

8-12-1875
15-1-2
SEGUNDA ENSEÑANZA.

PROGRAMA
DE
MATEMÁTICAS.

Nueva edición.

MADRID:
LIBRERÍA DE DON GREGORIO HERNANDO,
calle del Arenal, número 11.

—
1875.

PROGRAMA
DE
MATEMÁTICAS.

AL/F.2-2

PROGRAMA
DE
MATEMÁTICAS.

PARA EL ESTUDIO DE ESTA ASIGNATURA

EN LOS

INSTITUTOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA Y NOCIONES DE TOPOGRAFÍA.

Nueva edicion.

MADRID:

LIBRERÍA DE D. GREGORIO HERNANDO,
CALLE DEL ARENAL, NÚM. 11.

1875.

Los alumnos de las clases de MATEMÁTICAS darán una muestra de gran aprovechamiento en sus estudios, no sólo contestando bien á todas las cuestiones que son objeto del exámen, sino llevando al tribunal resueltos todos, absolutamente todos los ejercicios prácticos del PROGRAMA.

PRIMER AÑO.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

INTRODUCCION.

NOCIONES DE LÓGICA.

Objeto de la LÓGICA.

Relaciones de la Lógica con las demas ciencias.

IDEAS: su division en simples y compuestas; individuales, particulares y generales; abstractas y concretas. *Ideas matemáticas.*

JUICIO: sus elementos son la *percepcion* y la *afirmacion*. Los juicios se dividen en afirmativos y negativos, generales ó particulares.

PROPOSICION: sus elementos lógicos son *sujeto*, *predicado* y *cópula*.

ARGUMENTACION y SILOGISMO.

La forma más matemática del silogismo es la disyuntiva.

Qué es CIENCIA en general.

Division de las ciencias en *racionales* ó *especulativas*, y *experimentales* ó de *observacion*. Entre las primeras figuran en primer lugar las MATEMÁTICAS, llamadas tambien *ciencias exactas*; y entre las segundas las FÍSICO-QUÍMICAS y NATURALES.

Del MÉTODO en general: su division en *analítico* y *sintético*.

Qué se entiende por *definicion*, *axioma*, *postulado*, *teorema*, *problema*, *demonstracion*, *corolario*, *escolio* y *lema*.

DEFINICION Y DIVISION DE LAS MATEMÁTICAS.

Objeto de las MATEMÁTICAS como ciencias que tratan de la *cantidad*. *Cantidad*, *unidad*, *número* y *extension*.

Division de las MATEMÁTICAS en *puras* y *mixtas* ó aplicadas.

Las *matemáticas puras elementales* se subdividen en tres tratados: ARITMÉTICA, ALGEBRA y GEOMETRÍA; y las *superiores* abrazan la GEOMETRÍA ANALÍTICA, la DESCRIPTIVA y los CÁLCULOS DIFERENCIAL é INTEGRAL.

Las *matemáticas mixtas* pueden subdividirse en dos grandes secciones: una que hace aplicacion de la ciencia de la cantidad abstracta á los objetos de la naturaleza, y otra á los objetos del arte. A la primera seccion pertenecen las ciencias llamadas *físico-matemáticas*, como la MECÁNICA, ASTRONOMÍA, OPTICA, ACÚSTICA, etc., y la segunda la constituyen los tratados de AGRIMENSURA, GEODESIA, ARQUITECTURA, FORTIFICACION, GNOMÓNICA, etc.

ARITMÉTICA.

NOCIONES PRELIMINARES.

Definición de la ARITMÉTICA.

Unidad y número entero.

Números abstractos y concretos.

Números homogéneos y heterogéneos, complejos é incomplejos.

Division de la Aritmética.

Objeto de la Numeracion.

Numeracion hablada ú oral, y numeracion escrita.

Unidades simples de primer orden, decenas, centenas, millares, etc.

Principio fundamental de la numeracion decimal hablada.

Caractéres, signos ó cifras de la numeracion decimal escrita (*).

Valores absoluto y relativo de cada cifra.

Reglas para escribir y leer un número entero cualquiera.

Observaciones acerca de los diferentes sistemas de numeracion.

Numeracion romana.

Escribir en la numeracion decimal los números siguientes :

Quinientos diez ; ciento once ; mil ciento uno ; cinco mil veinte ; nueve mil ciento ; doce mil cinco ; cien mil ciento ; cinco millones ochocientos.

Leer en el mismo sistema estos otros números :

10104, 11001, 100111, 500401, 1 000000, 5 184365, 100 070010
XV, LXI, CCIV, DIL, DCCXC, MXI, MDCVI, MMDCOLX IX

Escribir en caractéres romanos los números que siguen :

¹8, 37, 95, 101, 570, 1047, 1492, 1862, 9919, 1 812905,

Cuántas decenas tiene un millar y cuántos millares tiene un millon ?

Cuántas unidades simples componen una unidad de segundo y otra de tercer orden en los sistemas binario, ternario y duodecimal ?

Escribir en los sistemas binario y duodecimal los veinticinco primeros números enteros.

(*) Estas cifras, llamadas *arábigas* por haberlas introducido en Europa los árabes españoles, no fueron adoptadas de una manera general hasta principios del siglo XVI.

CÁLCULO ARITMÉTICO.

Objeto del CÁLCULO ARITMÉTICO.

Operaciones que constituyen el Cálculo aritmético.

Definiciones de la adición, sustracción, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces.

Consecuencias de estas definiciones.

Signos que indican todas estas operaciones y nombres de sus datos.

Números negativos, fraccionarios é inconmensurables.

Composición y descomposición de los números.

NÚMEROS ENTEROS.

ADICION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Principio fundamental de la adición.

Adición de un número entero con otro ú otros de una sola cifra.

Adición de dos ó más números enteros cualesquiera.

Prueba de la adición.

Observaciones generales acerca de esta operación.

Hallar los resultados de las adiciones que siguen :

1808	726267	107099
1492	97934	99072
80210	298426	5 009719
100742	1 573548	9 914100

Cuánto suman 365 decenas, 1808 unidades, 105 centenas y 12 millares?

Hallar la suma de todos los sumandos de las adiciones anteriores.

Cuál es el número que excede en 1500 unidades y veinticinco centenas á MCLV decenas?

Si dos sumas son iguales, los sumandos respectivos lo serán también?

SUSTRACCION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Principio fundamental de la sustracción.

Sustracción de un número de una sola cifra de otro número entero.

Sustracción de un número entero de otro número entero.

Prueba de la sustracción.

Observaciones generales acerca de la misma operación.

Hallar los resultados de las sustracciones siguientes :

850609	100 100421	1000 000102
75898	88 199422	990 900105

$$1084109 - 120748 =$$

$$1492 \text{ decenas} - 108 \text{ centenas} =$$

Cuál es el exceso de 180 decenas sobre la diferencia entre 12 millares y CXV centenas?

Dos residuos iguales, provienen necesariamente de los mismos datos?

MULTIPLICACION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Definicion de la multiplicacion de un número por otro entero.

Consecuencias de esta definicion.

Principio fundamental de la multiplicacion.

Multiplicar un número entero por 10, por 100, por 1000, etc.

Multiplicar un número de una cifra por otro de una cifra.

Multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola.

Multiplicar un número de varias cifras por otro de varias cifras.

Abreviaciones de la multiplicacion.

Prueba de la multiplicacion.

Número de cifras del producto de dos factores.

Observaciones generales relativas á esta operacion.

Hallar los productos de las multiplicaciones que siguen sin escribir en el primer ejemplo los productos parciales :

$$503214 \times 12 = \quad 1\,847\,201 \times 576 = \quad 10\,709\,000 \times 80090 =$$

Cuál es el producto de 102 decenas por 5 centenas?

Es indiferente empezar la multiplicacion por las unidades superiores ó las inferiores del multiplicador?

Cuál es el producto de los nueve primeros números enteros?

Qué número se debe añadir á 1492 para hacerle cien veces mayor?

Hallar abreviadamente el producto de 49999 por 1875.

Dos productos iguales pueden proceder de diferentes factores?

DIVISION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Definicion de la division de un número entero por otro.

Consecuencias de la definicion anterior.

Division exacta y division inexacta ó incompleta.

Principio fundamental de la division.

Dividir un número entero por 10, por 100, por 1000, etc.

Dividir un número de una ó dos cifras por otro de una sola, siempre que el cociente sea tambien de una cifra.

Dividir un número de varias cifras por otro de una sola.

Dividir un número entero por otro entero cualquiera.

Prueba de la division.

Número de cifras del cociente de dos números enteros.

Observaciones generales relativas á esta operacion.

Hallar los cocientes de las divisiones que siguen sin escribir en el primer ejemplo dividendos ni residuos parciales :

$$6251088 : 12 = \quad 1\,318\,032 : 4068 = \quad 195\,472\,400 : 50900 =$$

Cuál es el valor máximo del resto en las divisiones inexactas?

Hallar abreviadamente el cociente de dividir 49999 entre 25.

Hallar un número tal que dividiéndole por 1860 dé por cociente 1492 y por resto 1808.

Qué variacion debe sufrir el dividendo para que el cociente tenga una unidad más ó una unidad menos?

Cuál es el número que multiplicado por 6 resulta aumentado en 1825 unidades?

Dos cocientes iguales resultan necesariamente de dividir unos mismos números?

ELEVACION Á POTENCIAS DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Formacion de una potencia cualquiera de un número dado.
 Observaciones generales relativas á esta operacion.
 Cuadrado de la suma de dos números enteros.
 Diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos.
 Cubo de la suma de dos números enteros.
 Diferencia entre los cubos de dos números consecutivos.

Conocido el cuadrado de 20 deducir el cuadrado de 19 y de 21.
 Cuál es el cuadrado del producto indicado $2 \times 3 \times 4 \times 5$?
 Conocido el cubo de 20 deducir inmediatamente el cubo de 19 y de 21.
 Cuántas cifras tendrá el cuadrado y cuántas el cubo del número 1808?
 El cuadrado del cubo de un número, es lo mismo que el cubo del cuadrado del mismo número?

RAÍZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Definicion de la *raíz cuadrada* de un número dado.
 Raíz cuadrada entera. Resto ó residuo de esta operacion.
 Extraer la raíz cuadrada de los números enteros menores que 100.
 Número de cifras de la raíz cuadrada de un número entero cualquiera.
 Extraer la raíz cuadrada de los números enteros mayores que 100.
 Prueba de la extraccion de la raíz cuadrada.

Cuántos números menores que un millon tienen raíz cuadrada exacta?
 Cuál es el resto máximo que puede resultar al extraer la raíz cuadrada?
 Hallar los valores de las raíces indicadas que siguen :

$$\sqrt{133225} = \quad \sqrt{1050625} = \quad \sqrt{2985984} =$$

Qué variacion debe sufrir un número para que su raíz cuadrada tenga una unidad más ó una unidad menos?
 Basta la sola inspeccion de un número para saber que no tiene raíz cuadrada exacta?

RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Definicion de la *raíz cúbica* de un número dado.
 Raíz cúbica entera. Resto ó residuo de esta operacion.
 Extraer la raíz cúbica de los números enteros menores que 1000.
 Número de cifras de la raíz cúbica de un entero cualquiera.
 Extraer la raíz cúbica de los números enteros mayores que 1000.
 Prueba de la extraccion de la raíz cúbica.

Cuántos números menores que un millon tienen raíz cúbica exacta?
 Cuál es el resto máximo que puede resultar al extraer la raíz cúbica?
 Hallar los valores de las raíces indicadas que van á continuacion :

$$\sqrt[3]{48627125} = \quad \sqrt[3]{1141166125} = \quad \sqrt[3]{5159780352} =$$

La raíz cuadrada de la raíz cúbica de un número, es igual á la raíz cúbica de la raíz cuadrada del mismo número? (*).

(*) Brevisimas observaciones acerca de las raices de diferentes grados, cuya determinacion depende de las cuadradas y cúbicas.

DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS.

DEFINICIONES Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

Números múltiplos de otro dado.

Factores, divisores, sub-múltiplos ó partes alícuotas de un número.

Números primos.

Si dos ó más números tienen un divisor comun, la suma ó diferencia de ellos tendrá el mismo divisor. Consecuencias de este teorema.

Si uno de los factores de un producto tiene un divisor, el producto tendrá el mismo divisor.

Si dos números tienen un divisor comun, el resto que resulta de dividir el mayor por el menor, tendrá el mismo divisor.

Si un número tiene un divisor, todas sus potencias tendrán el mismo divisor.

Cuál es el máximo divisor de un número y cuál su mínimo múltiplo?
Cuáles son los números primos menores que 100?

Si dos números son múltiplos de un tercero, lo serán la suma, la diferencia, el producto y el cociente de los mismos números?

Si un número es múltiplo de otro, lo serán tambien todas sus potencias?

Los números primos en el sistema decimal, lo son tambien en todos los sistemas de numeracion?

CARACTÉRES DE DIVISIBILIDAD DE UN NÚMERO POR OTRO.

Deducir por la sola inspeccion de las cifras, que componen un número, si éste es divisible por 10, por 100, por 1000, etc.; por 2, por 5, por 4, por 25, por 8, por 125, por 3, por 9 ó por 11.

Los caractéres de divisibilidad de un número por otro, son los mismos en todos los sistemas de numeracion?

Si un número es divisible por 3, por 9 ó por 11, lo serán igualmente todos los números que se formen con las mismas cifras?

Qué divisores pueden descubrirse inmediatamente en el número duodecimal 380?

MÁXIMO COMUN DIVISOR DE DOS Ó MÁS NÚMEROS.

Definicion del máximo comun divisor de dos ó más números.

Números primos entre sí.

El máximo comun divisor de dos números es igual al máximo comun divisor del menor y del resto que resulta de dividirlos entre sí.

Procedimiento para hallar el máximo comun divisor de dos números.

Todo factor ó divisor de dos números lo es tambien de su máximo comun divisor.

Hallar el máximo comun divisor de los números siguientes :

1155 y 2415, 11027 y 599, 275, 1250, 2675 y 2500

Siendo 187 el m. c. d. de 561 y 1496, cuál será el de los números que resulten de multiplicar éstos por 10, cuál el de los que resulten de dividirlos por 11 y cuál el de los que resulten de dividirlos por 187?

NÚMEROS PRIMOS.

Definición de los números primos. Números primos entre sí.

Sí un número primo no es divisor de otro número, los dos son primos entre sí.

Todo número, que es divisor de un producto de dos factores y primo con uno de estos factores, es también divisor del otro factor.

Si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, es primo con el producto.

Números primos entre sí, dos á dos.

Cómo se conocerá si un número dado es ó no número primo?

Dos números consecutivos pueden ser ambos números primos?

El producto de dos ó más números impares, es par ó impar?

Formar una tabla de todos los números primos menores que 1000.

Si dos números son primos entre sí, lo serán también todas sus potencias?

FACTORES SIMPLES Y COMPUESTOS DE UN NÚMERO DADO.

Todo número que no es primo, es un producto de números primos.

Procedimiento para hallar los factores primos de un número dado.

Un mismo número no admite dos descomposiciones diferentes en factores simples ó primos.

Si un número es divisible por dos ó más primos entre sí dos á dos, es también divisible por el producto de todos ellos.

Hallar todos los factores ó divisores de un número dado.

Descomponer en sus factores primos, los números 4620, 5040 y 9900.

Hallar todos los factores simples y compuestos de los números

1260, 1320, 9450, 51030

Si un número es divisible por 3 y por 5, lo será por 15?—Y siéndolo por 4 y por 6, lo será por 24?

Calcular el máximo común divisor de los números 210 y 462 por medio de sus factores simples.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUN DE VARIOS NÚMEROS.

Definición del mínimo múltiplo común de varios números.

Procedimiento para hallar dicho mínimo múltiplo.

El mínimo múltiplo común de dos números es también igual á su producto, dividido por el m. c. d. de los mismos números.

Si varios números son primos entre sí dos á dos, su mínimo múltiplo común será igual al producto de dichos números.

Hallar el mínimo común múltiplo de los números

360 y 2310 378, 2695 y 3300

Resolver el mismo problema empleando el m. c. d. de los números dados.

Cuál es el mínimo múltiplo común de dos ó más números primos entre sí?

Si dividiendo un número N por otros varios a , b y c los cocientes son primos entre sí, ¿será N el mínimo múltiplo común de a , b y c ? (*).

(*) Quiénes fueron los más célebres matemáticos, tanto de la antigüedad como de los tiempos modernos, que han tratado con más extensión de las propiedades de los números?

NÚMEROS FRACCIONARIOS Ó QUEBRADOS.

NUMERACION DE LOS QUEBRADOS.

Orígen de los números fraccionarios ó quebrados.

Unidad fraccionaria.

Números fraccionarios. Su numerador y denominador.

Division de los números fraccionarios en ordinarios y decimales.

Cómo se escriben y cómo se leen los quebrados ordinarios.

Quebrados propios é impropios.

Números mixtos.

Cociente completo ó total de dos números enteros.

Convertir un número entero ó un número mixto en quebrado.

Alteraciones de los quebrados por la variacion de sus términos.

Simplificacion de los quebrados. Fracciones irreducibles.

Reduccion de dos ó más quebrados de diferentes denominadores á otros equivalentes y de un mismo denominador.

Cuántos medios, tercios, quintos, etc., componen una unidad entera?
Se puede simplificar un quebrado cuyos dos términos se diferencien en una unidad?

Simplificar los quebrados: $\frac{1050}{2310}$ $\frac{9900}{11550}$ $\frac{391}{437}$

Reducir á un mismo denominador los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{11}$

y tambien estos otros: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$

Cuál de las dos fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ es mayor?

Qué variacion sufrirá un quebrado propio añadiendo ó quitando á sus dos términos un mismo número?

Y multiplicando ó dividiendo el numerador y el denominador por un mismo número?

Sucederia lo mismo si el quebrado fuese impropio?

NUMERACION DE LOS QUEBRADOS DECIMALES.

Definicion de los quebrados decimales.

Unidad fraccionaria decimal.

Nomenclatura de estas unidades.

Cómo se escriben y cómo se leen los números decimales?

Alteraciones de un número decimal, si se corre la coma uno ó más lugares á la derecha ó á la izquierda.

Un número decimal no varía aunque se añadan ó quiten ceros de su derecha.

Cuántas décimas, centésimas, milésimas, etc., vale una unidad entera

Cuántas millonésimas componen una milésima?

Por qué valen lo mismo 6 décimas que 60 centésimas ó 600 milésimas?

Si en una fraccion duodecimal se corre la coma un lugar á la derecha, ¿cuántas veces se hará mayor dicha fraccion?

ADICION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Sumar dos ó más quebrados.

Sumar un entero con un quebrado.

Sumar dos ó más números mixtos.

Sumar enteros y quebrados con uno ó más números mixtos.

Sumar dos ó más números decimales.

Hallar los resultados de las adiciones siguientes:

$$\frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{2} + \frac{3}{10} + \frac{8}{40} =$$

$$10 + \frac{3}{5} = \quad \frac{5}{4} + 12 = \quad 105 \frac{1}{5} + 10 + 4 \frac{2}{3} + 15 \frac{3}{2} =$$

$$12,005 + 0,5 + 0,00144 + 5,12 + 108,00576 + 718,500001 =$$

SUSTRACCION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Restar un quebrado de otro.

Restar un quebrado de un entero.

Restar un número mixto de otro mixto.

Restar un entero ó un quebrado de un mixto, y al contrario.

Restar un número decimal de otro decimal.

Hallar los resultados de estas sustracciones:

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \quad 4 - \frac{2}{3} = \quad 4 - \frac{5}{2} =$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \quad 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \quad 10 \frac{1}{2} - \left(5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$1,4 - 0,25 = \quad 5,01 - 2,00405 = \quad 1 - 0,999 = \quad 0,5 - 0,4999 =$$

Cuál es el número que sumado con $10\frac{4}{5}$ da por resultado $12\frac{1}{2}$?

MULTIPLICACION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Multiplicar un quebrado por un entero, y al contrario.

Multiplicar un quebrado por otro quebrado.

Multiplicar un número mixto por otro mixto.

Multiplicar un entero ó un quebrado por un número mixto.

Multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros.

Multiplicar un número decimal por un número entero.

Multiplicar un número decimal por otro decimal.

Producto de tres ó más factores quebrados ó mixtos.

Quebrados de quebrados.

Hallar los productos indicados que siguen:

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{11} = \quad 144 \frac{1}{2} \times 10 = \quad \left(10 \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \right) \times 5 \frac{1}{4} =$$

El producto de dos fracciones es mayor ó menor que cada una de ellas?

Cuánto valen $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ del número 100?

$$0,9 \times 0,04 = \quad 12,05 \times 0,104 \times 100 = \quad 1,1 \times 4,005 \times 0,0012 \times 10000 =$$

Cuál será la fraccion que sumada con $\frac{4}{5}$ nos dá $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$ de 12?

DIVISION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

- Dividir un quebrado por un entero, y al contrario.
- Dividir un quebrado por otro quebrado.
- Dividir un número mixto por otro mixto.
- Dividir un entero ó un quebrado por un número mixto.
- Dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros.
- Dividir un número decimal por un número entero.
- Dividir un número decimal por otro decimal.

Efectuar las divisiones siguientes :

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{5} : \frac{4}{5} = & 10 : \frac{4}{5} = & \frac{2}{5} : \frac{3}{5} = & \frac{1}{5} : \frac{1}{4} = \\ 144 \frac{1}{2} : 10 = & \left(10 \frac{4}{9} - \frac{1}{2} \right) : 2 = & 2 : \left(5 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = & \\ 0,22268 : 12 = & 2560 : 2,06 = & 40,8 : 1,25 = & \end{array}$$

Calcular con ménos error que una milésima los cocientes de

$$1875 : 11 = \quad 180 : 0,12 = \quad 1 : 5,25 = \quad 3,02 : 1,5 =$$

ELEVACION Á POTENCIAS DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

- Elevar un quebrado ó un número mixto á una potencia cualquiera.
- Elevar un número decimal á una potencia de cualquier grado.
- Las potencias de una fraccion van disminuyendo á medida que aumenta el índice de la potencia.

