7,9
f_5	423	4,2	459	4,6	562	5,6
f_6	148	1,5	183	1,8	287	2,9

Fig. 342.

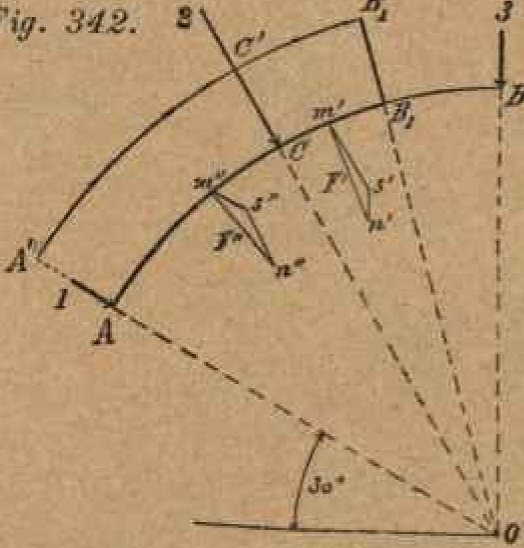


Fig. 343.

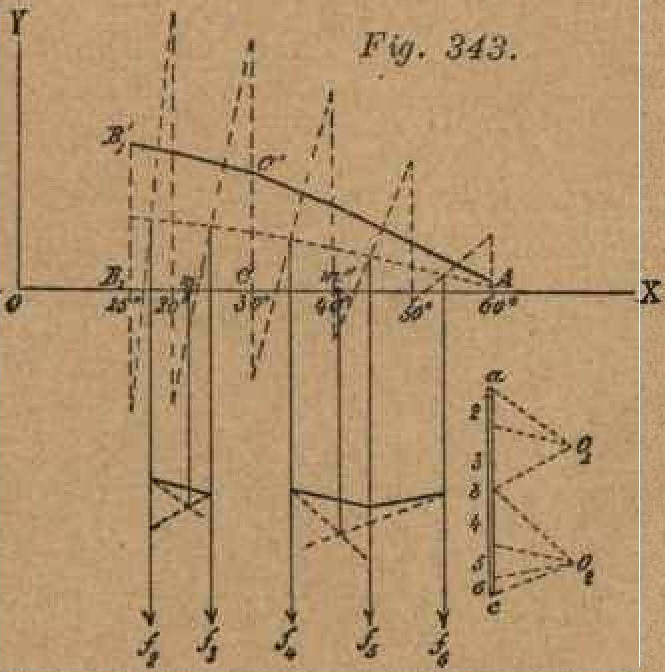
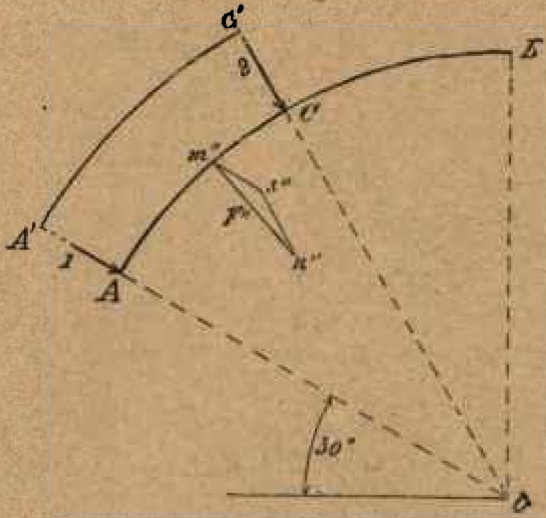
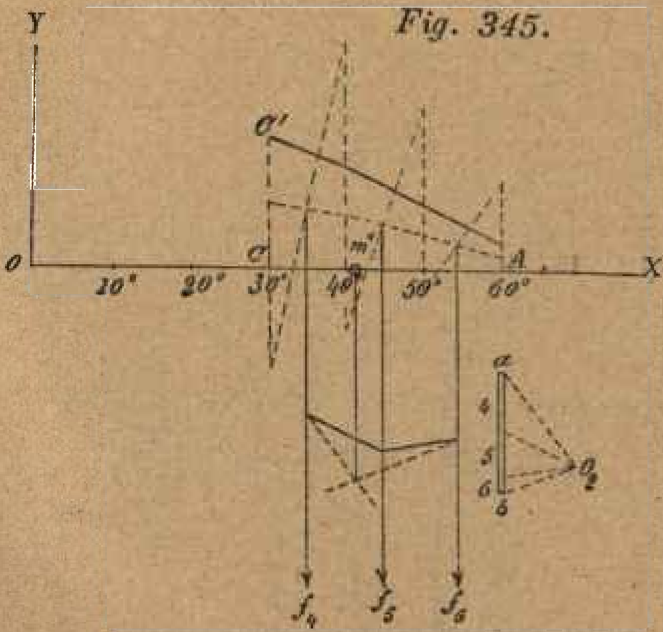


Fig. 344.


