

AL/F. 1-21

8. Mayo - Sep. 9 - 78

PROGRAMA

DE

**ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA**

POR

DON PEDRO ALIAGA Y MILLAN

*Catedrático por oposicion  
de esta asignatura, en el Instituto provincial  
de Castellon de la Plana*



**CASTELLON**

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE JOSÉ ARMENGOT

Calle de Zapateros, números 52 y 54

1883

PROGRAMA  
DE  
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

AL/F. 1-21

# PROGRAMA

DE

# ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

POR

**DON PEDRO ALIAGA Y MILLAN**

*Catedrático por oposición  
de esta asignatura, en el Instituto provincial  
de Castellon de la Plana*



CASTELLON

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE JOSÉ ARMENGOT

Calle de Zapateros, números 52 y 54

1883



# ARITMÉTICA

1.<sup>a</sup>

## PRELIMINARES.

Cantidad matemática.  
Unidad.  
Número entero.  
Aritmética.  
Serie natural de los números.

2.<sup>a</sup>

## Números enteros.

### NUMERACION.

Numeracion hablada y numeracion escrita.  
Necesidad de una nomenclatura sistemática.  
Fundamentos de la numeracion decupla ó usual.  
Base de este sistema.

- Ley de los distintos órdenes de unidades.  
 Unidades principales y subprincipales.  
 Con este sistema se pueden expresar todos los números.  
 Regla para expresar un número cualquiera por medio de palabras.  
 Numeracion escrita.  
 Cifras ó guarismos usados en el sistema usual de numeracion.  
 Artificio de la numeracion escrita.  
 Necesidad del cero.  
 Regla para traducir á la numeracion hablada, un número expresado en la numeracion escrita.  
 Regla para traducir á la numeracion escrita, un número expresado en la numeracion hablada.

3.<sup>a</sup>**Operaciones fundamentales.**

## ADICION Y SUSTRACCION.

- Definicion de la adiccion.  
 Sumandos. Suma. Signo de esta operacion.  
 Procedimiento general para hallar la suma deducido de su definicion.  
 Casos particulares que conducen á simplificarlo.  
 Primer caso particular. Tabla de sumar. Regla.  
 Segundo caso particular. Regla.  
 Caso general de la adiccion. Regla.  
 Observaciones.  
 Prueba de la adiccion.  
 Definicion de la sustraccion.  
 Minuendo. Sustraendo. Resto. Signo de esta operacion.  
 Alteraciones que sufre el resto, cuando se añade ó se quita un número al minuendo ó al sustraendo.  
 Procedimiento general para hallar el resto, deducido de su definicion.

Casos particulares que conducen á simplificarlo.

Caso particular. Regla.

Caso general de la sustraccion. Regla.

Observaciones.

*Teorema.* Para hallar el resto cuando el sustraendo es una diferencia indicada de dos números, se añade al minuendo el menor de dichos números, y de esta suma se resta el mayor.

Complemento aritmético de un número.

Unidad complementaria.

Regla para hallar el complemento aritmético de un número.

Aplicacion de los complementos aritméticos. á la simplificacion de la sustraccion.

Prueba de la sustraccion.

#### 4.<sup>a</sup>

### MULTIPLICACION.

Definicion de la multiplicacion.

Multiplicando. Multiplicador. Producto. Signo de esta operacion.

Procedimiento general para hallar el producto, deducido de su definicion.

Casos particulares que conducen á simplificarlo.

Primer caso particular. Tabla. Regla.

Segundo caso particular. Regla.

Tercer caso particular. Regla.

Cuarto caso particular. Regla.

Caso general de la multiplicacion. Regla.

Observaciones.

*Teorema.* El producto de dos números no varía, aunque se tome el multiplicando por multiplicador, y el multiplicador por multiplicando.

Prueba de la multiplicacion.

*Teorema.* El producto de una suma indicada por un número, es igual á la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar cada uno de los sumandos del multiplicando, por el multiplicador.

*Teorema.* El producto de una suma indicada por otra suma indicada, es igual á la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar todos los sumandos del multiplicando, por cada uno de los del multiplicador.

*Corolario.* Una suma indicada, cuyos sumandos tienen un factor comun, es igual al producto de la suma indicada de los factores no comunes de los sumandos, por el factor comun.

*Teorema.* El producto de una diferencia indicada de dos números por otro, es igual á la diferencia de los productos del minuendo y sustraendo por el multiplicador.

*Corolario.* Una diferencia indicada en que el minuendo y sustraendo tienen un factor comun, es igual al producto de la diferencia indicada de los factores no comunes del minuendo y sustraendo, por el factor comun.

*Teorema.* El valor de un producto indicado de varios factores, no varía aunque éstos se coloquen en otro orden cualquiera.

*Corolario 1.º* Para multiplicar un producto por un número, bastará multiplicar uno de sus factores por dicho número.

*Corolario 2.º* El producto de dos productos, es igual al producto indicado de todos sus factores.

*Corolario 3.º* En todo producto indicado de varios factores, se puede sustituir en vez de dos ó más de dichos factores, su producto efectuado.

*Aplicacion práctica.* Para hallar el producto de dos ó más factores, cuando uno ó más de ellos terminan en ceros.

se prescinde de estos al verificar la multiplicacion, y se añaden despues al producto.

7.<sup>a</sup>

## DIVISION.

Definiciones de la division.

Dividendo. Divisor. Cociente. Signo de esta operacion.

Procedimientos generales que pueden emplearse para hallar el cociente, deducidos de la definicion de éste.

Division inexacta. Cociente entero. Resíduo.

*Corolario 1.º* Siempre que el dividendo de una division, sea la suma de dos números, uno de ellos múltiplo del divisor, y el otro menor que el divisor; la division será inexacta, y el sumando menor será el resíduo.

*Corolario 2.º* Siempre que el dividendo sea la suma de dos números, uno múltiplo del divisor y el otro nó; la division es inexacta, y el resíduo será el que resulte de dividir el número no múltiplo del divisor, por este divisor.

Casos particulares que se distinguen en la division para simplificar esta operacion.

Primer caso particular. Regla.

Segundo caso particular. Regla.

Caso general. Regla.

Abreviaciones de la regla general de la division, en ciertos casos.

Prueba de la division.

Observaciones sobre la division.

Si el dividendo y el divisor de una division exacta, se multiplican por un mismo número, el cociente no varía.

Si el dividendo y el divisor de una division inexacta, se multiplican por un mismo número, el cociente entero no varía; pero el resto resulta multiplicado por el mismo número.

Divisor, factor ó parte alícuota de un número.

*Teorema.* Cuando el dividendo de una division, es una suma indicada de dos ó más múltiplos del divisor, el

cociente es igual á la suma de los cocientes que resultan de dividir cada uno de los sumandos del dividendo por el divisor, y la division es exacta.

*Corolario.* Si un número es divisor de dos ó más números, tambien lo será de la suma de estos.

*Teorema.* Cuando el dividendo es un producto en el que uno de los factores es múltiplo del divisor, para hallar el cociente, basta dividir este factor por el divisor, y multiplicar el cociente que resulte, por los demás factores del dividendo.

*Corolario 1.º* Si uno de los factores de un producto es divisible por un número, el producto tambien lo será.

*Corolario 2.º* Cuando el dividendo es un producto de dos ó más factores, y el divisor uno de estos factores, el cociente se halla sin más que suprimir en el dividendo, el factor igual al divisor.

*Teorema.* Cuando el dividendo de una division es la diferencia indicada de dos números múltiplos del divisor, el cociente es igual á la diferencia de los cocientes que resultan de dividir el minuendo y el sustraendo por el divisor, y la division es exacta.

8.<sup>a</sup>

## POTENCIAS.

Cuadrado, cubo, y en general potencia de un número.

Base. Exponente.

Elevacion á potencias. Regla.

*Teorema.* El producto de dos potencias de un mismo número, es igual á una potencia de este número, cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.