El cuadrado de una fraccion es mayor ó menor que su cubo?

$$\left(\frac{3}{5} \right)^2 = \quad \left(\frac{3}{5} \right)^3 = \quad \left(5 \frac{1}{2} \right)^2 = \quad \left(5 - \frac{2}{5} \right)^3 = \quad \left(4 - 3,75 \right)^2 =$$

Todas las potencias de un quebrado irreducible, son tambien irreducibles?

EXTRACCION DE RAÍCES DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

- Extraer la raíz cuadrada de un quebrado, cuyos dos términos tienen raíz cuadrada exacta, y tambien si sólo la tiene uno de ellos, ó si no la tiene ninguno.
- Extraer la raíz cúbica de un quebrado, cuyos dos términos tienen raíz cúbica exacta, y tambien si sólo la tiene uno de ellos, ó si no la tiene ninguno.
- Extraer las raíces cuadrada y cúbica de los números decimales.
- Aproximacion de las raíces cuadrada y cúbica de un número entero ó decimal con ménos error que una unidad decimal dada.

La raíz cuadrada de una fraccion es mayor ó menor que su raíz cúbica?

$$\sqrt{\frac{25}{144}} = \quad \sqrt{\frac{5}{18}} = \quad \sqrt{1 \frac{1}{4}} = \quad \sqrt[3]{\frac{125}{1728}} = \quad \sqrt[3]{\frac{5}{32}} =$$

Hallar con ménos error que una milésima las raíces que siguen :

$$\sqrt{1875} = \quad \sqrt[3]{1875} = \quad \sqrt{2,5} = \quad \sqrt[3]{2,5} = \quad \sqrt[4]{0,5} =$$

Por qué para extraer la raíz cuadrada de una expresion decimal se necesita que el número de sus cifras decimales sea par?

REDUCCION DE QUEBRADOS ORDINARIOS Á DECIMALES.

Procedimiento general para reducir un quebrado ordinario á decimal.

Si un quebrado ordinario no es reducible exactamente á decimal tendrá la forma decimal periódica.

Condiciones para que un quebrado irreducible pueda convertirse exactamente en decimal.

Condiciones para que un quebrado irreducible no pueda convertirse exactamente en decimal.

Cuáles son las fracciones ordinarias que pueden reducirse ó transformarse en decimales exactas?

Cuáles otras en periódicas puras y cuáles en periódicas mixtas?

Indicar varios ejemplos en cada caso.

Reducir á decimales los quebrados ordinarios que siguen :

$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{315}{1110}$	$\frac{1}{29}$	$\frac{12}{2.2.5.7.11}$
---------------	---------------	----------------	----------------	----------------	--------------------	----------------	-------------------------

Cuál será la fraccion decimal equivalente á una ordinaria cuyo denominador sea 9, 99, 999, y en general un número compuesto de nueves?

REDUCCION DE QUEBRADOS DECIMALES Á ORDINARIOS.

Reducir un numero decimal exacto, ó de limitado número de cifras, á quebrado ordinario.

Reducir una fraccion decimal periódica pura á quebrado ordinario: condiciones del denominador de este quebrado.

Reducir una fraccion decimal periódica mixta á quebrado ordinario: condiciones del denominador de este quebrado.

Casos en que un quebrado ordinario puede convertirse exactamente en decimal, en una fraccion decimal periódica pura ó en una periódica mixta.

Observaciones generales acerca de los números fraccionarios.

Reducir á quebrados ordinarios los decimales que siguen :

0,504	0,5555.....	0,12504504.....	4,0125666.....
2,001	4,1111.....	5,0002525.....	12,000104104.....

Es indiferente que en la fraccion 0,5555..... el período sea 5 ó 55, y que en el ejemplo siguiente la parte no periódica sea 125 y el período 045?

Qué condiciones necesita una fraccion ordinaria para convertirse en otra duodecimal exacta?

Si una fraccion ordinaria reducida á decimal resulta periódica, sucederá lo propio reduciéndola á duodecimal?

Cuántas cifras tendrá la fraccion decimal que resulte exactamente igual á un quebrado ordinario, y cuántas el período y cuántas la parte no periódica en otro caso?

Si dos fracciones irreducibles tienen un mismo denominador y se transforman en decimales, tendrán éstas igual número de cifras? (*).

(*) A quiénes se atribuye la notacion actual de los *quebrados decimales*?

Muy recientemente se han publicado unas tablas que contienen la reduccion á decimales, con 7 y 11 cifras, de todos los quebrados, cuyo numerador es la unidad y su denominador los números 2, 3, 4, 5..... hasta 1000.

NÚMEROS INCONMENSURABLES.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES.

Números conmensurables é inconmensurables.

Orígen de los números inconmensurables.

Todo número inconmensurable puede estar comprendido entre dos conmensurables cuya diferencia sea tan pequeña como se quiera.

Cantidad variable y cantidad constante.

Límite de una cantidad variable: límite superior é inferior.

Aproximacion por exceso y por defecto.

Error absoluto y error relativo de una cantidad variable.

El valor exacto es siempre igual á la suma del valor aproximado y el error absoluto, ó al cociente de dividir éste por el error relativo.

Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces de los números inconmensurables solos, ó combinados con otros conmensurables.

Observaciones generales referentes á los números inconmensurables.

En la adicion, sustraccion, multiplicacion y division de los números inconmensurables, conviene trasformarlos en conmensurables todos por exceso, todos por defecto, ó unos por exceso y otros por defecto?

Cuál es el error absoluto de la suma de varios números aproximados por exceso ó por defecto?

Y si lo son unos por exceso y otros por defecto?

Cuál es el error absoluto de la diferencia entre dos números aproximados por exceso ó por defecto?

Y si lo son uno por exceso y otro por defecto?

Cuál es el error absoluto del producto ó cociente de un número aproximado por otro exacto?

Siendo 10 el error absoluto de una expresion aproximada y el relativo $\frac{1}{100}$ ¿cuál será el valor exacto de dicha expresion?

Calcular con tres cifras decimales los resultados de las operaciones que siguen:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{10} + \sqrt{12} = & \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{12} = & \sqrt{10} + \sqrt[3]{10} - \sqrt[4]{10} = \\ \sqrt{10} \times \sqrt{12} = & \sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{12} = & 5 \times \sqrt{2,5} : \sqrt{3} = \\ (\sqrt{10})^3 = & (\sqrt[3]{10})^2 = & \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[3]{\sqrt{10}} = \end{array}$$

GENERALIDAD DEL CÁLCULO ARITMÉTICO.

Expresar por medio de las letras del alfabeto, y por consiguiente, de una manera general, no sólo algunas propiedades de los números, sean enteros, fraccionarios ó inconmensurables, y las variaciones del resultado en todas las operaciones del cálculo con relacion á las alteraciones de los datos, sino tambien los teoremas y reglas prácticas más importantes de la multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces.

COMPARACION DE LOS NÚMEROS.

IGUALDADES Y DESIGUALDADES.

Propiedades de las igualdades aritméticas.
Propiedades de las desigualdades aritméticas.
De la comparacion de igualdad resulta *cero* ó la *unidad*.
De la comparacion de desigualdad resultan las
Diferencias, equidiferencias y progresiones por diferencia.
Razones, proporciones y progresiones por cociente.

DIFERENCIAS, EQUIDIFERENCIAS Y PROGRESIONES POR DIFERENCIA.

Comparacion de dos números por medio de su *diferencia*.
Antecedente y consecuente de una diferencia.
Definicion y propiedades de las equidiferencias.
Hallar uno de sus términos, conocidos los tres restantes.
Definicion y propiedades de las progresiones por diferencia.
Reglas para hallar el último término, el primero y la suma de todos los términos de una progresion por diferencia.

Formar las equidiferencias posibles con los cuatro números 1, 4, 5 y 8.
Suponiendo en una progresion por diferencia :

$A=1$, $D=2$ y $n=10$ hallar el valor del último termino.

$U=20$, $D=2$ y $n=11$ hallar el valor del primer término.

Hallar la suma de todos los términos de cada una de las séries :

$\div$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	hasta	100
$\div$	1,	3,	5,	7,	9,	11,	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	»	99
$\div$	2,	4,	6,	8,	10,	12,	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	»	100

Cuál es la suma de los 1000 primeros números enteros?

RAZONES, PROPORCIONES Y PROGRESIONES POR COCIENTE.

Comparacion entre dos números por medio de su cociente ó *razon*.
Antecedente y consecuente de una razon.
Definicion y propiedades de las proporciones.
Hallar uno de sus términos, conocidos los tres restantes.
Serie de razones iguales: sus propiedades.
Definicion y propiedades de las progresiones por cociente.
Reglas para hallar el último término, el primero y la suma de todos los términos de una progresion por cociente.

Formar todas las proporciones posibles con los números 2, 5, 10 y 25.
Cuatro números primos pueden formar proporcion?

Deducir de $a+b : a-b :: c+d : c-d$, la proporcion $a : b :: c : d$
Suponiendo en una progresion por cociente :

$A=1$, $Q=1/2$ y $n=10$ hallar el valor del último término.

$U=128$ $Q=2$ y $n=15$ hallar el valor del primer término.

Hallar la suma de los doce primeros términos de esta progresion:

$\div \div$ 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.

LOGARITMOS.

DEFINICION Y PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.

Definicion de los logaritmos.
Diferentes sistemas de logaritmos.
Base de un sistema de logaritmos.
Propiedades generales de los logaritmos.

Cuál es el fundamento de la teoría de los logaritmos?
Qué ventajas ofrece en los cálculos el uso de los logaritmos?
Un mismo número puede tener diferentes logaritmos y un mismo logaritmo puede tener diferentes números?
Cómo se halla por medio de los logaritmos el producto ó el cociente de dos números, ó bien una potencia ó raíz de un número dado?

TABLAS DE LOGARITMOS Y SUS APLICACIONES.

Tablas de logaritmos.
Logaritmos de Neper y logaritmos ordinarios ó de Briggs.
Característica y mantisa de los logaritmos de Briggs.
Disposicion de las Tablas de logaritmos de Vazquez Queipo.