C'
E
2
C
m''
x''
F''
n''
A'
1
A
30°
O

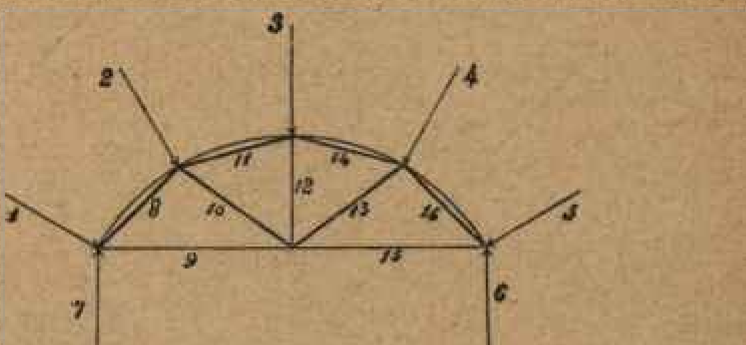

Y
Fig. 345.
C'
C
m''
A
O
X
10°
20°
30°
40°
50°
60°
a
4
5
6
b
O_2
f_4
f_5
f_6

Las figuras 337 y 338 contienen las construcciones necesarias para hallar las fuerzas exteriores distintas **1, 2, 3,** aplicadas á los nudos A, C, B, cuando la carga es completa.

Las figuras 342 y 343 se refieren á la segunda fase; y las 344 y 345, á la tercera fase.

Los valores de dichas fuerzas, apreciados con la escala establecida, han resultado los siguientes (figura 346):

Fig. 346.



Fuerzas exteriores.	Fases		
	1.ª	2.ª	3.ª
	Kilogramos.	Kilogramos.	Kilogramos.
1	470	500	670
2	2180	2000	1050
3	3030	700	0

Finalmente, los diagramas de tensiones totales, se construyen con toda facilidad, y son los que representan las figuras 347, 348 y 349.

Fig. 347.

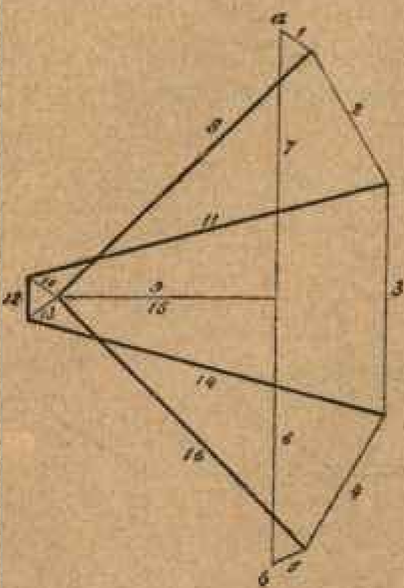


Fig. 348.

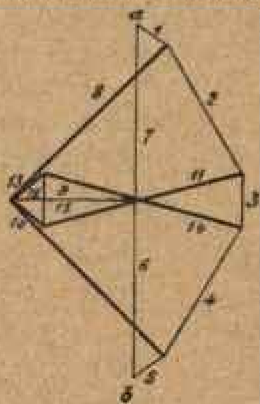
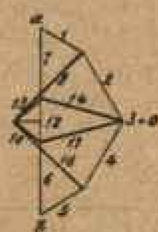


Fig. 349.



636. Aplicación del método expedito.—La aplicación de este método exige, ante todo, calcular el peso de las grandes dovelas M′ y M″. En la primera fase será $M' = M''$; en la segunda, $M' = \frac{1}{2} M''$ y en la tercera será $M' = 0$.

Como el ángulo $AOC = COB$, es de 30^0 (figura 340), el área del sector ACO será $\frac{1}{12}$ del área del círculo πr^2. La del sector A′C′O será también $\frac{1}{12}$ de la del círculo $\pi (r + e)^2 = \pi R^2$; por consiguiente, el área AA′C′C, que es la diferencia de tales sectores, valdrá

$$\frac{\pi (R^2 - r^2)}{12} = \frac{3,14 (3,6^2 - 3^2)}{12} = 1^{m^2},0362.$$

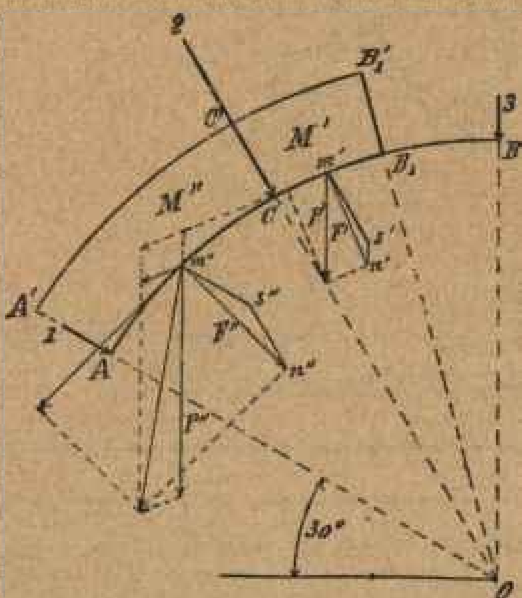
Pero como la altura del prisma proyectado en M'' es $1^m,50$ y $\delta = 2000$, el peso P'' de este macizo será