*Corolario 1.º* El producto de varias potencias de un número, es igual á una potencia de este número, cuyo exponente es la suma de todos los exponentes de los factores.

*Corolario 2.º* El cociente de dos potencias de un mismo número, es una potencia de este número, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes del dividendo y divisor.

*Corolario 3.º* La potencia cuya base es otra potencia de un número, es igual á una potencia de este número, cuyo exponente es el producto de ambos exponentes.

*Teorema.* Una potencia de un producto de varios factores, es igual al producto de las potencias del mismo grado de los factores.

9.<sup>a</sup>**Propiedades de los números.**

## DIVISIBILIDAD.

¿Cuándo un número es divisible por otro?

Objeto de la divisibilidad.

Caractéres de divisibilidad, fáciles de descubrir.

Divisibilidad por 10 y sus potencias.

Divisibilidad por 2 y 5, factores de 10.

Divisibilidad por las potencias de 2 y 5.

Divisibilidad por 9 y por 3.

Divisibilidad por 11.

10.<sup>a</sup>

## NÚMEROS PRIMOS.

Número primo.

Número compuesto.

Números primos entre sí.

Números primos entre sí dos á dos.

*Teorema.* Todo número compuesto tiene un divisor primo mayor que 1, y menor que dicho número.

*Teorema.* Todo número compuesto, es un producto de dos ó más factores primos, mayores que 1 y menores que dicho número.

*Problema.* Dado un número entero cualquiera, averiguar si es ó no primo. Regla.

*Problema.* Formacion de una tabla de números primos. Regla.

*Teorema.* La série de números primos es ilimitada.

11.<sup>a</sup>

## MÁXIMO COMUN DIVISOR.

*Problema.* Hallar el m. c. d. de dos ó más números. Casos que se distinguen.

*Teorema.* Todo factor del dividendo y divisor de una division inexacta, es factor del resto; recíprocamente todo factor del resto y del divisor, es factor del dividendo.

*Corolario.* El m. c. d. del dividendo y divisor de una division inexacta, es igual al m. c. d. del divisor y residuo.

*Problema 1.º* Hallar el m. c. d. de dos números. Regla.

*Problema 2.º* Hallar el m. c. d. de tres ó más números.

*Teorema.* Todo divisor de dos números, es divisor del m. c. d. de estos números; y recíprocamente.

Regla para hallar el m. c. d. de tres ó más números.

*Teorema.* Si dos números se multiplican por un número entero, su m. c. d. queda multiplicado por el mismo número.

*Corolario.* Si dos números se dividen por un divisor comun á ambos, su m. c. d. queda dividido por el mismo divisor.

*Teorema.* Si varios números se multiplican por un mismo número entero, ó se dividen por un factor comun á todos ellos, su m. c. d., queda multiplicado ó dividido por el mismo número.

*Corolario 1.º* Si varios números se dividen por su m. c. d., los cocientes que resultan son primos entre sí.

*Corolario 2.º* Si al dividir varios números por un divisor, los cocientes que resultan son exactos y primos entre sí, dicho divisor es el m. c. d. de todos.

12.<sup>a</sup>

*Teorema.* Todo número que divide á un producto de dos factores, y es primo con uno de ellos, necesariamente dividirá al otro factor.

*Teorema.* Todo primo que divide á un producto de varios factores, divide por lo ménos á uno de sus factores.

*Teorema.* Todo número primo con cada uno de los factores de un producto, es primo con el producto.

*Corolario 1.º* Todo número primo que divide á una potencia en un número, dividirá también á este número.

*Corolario 2.º* Si dos números son primos entre sí, sus potencias también lo serán.

*Teorema.* Si un número es divisible por varios primos entre sí dos á dos, será también divisible por el producto de todos ellos.

*Problema.* Descomponer un número en sus factores primos. Regla.

*Teorema.* Un número entero no admite mas que una sola descomposicion en factores primos.

Condiciones necesarias y suficientes para que un número sea divisible por otro.

Condiciones necesarias y suficientes para que un número sea divisor de otro.

13.<sup>a</sup>

*Problema.* Hallar todos los divisores de un número. Regla.

Determinar el número de divisores de un número.

Regla para hallar el m. c. d. de varios números descompuestos en sus factores primos.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUN.

Regla para hallar el m. m. c. de varios números.

El m. m. c. de dos números es igual al producto de estos dos números, dividido por su m. c. d.

El m. m. c. de dos números, es el producto de uno de

ellos por el cociente de dividir el otro, por el m. c. d. de ambos.

El producto de dos números, es también el producto de su m. c. d. por su m. m. c.

Todo múltiplo de dos números, es múltiplo del m. m. c. de estos números.

14.<sup>a</sup>

## NÚMEROS FRACCIONARIOS.

*Preliminares.* Unidad fraccionaria.

Número fraccionario.

Numerador.

Denominador.

*Numeracion de los fraccionarios.*

*Propiedades de los números fraccionarios.*

El cociente de la division de dos números enteros cualesquiera, es un fraccionario, cuyo numerador es el dividendo, y el denominador el divisor.

Todo fraccionario, es el cociente de una division cuyo dividendo es el numerador, y cuyo divisor es el denominador.

Reducir un entero, á fraccionario de un denominador dado.

Quebrado propio é impropio.

Número mixto.

Regla para hallar las unidades enteras que contiene un quebrado impropio.

*Teorema.* El cociente completo de una division inexacta, es igual á un número mixto formado por el cociente entero, y un quebrado, cuyo numerador es el resto y el denominador el divisor.

El mayor de dos quebrados que tienen el mismo denominador, es el que tiene mayor numerador.

El mayor de dos quebrados que tienen el mismo numerador, es el que tiene menor denominador.

*Teorema.* Si al numerador y denominador de un que-

brado, cuyos términos son desiguales, se les añade un mismo número entero, resultará otro quebrado, que se diferenciará de 1, ménos que el dado.

### 15.<sup>a</sup>

Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda multiplicado por dicho número entero.

Si el numerador de un quebrado se divide por uno de sus divisores, el quebrado queda dividido por dicho divisor.

Si el denominador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda dividido por dicho número entero.

Si el denominador de un quebrado se divide por uno de sus divisores, el quebrado queda multiplicado por dicho divisor.

*Corolario.* Si se multiplican los dos términos de un quebrado por el mismo número entero, ó se dividen por un factor comun á ambos, el quebrado no varía.

Aplicacion de estos principios á la division de enteros.

#### SIMPLIFICACION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Reglas.

#### REDUCCION DE QUEBRADOS Á UN COMUN DENOMINADOR.

Reglas.

*Teorema.* Si un quebrado es igual á otro cuyos términos son primos entre sí, los términos del primero son respectivamente equimúltiplos de los del segundo.

*Corolario 1.º* Todo quebrado cuyos términos son primos entre sí, es irreducible; y recíprocamente.

*Corolario 2.º* Dos quebrados irreducibles é iguales, son idénticos.

*Corolario 3.º* Un quebrado irreducible no puede ser igual á un número entero.

## OPERACIONES CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

*Adicion.* Primer caso. Regla.

Segundo caso. Regla.

Tercer caso. Regla.

*Sustraccion.* Primer caso. Regla.

Segundo caso. Regla.

Tercer caso. Regla.

*Multiplicacion de los números fraccionarios.* Primer caso. Regla.

Segundo caso. Regla.

Tercer caso. Regla.

Cuarto caso. Regla.

*Teorema.* El valor de un producto indicado de varios factores fraccionarios, ó unos enteros y otros fraccionarios, no varía, aunque los factores se coloquen en otro orden cualquiera.

Quebrado de quebrado.

Regla para hallar el valor de un quebrado de quebrado.

*Division de los números fraccionarios.* Primer caso. Regla.

Segundo caso. Regla.

Tercer caso. Regla.

Modificaciones de esta regla en ciertos casos.