Se usan indistintamente los sistemas de Neper y de Briggs?
Cuál es el sistema usual de logaritmos y por qué merece la preferencia sobre el otro?
Si un número tiene n cifras en la parte entera, entre cuáles números enteros consecutivos estará comprendido su logaritmo y cuál será por lo tanto su característica?
Dado un número entero menor que 20000 hallar en las tablas su logaritmo, y al contrario, dado un logaritmo de las tablas buscar el número correspondiente.
Conocido el logaritmo de un número, cómo se hallará el de otro 10, 100, 1000, etc. veces mayor ó menor?
Si cuatro números son proporcionales, qué propiedad tendrán sus logaritmos?
Calcular los logaritmos de los números que siguen:

18740, 18741, $\frac{105}{104}$, $\frac{104}{105}$, $10 \frac{1}{4}$, 10,5 5,808 0,012

Hallar los números de estos logaritmos:

0.851870 | 1.851870 | 3.851870 | 4.851870 | 0.173914 | 5.181186

Hallar por medio de los logaritmos los resultados de estas operaciones:

$$\begin{array}{c}
 365 \times 47 \quad \left| \quad 2925 : 117 \quad \left| \quad \left(10 \frac{1}{2}\right)^5 = \quad \left| \quad \sqrt[5]{18415000} \right. \right. \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 3 \\
 1808 \sqrt{112 \times 3,15} \\
 \hline
 99 \sqrt{1,555 \dots}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (*)$$

(*) Aun cuando generalmente se atribuye á Neper la invencion de los logaritmos, ¿á quién pertenece de derecho la gloria de este descubrimiento?

Neper publicó sus logaritmos en Edimburgo en 1614 y Briggs dió á la estampa los suyos substituyendo la base de Neper 2,71828... por el número 10, en el año 1618.

APLICACIONES DE LA ARITMÉTICA.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE ESPAÑA.

Antiguo sistema de medidas, pesas y monedas de Castilla.

Nuevo sistema métrico-decimal.

Unidades principales en ambos sistemas.

Su relacion con la unidad fundamental respectiva.

Sus múltiplos y divisores (*).

Cuáles son las equivalencias aproximadas entre las unidades principales del sistema métrico y las del antiguo sistema de pesas y medidas de Castilla?

Cuántos metros tiene una legua?

Cuál es el lado de un cuadrado que tiene 144 metros cuadrados de superficie?

Cuántas fanegas de tierra tiene un cuadrado cuyo lado es de 960 varas?

Cuál es el peso de un litro de agua pura?

Y el de un metro cúbico de aire sabiendo que el aire pesa 770 veces menos que el agua?

A cuántos metros equivalen 365 varas de Búrgos?

Cuántos kilogramos componen 11 arrobas y media?

Reducir 180 litros de vino á cuartillos.

Cuántas fanegas de tierra equivalen á 15 hectáreas?

REDUCCION DE UN NÚMERO CONCRETO Á OTRO DE DIFERENTE ESPECIE.

Números complejos é incomplejos.

Reducir un número incomplejo á unidades de otra especie.

Reducir un número complejo á incomplejo.

Abreviaciones que ofrece en todas estas cuestiones el uso del sistema-métrico decimal.

Cuántos minutos tiene un día?

Cuántos metros son 12,5 kilómetros?

Cuánto valen $\frac{5}{8}$ de un duro?

Reducir medio millon de maravedises á unidades de especie superior.

Expresar los números 1508 litros y 1250 metros cuadrados en unidades de especie superior.

Reducir á segundos el número complejo:

5 días... 5 horas... 5 minutos... 10 segundos.

Expresar el mismo número en otra especie de unidades, como por ejemplo, horas ó días.

Transformar en incomplejos los números:

12 kilólitros...4 hectólitros...5 litros. | 12 hectáreas...5 áreas...25 centiáreas.

Cuántos kilogramos son 10 arrobas... 10 libras y 10 onzas?

(*) El sistema métrico-decimal se decretó por la Asamblea Nacional de Francia el 8 de Mayo de 1790. En España sustituye al antiguo sistema de Castilla desde 1860, en virtud de la ley de 19 de Julio de 1849.

ADICION DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

Los sumandos deben ser del mismo género. Siendo de una misma especie la suma será de la especie de los sumandos.

Sumar números incomplejos.

Sumar dos ó más números complejos.

Cuánto suman 105 litros y 10 cántaras de vino?

Hallar la suma de los números complejos:

5 días. 10 horas. 10 minutos.

10 » 4 » 5 »

12 » 4 » 15 »

104 » 15 » 40 »

SUSTRACCION DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

Los datos deben ser de un mismo género. Cuando son de una misma especie, el resultado será de la especie de los datos.

Restar un número incomplejo de otro.

Restar números complejos.

Cuál es el exceso de 20 quintales y medio sobre 400 kilogramos?

Cuánto tiempo ha trascurrido desde el descubrimiento de América hasta el 2 de Mayo de 1808 en que principió la guerra de la Independencia?

MULTIPLICACION DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

El multiplicador debe considerarse como abstracto, y por consiguiente, el producto será de la misma especie que el multiplicando.

Multiplicar un número incomplejo por otro incomplejo.

Multiplicar un número complejo por un incomplejo.

Multiplicar un número incomplejo por un complejo.

Multiplicar un número complejo por otro complejo.

Cuánto valen 25 metros de paño costando cada uno 40 reales y medio?

Cuánto importan 5 kilogramos de té á 2 duros y 8 reales?

Si una fanega de grano pesa 3 arrobas, 10 libras y 10 onzas, ¿cuál será el peso de 5 fanegas, 6 celemines y 3 cuartillos?

DIVISION DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

Si los datos son homogéneos, el cociente será un número abstracto.

Si son heterogéneos, el divisor se considera como abstracto, y en tal caso el cociente será de la misma especie que el dividendo.

Dividir un número incomplejo por otro incomplejo.

Dividir un número complejo por un incomplejo.

Dividir un número incomplejo por un complejo.

Dividir un número complejo por otro complejo.

Cuántos kilómetros de camino se pueden construir con 10 millones de reales, costando cada metro 10 reales y medio?

Hallar el precio de una vara cuadrada de terreno en el supuesto de que tres estadales cuadrados costaron 100 duros, 10 reales y 20 maravedises.

Cuánto vale un metro de tela sabiendo que 5 yardas inglesas costaron 25 duros..... 8 reales y 20 maravedises?

Sabiendo que 4 hectólitros, 2 decálitros y 10 litros de grano pesan 40 kilogramos, cuántas arrobas pesará un kilólitro?

COMPARACION DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

Condiciones para que cuatro números concretos formen una proporción.

Proporcionalidad directa entre cuatro números concretos.

Proporcionalidad inversa entre cuatro números concretos.

Regla práctica para conocer si la proporcionalidad entre los cuatro números de una cuestión dada es directa ó inversa.

Un mismo número puede ser á la vez directa ó inversamente proporcional á otros varios, y tambien directamente proporcional á unos é inversamente proporcional á otros?

REGLA DE TRES.

Lo que se entiende por REGLA DE TRES.

Su division en *simple* y *compuesta*.

Resolucion de la regla de tres simple, sea *directa* ó *inversa*.

Resolucion de la regla de tres compuesta.

Si 12 kilogramos de azúcar costaron 80 reales, ¿cuánto costarán 5?

Si 10 hombres hacen una obra cualquiera en 12 días, ¿cuánto tiempo emplearian 8 hombres en la misma obra y con iguales condiciones?

Si un viajero recorre 365 kilómetros en 10 días andando 10 horas al día, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 25 días andando 8 horas por día?

Si un estanque se llena de agua en 10 días por dos caños que están abiertos 12 horas al día, arrojando cada uno 60 litros por hora, ¿cuánto tardará en llenarse por 5 caños, abiertos 8 horas y media al día, y que arroje cada uno 70 litros por hora?

REGLA DE COMPAÑÍA.

Definicion de la REGLA DE COMPAÑÍA.

Casos que pueden ocurrir: 1.º, que el tiempo sea el mismo y diferentes los capitales; 2.º, que los capitales sean iguales y el tiempo diferente; y 3.º, que sean diferentes los tiempos y los capitales.

Su resolucion en cada uno de estos casos.

Lo que se entiende por descomponer un número en partes proporcionales á otros números dados.

Siendo 200, 250 y 500 duros los capitales de tres asociados y 80 la ganancia total, ¿cuánto corresponde á cada uno?

Distribuir una suma de cien mil reales entre cuatro personas de modo que la primera lleve tres veces más que la segunda, la tercera tanto como las dos anteriores y la cuarta el duplo de la tercera.

Si un padre al morir deja tres hijos de 10, 15 y 20 años, disponiendo que su caudal de medio millon de reales se reparta entre ellos en razon inversa de sus respectivas edades, ¿cuánto corresponderá á cada uno?

Cuál será el beneficio de cada uno de dos socios que han formado una empresa comercial durante 5 años y medio, suponiendo 25000 reales la ganancia total y que los capitales de los socios son el del primero 10000 duros, añadiendo otros 1000 duros más al finalizar el tercer año, y el capital del segundo 12000 duros, de los cuales retiró 3000 medio año antes de terminarse la sociedad?

REGLA DE ALIGACION.

Definicion de la regla llamada de ALIGACION.

Se divide en *directa* é *inversa*. Resolucion de una y otra.

Las cuestiones comprendidas en la regla de aligacion inversa son indeterminadas.

Habiendo mezclado 100 hectólitros de trigo de á 70 reales con 250 hectólitros de á 80 reales, hallar el precio de la mezcla.

Qué se entiende por *ley de la plata* ó *del oro* y cuál es la legal en España para las monedas y alhajas?

Si se ligan 12 kilogramos de plata cuya ley es de 11 dineros y 8 granos, con 20 kilogramos de 10 dineros y medio, ¿cuál es la ley de la aleacion?

Cuántos litros de vino deben mezclarse de dos clases cuyos precios son de 10 y 15 reales cada litro, para vender la mezcla á 12 reales?

Cuántos kilogramos de té de cada una de las tres clases, superior á 100 reales, mediano á 80 é inferior á 50, se han de mezclar para vender la mezcla á 60 reales?

El bronce de los cañones está formado de 11 partes de estaño y 100 de cobre, ¿cuántos kilogramos se necesitan de uno y otro metal para fundir un cañon de 1200 kilogramos de peso?

REGLA DE INTERES.

Lo que se entiende por *capital*, *interes* y *tanto por ciento*.

Interes simple y compuesto.

Proporciones que se emplean para resolver las cuestiones de interes simple cuando el tiempo es un año, ó ménos ó más de un año.

Interes compuesto. Regla general para hallar el capital y sus intereses compuestos durante un tiempo dado (*).

Hallar el interes anual de un capital de 12000 duros al 8 por 100.

Cuál es el capital que produce 10000 reales anuales de interes al 6 por 100?

Calcular el interes de 5000 duros en 100 dias al 10 por 100.

En cuántos dias 5000 duros producirán 100 al 5 por 100?

Cuál es el tanto por 100 á que deben prestarse 2500 duros para que sus intereses durante 3 meses importen 1500 reales?

Cuál es la fórmula que resuelve todas las cuestiones de interes compuesto?

Cuánto producirán 12000 duros á interes compuesto durante tres años al 10 por 100?

REGLA DE DESCUENTO.

Letras de cambio. Su aceptacion y endoso.