$$P'' = 1,0362 \times 1,50 \times 2000 = 3108,6 \text{ kg.}$$

y el del macizo $M' = \frac{1}{2} M''$ (figura 350) para la segunda fase será

$$P' = \frac{1}{2} P'' = 1554,3 \text{ kg.}$$

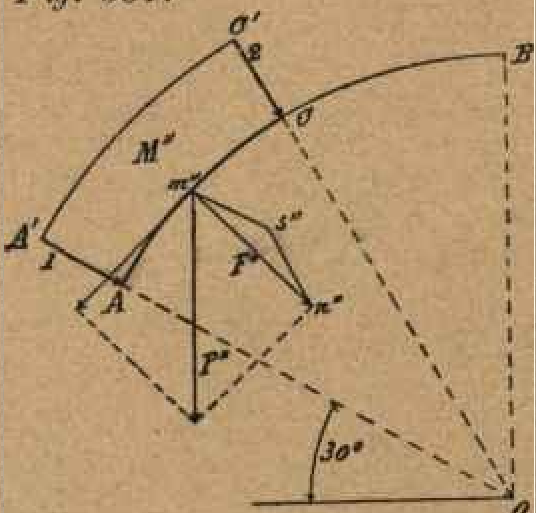
Fig. 350.



En la figura 340 se indican las construcciones que ya hemos explicado para hallar las fuerzas **1**, **2**, **3**, en la primera fase, siendo P' = P'' = 3108,6 kilogramos.

Las figuras 350 y 351 se refieren á la 2.ª y 3.ª fase, y puede observarse qne en ellas no aparecen los centros de gravedad de los macizos M′ y M″; porque su determinación no es necesaria; pues como las resultantes parciales F′ y F″ coinciden con el radio que pasa por el punto medio del arco respectivo, podemos sin inconveniente hacer que P′ y P″ partan de dichos puntos *m′* y *m″*, con lo cual se simplifica la construcción.

Fig. 351.



Los resultados obtenidos son los siguientes:

Fuerzas exteriores.	Fases 1.ª	2.ª	3.ª
	Kilogramos.	Kilogramos.	Kilogramos.
1	860	1000	1100
2	2550	2150	1180
3	3100	770	0

Los diagramas de tensiones totales son los representados en las figuras 352, 353 y 354.

Fig. 353.

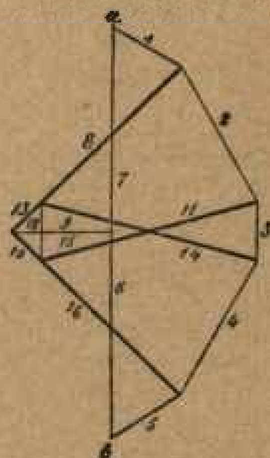


Fig. 352.

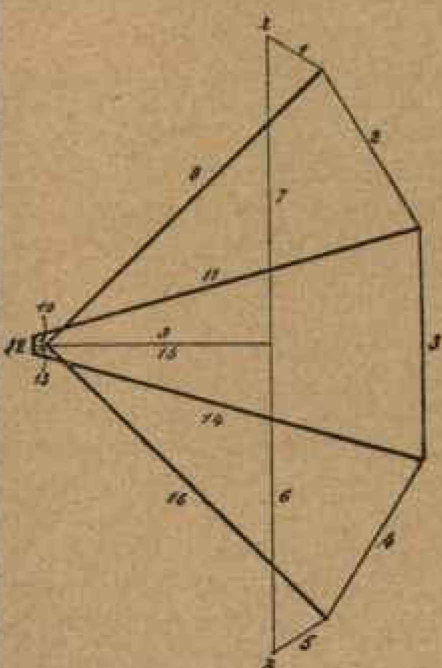
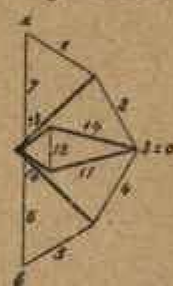


Fig. 354.



Tanto en estos diagramas como en los que anteriormente hemos obtenido se observa que cuando la carga es completa la pieza **12** (figura 346) trabaja por compresión y las **10** y **13** trabajan por extensión; y que en las fases 2.ª y 3.ª, las funciones de estas mismas piezas se invierten, resultando la **12** extendida y las **10** y **13** comprimidas.

En cuanto á las **8**, **11**, **14** y **16** siempre resultan comprimidas y las **9** y **15** siempre extendidas.

Claro es que para el cálculo de una pieza cualquiera se tendrá en cuenta la mayor de las tensiones halladas, cualquiera que sea su naturaleza.

El siguiente cuadro resume los resultados de los diagramas en las tres fases y por los dos métodos empleados, y confirma que el método expedito es perfectamente aceptable.

PIEZAS	FASES	MÉTODO RACIONAL		MÉTODO EXPEDITO	
		Compresión. Kg.	Extensión. Kg.	Compresión. Kg.	Extensión. Kg.
8 y 16	1.ª	4800	»	5350	»
	2.ª	2980	»	3200	»
	3.ª	1300	»	1450	»
11 y 14	1.ª	5000	»	5450	»
	2.ª	2730	»	3050	»
	3.ª	1130	»	1250	»
9 y 15	1.ª	»	3000	»	3030
	2.ª	»	1670	»	1370
	3.ª	»	380	»	100
10 y 13	1.ª	»	460	»	250
	2.ª	600	»	600	»
	3.ª	470	»	550	»
12	1.ª	550	»	300	»
	2.ª	»	730	»	800
	3.ª	»	580	»	600

Cualquiera que sea el método que se siga, las mayores tensiones corresponden, como vemos, á la primera fase para las piezas **8**, **11** y **9** y sus simétricas **16**, **14** y **15**, y á la segunda fase para las piezas **10**, **13** y **12**

En el caso actual, la consideración de la tercera fase ha resultado inútil.