Cuarto caso. Regla.

## 19.ª

## NÚMEROS FRACCIONARIOS DECIMALES.

*Preliminares.*

*Numeracion de los quebrados decimales.*

Regla para escribir un número decimal.

Regla para leer un número decimal.

*Teorema 1.* Un número decimal no varía de valor, aunque se añadan uno ó más ceros á su derecha.

*Corolario 1.º* Un número decimal que termina en ceros, no varía, aunque se quiten uno ó más ceros de su derecha.

*Corolario 2.º* Para reducir varios decimales á un comun denominador, basta igualar el número de sus cifras decimales, añadiéndoles á su derecha los ceros necesarios.

Regla para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros.

Regla para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros.

## 20.ª

## OPERACIONES CON LOS QUEBRADOS DECIMALES.

Consideraciones generales.

Adicion. Regla.

Sustraccion. Regla.

Multiplicacion. Reglas.

Division. Reglas.

## 21.ª

Reduccion de quebrados comunes á decimales. Regla.  
Fracciones decimales exactas, periódicas puras y periódicas mixtas.

*Teorema.* Toda fraccion ordinaria, produce forzosa-

mente al transformarla en decimal, una fracción exacta ó una fracción periódica.

Cantidad variable.

Límite.

## 22.ª

### GENERATRICES DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

*Problema.* Dada una fracción decimal, hallar su generatriz.

Primer caso.

Dada una fracción decimal exacta, hallar su generatriz.  
Regla.

*Corolario.* Toda fracción ordinaria irreducible generatriz de una decimal exacta, tiene por denominador una potencia de 2, una potencia de 5 ó un producto de una potencia de 2 por otra de 5.

Segundo caso.

Dada una fracción periódica pura, hallar su generatriz.  
Regla.

*Corolario.* Toda fracción ordinaria irreducible, generatriz de una periódica pura, tiene por denominador un número primo con 10.

Tercer caso.

Dada una fracción periódica mixta, hallar su generatriz.  
Regla.

*Teorema.* Toda fracción ordinaria irreducible, cuyo denominador consta solo de una potencia de 2, de una potencia de 5, ó de un producto de una potencia de 2 por otra de 5, es generatriz de una fracción decimal exacta, que tendrá tantas cifras decimales como indique el mayor exponente de las potencias de 2 ó 5, de su denominador.

Regla para reducir á decimal una generatriz de fracción decimal exacta.

*Teorema.* Toda fracción ordinaria irreducible, cuyo denominador contenga algún factor primo diferente de 2 y 5, es generatriz de una decimal periódica.

*Teorema.* Toda fracción ordinaria irreducible, generatriz de una decimal periódica mixta, contiene en su denominador algún factor 2 ó 5 y algún factor primo diferente de 2 y 5.

*Teorema.* Toda fracción ordinaria irreducible, cuyo denominador es primo con 10. es generatriz de una periódica pura.

*Teorema.* Toda fracción ordinaria irreducible, cuyo denominador contenga algún factor 2 ó 5. y algún factor primo con 10. es generatriz de una periódica mixta, en la que el número de cifras no periódicas, será igual al mayor exponente de los factores 2 y 5 de su denominador.

## 23.ª

### POTENCIAS DE LOS FRACCIONARIOS.

Regla para elevar un fraccionario á una potencia cualquiera.

*Teorema.* Toda potencia de una fracción irreducible. es también fracción irreducible.

*Corolario.* Una potencia de una fracción irreducible. no puede ser igual á un número entero.

*Teorema.* Las potencias de un número menor que 1. van disminuyendo á medida que aumenta el exponente; y las potencias de un número mayor que 1. van creciendo á manera que crece el exponente.

## 24.ª

### NÚMEROS INCONMENSURABLES.

¿Cuándo dos cantidades son inconmensurables entre sí?

Número conmensurable.

Número inconmensurable.

Límite de una variable.

Todo número inconmensurable está comprendido entre dos conmensurables, cuya diferencia puede ser menor que cualquier cantidad dada.

Teorema de los límites.

Todas las leyes demostradas para los números conmensurables, son aplicables á los inconmensurables.

Si dos razones inconmensurables, son límites simultáneos de una misma variable, dichas razones serán iguales.

#### RAICES EN GENERAL.

Raiz cuadrada, cúbica, cuarta y en general raiz de un número.

Extraccion de raices.

Procedimiento general para hallar la raiz de un número, fundado en la definicion de raiz.

*Teorema.* La raiz de un número entero, no puede ser un quebrado irreducible, sino un número entero ó inconmensurable.

### 25.<sup>a</sup>

#### RAIZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Raiz cuadrada entera.

*Problema.* Dado un número entero, hallar su raiz cuadrada con ménos error de una unidad.

*Teorema.* El cuadrado de la suma indicada de dos números, es igual al cuadrado del primero, más el duplo del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

*Corolario 1.º* El cuadrado de un número entero compuesto de decenas y unidades, es igual á la suma de estos tres sumandos: cuadrado de las decenas, duplo del producto de las decenas por las unidades y cuadrado de las unidades.

*Corolario 2.º* Los cuadrados de dos números consecutivos, se diferencian en el duplo del menor más uno.

Casos que se distinguen en la extraccion de la raiz cuadrada.

Primer caso. Regla.  
 Segundo caso. Regla.  
 Observaciones sobre esta regla.

26.<sup>a</sup>

## RAIZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Raiz cúbica entera de un número.

*Problema.* Dado un número entero, hallar su raíz cúbica, con ménos error de una unidad.

*Teorema.* El cubo de la suma indicada de dos números, es igual al cubo del primero, más el tripló del cuadrado del primero por el segundo, más el tripló del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

*Corolario 1.º* El cubo de un número entero, compuesto de decenas y unidades, es igual á la suma de estos cuatro sumandos: cubo de las decenas, tripló de cuadrado de las decenas por las unidades, tripló de las decenas por el cuadrado de las unidades y cubo de las unidades del número dado.

*Corolario 2.º* Los cubos de dos números consecutivos, se diferencian en el tripló del cuadrado del menor, más el tripló del menor, más 1.

Casos que se distinguen en la extraccion de la raíz cúbica.

Primer caso. Regla.

Segundo caso. Regla.

Observaciones sobre esta regla.

27.<sup>a</sup>

## RAICES CUADRADA Y CÚBICA DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Regla para extraer la raíz cuadrada de un fraccionario cuando sus términos son cuadrados perfectos.

*Teorema.* La raíz cuadrada de un fraccionario con

ménos error de una unidad, es igual á la raíz cuadrada entera de su parte entera.

Regla para hallar la raíz cúbica de un fraccionario, cuando sus términos son cubos perfectos.

*Teorema.* La raíz cúbica de un fraccionario con ménos error de una unidad, es igual á la raíz cúbica entera de su parte entera.

*Teorema.* La raíz cuadrada de un número fraccionario cuyos dos términos son cubos perfectos, es un número conmensurable.

*Teorema.* La raíz cúbica de un fraccionario cuyos dos términos son cubos perfectos, es un número conmensurable.

*Teorema.* La raíz cuadrada de un fraccionario irreducible cuyos dos términos no son cuadrados perfectos, es un número inconmensurable.

*Teorema.* La raíz cúbica de un fraccionario irreducible, cuyos términos no son cubos perfectos, es un número inconmensurable.

## 28.º

## VALORES APROXIMADOS DE LAS RAICES INCONMENSURABLES.

*Problema.* Hallar la raíz cuadrada de un número entero ó fraccionario, con ménos error de  $\frac{1}{n}$ . Regla.

*Corolario 1.º* Cuando el denominador de una fracción es un cuadrado perfecto  $d^2$ ; para hallar la raíz cuadrada de dicha fracción, con ménos error de  $\frac{1}{d}$ , se divide la raíz cuadrada entera de su numerador, por  $d$ .