Lo que se entiende por negociar una letra de cambio á la par, con daño ó con beneficio.

Diferencia entre una *letra de cambio* y un *pagaré*.

Descuento de una letra ó *pagaré* que vence á un plazo dado.

Qué requisitos necesitan las letras de cambio para hacerse efectivas?

Cuál de las tres personas cuyos nombres figuran en una letra de cambio puede sustituirse por otra sin que resulte por eso perjudicada la letra?

Cuál es el descuento de una letra de medio millon de reales que vence dentro de 90 dias al 8 por 100 anual?

Qué son *cuentas corrientes* y cómo se abonan en ellas los intereses?

(*) Traduccion de esta regla por medio de la fórmula $C=c(1+r)^t$

FONDOS PÚBLICOS.

Qué son FONDOS PÚBLICOS.

Renta perpétua de España al 3 por 100.

Títulos de esta deuda y sus cupones.

Precios y cambios corrientes.

Otras deudas del Estado.

Empresas particulares reconocidas por la ley, y cuyos efectos se cotizan en la Bolsa de Madrid.

Cuáles son los fondos públicos que tienen mayor importancia en la cotización de la Bolsa de Madrid?

Cuánto dinero efectivo costará un millon de reales del 3 por 100 *consolidado* al tipo de 18,5 por 100?

Cuál deberá ser el cambio del papel consolidado para que produzca un interes efectivo de 12 por 100?

Qué son *deudas amortizables*?

Cuáles son las que importan mayores sumas y con qué objeto se han emitido sus títulos?

Cuánto dinero efectivo costarán 100 *Obligaciones del Estado*, llamadas de *ferro-carriles*, de á dos mil reales cada una, al tipo de 32 por 100, y cuál será su renta anual?

Qué es *deuda flotante* ó del *Tesoro* y cuál su aplicacion?

REGLA CONJUNTA.—CAMBIOS Y ARBITRAJES.

Objeto de la REGLA CONJUNTA.

Fundamento de su resolucion.

REGLA DE CAMBIO.

Cambio directo é indirecto. Arbitraje.

Cambios de España con las principales plazas de Europa.

Monedas usuales ó de cuenta más conocidas en Europa y su *par monetaria legal* en reales de España.

A cuántos francos equivalen 12000 reales al cambio de 5,25 francos, y á cuántas libras esterlinas al cambio de 50 $\frac{1}{2}$ dineros ó peniques?

Cuánto valen en España 1500 francos al cambio de 5,21 y 2800 florines al cambio de 2,44 florines?

Cuántas libras esterlinas equivalen á medio millon de reales, siendo nuestro cambio con Amsterdam de 2,25 florines, y el de Amsterdam con Lóndres de 10 $\frac{1}{2}$ florines por una libra esterlina?

Cómo cambia la Habana con Lóndres y con París?

ÁLGEBRA.

NOCIONES PRELIMINARES.

Definición del ÁLGEBRA.

Concepto cualitativo de las cantidades algebraicas.

Notación algebraica.

Diferentes formas de las expresiones literales.

Monomios y polinomios.

Términos semejantes.

Expresiones literales enteras, fraccionarias y radicales.

Grado de un monomio ó polinomio.

Valor numérico ó geométrico de una expresión algebraica.

Fórmulas algebraicas: su traducción al lenguaje ordinario.

División del Álgebra.

Hallar el valor numérico de los polinómios que siguen :

$$a^3 - 5a^2 - 100$$

suponiendo $a=10$

$$ab^2 - 2a + \sqrt{a + 4b}$$

suponiendo $a=5$ y $b=1$

$$(a + b)^2 - \sqrt{2a^2y} + a$$

siendo $a=1$, $y=2$, $b=0$ (*)

(*) A cuál de los famosos matemáticos de la *Escuela de Alejandría* se atribuye la invención del Álgebra, y quiénes entre los modernos la dieron su completo desarrollo?

CÁLCULO ALGEBRAÍCO.

CANTIDADES ALGEBRAÍCAS ENTERAS.

ADICION DE LAS CANTIDADES ALGEBRAÍCAS ENTERAS.

Objeto de la adicion algebraíca ó literal.
 Signo que debe llevar el resultado.
 Adicion de dos ó más monomios.
 Términos semejantes. Su reduccion á uno solo.
 Adicion de dos ó más polinomios.

Hallar la suma de los polinomios :

$$8a^5 - 3a^2b + 4b^2m - 5a + 1 \quad | \quad 2a - 5a^2b + b^2m - 1 + x \quad | \quad 8ba^2 + 3a + 5x - 3mb^2$$

Descomponer el polinomio $a - b + c - d$ en dos ó más sumandos.

Varía el valor numérico de un polinomio si se altera el orden de colocacion de sus términos?

SUSTRACCION DE LAS CANTIDADES ALGEBRAÍCAS ENTERAS.

Objeto de la sustraccion.
 Signo que debe llevar el resultado.
 Sustraccion de un monomio de otra expresion algebraíca.
 Sustraccion de un polinomio de otra expresion algebraíca ó literal.

Hallar el residuo entre los polinomios

$$5a^3 + 5b^2 - 4a^2 - b - 1 \quad \text{y} \quad 2a + 5a^3 - 2a^2 + 5 - b^2 + b$$

En qué casos el residuo de dos cantidades literales es negativo?

Descomponer el polinomio $a - b + c - d$ en una diferencia indicada.

MULTIPLICACION DE LAS CANTIDADES ALGEBRAÍCAS ENTERAS.

Signo que debe llevar el producto de dos cantidades literales.
 Multiplicacion de dos ó más monomios.
 Signo del producto, si varian los signos de los factores.
 Multiplicacion de un polinomio por un monomio.
 Multiplicacion de dos ó más polinomios.
 Número de términos del producto de dos polinomios.

Hallar los productos de los polinomios que siguen :

$$(5a^3 + 4a^2b + 3ab^2 + 2b^3) \times (a^2 + 5ab - 2b^2) =$$

$$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \times (a - b) =$$

$$(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) \times (a - b) =$$

Descomponer en factores los binomios $x^2 - y^2$, $x^4 - y^2$, $x^5 - 1$

Qué alteracion sufrirá un polinomio si se cambian los signos á todos sus términos?—Si un polinomio es homogéneo con respecto á dos letras y se ordena por las potencias ascendentes de una de ellas, ¿quedará ordenado tambien por las descendentes de la otra?

DIVISION DE LAS CANTIDADES ALGEBRAICAS ENTERAS.

Signo que debe llevar el cociente de dos cantidades literales.

Division de dos monomios.

Signo del cociente, si varian los signos del dividendo y divisor.

Toda cantidad que lleve *cero* por exponente equivale á la unidad.

Division de un polinomio por un monomio.

Division de un polinomio por otro polinomio.

Division de un monomio por un polinomio.

Hallar los cocientes que resultan de dividir estos polinomios:

$$(15x^5+14a^4-15a^3+8a^2+3a+6) : (5a^2-2a+1)=$$

$$(31a^2b^2-38ab^3-13a^3b+2a^4+24b^4) : (2a^2+4b^2-3ab)=$$

$$(a^2-b^2) : (a-b)= \quad | \quad (a^5-b^5) : (a-b)= \quad | \quad (a^n-b^n) : (a-b)=$$

Cuál es el cociente de dividir a por el polinomio $1+x-x^2$?

Cuál es el resto de dividir $2x^5+3x^4+5x^3+4x^2+8x+10$ entre $x-a$?

En qué casos no es exacta la division de un polinomio por otro?

ELEVACION Á POTENCIAS DE LAS CANTIDADES ALGEBRAICAS ENTERAS.

Signos que deben llevar las potencias de diferentes grados de una expresion algebraica, sea positiva ó negativa.

Elevacion á potencias de los monomios.

Elevacion al cuadrado y al cubo de un polinomio.

Cuál es el número de términos del cuadrado de un polinomio?

Deducir de las fórmulas $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ y $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

estas otras: $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ y $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

Deducir otras fórmulas análogas de $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$

Fórmulas del cuadrado y el cubo del polinomio $a+b+c+d$.

$$(a^2+a-1)^2= \quad | \quad (5a^2-2ab+1-b^2)^2= \quad | \quad (5a^2-2ab+1)^3=$$

EXTRACCION DE RAÍCES DE LAS CANTIDADES ALGEBRAICAS ENTERAS.

Signos que deben llevar las raíces de diferentes grados.

Extraccion de raíces de los monomios.

Raíz cuadrada y raíz cúbica de un polinomio (*).

$$\sqrt{25a^6+30a^5-11a^4+10a^2-2a^3-4a+1}=$$

$$\sqrt[3]{27a^6-54a^5b+63a^4b^2-44a^3b^3+21a^2b^4-6ab^5+b^6}=$$

$$\sqrt{5x^5-10x^2+5x}= \quad \sqrt[3]{4x^4-12x^3+12x^2-4x}=$$

En qué casos un polinomio no tiene raíz cuadrada ó raíz cúbica exacta?

(*) Raíces de diferentes grados de un polinomio cuya determinacion dependa de las cuadradas y cúbicas.

EXPRESIONES FRACCIONARIAS LITERALES.

CÁLCULO DE ESTAS EXPRESIONES.

Definición de las fracciones literales.

Una expresion fraccionaria no varía de valor, aunque se multipliquen ó se dividan sus dos términos por otra cantidad cualquiera.

Simplificacion de las expresiones fraccionarias literales.

Reduccion de dos ó más de estas expresiones de diferentes denominadores á otras equivalentes, pero de un mismo denominador.

Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces de las cantidades fraccionarias.

Simplificar las expresiones $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ y $\frac{2a^2-a^3}{4-4a+a^2}$

Hallar los resultados de las operaciones siguientes:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \quad \left| \quad \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right| \quad \frac{x-1}{2x+1} \times \frac{1-4x^2}{xy-y^2} \quad \left| \quad \frac{x^4-b^2}{1+2x+x^2} : \frac{x^2+b}{1+x} \right.$$

$$\left(\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} \right) : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right)$$

$$\left(a + \frac{1}{a-1} \right)^2 = \quad \sqrt[3]{\frac{a^3}{8} - \frac{5a}{4} + \frac{3}{2a} - \frac{1}{a^3}} =$$

Aplicacion de las expresiones fraccionarias á la division y extraccion de raíces inexactas en estos ejemplos:

$$\frac{1}{x+y} = \quad \frac{1}{x-y} = \quad \sqrt{a^2+b^2} = \quad \sqrt{1+a} =$$

EXPONENTES NEGATIVOS.

Interpretación de las cantidades con exponente negativo.

Toda expresion fraccionaria puede trasformarse en otra equivalente de forma entera, con uno ó más exponentes negativos.

Las cantidades con exponentes negativos se calculan por las mismas reglas que las que llevan exponentes positivos.