Conocidas las tensiones máximas á que aproximadamente han de trabajar las piezas de una cimbra, el cálculo de su escuadría se hará fácilmente de la manera que hemos visto en casos análogos.

Sólo hay que advertir que las piezas del cordón superior, que hacen las veces de pares, se hallan sometidas á flexión compuesta, es decir, á un momento máximo fácil de calcular, puesto que se conocen las reacciones normales al intrados, desarrolladas en los apoyos, así como el punto de aplicación de la resultante de las presiones elementales; y además, á una compresión máxima que los diagramas de tensiones totales construídos dan á conocer.

Estas piezas, llamadas *camones*, se perfilan por una de sus caras, según el arco de intrados, ó sustentan piezas adicionales que cumplen con el mismo fin; y así el cálculo de su escuadría tampoco ofrece ninguna dificultad.

Tratándose de cimbras para bóvedas ordinarias, no es necesario calcularlas en la práctica, porque en diversas obras importantes de construcción se dan á conocer, no sólo las disposiciones de uso corriente, sino las dimensiones de las diversas piezas que la experiencia ha sancionado como suficientes, atendiendo, sobre todo, á la condición de rigidez que tales obras deben ofrecer.

Las pequeñas dimensiones de la cimbra que hemos considerado, no motivan, en realidad, los desarrollos que preceden; pero hemos descendido á ellas solamente por vía de ejemplo, y porque el estudio se haría exactamente de la misma manera para cimbras de mayor importancia.

637. Tipos diversos de cimbras.—Además del primer tipo (figura 341), que nos ha servido de base al estudio que precede, consideraremos algunos otros representados por las figuras 355, 357, 359, 362 y 367.

638. 2.º TIPO. (Figura 355).—Corresponde al grupo de cimbras llamadas recogidas y la construcción del diagrama de

Fig. 355.

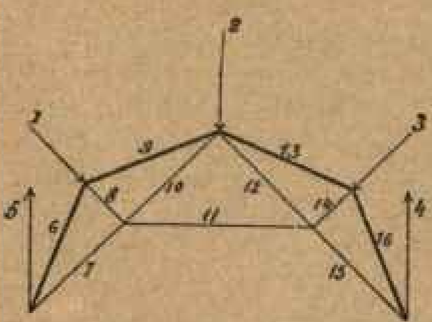
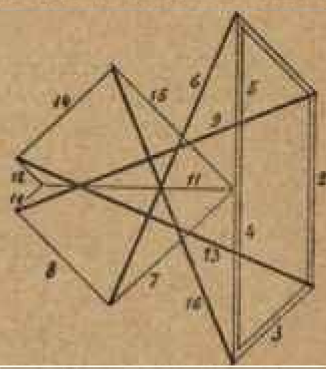


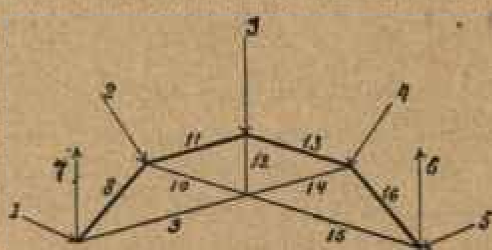
Fig. 356.



fuerzas interiores no ofrece dificultad, como puede comprobarse examinando la figura 356.

639. 3.er TIPO. (Figura 357).—Otro tanto puede decirse de este tipo de cimbra.

Fig. 357.



El diagrama de tensiones totales es el que representa la figura 358

640. 4.º TIPO. (Figura 359).—Es bastante usual, y siguiendo el criterio del Ingeniero Sr. Marvá, admitiremos que las fuerzas exteriores que pueden suponerse aplicadas á los nudos D y E, se transmiten á los puntos F y G, por el intermedio de las piezas DF y EG; y así el sistema que hay que considerar para la construcción del diagrama de fuerzas, será el que indica la figura 360. El expresado diagrama se obtie-

Fig. 358.

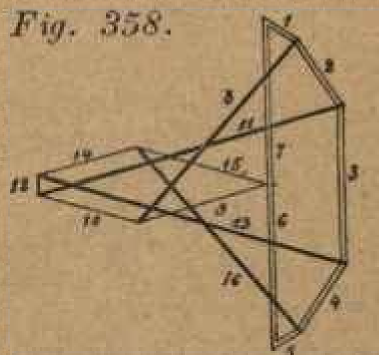
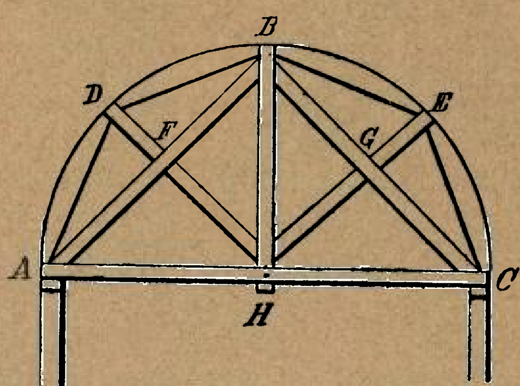


Fig. 359.



ne con toda facilidad y es el que representa la figura 361.