*Corolario 2.º* Cuando el denominador de una fracción  $\frac{a}{d}$ , no es cuadrado perfecto, para hallar su raíz cuadrada con ménos error de  $\frac{1}{d}$ , basta hallar la raíz cuadrada entera del producto  $a \times d$ , y dividir el resultado por  $d$ .

*Corolario 3.º* Si el producto de los dos términos de una fracción, es un cuadrado perfecto, dicha fracción tiene raíz cuadrada exacta.

Regla para hallar la raíz cuadrada de un entero con ménos error de  $\frac{1}{10^n}$ .

Regla para hallar la raíz cuadrada de una fracción ordinaria ó decimal con ménos error de  $\frac{1}{10^n}$ .

### 29.ª

*Problema.* Hallar la raíz cúbica de un número entero ó fraccionario, con ménos error de  $\frac{1}{n}$ . Regla.

*Corolario 1.º* Cuando el denominador de una fracción es un cubo perfecto  $d^3$ , para hallar la raíz cúbica de dicha fracción, con ménos error de  $\frac{1}{d}$ , se divide la raíz cúbica entera del denominador, por  $d$ .

*Corolario 2.º* Cuando el denominador de una fracción  $\frac{a}{d}$ , no es un cubo perfecto, para hallar la raíz cúbica con ménos error de  $\frac{1}{d}$ , basta hallar la raíz cúbica entera del producto  $a \times d^2$ , y dividir el resultado por  $d$ .

Regla para hallar la raíz cúbica de un número entero con ménos error de  $\frac{1}{10^n}$ .

Regla para hallar la raíz cúbica de una fracción ordinaria ó decimal con ménos error de  $\frac{1}{10^n}$ .

## PROBLEMAS.

Representacion de las cantidades por medio de números.  
Sistema de pesas métricas y monedas de Castilla.

Sistema métrico-decimal de pesas, medidas y monedas.  
Ventajas de este último.

Números concretos.

Números complejos é incomplejos.

*Problema.* Conocido el número concreto que representa una cantidad, hallar el que la representaria, adoptando una unidad dada cualquiera.

Casos que comprende este problema:

1.<sup>o</sup> Reducir un número incomplejo, á otro equivalente de especie inferior y del mismo sistema de pesas y medidas.  
Regla.

2.<sup>o</sup> Reducir un número complejo, á incomplejo equivalente de la especie inferior del dado. Regla.

3.<sup>o</sup> Reducir un número incomplejo, á otro equivalente de especie superior y del mismo sistema de pesas y medidas.  
Reglas.

4.<sup>o</sup> Reducir un número complejo, á incomplejo equivalente de una especie superior á la inferior del número dado.  
Regla.

5.<sup>o</sup> Reducir un número concreto de unidades de Castilla, á otro equivalente del sistema métrico, y vice-versa.

Regla general para reducir un incomplejo á otro equivalente de una unidad cualquiera.

31.<sup>a</sup>

## PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE LA ADICION.

(Adicion de números concretos.)

*Problema.* Conocidos los números concretos, que representan dos ó más cantidades de la misma naturaleza,

hallar un número que represente el conjunto ó suma de dichas cantidades.

Procedimiento general para resolverlo.

Primer caso particular. Regla.

Segundo caso particular. Regla.

Tercer caso particular. Regla.

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE LA  
SUSTRACCION.

(Sustraccion de concretos.)

*Problema.* Conocidos los números concretos, que representan dos cantidades de la misma naturaleza, hallar un número que represente la diferencia de dichas cantidades.

Procedimiento general para resolverlo.

Primer caso particular. Regla.

Segundo caso particular. Regla.

Tercer caso particular. Regla.

32.<sup>a</sup>

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE LA  
MULTIPLICACION.

(Multiplicacion de concretos.)

*Problema general.* Conocido el valor de una unidad, hallar el de un número cualquiera de la misma naturaleza que dicha unidad.

Multiplicando, multiplicador y producto.

Procedimiento general para resolver el anterior problema general.

Primer caso particular. Regla.

Segundo caso particular. Regla.

Tercer caso particular. Regla.

Método de las partes alícuotas.

## PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE LA DIVISION.

(Division de concretos.)

*Primer problema general.* Conocido el valor de un número concreto, hallar el valor de una unidad de la misma naturaleza que dicho número concreto.

Procedimiento general para resolverlo.

Primer caso particular. Regla.

Segundo caso particular. Regla.

Tercer caso particular. Regla.

*Segundo problema general.* Dados dos números concretos de la misma naturaleza, de los que uno es el valor de una unidad, hallar el número de unidades de esta especie de que es valor el otro de los números dados.

Regla para resolverlo.

**Algebra.**

## PRELIMINARES.

Algebra.

Fórmulas.

Lenguaje algebraico.

Expresion algebraica ó literal.

Términos de una expresion algebraica.

Monomios.

Polinomios.

Coficiente.

Exponente.

Expresion algebraica racional.

Expresion algebraica radical.

Expresion algebraica entera.

Expresion algebraica fraccionaria.

Valor numérico de una expresion algebraica.

Grado de un término entero.  
 Grado de un término fraccionario.  
 Grado de un polinomio homogéneo.  
 Funcion.

35.<sup>a</sup>

## DE LAS CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS.

Conveniencia de la introduccion de las cantidades positivas y negativas en el cálculo.

Significacion de estas cantidades.

*Operaciones con números positivos ó negativos.*

Adicion.

Definicion de la suma de números con afeccion cualitativa.

Sustraccion.

Definicion del resto, cuando el minuendo y el sustraendo son números con afeccion cualitativa.

Multiplicacion.

Definicion del producto cuando los factores son números con afeccion cualitativa.

Regla de los signos.

*Teorema.* El producto indicado de varios factores con afeccion cualitativa, no varía de valor ni de signo, aunque los factores se coloquen en otro orden cualquiera.

Division.

Definicion del cociente cuando el dividendo y el divisor son números con afeccion cualitativa.

Regla de los signos.

36.<sup>a</sup>

## OPERACIONES CON LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Preliminares.

Adicion de las expresiones enteras.

Primer caso. Adicion de monomios. Regla.

Términos semejantes.

Reduccion de términos semejantes.

Segundo caso. Adicion de polinomios. Regla.

Sustraccion de las expresiones enteras. Regla.

### 37.<sup>a</sup>

Multiplicacion de las expresiones enteras.

Primer caso. Multiplicacion de monomios. Regla.

Segundo caso. Multiplicacion de un polinomio por un monomio. Regla.

Tercer caso. Multiplicacion de dos polinomios. Regla.

Observaciones sobre la multiplicacion de las expresiones enteras.

### 38.<sup>a</sup>

Division de las expresiones enteras.

*Teorema.* El cociente de dos expresiones literales no varía, aunque se multipliquen ó dividan el dividendo y divisor, por una misma cantidad.

Primer caso de la division. Dividir un monomio por otro. Regla.

Condiciones para que un monomio sea divisible por otro.

Significacion de las expresiones  $A^0$  y  $A^{-d}$ .

Segundo caso de la division. Dividir un polinomio por un monomio.

Tercer caso. Dividir un polinomio por otro polinomio.

*Teorema.* El cociente de toda division, es igual á una cantidad cualquiera, más una fraccion, cuyo numerador es el dividendo ménos el producto del divisor por dicha cantidad; y cuyo denominador es el divisor.

Regla para dividir un polinomio por otro.

Observaciones sobre la division de las expresiones enteras.

39.<sup>a</sup>

*Teorema.* Si dividimos el polinomio

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + V,$$

ordenado por las potencias decrecientes de  $x$ , por el binomio  $x-a$ , el residuo independiente de  $x$ , obtenido en la division será:

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \dots + Ta + V,$$

resultado de sustituir en el dividendo,  $a$  en vez de  $x$ .