Hallar los resultados de las operaciones que siguen conservando los exponentes negativos:

$$(3a^{-1}b + 4ab^{-2} - ab^0) \times (2ab^{-2} - 5a^{-2}b^{-1}) =$$

$$(17a^{-4}x^6 - 2a^{-8}x^5 - 5x^7 - 24a^4x^8) : (2a^{-3}x^3 - 3ax^4) =$$

$$(a - a^{-1} + a^{-2})^2 = \quad \left| \quad \sqrt[3]{8 - 12x^{-1} + 6x^{-2} - x^{-3}} = \right.$$

Aplicacion de los exponentes negativos á la division y extraccion de raíces inexactas en estos ejemplos:

$$1 : (a+b) = \quad \left| \quad 1 : (a-b) = \quad \left| \quad \sqrt{a^2+b^2} = \quad \left| \quad \sqrt{1+a} = \right.\right.$$

Transformar los resultados anteriores en otros cuyos exponentes sean todos positivos.

CANTIDADES RADICALES.

CÁLCULO DE ESTAS EXPRESIONES.

Definicion de las expresiones radicales.

Alteraciones que puede sufrir una cantidad radical sin variar su valor.

Simplificacion de las expresiones radicales.

Reduccion de dos ó más cantidades radicales de diferentes índices á otras equivalentes de un índice comun y el menor posible.

Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces de las expresiones radicales, sean monomias ó polinomias.

Cantidades radicales conjugadas.

Simplificar las expresiones $\sqrt[6]{25a^2-10a+1}$ y $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

Cuál es la suma, diferencia, producto y cociente de $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$?

Efectuar las operaciones que se indican á continuacion:

$$\left(\frac{2}{a}\sqrt{1-b}+\frac{a}{2}\sqrt{2a-3}\sqrt{a^2+a^2b}\right) + \left(\frac{1}{5}\sqrt{50a^3-2}\sqrt{\frac{1-b}{a^2}}\right) - \frac{a}{2}\sqrt{a}$$

$$(\sqrt{a}-3\sqrt{b}+5\sqrt{c}) \times (\sqrt{a}-\sqrt{b}) =$$

$$(a+3b-4\sqrt{ab}+5\sqrt{ac}-5\sqrt{bc}) : (\sqrt{a}-\sqrt{b}) =$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 = (\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2 = (a+\sqrt{b}+\sqrt{c})^3 =$$

$$\sqrt[5]{4a^2\sqrt{1+2a+a^2}} \quad \sqrt[3]{8\sqrt{1-3x+3x^2-x^3}} \quad \sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$$

Descomponer en dos factores binomios a^2-b , a^4-a , x^2-2 y x^4-2

EXPONENTES FRACCIONARIOS.

Interpretacion de las cantidades con exponente fraccionario.

Toda expresion radical puede convertirse, por lo tanto, en otra de forma racional con exponentes fraccionarios.

Las cantidades con exponentes fraccionarios se calculan lo mismo que las que llevan exponentes enteros.

Transformar en expresiones con exponentes fraccionarios los radicales

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{a^3}, \quad \sqrt[5]{a^{-2}}, \quad \sqrt[n]{5b\sqrt{a+1}}$$

Efectuar las operaciones indicadas á continuacion:

$$5a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} \times 2ab^2m \quad | \quad (a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{1}{2}}) \times (a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{1}{2}}) \quad | \quad (a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}) : (a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})$$

$$(5a^{\frac{1}{2}}-2ab^{\frac{1}{3}}+\sqrt{b})^2 = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}-1} =$$

Transformar estos resultados en otros cuyos exponentes sean enteros.

CANTIDADES IMAGINARIAS.

CÁLCULO DE LAS EXPRESIONES IMAGINARIAS.

Definicion de estas expresiones algebraicas.

Forma propia de las mismas.

Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces de las expresiones imaginarias, sean monomias ó polinomias.

Potencias sucesivas de la raíz cuadrada de la unidad negativa.

Cantidades imaginarias conjugadas.

Observaciones generales relativas á las expresiones imaginarias (*).

Cuál es la forma más propia de las expresiones imaginarias?

Pueden expresarse tambien bajo otra forma?—Transformar unas en otras.

La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos monómios imaginarios dan resultados reales ó imaginarios?—Y sus potencias y raíces?

Cuáles son estos resultados?

La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos expresiones imaginarias conjugadas son resultados reales ó imaginarios?—Y sus potencias y raíces?

Efectuar las operaciones indicadas en los ejemplos siguientes y comprobar las de aquellos cuyos resultados van á continuacion:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-48}+3\sqrt{-12}+5\sqrt{-8}-7\sqrt{-32} &= \\ (3-\sqrt{-5})-(4-2\sqrt{-5}+5\sqrt{-50}) &= \\ \frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}} + \frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} &= \frac{2(a^2-b)}{a^2+b} \end{aligned}$$

Cómo se transforma una expresion fraccionaria cuyo denominador sea imaginario en otra equivalente cuyo denominador sea real?

$$(a+b\sqrt{-1})^2 = (a-b\sqrt{-1})^3 =$$

$$\sqrt{9a^4-12a^3\sqrt{-1}-4a^2+6a^2\sqrt{-2}+4a\sqrt{2}-2}=3a^2-2a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$$

Por qué todas las potencias de la raíz cuadrada de la unidad negativa se reducen á las cuatro siguientes: +1, -1, $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$?

Cuál es la potencia trigésima prima de $-\sqrt{-1}$?

(*) Uno de los primeros matemáticos que fijó su atencion en las expresiones imaginarias fué Cardan, á fines del siglo xvi, con motivo de sus célebres fórmulas para la resolucion de las ecuaciones de tercer grado. Girard y Euler demostraron la utilidad de su introduccion en las especulaciones matemáticas, publicándose despues entre otros muchos trabajos sobre esta materia, la notabilísima *Teoria trascendental* que escribió con un profundo conocimiento filosófico de las ciencias exactas, nuestro malogrado amigo y compañero D. José María Rey.

FÓRMULA DE NEWTON Y SUS APLICACIONES.

COMBINACIONES LITERALES.

Qué son permutaciones y productos diferentes de varias cantidades expresadas por letras?

Permutaciones binarias, ternarias, etc., de varias letras.

Número de estas permutaciones en cada caso. Fórmula general.

Productos binarios, ternarios, etc., de varias letras.

Número de estos productos en cada caso. Fórmula general (*).

Formar las *permutaciones* binarias, ternarias, etc., de las letras a, b, c, m, n , indicando su número anticipadamente.

Formar los *productos diferentes* binarios, ternarios, etc., de las mismas letras.

Cuántos ambos, ternos, cuaternos y quinternos pueden formarse con los 90 números de la lotería antigua?

De cuántas maneras diferentes pueden sentarse doce personas al rededor de una mesa, y cuánto tiempo emplearian en todos estos cambios, suponiendo que tardasen un minuto en cada uno?

El producto de n números enteros consecutivos es siempre divisible por $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$?

DEDUCCION DE LA FÓRMULA DE NEWTON.

Ley general del producto $(a+b)(a+c)(a+d)(a+f)\dots$

Deducir de la proposicion anterior la potencia $n.^{sima}$ ó del grado n de un binomio, ó sea la fórmula de Newton.

Fórmula de Newton para el binomio $a+b$, y formacion de un término cualquiera sin el auxilio de las combinaciones.

Término general de esta fórmula.

Fórmula de Newton para el binomio $x+y$.

Qué propiedad tienen los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos en la fórmula de Newton?

Cuál es la suma de los coeficientes de todos los términos de $(a+b)^n$?

Hallar la suma y la diferencia de $(a+b)^n$ y $(a-b)^n$

APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE NEWTON.

Elevar, por medio de la fórmula de Newton, un binomio á una potencia cualquiera.

Elevacion de polinomios á cualquiera potencia.

Extraer la raíz $n.^{sima}$ ó del grado n de un polinomio dado.

Aplicacion de la fórmula de Newton al desarrollo de $(x+y)^{10}$

Fórmula de la potencia de quinto grado del polinomio $a+b+c-d$

(*) Las permutaciones de varias letras cuando no entran todas en cada grupo, llámanse tambien *coordinaciones* binarias, ternarias, etc.

Los primeros indicios de la *teoría de las combinaciones* se encuentran en las obras del célebre filósofo mallorquin R. Lulio á fines del siglo XIII. La fórmula de Newton la publicó este insigne matemático inglés en 1676.

COMPARACION ALGEBRAICA.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO.

PRELIMINARES RELATIVOS Á LAS ECUACIONES.

Definiciones de la igualdad y de la ecuacion.

Ecuaciones numéricas y literales.

Grado de una ecuacion con una incógnita.

Ecuaciones puras, mixtas, completas é incompletas.

Solucion de una ecuacion con una incógnita.

Solucion de una ecuacion con dos ó más incógnitas.

Qué se entiende por resolver una ecuacion.

Ecuaciones equivalentes.

Ecuaciones imposibles ó absurdas, determinadas é indeterminadas.

Principio fundamental para la resolucion de las ecuaciones.

Consecuencias de este principio relativamente á la simplificacion y transformacion de las ecuaciones.

RESOLUCION DE UNA ECUACION DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Forma general de una ecuacion de primer grado con una incógnita.

Resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita.

Discutir los diferentes valores de la incógnita en la ecuacion $Ax=B$, cuando A y B no son cero, cuando uno es cero y otro no, y finalmente, cuando ambos son cero.

Interpretacion de los símbolos: $\frac{A}{0}$, $\frac{A}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ é $\frac{\infty}{\infty}$ como valores de la incógnita en una ecuacion de primer grado.

Resolver las ecuaciones siguientes:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} - 62 = 0$$

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

$$\frac{x+1}{2} + \frac{5+x}{6} = 1 + \frac{x+1}{3}$$

$$\frac{a+b}{a-b}x - \frac{2a}{a+b} = \frac{2b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}x$$

$$\frac{x-ax}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$$

En qué casos el valor de la incógnita en una ecuacion de primer grado es determinado, indeterminado, cero ó infinito?

La expresion $\frac{0}{0}$ es siempre símbolo de indeterminacion en los valores de la incógnita?

RESOLUCION DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

- Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Solucion de un sistema de ecuaciones.
- Sistemas determinados é indeterminados.
- Sistemas equivalentes de dos ó más ecuaciones.
- Qué es *eliminar* una incógnita en un sistema de ecuaciones.
- Ecuacion final.
- Cuáles son los métodos de eliminacion más conocidos.
- Resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por cada uno de los métodos de sustitucion, comparacion y reduccion.
- Las ecuaciones de un mismo sistema pueden ser distintas, deducirse unas de otras, ó ser incompatibles ó contradictorias.

Resolver los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que van á continuacion :

$$\begin{array}{l|l|l} x+y=100 & 2x+5y=15 & ax-by=0 \\ x-y=25 & 3x-4y=11 & x+y=5 \end{array}$$

- Cuántas soluciones admite un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?
- Cuáles son las fórmulas generales de estas ecuaciones y cuáles las de los valores de sus incógnitas?
- En qué casos estos valores son determinados y únicos, cuándo son indeterminados, cuándo infinitos y cuándo absurdos?

RESOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON IGUAL NÚMERO DE INCÓGNITAS.

- Qué es ELIMINAR una incógnita en un sistema de tres ó más ecuaciones.
- Diferentes métodos de eliminacion. Ecuacion final.
- Resolucion de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.
- Observaciones generales acerca de la eliminacion.

Resolver los sistemas de ecuaciones que van á continuacion :

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=9 \\ 3y-y-6z=22 \\ x+y=11 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3} \\ 5x-2y=1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=7 \\ x+3y-2z=23 \\ x+z=101 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{8}{15} \\ 5y-2z=4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x-y-z=1 \\ 2x-5y+10z=50 \\ y+z=110 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{6}{5} \\ 3z-u=5 \\ x+y+z=6 \end{array} \right. \end{array}$$

Formar un sistema de ecuaciones de primer grado cuyas incógnitas resulten iguales á 3, 4 y 5; y otro cuyas ecuaciones sean incompatibles.

RESOLUCION DE UNA ECUACION DE PRIMER GRADO CON VÁRIAS INCÓGNITAS.

Forma general de una ecuacion de primer grado con várias incógnitas.

Resolver una ecuacion de primer grado con dos incógnitas ó variables, llamadas una, variable independiente, y otra, *funcion* (*).

Resolucion de una ecuacion de primer grado con tres ó más variables.

Número de soluciones de estas cuestiones.

Soluciones enteras y positivas.

Hallar los valores de las incógnitas en cada una de estas ecuaciones

$$x+y=10 \quad | \quad x+y+z=25 \quad | \quad 5x+2y-\frac{z}{2}=100$$

Cuántas soluciones enteras y positivas tiene la primera ecuacion?

RESOLUCION DE UN SISTEMA DE VÁRIAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON MAYOR NÚMERO DE INCÓGNITAS.

Regla general para resolver un sistema de dos ó más ecuaciones con mayor número de incógnitas.

Este sistema ó admite un número indeterminado de soluciones ó no admite ninguna.

Soluciones enteras y positivas.

Aplicacion á varios ejemplos :

$$\begin{array}{ccc|ccc} x+y=20 & & & x+y+z=20 & & & x+y-z=20 \\ x-y-z=10 & & & x-y+z=10 & & & x-y+z=10 \end{array}$$

Formar un sistema de tres ecuaciones cuyas incógnitas puedan ser los números 1, 2, 3 y 4.

RESOLUCION DE UN SISTEMA DE VÁRIAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON MENOR NÚMERO DE INCÓGNITAS.

Resolver un sistema de dos ó más ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas. Igualdades de condicion.

Este sistema puede ser imposible, determinado ó indeterminado.

Resolver los sistemas de ecuaciones que siguen :

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} x+y=20 & & & x+y=10 & & & x+y=3 & & & x+y=a \\ x-y=12 & & & x-y=2 & & & x-y=1 & & & x-y=b \\ 3x+2y=40 & & & x \times y=24 & & & x : y=2 & & & x \times y=c \end{array}$$

Formar dos sistemas de tres ó cuatro ecuaciones uno determinado y otro absurdo cuyas incógnitas en la primera y tercera ecuacion resulten iguales á los números 5 y 6.

(*) Llámase en general *funcion* de una ó más variables toda expresion algebraica cuyo valor dependa del que reciben dichas variables. El *interés* de un capital es *funcion* del capital, del tanto por ciento y del tiempo.

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA ECUACION Y UNA INCÓGNITA.

Lo que se entiende por plantear y resolver un problema.

Problemas determinados, indeterminados ó imposibles.

Resolucion de varios problemas numéricos de primer grado con una ecuacion y una incógnita.

Si un padre tiene 52 años y su hijo 12, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será el triplo de la del hijo?

Qué número se debe añadir á los dos términos de la fraccion $\frac{2}{5}$ para que se convierta en $\frac{2}{3}$?

Si un caño llena una vasija en 4 horas y otro la llena en 5, ¿cuánto tiempo emplearán en llenarla corriendo los dos juntos?

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1$$

Un comerciante separa al principio de cada año 1000 duros para los gastos de su casa, y, por haber ganado en cada año el 50 por 100 del resto, al cabo de tres años ha triplicado su capital primitivo, ¿cuál era éste?

En qué año se fundó Roma sabiendo que si á los transcurridos desde entonces hasta hoy les añadimos el triplo del número que se busca, y ademas 1125 años, resulta precisamente la fecha de la conquista de Granada por los Reyes Católicos?

Cuál es el capital de una persona sabiendo que la suma de su tercera y quinta parte es igual á siete octavas partes del mismo capital?

Descomponer el número 90 en otros cuatro tales, que añadiendo 2 unidades al primero, restando 2 del segundo, multiplicando por 2 el tercero y dividiendo el cuarto por 2, todos los resultados sean iguales.

$$x - 2 + x + 2 + \frac{x}{2} + 2x = 90$$

Señalando las 12 el minuterero y el horario de un reloj, ¿á qué hora volverán á encontrarse y cuántas veces se encontrarán durante un día?

Llamando a la circunferencia del reloj, tendremos $12x = a + x$

PROBLEMAS GENERALES DE PRIMER GRADO CON UNA ECUACION Y UNA INCÓGNITA.

Observaciones acerca de los problemas generales.

Resolucion de los siguientes problemas generales de primer grado con una ecuacion y una incógnita:

Hallar las fórmulas de dos cantidades cuya suma sea S y su diferencia D .
Si dos personas tienen la una a años y la otra b , ¿en qué fecha tendrá la primera n veces la edad de la segunda?

Corren en un estanque tres fuentes, la primera lo llena en a horas, la segunda en b y la tercera en c horas, ¿en cuánto tiempo lo llenarán corriendo las tres juntas?

Si dos móviles salen á un mismo tiempo, en una misma direccion y con movimiento uniforme, de dos puntos A y B , el primero con la velocidad de a kilómetros por hora y el segundo con la velocidad b , á qué distancia del punto A se deben encontrar?

Llamando D la distancia entre A y B , tendremos $\frac{x}{a} = \frac{x-D}{b}$ (*)

(*) Discusion de este problema suponiendo $a > b$, $a < b$ ó $a = b$, siendo D mayor que cero y tambien en el caso de ser $D = 0$.

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON DOS ECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS.

Resolucion de los problemas que siguen :

Hallar una fraccion tal que si restamos 3 de sus dos términos se convierta en $\frac{1}{4}$ y añadiéndoles 5 resulte $\frac{1}{2}$.

Cuántos hectólitros de trigo unos de á 100 reales y otros de á 125, se han de mezclar para tener trigo á 110 reales, excediendo el primer número al segundo en 40 hectólitros?

Cuál es la edad de dos personas sabiendo que una de ellas cuenta 100 años, ménos el quintuplo de los años de la otra, y ésta cuenta 20 años, ménos la quinta parte de los años de la primera?

Hallar dos números cuya suma sea S y su diferencia D.

Cuáles son los números cuya suma es S y su cociente Q?

Si dos móviles salen á un mismo tiempo, en una misma direccion y con movimiento uniforme de dos puntos A y B, el primero con la velocidad de a kilómetros por hora y el segundo con la velocidad b , ¿á qué distancia de los puntos A y B se deben encontrar?

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON TRES Ó MÁS ECUACIONES É IGUAL NÚMERO DE INCÓGNITAS.

Resolucion de varios problemas numéricos de primer grado con tres ó más ecuaciones é igual número de incógnitas, y cuyas soluciones todas sean positivas, ó unas positivas y otras negativas, etc.

Tres hermanos se asocian para comprar una casa tasada en 200000 rs., al primero le falta para comprarla sólo la mitad del capital del segundo, á éste la tercera parte del capital del primero, y al tercero la mitad de la suma de lo que tienen los otros dos, ¿cuánto tenía cada uno?

La suma de las edades de dos hermanos es igual á 56 años; la del padre más la del mayor componen 80, y la del padre ménos la del menor 30: se pregunta la edad de cada uno.

Hallar tres números que sumados dos á dos nos den 10, 20 y 30.

Hallar tres cantidades que sumadas dos á dos nos den A, B y C.

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON MÉNOS ECUACIONES QUE INCÓGNITAS.

Resolucion de varios problemas numéricos de primer grado, cuyo número de ecuaciones sea menor que el de las incógnitas.

Hallar dos números divisibles el uno por 3 y el otro por 5 y cuya suma sea 100. — De cuántas maneras diferentes se pueden pagar 800 reales en pesetas y napoleones?

Descomponer el número 100 en otros tres de tal modo que la suma de sus productos por 2, por 3 y por 5 respectivamente sea igual á 210.

Hallar dos números cuya suma sea igual á su producto.

Condiciones que pueden hacer determinado un problema indeterminado.

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON MÁS ECUACIONES QUE INCÓGNITAS.

Resolver, entre otros problemas de primer grado con más ecuaciones que incógnitas, los siguientes:

Hallar dos números cuya suma sea S, su diferencia D y su cociente Q.
Y otros dos cuya suma sea S, su diferencia D y su producto P.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO.

RESOLUCION DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Forma general de las ecuaciones puras y mixtas de segundo grado.

Resolucion de las ecuaciones puras ó incompletas.

Sus raíces son siempre iguales, una positiva y otra negativa.

Resolucion de las ecuaciones mixtas ó completas de segundo grado.

Regla práctica para esta resolucion.

Las raíces de estas ecuaciones pueden ser reales, una positiva y otra negativa, reales é iguales positivas ó negativas; reales y desiguales positivas ó negativas y tambien imaginarias.

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 4b^2 + a^2x^2 = 2ax^2 & 5x = 2x^2 + 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} = 3x^2 - \frac{4}{9} & \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1 \end{array}$$

$$ax^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2bc + 2(b-c)x\sqrt{a}$$

Qué propiedades tienen las raíces de una ecuacion mixta de segundo grado?—Si el tercer término es positivo, lo serán tambien ambas raíces?

Y si es negativo, ¿qué signo tendrán dichas raíces?

Conocida una de las raíces, ¿cómo se hallará la otra?

RESOLUCION DE DOS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

Forma general de las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas.

Resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, cuando una de las ecuaciones es de primer grado, con respecto á una incógnita.

Resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, siendo una y otra de segundo grado, con respecto á ambas incógnitas.

Resolver los sistemas de ecuaciones que siguen:

$$x - y + 1 = 0 \quad x^2 - xy + 10 = 0 \quad | \quad x^2 - y^2 - 5 = 0 \quad x^2 - 2y^2 + 2y - 5 = 0$$

PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO.

Resolucion de varios problemas de segundo grado:

Una persona reparte 360 reales entre varios pobres, si los pobres fuesen dos mas, cada uno recibiria 6 reales ménos, ¿cuántos son los pobres?

Hallar dos números cuya suma sea 22 y su producto 120.

Hallar dos números cuya diferencia sea 10 y su producto 24.