En cuanto á las piezas DF y GE (figura 359), admitiremos, en consecuencia, que están comprimidas por las fuerzas normales **1** y **3** respectivamente.

Cualquiera de los camones puede considerarse como pieza apoyada por sus extremos y sometida á un momento máximo de flexión y á una compresión, fáciles de calcular con la aproxi-

Fig. 360.

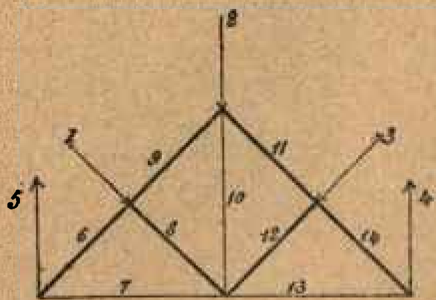
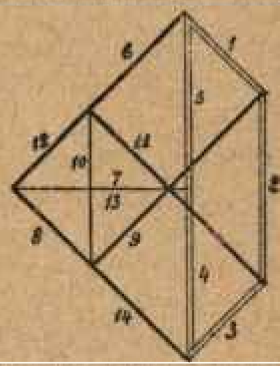
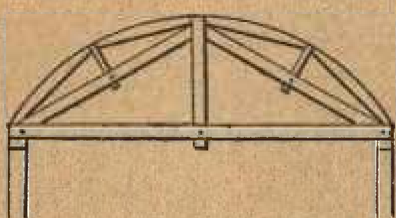


Fig. 361.



mación necesaria; siendo los camones DB y BE los que se hallan en situación más desfavorable.

Fig. 362.

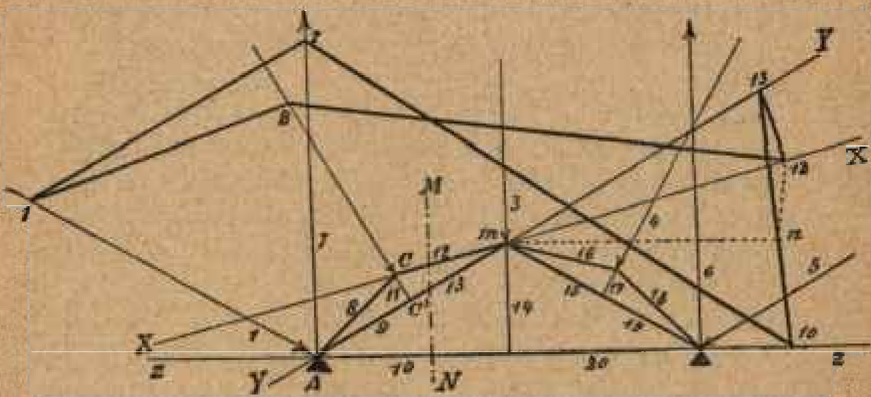


Finalmente, para terminar, examinaremos otros dos tipos, el 5.º y 6.º, en los cuales puede ofrecer ciertas dudas la construcción del diagrama de fuerzas. Tales son los que representan las figuras 362 y 367.

641. 5.º TIPO. (figuras 362 y 363).—Supongamos calculadas las fuerzas exteriores por cualquiera de los procedimientos explicados.

Si quisiéramos emplear desde luego el método de las figuras recíprocas, encontraríamos la primera dificultad en el primer nudo **7. 1. 8. 9. 10**; (figuras 363 y 364) porque de su pentágono recíproco sólo se conocen dos lados en el polígono de las fuerzas, el 7 y el 1; y tratándose de determinar en posición y magnitud más de dos lados, y en el caso actual son tres los que se

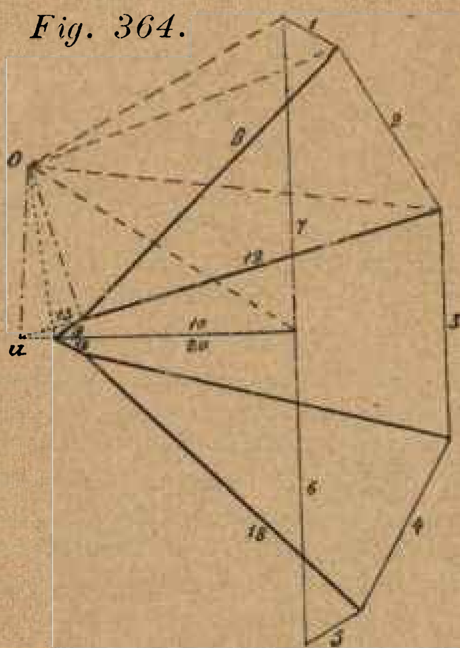
Fig. 363.



desconocen, el problema no puede resolverse por este medio.