*Corolario 1.º* Si el polinomio

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + V;$$

se reduce á cero sustituyendo en él,  $a$  por  $x$ , dicho polinomio es divisible por  $x-a$ .

*Corolario 2.º* Si el polinomio

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + V,$$

es divisible por  $x-a$ ,

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \dots + Ta + V,$$

que resulta de sustituir en el primero  $a$  por  $x$ , se reducirá á cero.

*Corolario 3.º*  $x^m - a^m$ , es divisible por  $x-a$ .

40.<sup>a</sup>

## FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Fraccion algebraica ó literal.

Propiedades de las fracciones algebraicas.

Operaciones fundamentales con las fracciones algebraicas.

El cálculo de las fracciones algebraicas está sujeto á las mismas leyes que el de las fracciones aritméticas.

## CÁLCULO DE LAS EXPRESIONES CON EXPONENTES NEGATIVOS.

Una cantidad puede pasar del numerador al denominador y vice-versa, sin más que cambiar el signo de su exponente.

Operaciones fundamentales, con expresiones afectadas de exponentes negativos.

Las leyes de las cuatro operaciones, son aplicables á las expresiones algebraicas, cualesquiera que sea el signo de su exponente.

## IGUALDADES FRACCIONARIAS Ó PROPORCIONES.

Razon de dos cantidades.

Antecedente y consecuente.

Razones inversas.

Proporcion ó igualdad fraccionaria.

Nombres de sus términos.

*Propiedades de las proporciones.*

I. En toda proporción, el producto de los extremos, es igual al producto de los medios.

*Corolario.* Un extremo de una proporción, es igual al producto de los medios partido por el otro extremo; y un medio es igual al producto de los extremos, partido por el otro medio.

II. Si cuatro cantidades escritas en fila, son tales, que el producto de la primera y la cuarta, es igual al de la segunda y tercera, dichas cuatro cantidades forman proporción, en el orden que están escritas.

*Corolario 1.º* Si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos, con estas cuatro cantidades se puede formar una proporción, con tal que los dos factores de un producto sean los medios, y los dos factores del otro, sean los extremos.

*Corolario 2.º* Una proporcion puede sufrir todas las transformaciones que no alteren la igualdad entre el producto de los medios y el de los extremos.

III. Si dos proporciones tienen una razon comun, las otras dos razones forman una proporcion.

*Corolario.* Si dos proporciones tienen los mismos antecedentes ó los mismos consecuentes, sus consecuentes ó sus antecedentes forman proporcion.

IV. En toda proporcion, la suma de los antecedentes dividida por la suma de los consecuentes, es igual á un antecedente dividido por su consecuente; y tambien la diferencia de los antecedentes dividida por la de los consecuentes, es igual á un antecedente dividido por su consecuente.

*Corolario 1.º* En toda proporcion la suma de los antecedentes dividida por su diferencia, es igual á la suma de los consecuentes dividida por su diferencia.

*Corolario 2.º* En toda proporcion la suma de los dos primeros términos dividida por la suma de los dos últimos, es igual al primero dividido por el tercero, y al segundo dividido por el cuarto; y tambien la diferencia de los dos primeros términos, dividida por la diferencia de los dos últimos, es igual al primero dividido por el tercero, y al segundo dividido por el cuarto.

*Corolario 3.º* En toda proporcion, la suma de los dos primeros términos dividida por su diferencia, es igual á la suma de los dos últimos, dividida por su diferencia.

### 43.<sup>a</sup>

V. Si se multiplican varias proporciones ordenadamente, los productos que resultan forman proporcion.

VI. Si se dividen dos proporciones ordenadamente, los cocientes que resultan forman proporcion.

VII. Si cuatro cantidades forman proporcion, sus potencias del mismo grado forman tambien proporcion.

VIII. Si cuatro cantidades forman proporcion, sus raices del mismo grado forman tambien proporcion.

Série de razones iguales.

*Teorema.* En toda série de razones iguales, la suma de los antecedentes, dividida por la suma de los consecuentes, es igual á la razon de la série.

DE LOS MEDIOS.

Proporcion continúa.

*Teorema.* En toda proporcion continúa, el término repetido es un medio entre los otros dos.

Medio factorial.

*Teorema.* El medio factorial entre dos cantidades, es igual á la raíz cuadrada del producto de dichas cantidades.

*Teorema.* La suma de  $n$  cantidades desiguales dividida por  $n$ , es un medio entre dichas cantidades.

Medio diferencial.

*Teorema.* Entre dos cantidades dadas, el medio factorial es menor que el medio diferencial.

44.<sup>a</sup>

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Igualdad, identidad, ecuacion.

*Problema.* Un padre de 31 años de edad, tiene un hijo de 7: ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea el triplo de la del hijo?

¿Qué es plantear un problema?

Ecuaciones equivalentes.

Grado de una ecuacion con una sola incógnita.

Grado de una ecuacion con varias incógnitas.

Ecuacion numérica.

Ecuacion literal.

Solucion de una ecuacion.

Raices de la ecuacion.

¿Qué es resolver una ecuacion?

Para resolver una ecuacion con una incógnita, basta despejar la incógnita.

Proposiciones en que se funda el procedimiento para despejar la incógnita de una ecuacion:

1.<sup>a</sup> Si á los dos miembros de una ecuacion se les añade ó se les quita una misma cantidad, la ecuacion que resulta, es equivalente á la primera.

*Corolario.* En toda ecuacion se puede trasponer un término de un miembro á otro, cambiándole el signo.

2.<sup>a</sup> Si los dos miembros de una ecuacion se multiplican ó se dividen por una misma cantidad (conocida y diferente de cero), la ecuacion que resulta es equivalente á la primera.

*Corolario 1.<sup>o</sup>* La ecuacion en que todos sus términos tienen un factor comun, puede simplificarse suprimiendo dicho factor.

*Corolario 2.<sup>o</sup>* Toda ecuacion que contenga uno ó más términos fraccionarios, puede transformarse en otra equivalente cuyos términos sean todos enteros.

Regla para quitar los denominadores de una ecuacion.

Regla para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita.

Toda ecuacion de primer grado con una incógnita, puede reducirse á la forma  $Ax=B$ .

## 45.<sup>a</sup>

### PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

*Problema 1.<sup>o</sup>* Hallar un número cuyo triplo más 21, sea igual á su duplo más 28.

*Problema 2.<sup>o</sup>* Sabemos que un caño llena un estanque en 6 horas, otro caño lo llena en 3 horas y un tercer caño en 2: ¿En cuánto tiempo llenarán dicho estanque los tres caños á la vez?

*Problema 3.<sup>o</sup>* Un padre dispuso en su testamento, que se repartiase su caudal entre sus hijos, del modo siguiente: al mayor debian entregársele 1000 duros y la quinta parte del resto; al segundo 2000 duros y la quinta parte del resto; al tercero 3000 duros y la quinta parte del resto, y así sucesivamente. Hecha la reparticion, resultó que todos los hijos

recibieron la misma cantidad. ¿Cuál era la fortuna de padre, qué cantidad corresponde á cada hijo, y cuántos eran los hijos?

*Problema 4.º* Dos trenes parten al mismo tiempo de las estaciones de Castellon y Valencia, que distan entre sí 60 kilómetros, en direccion á Madrid. El que sale de Castellon marcha con una velocidad de 40 kilómetros por hora, y el que sale de Valencia con la velocidad de 30 kilómetros por hora. ¿A qué distancia de Castellon se encontrarán dichos trenes?

*Problema 5.º* Sabemos que un caño llena un estanque en  $a$  horas, otro lo llena en  $b$  horas, y un tercer caño en  $c$  horas. ¿En cuánto tiempo llenarán dicho estanque los tres caños á la vez?

Problemas particulares.

Problemas generales.

En estos últimos el valor de la incógnita es una fórmula.