Pero si acudimos, como en las armaduras, al método de *Culmann* (tomo I, página 113) para hallar las tensiones de las piezas **12, 13,** y **10,** toda vez que puede darse una sección por un plano MN que corte á las tres, salvaremos aquella dificultad.

Fig. 364.



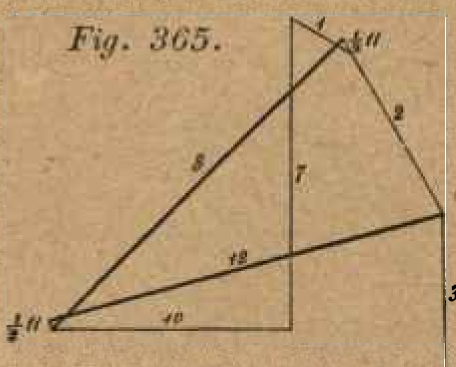
Las figuras 363 y 364 indican las construcciones necesarias cuyo detalle se explicó en el tomo I, números **106** á **109**; y nos dicen que las piezas **12** y **13** están comprimidas y la **10** extendida.

El mismo resultado se obtendría, en cuanto á la naturaleza de las tensiones, empleando el método de *Ritter*.

Conociendo el sentido y magnitud de la tensión 10, ya no hay dificultad en construir el pentágono recíproco del nudo **7. 1. 8. 9. 10**; del que sólo se desconocen los lados 8 y 9; y respecto del **8**, sabemos que, por ser línea recíproca de una barra principal, ha de partir del punto en que concurren en el polígono de las fuerzas, las 1 y 2, limítrofes de dicha barra en la figura directa.

Al tratar M. Planat este tipo de cimbra, y prescindiendo de la distinta dirección que atribuye á las fuerzas exteriores, pues supone que son verticales, considera que la fuerza interior desconocida que se desarrolla en el extremo C′ de la pieza 11 (figura 363) determina la flexión de la A*m* y origina en A y *m* dos componentes ó esfuerzos cortantes que deben ser iguales entre sí, siendo C′ el punto medio de A*m*; y de la igualdad de tales esfuerzos parte este autor para llegar á construir el polígono de las fuerzas en equilibrio que actúan en el nudo A (donde obra una de aquellas componentes, que llamaremos *t*), mediante algunos ensayos, hasta obtener el resultado que indica la figura 365.

Fig. 365.



Pero tales ensayos pueden evitarse de la manera siguiente. Por el punto *p*, en que se cortan las líneas 8 y 12 de la figura 366 (en la que exprofeso y en obsequio á la claridad exageramos la magnitud de la fuerza 3) se traza la bisectriz *po* del ángulo *spq* que aquellas líneas forman, la cual cortará en un cierto punto *o* á la recta $o_1\,o$, paralela al tirante **10**.

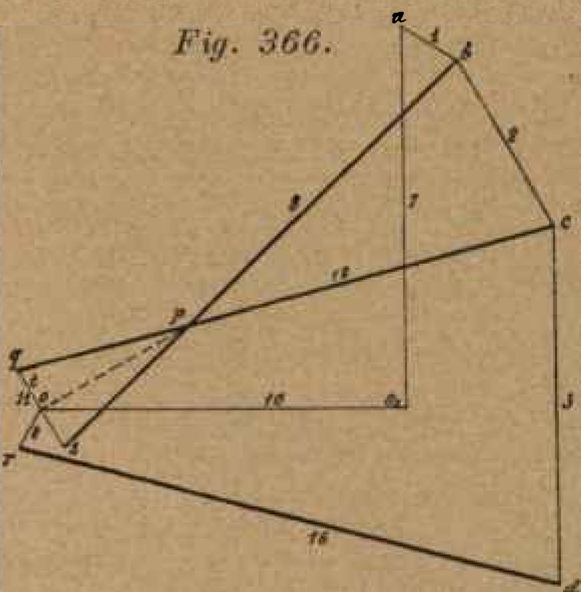
Trazando por *o* una paralela á $bc = 2$, el segmento *qs*, interceptado por los lados del referido ángulo, será la recíproca de la barra **11** y representará por tanto la tensión que desarrolla.

El pentágono recíproco del nudo A será; $o_1a = 7$, $ab = 1$, $bs = 8$, $so = \frac{1}{2} sq = t$, $oo_1 = 10$. El cuadrilátero recíproco del nudo C será; $bc = 2$, $cq = 12$, $qs = 11$, $sb = 8$. Y el polígono recíproco del nudo m, será; $cd = 3$, $dr = 16$, ro, oq, $qc = 12$.

Claro es que ro y oq son iguales á t, y representan las reacciones que desarrollan en m (figura 363) las fuerzas que obran en el punto C′ y en su simétrico, es decir aquellas que equilibran á las tensiones **11** y **17**.

A virtud de este criterio, resulta la pieza **11** extendida, cuan-

Fig. 366.



do la carga es completa, el camón **8** comprimido, lo mismo que el **12**, pero la riostra ó tirante inclinado **9,13** no trabaja más que por la flexión que produce el esfuerzo cortante transmitido por la pieza **11** al punto C′.

En el caso de que la carga ocupe los tres cuartos de la cimbra, lo mismo que cuando ocupa solamente la mitad, las funciones de dicha pieza **11** se invierten, como es fácil comprobar, resultando comprimida.

En cambio, por el método de las figuras recíprocas, completado en este caso con el de Culmann, resulta que la pieza **11** no trabaja nada y que la **9, 13** es pieza comprimida, cuando la carga es completa (figuras 363 y 364).

Como las piezas **11, 14** y **17** pueden suprimirse sin que la figura resultante deje de ser extrictamente indeformable y con arreglo al procedimiento de M. Planat, la pieza **14** no trabaja nada y la **11** desarrolla una tensión poco importante, vemos que en el fondo no hay gran diferencia entre los resultados que se obtienen por ambos métodos, para las piezas que más trabajan, que son los camones y el tirante horizontal.

Bajo el punto de vista práctico, la importancia de tales diferencias es muy escasa; primero, porque cuando se emplean piezas de enlace que teóricamente no desarrollan tensión alguna, ó la desarrollan muy pequeña, la escuadría se regula por consideraciones ajenas á tales tensiones, resultando siempre mucho mayor que la necesaria; y segundo, porque respecto de las piezas más importantes, la escuadría se calcula adoptando un coeficiente de trabajo menor que el ordinario, en consideración á la rigidez que deben ofrecer las cimbras.

642. 6.º TIPO. (figuras 367 y 368).—Veamos cómo se puede construir el diagrama de tensiones totales.

La tensión que desarrolla la pieza **10** equivale á una cierta fuerza aplicada en D sobre el tirante. Su componente normal provoca la flexión de éste, y queda equilibrada por una reacción igual y contraria, que llamaremos T. Esta fuerza que hay que considerar en D, engendra en A y en E reacciones verticales, que llamaremos respectivamente t' y t''; de suerte que t', t'' y T forman un sistema en equilibrio.

De estas fuerzas no conocemos más que sus direcciones y puntos de aplicación; pero sabemos que T es igual y contraria á la componente vertical de la tensión desarrollada por la pieza **10**; sabemos también que ha de ser $T = t' + t''$, y que t' y t'' es-

Fig. 367.

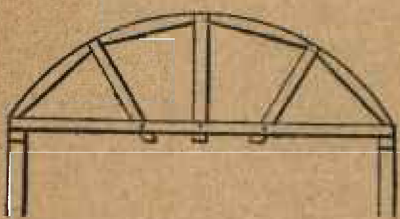
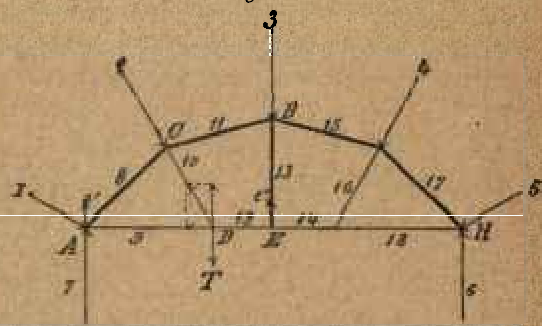


Fig. 368.



tán en razón inversa de sus distancias AD y DE al punto de aplicación de T.

Si para facilitar las operaciones, siguiendo en esto el criterio aceptado por M. Planat, suponemos que aquellas reacciones son iguales, y establecemos, por tanto, $t = \frac{1}{2}$ T, veremos que sin tanteo alguno, y bajo el supuesto de que la pieza CD sea normal al intrados, es fácil construir los polígonos recíprocos de los diversos nudos, cuyo conjunto formará el diagrama de tensiones que necesitamos conocer.

Supongamos el problema resuelto y sea (figura 369) $s_1 o_1 = t$, $o_1 a = 7$, $ab = 1$, $bs = 8$, $ss_1 = 9$, el pentágono recíproco del nudo A;

$bc = 2$, $cq = 11$, $qs = 10$, $sb = 8$, el cuadrilátero recíproco del nudo C;

$s_1 s = 9$, $sq = 10$, $qq_1 = 12$, $q_1 s_1 = 2t =$ T, el cuadrilátero recíproco del nudo D.

En este diagrama se verifica: 1.° que $os = oq$, para que resulte $o_1 s_1 = o_1 q_1 = t$, como es necesario; 2.° que la recta qs es paralela á la bc, porque sus recíprocas, en la figura directa que son **10** y **2**, tienen la misma dirección, y 3.°, que el triángulo qps es isósceles, porque los piezas **8** y **11** forman el mismo ángulo, en la expresada figura, con la fuerza exterior **2**; por consiguiente, el punto o, cuyo conocimiento basta para definir por completo el valor de qs, y como consecuencia los de t y T, pertenecerá lo mismo á la bisectriz del ángulo qps que á la horizontal trazada por o_1; luego será el de intersección de estas rectas, cuya posición es determinada.