*Problema 6.º* Un padre dispuso en su testamento, que se repartiese su fortuna entre sus hijos del modo siguiente: al mayor debían entregársele un número  $a$  de pesetas más la enésima parte del resto; al segundo un número  $2a$  de pesetas más la enésima parte del resto y así sucesivamente. Hecha la reparticion resultó, que todos los hijos recibieron el mismo número de pesetas. ¿Cuál es la fortuna del padre, qué cantidad corresponde á cada hijo, y cuántos eran los hijos?

La resolucion de los problemas consta de dos partes: primera, plantear el problema; segunda, resolver la ecuacion.

Regla para plantear los problemas.

## 46.<sup>a</sup>

### DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Problema de los móviles.

Discusion de la fórmula  $x = \frac{a v}{v - v'}$ .

Discusion general de la ecuacion  $Ax = B$ .

Exámen de los cinco valores que puede tener la incógnita:

1.º *Solucion positiva.*

Esta solucion satisface siempre la ecuacion: pero algunas veces no satisface el problema.

Ejemplo: *Problema.* En un simulacro se han hecho un número de disparos de fusil, cuádruplo que de cañon; pero el número de tiros de fusil, ménos dos; resulta igual al duplo de los de cañon ménos uno. ¿Cuántos cañonazos se han disparado?

2.º *Solucion negativa.*

Esta satisface siempre la ecuacion.

Significacion de la solucion negativa respecto de los problemas.

3.º *Solucion infinita.*

Esta solucion indica que la ecuacion de donde proviene es absurda, y el problema imposible.

Ejemplo: *Problema.* Un padre de varios hijos, tiene un número de hembras doble que el de varones; pero el número de aquellas ménos tres, es igual al doble de éstas más ocho. ¿Cuál es el número de varones?

4.º *Solucion cero.*

Este valor verifica la ecuacion. Su significacion respecto de los problemas.

5.º *Solucion indeterminada.*

Significacion de esta solucion respecto á las ecuaciones, y á los problemas de donde proviene.

Significacion de las expresiones  $\frac{\infty}{\infty}$ , y  $\frac{A}{\infty}$ .

#### 47.ª

### SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO, CON TANTAS ECUACIONES COMO INCÓGNITAS.

Resolucion de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

*Métodos de eliminacion.*

Método de sustitucion.

Regla para eliminar por este método una incógnita entre dos ecuaciones.

Método de igualacion.

Regla para eliminar por este método una incógnita entre dos ecuaciones.

Método de reduccion.

Regla para eliminar por este método una incógnita entre dos ecuaciones.

Fórmulas para la resolución del sistema  $ax+b$  y  $=k$   
 $a'x+b'$  y  $=k'$ .

Resolucion de un sistema de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas. Regla.

48.<sup>a</sup>

## PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

*Problema 1.º* Hallar dos números, cuya suma sea 1, y cuyo cociente sea 2.

*Problema 2.º* Hieron, rey de Siracusa, dió á un platero 20 libras de oro, para que con este metal fabricase una corona que debia dedicar á Júpiter. El platero hizo una corona que efectivamente pesaba 20 libras; pero desconfiando el rey de la buena fé del artista, encargó al sábio Arquímedes, que averiguase sin destruir la corona, si ésta contenia las 20 libras de oro entregadas, ó si parte de ellas habian sido sustituidas por otro metal. Arquímedes confirmó las sospechas del rey, descubriendo que la corona estaba compuesta de 15'53 libras de oro, aleadas con 4'47 libras de plata. ¿Cómo pudo hacer Arquímedes este descubrimiento?

*Problema 3.º* En un libro abierto, si pasamos 20 hojas de la izquierda á la derecha, resulta igual el número de hojas de ambos lados. Si por el contrario pasamos 20 hojas de la derecha á la izquierda, resultan en este lado triple número de hojas que en el derecho. ¿Cuál es el número de hojas que habia en cada lado?

49.<sup>a</sup>DISCUSION DE UN SISTEMA DE  $m$  ECUACIONES CON  $m$  INCÓGNITAS.

Formas que pueden tener los valores de las incógnitas.

Su significacion.

Discusion del sistema  $ax - by = k$ ,  $a'x - b'y = k'$ .

50.<sup>a</sup>

## SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON MÁS Ó MENOS ECUACIONES QUE INCÓGNITAS.

Sistemas con más incógnitas que ecuaciones.

Sistemas con más ecuaciones que incógnitas.

51.<sup>a</sup>

## POTENCIAS Y RAICES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

*Potencias de los números con afeccion cualitativa.*

Signo de las potencias de grado par de los números con afeccion cualitativa.

Signo de las potencias de grado impar de los números con afeccion cualitativa.

Valor absoluto de las potencias de los números con afeccion cualitativa.

*Raices de los números con afeccion cualitativa.*

Signo de las raices de grado par de los números positivos.

Signo de las raices de grado impar de los números positivos ó negativos.

Raices de grado par de los números negativos.

Valor absoluto de las raices de los números con afeccion cualitativa.

*Potencias de los monomios.*

Una potencia de un producto de varios factores, es igual

al producto de las potencias del mismo grado de los factores.

La potencia de otra potencia de una cantidad, es igual á una potencia de la misma cantidad, cuyo grado es el producto de ambos exponentes.

Regla para elevar un monomio entero á una potencia.

Regla para elevar una fraccion á una potencia cualquiera.

*Raices de los monomios.*

La raiz de un grado cualquiera de un producto de varios factores, es igual al producto de las raices del mismo grado de los factores.

La raiz de una potencia de una cantidad, cuando el índice de la raiz es divisor del exponente de la potencia, es igual á una potencia de dicha cantidad, cuyo grado es el cociente de dividir el exponente de la cantidad por el índice de la raiz.

Regla para extraer la raiz de un monomio entero, cuando el índice es factor de los exponentes de las letras.

52.<sup>a</sup>

## COMBINATORIA.

Coordinaciones binarias ó de segundo órden.

Coordinaciones ternarias ó de tercer órden.

Coordinaciones cuaternarias ó de cuarto órden.

Coordinaciones del  $n^{\text{stimo}}$  órden de  $m$  letras.

Procedimiento para formar las coordinaciones de un órden cualquiera.

Justificacion de este procedimiento.

*Problema.* Determinar el número de coordinaciones de órden enésimo que se pueden formar con  $m$  letras.

Fórmula.

Permutaciones.

Procedimiento para formar las permutaciones de  $n$  letras.

Número de permutaciones que se pueden formar con  $n$  letras.

Fórmula.

Combinaciones.

Procedimiento para formar las combinaciones de un orden cualquiera con  $m$  letras.

Determinar el número de combinaciones del orden enésimo que se pueden formar con  $m$  letras.

Fórmula.

El número de combinaciones de orden enésimo de  $m$  letras, es el mismo que el del orden  $m-n$ .

El producto de  $n$  enteros consecutivos cualesquiera, es divisible por el producto de los  $n$  primeros números de la serie natural.

### 53.<sup>a</sup>

#### BINOMIO DE NEWTON.

Ley de los productos de los binomios  $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\dots$

Demostracion de esta ley.

Fórmula del binomio de Newton.

Propiedades de esta fórmula.

Término general.

Comparacion de los términos  $T_{n+1}$  y  $T_{n+2}$ .

Regla para desarrollar una potencia cualquiera de un binomio.

Simplificacion de esta regla.

Desarrollo de  $(x-a)^m$ .

La suma de los coeficientes de una potencia cualquiera del binomio  $x+a$ , es una potencia de 2 del mismo grado: y la suma de los coeficientes de los términos de lugar par, es igual á la de los de lugar impar.

### 54.<sup>a</sup>

#### POTENCIAS DE LOS POLINOMIOS.

Regla para elevar un polinomio á una potencia cualquiera.

Regla para hallar el cuadrado de un polinomio.

## RAICES DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y DE LOS POLINOMIOS

Potencia enésima de un número mayor que 10, descompuesto en sus decenas y unidades.

Deducción del procedimiento para hallar las decenas de la raíz enésima de un número  $N$ , mayor que  $10^n$ .

Regla para hallar la raíz enésima de un número entero mayor que  $10^n$ .

Raíces de los polinomios.

Deducción del procedimiento para hallar la raíz enésima de un polinomio. Regla.

¿Cuándo un polinomio ordenado no tiene raíz exacta de grado  $n$ ?

Un binomio no tiene raíz exacta.

55.<sup>a</sup>

## CÁLCULO DE LAS EXPRESIONES RADICALES REALES.

Propiedades de las expresiones radicales.

1.<sup>a</sup> El valor de un radical no varía, cuando se multiplican por un mismo número entero el índice y el exponente de la cantidad subradical.

2.<sup>a</sup> El valor de un radical no varía, cuando se divide el índice y el exponente de la cantidad subradical, por un factor común á ambos.

Consecuencias:

1.<sup>a</sup> Para simplificar un radical se dividen, el índice y el exponente de la cantidad subradical por el m. c. d. de ambos.

2.<sup>a</sup> Para reducir dos ó más radicales de distintos índices, á otros equivalentes que tengan un índice común primeramente se simplifican; despues se halla el m. m. c. de los índices, y por fin, se multiplica el exponente de cada cantidad subradical y su índice por el número que indique las veces que éste está contenido en el m. m. c.

*Operaciones con las expresiones radicales.*

Adición y sustracción. Regla.

Multiplicacion. Regla.  
 Division. Regla.  
 Potencias. Reglas.  
 Raices. Reglas.

56.<sup>a</sup>

CÁLCULO DE LAS EXPRESIONES CON EXPONENTES  
 FRACCIONARIOS.

Adicion y sustraccion.  
 Multiplicacion.  
 Division.  
 Potencias.  
 Raices.

Las leyes del cálculo de las expresiones con exponentes fraccionarios, son las mismas que las de las cantidades con exponentes enteros.

57.<sup>a</sup>

EXPRESIONES IMAGINARIAS.

Expresiones imaginarias de segundo grado.  
 Monomio imaginario.  
 Unidad imaginaria.  
 Binomio imaginario.  
 Expresiones imaginarias conjugadas.  
 Operaciones con las expresiones imaginarias.  
 La suma, el resto, el producto y el cociente de dos binomios imaginarios, tienen en general la forma de un binomio imaginario.

Ley de las potencias de  $+\sqrt{-1}$ , y de  $-\sqrt{-1}$ .

Módulo de un binomio imaginario.

*Teorema.* Si un binomio imaginario es igual á cero, su módulo es tambien igual á cero y recíprocamente.

*Teorema.* El módulo del producto de dos binomios

\*

imaginarios, es igual al producto de los módulos de dicho binomios.

*Corolario.* El módulo del producto de tres ó más binomios imaginarios, es igual al producto de los módulos de dichos binomios.

*Teorema.* El módulo del cociente de dos binomios imaginarios, es igual al cociente de los módulos de dichos binomios.

*Teorema.* Un producto de varios factores imaginario será cero, si lo es uno cualquiera de los factores.

58.<sup>a</sup>

## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Forma general de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Ecuaciones completas ó incompletas.

Resolucion de una ecuacion completa de segundo grado con una incógnita.

Regla para resolver la ecuacion  $x^2+px+q=0$ .

Regla para resolver la ecuacion  $ax^2+bx+c=0$ .

En toda ecuacion de segundo grado de la forma  $x^2+px+q=0$ , el coeficiente del segundo término con el signo cambiado, es igual á la suma de las raices de la ecuacion, y el tercer término es igual al producto de dichas raices.

*Corolario 1.º* Cuando el tercer término de dicha ecuacion es positivo, las raices si son reales tienen el mismo signo; y cuando es negativo, son una positiva y otra negativa.

*Corolario 2.º* El coeficiente del segundo término, tiene signo contrario al de la mayor de las raices.

*Corolario 3.º* El binomio  $x^2+px+q=0$ , es igual al producto de dos binomios, formados por la diferencia entre  $x$  y cada una de las raices de la ecuacion  $x^2+px+q=0$ .

59.<sup>a</sup>

DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

*Primera hipótesis.* Cuando  $b^2 - 4ac$  es positiva.

*Segunda hipótesis.* Cuando  $b^2 - 4ac = 0$ .

*Tercera hipótesis.* Cuando  $b^2 - 4ac$  es negativa.

Resolución y discusión de las ecuaciones incompletas de segundo grado con una incógnita.

60.<sup>a</sup>

PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

*Problema 1.º* Hallar un número, cuyo quintuplo sea igual á un cuadrado aumentado en seis unidades.

*Problema 2.º* Se han de repartir 30 naranjas entre varios niños. Si los niños fuesen 5 más, les tocaría á cada uno una naranja ménos. ¿Cuántos son los niños?

*Problema 3.º* Se han de repartir 90 reales entre varios pobres; si el número de pobres aumentase en dos unidades, cada pobre recibiría 3 reales más. ¿Cuál es el número de los pobres?

61.<sup>a</sup>

MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Máximo y mínimo de una funcion.

*Problema 1.º* Dividir un número en dos partes, cuyo producto sea un máximo.

*Problema 2.º* Descomponer un número en dos factores, cuya suma sea un mínimo.

Procedimiento para hallar los máximos y mínimos de las funciones de segundo grado respecto de la variable.

ECUACIONES BICUADRADAS.

Simplificación de las expresiones de la forma  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

## ECUACIONES BINOMIAS.

Resolucion de las ecuaciones

$$y^2 - 1 = 0, y^3 - 1 = 0, y^4 - 1 = 0.$$

62.<sup>a</sup>

## PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

*Progresiones por diferencia.*

¿Qué es progresion por diferencia?

Progresiones crecientes.

Progresiones decrecientes.

Término general. Fórmula.

Primer término. Fórmula.

En toda progresion aritmética, la suma de dos términos equidistantes respectivamente de los extremos, es igual a la suma de los extremos.

*Interpolacion.* Fórmula de la razon de la progresion.

Si se interpolan entre cada término y el siguiente de una progresion por diferencia, un mismo número de medios aritméticos, la série que resulta será tambien una progresion por diferencia.

Para interpolar entre dos números  $p$  y  $p' - 1$  medios aritméticos, basta interpolar desde luego  $p' - 1$  medios entre los números dados, y despues  $p - 1$  medios entre cada término y el siguiente de la progresion obtenida.

*Corolario.* Para interpolar entre dos números  $p$  y  $p' \dots - 1$  medios, bastará interpolar  $p - 1$  medios y despues sucesivamente  $p' - 1, p'' - 1, \dots$  entre cada término y el siguiente de la progresion que resulta de la anterior interpolacion.

Suma de los términos de una progresion aritmética. Fórmula.

*Problema 1.º* Calcular la suma de los  $n$  primeros términos de la série natural de los números enteros.

*Problema 2.º* Calcular la suma de los  $n$  primeros números impares.

*Problema 3.º* Hallar dos cuadrados, cuya suma sea otro cuadrado.

*Problema 4.º* Calcular la suma de los  $n$  primeros números pares.

Problemas que pueden resolverse con las fórmulas

$$t_n = t_1 + (n - 1)d, \quad S = \frac{(t_1 + t_n)n}{2}$$

### 63.º

#### PROGRESIONES POR COCIENTE.

¿Qué es progresion por cociente?

Progresiones crecientes.

Progresiones decrecientes.

Término general. Fórmula.

En toda progresion por cociente, el producto de dos términos equidistantes respectivamente de los extremos, es igual al producto de los extremos.

*Interpolacion.* Fórmula de la razon de la progresion.

Si se interpola entre cada término y el siguiente de una progresion por cociente, un mismo número de medios por cociente, la série que resulta será tambien una progresion por cociente.