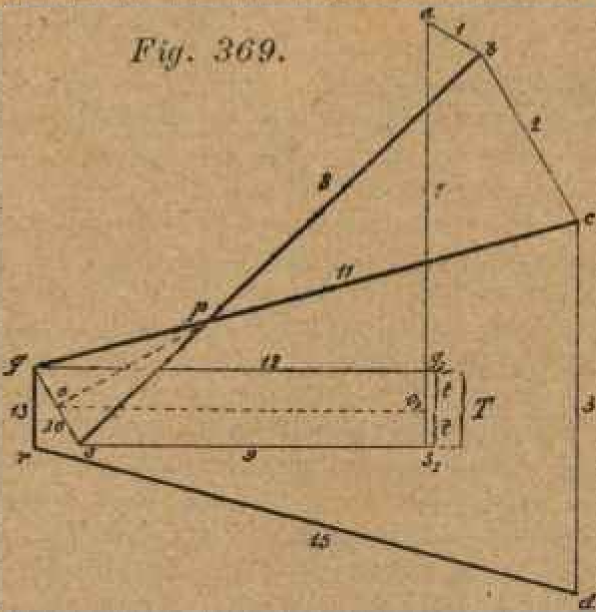


Fig. 369.

Así, pues, para construir el diagrama de tensiones totales procederemos en el orden siguiente:

Se construye el polígono de fuerzas exteriores 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

En la figura 369 no aparece todo él, porque siendo simétrico con relación á la recta o_1o, sólo se necesita su mitad.

Por el vértice b, trazaremos la paralela bs á la barra **8** y por c, la cq paralela á la **11**. En esto no puede haber duda, porque tratándose de una barra principal cualquiera, sabemos que su recíproca ha de trazarse por el punto del polígono de las fuerzas en que concurren aquellas que son limítrofes de dicha barra en la figura directa.

Trazaremos en seguida la bisetriz po del ángulo qps, la cual cortará á la horizontal o_1o en el punto o.

Por este punto o trazaremos una paralela á $bc = 2$, y el segmento qs interceptado por los lados del referido ángulo, será la recíproca de la barra **10**; representará, por tanto, la tensión total que ésta desarrolla y se proyectará sobre o_1a según $q_1s_1 = T = 2t$, como debe suceder.

La recta qq_1, paralela á oo_1 representará á su vez la tensión de la barra **12**; y por último la qr, que une los extremos de las líneas simétricas 11 y 15 representará la tensión desarrollada por la pieza **13**.

Determinando, como siempre es fácil, el sentido cíclico de cada uno de estos polígonos recíprocos, y aplicando la regla conocida para definir la naturaleza de las tensiones, resulta, siendo la carga completa, es decir, para la primera fase:

1.° Que los camones **8** y **11** y sus simétricos **17** y **15** son piezas comprimidas y flexadas.

2.° Que la pieza **10** y su simétrica **16** trabajan por extensión.

3.° Que la pieza **13** trabaja por compresión.

4.° Que el tirante AH es pieza sometida á extensiones desiguales, trabajando más por este concepto los tramos centrales que los extremos, estando además solicitado por tres fuerzas de flexión, que son las acciones que sobre el tirante ejercen la pieza BE, la CD y su simétrica; fuerzas que, como se observa en el diagrama de tensiones, son iguales á T y alternativamente de sentido contrario.

Conocidas las condiciones en que trabajan las diferentes piezas de la cimbra, el cálculo de sus escuadrías no ofrece nada nuevo sobre lo cual deba llamarse la atención.

Unicamente haremos observar, respecto del tirante AH, que considerando cada una de sus mitades, por ejemplo la AE, como un prisma apoyado por sus extremos y sometido á la fuerza de flexión T, aplicada en D, y á la extensión máxima **12**, la ecuación de resistencia, que puede emplearse para la determinación de su escuadría, es

$$K = \frac{\mathbf{12}}{\omega} + \frac{\frac{1}{2}\,T \times AD}{Z}.$$

No hay para qué advertir que en esta ecuación, **12** representa el número de kilogramos que resulte de medir la línea $qq_1 = 12$ con la escala de fuerzas; T el que resulte de medir con la misma escala la magnitud $q_1\,s_1 = T$, y por último AD el valor de esta distancia, medida con la escala de longitudes; pero expresado en centímetros, si al centímetro estuviera referido el módulo Z, en cuyo caso ω representará el área de la sección transversal del tirante, en centímetros cuadrados.

643. Observación.—Adviértese en el caso actual que habiendo caído el punto p por encima de la recta $o_1 o$, el origen s_1 de la fuerza t ha caído por debajo de dicha recta, quedando tales puntos á distinto lado de ella; pero es fácil darse cuenta de que este carácter subsistirá si el punto p, en vez de quedar por encima, quedara por debajo de $o_1 o$; porque entonces la línea qs pasaría á la región opuesta del ángulo en que se halla y los puntos s_1 y q_1 resultarían invertidos, cayendo s_1 por encima de $o_1 o$, así como antes caía por debajo.

La fuerza t cambiaría, por tanto, de sentido; pero su origen será siempre el punto s_1, proyección del punto s, el cual pertenece en todos los casos á la recta bs.

Hemos considerado en el estudio que precede, solamente el caso de que la carga sea completa; pero con la misma facilidad se construirían los diagramas de fuerzas interiores en la segunda y tercera fases, y así se pondrían de manifiesto las variaciones en magnitud y en signo que, al pasar de una á otra fase, experimentan las tensiones que sufren las diversas piezas de la cimbra.

FIN.