Para interpolar entre dos números,  $pp' - 1$  medios proporcionales, basta interpolar desde luego  $p - 1$  medios entre los dos números dados, y despues  $p' - 1$  medios entre cada término y el siguiente de las progresiones antes obtenidas.

*Corolario.* Para interpolar entre dos números  $pp'p'' \dots - 1$  medios proporcionales, bastará interpolar  $p - 1$  medios entre dichos números, y despues sucesivamente  $p' - 1$ ,  $p'' - 1, \dots$  entre cada término y el siguiente de la progresion que resulta de la anterior interpolacion.

Producto de los términos de una progresion por cociente. Fórmula.

Suma de los términos de una progresion por cociente. Fórmula.

Suma de los términos de una progresion por cociente, cuando el número de ellos es ilimitado. Fórmula.

Discusion de esta fórmula.

## LOGARITMOS.

Sistema de logaritmos.

Logaritmo de un número.

*Teorema 1.º* Las raíces de un número positivo y mayor que 1, Primero: son siempre mayores que 1. Segundo: disminuyen á manera que crece el índice de la raíz. Tercero: pueden si éste crece suficientemente aproximarse á 1 cuanto se quiera.

*Teorema 2.º* En la funcion  $a^x$ , si  $x$  crece de una manera continua,  $a^x$  variará de una manera continua.

Discusion de la ecuacion  $a^x = b$ .

En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1, y el de 1 es cero.

*Primera hipótesis: a positiva y diferente de cero.* En todo sistema de logaritmos, cuya base es positiva y mayor que 1, el logaritmo de cero es  $-\infty$ , el de  $+\infty$ , es  $+\infty$ ; los logaritmos de los números positivos mayores que 1, son positivos; y los de los números positivos menores que 1, son negativos.

En todo sistema de logaritmos cuya base es positiva y menor que 1, el logaritmo de *cero* es  $+\infty$ ; el de  $+\infty$ , es  $-\infty$ ; los logaritmos de los números positivos menores que 1, son positivos; y los logaritmos de los números positivos mayores que 1, son negativos.

Cuando la base es positiva y diferente de 1, todo número positivo tiene su logaritmo y no tiene mas que 1; y á todo logaritmo positivo ó negativo corresponde un solo número positivo.

*Segunda hipótesis.  $a = 1$ .*

*Tercera hipótesis.  $a$ , negativa.*

La base de un sistema de logaritmos ha de ser precisamente un número positivo y diferente de 1.

*Propiedades generales de los logaritmos.*

1.<sup>a</sup> El logaritmo de un producto, es igual á la suma de los logaritmos de los factores.

2.<sup>a</sup> El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del dividendo, ménos el logaritmo del divisor.

3.<sup>a</sup> El logaritmo de una potencia de un número, es igual al logaritmo de dicho número, multiplicado por el exponente de la potencia.

4.<sup>a</sup> El logaritmo de la raíz de un número, es igual al logaritmo de dicho número, dividido por el índice de la raíz.

Reglas que se deducen de estas propiedades, para simplificar la multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces.

## 65.<sup>a</sup>

### PROPIEDADES PARTICULARES DE LOS LOGARITMOS VULGARES.

Sistema de logaritmos vulgares ó de Briggs.

Condiciones necesarias y suficientes que debe reunir un número conmensurable  $N$ , para que su logaritmo en el sistema de Briggs, sea conmensurable.

Logaritmos de las potencias de 10, y de las potencias de  $\frac{1}{10}$  en este sistema.

Logaritmos inconmensurables.

Característica. Mantisas.

Si un número se multiplica ó se divide por la unidad seguida de ceros, la mantisa de su logaritmo no varía; pero la característica se aumenta ó disminuye en tantas unidades, como ceros siguen á la unidad.

*Corolario.* La mantisa del logaritmo de un decimal, no varía aunque se corra la coma uno ó más lugares hácia la derecha ó hácia la izquierda; pero la característica aumenta ó disminuye respectivamente tantas unidades como lugares se corre la coma.

*Tablas de logaritmos.*

Construccion de las tablas ordinarias.

Regla para calcular el logaritmo de un número entero, con ménos error de una unidad fraccionaria.

Conocido el logaritmo de un número en un sistema, determinar el logaritmo del mismo número en otro sistema. Módulo.

Disposicion y usos de las tablas de logaritmos.

*Problema 1.º* Dado un número, hallar su logaritmo por medio de las tablas.

Reglas para resolver al problema en los diferentes casos que pueden ocurrir.

*Problema 2.º* Dado un logaritmo, hallar su número correspondiente por medio de las tablas.

Reglas para resolver este problema en los diferentes casos que pueden ocurrir.

Complemento aritmético de un número.

Complemento logarítmico.

Complemento á cero de un logaritmo.

Aplicacion de los complementos logarítmicos, para simplificar el cálculo.

*Ecuaciones exponenciales.*

Resolucion de las ecuaciones  $a^x = b$ , y  $a^{b^c - k^x} = M$ .

## 66.ª

### CANTIDADES PROPORCIONALES.

*Preliminares.* ¿Cuándo una cantidad es dependiente de otra?

Cantidades directamente proporcionales.

Cantidades inversamente proporcionales.

Si dos cantidades A y B son directamente proporcionales, los valores particulares de A, a y  $a_1$ , y sus correspondientes respectivos de B, b, y  $b_1$ , forman la pro-

porcion  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ .

Si dos cantidades A y B son inversamente proporcionales, los valores particulares de A, a  $a_1$ ; los

correspondientes respectivos de  $B, b, b_1$  forman la proporción  $\frac{a}{a_1} = \frac{b_1}{b}$ .

67.<sup>a</sup>

## REGLA DE TRES.

Regla de tres simple.

Regla de tres compuesta.

Procedimiento para aplicar la regla de tres simple.

Método de reducción á la unidad.

Procedimiento para aplicar la regla de tres compuesta.

Método de reducción á la unidad.

68.<sup>a</sup>

## REGLA DE INTERÉS.

Interés. Rédito ó tanto por ciento.

*Interés simple.*

Fórmulas para resolver las cuestiones de interés simple.

*Interés compuesto.*

Fórmulas que resuelven las cuestiones de interés compuesto.

*Anualidades.*

¿Qué se entiende por anualidad?

Fórmulas para resolver las cuestiones sobre anualidades.

*Rentas vitalicias.*

¿Qué se entiende por rentas vitalicias?

Fórmula para resolver las cuestiones sobre rentas vitalicias.

69.<sup>a</sup>

*Descuento.*

¿Qué se entiende por descuento de una letra?

Valor nominal y valor real de una letra.

Descuento comercial.

Descuento racional.

Fórmulas para calcular el valor real de una letra.

### 70.<sup>a</sup>

#### REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES.

*Problema.* Dividir un número  $N$ , en partes proporcionales á los números  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

*Regla de compañía.*

Cuestiones que se resuelven por la regla de compañía.

### 71.<sup>a</sup>

#### REGLA DE ALIGACION.

*Problema 1.º* Conociendo el precio y la cantidad de cada una de las especies que entran en una mezcla, hallar el precio de ésta.

Regla para resolverlo.

*Problema 2.º* Conociendo el precio de las especies que se han de mezclar, determinar la cantidad que debe entrar de cada especie, para que la mezcla tenga un precio medio dado.

Regla para resolverlo.

#### REGLA CONJUNTA.

*Problema.* Dado un número concreto, hallar su equivalente de otra especie dada, por medio de equivalencias conocidas que ligen la especie del número dado, y la especie del que se busca.

*Teorema.* Si tenemos dos ó más equivalencias tales, que el segundo miembro de cada una es de la misma especie que el primero de la siguiente; y las multiplicamos ordenadamente, resultará otra equivalencia cuyo primer miembro será de la especie primera, y el segundo de la última.

Regla para aplicar la regla conjunta.