Hallar en la recta que determinan dos luces A y B de intensidades diferentes a y b , el punto igualmente iluminado por una y otra.

Si dos caños llenan una vasija en 20 minutos, ¿cuánto tiempo empleará cada uno, tardando el primero 12 minutos ménos que el segundo?

Hallar dos números cuyo producto sea P y su cociente Q.

Hallar tres números tales que, dividiendo sus tres productos binarios por el tercer número, los cocientes sean A, B y C.

Hallar dos números enteros y positivos, tales que el exceso de su producto sobre el doble de su diferencia sea igual á 25.

Hallar tres números cuya suma sea 60 y la de sus cuadrados 1400.

LOGARITMOS.

PRELIMINARES PARA LA TEORÍA DE LOS LOGARITMOS.

Potencias de la unidad.

Potencias sucesivas de un número mayor que la unidad.

Definición del logaritmo de un número considerado como exponente de otro conocido y constante, llamado *base*.

La base es arbitraria en cada sistema de logaritmos, pero siempre el logaritmo de la unidad es cero, y el logaritmo de la base es 1.

Particularidades que se verifican en el sistema de logaritmos, cuya base es mayor que la unidad.

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS.

De las ecuaciones $bx=y$, $bx'=y'$, $bx''=y''$, etc., se deducen las propiedades que siguen:

El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.

El logaritmo de un cociente es igual á la diferencia de los logaritmos del dividendo y divisor.

El logaritmo de una potencia de un número es igual al logaritmo de este número, multiplicado por el exponente de la potencia.

El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo de este número dividido por el índice de la raíz.

Observaciones acerca de los diferentes sistemas de logaritmos.

Conocido el logaritmo del número 12 en el sistema neperiano, ¿cómo se hallará el logaritmo del mismo número en el sistema ordinario?

Cómo se convierten los logaritmos de Briggs en logaritmos neperianos?

Siendo commensurables los logaritmos de 10, de 100, de 1000, etc., en el sistema ordinario, ¿lo son también en el neperiano ú otro cualquiera?

Por qué las tablas de logaritmos no contienen los de los números fraccionarios?

APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS.

Transformación de un logaritmo negativo en otro de característica negativa y mantisa positiva y vice-versa.

Aplicación de los logaritmos al cálculo algebraico.

Ecuaciones exponenciales. Su resolución.

Transformar la fórmula $C = c \times (1+r)^t$ en otra logarítmica.

Resolver las ecuaciones exponenciales siguientes:

$$A^x = B \quad \left| \quad \frac{5a^x}{1-a} = (1+a)a^{1-x} \quad \left| \quad \left(\frac{3}{4}\right)^x = 2,5 \quad \left| \quad 10^{x^2-x-1} = 100 \right. \right.$$

Siendo la población actual de España 16500000 habitantes y suponiendo que aumenta en $\frac{1}{30}$ todos los años, ¿cuántos habitantes contará al cabo de un siglo?

INECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO.

RESOLUCION DE LAS INECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO.

Definicion de las desigualdades é inecuaciones.

Propiedades de unas y otras.

Resolucion de una inecuacion de primer grado con una incógnita.

Resolucion de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita.

Resolucion de una inecuacion de segundo grado con una incógnita.

Observaciones generales.

Descomponer el número 50 en otros dos enteros que se diferencien en más de 5 unidades y en ménos de 10.

Hallar el número de alumnos de una clase, sabiendo que el triplo de dicho número es mayor que su duplo más 11 unidades; y tal, que añadiéndole 100 unidades y dividiendo la suma por 9, el cociente resulta mayor que el mismo número.

Cuántos años contará una persona, si disminuyéndole 8 años de sus dos tercios, resultan más de 4; y añadiéndole á su tercera parte un año, la suma es mayor que la diferencia entre la mitad del número que se pide y 4?

PROGRESIONES.

PROGRESIONES POR DIFERENCIA.

Fórmula para hallar un término cualquiera de una progresion por diferencia.—Otras fórmulas que se deducen de la anterior.

Fórmula para hallar la suma de todos los términos de una progresion por diferencia.—Otras fórmulas que se deducen de la anterior.

PROGRESIONES POR COCIENTE.

Fórmula para hallar un término cualquiera de una progresion por cociente.—Otras fórmulas que se deducen de la anterior.

Fórmula para hallar la suma de todos los términos de una progresion por cociente. Otras fórmulas que se deducen de la anterior.

Límite superior de la suma de todos los términos de una progresion por cociente, creciente ó decreciente al infinito (*).

El medio diferencial entre dos números, es mayor ó menor que el medio proporcional entre los mismos números?—Hay alguna analogía entre las fórmulas de las progresiones por diferencia y por cociente?

El inventor del juego de ajedrez pidió al rey de la India, su patria, en recompensa de su descubrimiento, 1 grano de trigo por la primera casilla del tablero, 2 por la segunda, 4 por la tercera, 8 por la cuarta, y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas, ¿á cuánto ascendería su importe, suponiendo que un hectólitro de trigo contiene 12 500 000 granos y vale 100 reales (**)?

(*) Indicaciones acerca de los diez problemas que resuelven las fórmulas del último término y de la suma de todos los de una progresion sea por diferencia ó por cociente.

(**) Qué son *números figurados* en general y cuáles los que reciben el nombre de *triangulares*, *cuadrados*, *pentágonos* y *extángulos*?

SUPLEMENTO AL PROGRAMA

DE

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

Diferentes sistemas de numeracion.

Numeracion binaria y duodecimal (*).

Escribir el número 1492 del sistema decimal en el sistema duodecimal.
Dado el número 1201 escrito en el sistema ternario, traducirlo en el decimal.

Expresar en el sistema duodecimal el número 1304 escrito en el sistema de cinco cifras.

Observaciones generales acerca de los diferentes sistemas de numeracion

Abreviaciones del cálculo aritmético.

Hallar abreviadamente los resultados de las operaciones que siguen:

El producto de 1875 por cada uno de estos factores

5, 25, 125, 9, 99, 999, 11, 12, ...19, 21, 31, 41..... 91.

$1702508431254 \times 3450012976$

El producto de 15,673481 por 3,141592 con ménos error que 0,001.

El cociente de 1834 85347251 por 102584 con ménos error que una unidad.

La $\sqrt{2}$ y la $\sqrt[3]{2}$ con ménos error que una millonésima.

Interés compuesto.

Fórmulas logarítmicas para resolver las cuestiones de interés compuesto.

Una persona que ha adelantado 2000 duros al 10 por 100 sobre una finca y se queda dueño de ella á los cinco años, ¿cuál es el valor efectivo de dicha finca ?

Cuánto tiempo se necesita para que un capital, sea el que quiera, prestado á interés compuesto se duplique al 5 por 100?

A cuánto asciende el valor de un capital al cabo de un siglo, prestado á interés compuesto al 5 por 100 ?

Calcular el tiempo necesario para que mil reales prestados al 10 por 100 se conviertan en un millon.

Anualidades y rentas vitalicias.

Si á un capital que gana interés compuesto se añade anualmente otro igual durante un tiempo determinado, ¿cuál es la fórmula que determina la suma total de todos los capitales y sus intereses compuestos ?

Una persona deposita en una casa de comercio 10000 reales cada año, durante diez consecutivos, ¿cuál será el importe total de estas anualidades y sus intereses compuestos al 5 por 100 ?

Una persona deposita en una casa de comercio 1000 duros anuales por espacio de veinte años consecutivos y desea saber la renta que le corresponde disfrutar durante los 12 siguientes, por las anualidades entregadas y sus intereses compuestos al 10 por 100.

(*) De la numeracion binaria se deduce que todo número par es una suma de potencias de 2, y todo número impar, una suma de potencias de 2, más una unidad.

Máximos y mínimos.

Qué se entiende por *máximo* y *mínimo* de una función.

Cómo se halla el máximo ó mínimo ó el máximo y mínimo de una función?

Hay funciones que no tienen máximo ni mínimo?

Descomponer la cantidad A en dos sumandos cuyo producto sea un máximo.

Descomponer la cantidad A en dos factores cuyo producto sea un mínimo.

Cuándo se verificará que la suma de varios números positivos cuyo producto es constante sea un máximo?

Cuál es el mínimo de $\frac{a}{b} \sqrt{x^2 + c^2}$ y el máximo de $\sqrt{y} + \sqrt{10 - y}$?

Averiguar si la función $\frac{a}{2} \sqrt{x^2 - c^2}$ tiene máximo ó mínimo.

Ecuaciones binomias.

Cuál es la forma general de las ecuaciones binomias y cuáles pueden resolverse en el Álgebra elemental.

Resolver las ecuaciones binomias siguientes:

$$y^2 - 1 = 0 \quad | \quad y^2 + 1 = 0 \quad | \quad y^3 - 1 = 0 \quad | \quad y^3 + 1 = 0 \quad | \quad y^4 - 1 = 0 \quad | \quad y^4 + 1 = 0$$

Cuántas son las raíces de un grado cualquiera de la unidad?

Cuál es la suma y cuál el producto de todas ellas?

SEGUNDO AÑO.

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.

Los alumnos del segundo año de MATEMÁTICAS no sólo necesitan comprender bien y demostrar con facilidad todos los teoremas resolviendo en el encerado los problemas gráficos y numéricos del libro de texto, sino que la índole de esta asignatura exige además que se ejerciten sobre el papel en el manejo de la regla, el compás, el tiralíneas, la escuadra, la escala y el semicírculo graduado, dibujando con el mayor esmero una colección completa de las figuras que han servido durante el curso para las explicaciones del profesor, con algunas ligeras indicaciones de sus nombres y propiedades en el mismo orden que se encuentran en el libro de texto; pero en mayor número y variedad, y de un tamaño tal que no pase la colección de 100 hojas poco más ó menos.

Si fuera posible iluminar á la aguada las figuras de la Geometría del espacio, el trabajo gráfico sería completo, facilitando grandemente la aprobación con honoríficas censuras de aquellos alumnos que presenten al Tribunal, en el acto mismo de los exámenes, tan evidente prueba de su aplicación y aprovechamiento.

GEOMETRÍA.

NOCIONES PRELIMINARES (*).

Definición de la GEOMETRÍA.

La extension considerada en los objetos materiales.

Dimensiones de la extension: longitud, latitud y altura.

Generacion de la superficie, de la línea y del punto matemático.

Cantidad y forma de la extension.

Volúmen, área y longitud.

Del punto matemático ó geométrico.

Líneas rectas y curvas: sus propiedades más notables.

Distancia entre dos puntos dados.

Líneas quebradas y mixtas.

Superficies planas y curvas: propiedades de unas y otras.

Superposicion directa é inversa.

Superficies quebradas y mixtas.

Igualdad de dos figuras, fundada en la coincidencia de su superposicion.

Figuras planas.—Curvas de doble curvatura.

Division de la Geometría en plana y del espacio (**).

(*) Entiéndanse comprendidos en cada uno de los teoremas de este PROGRAMA su recíproco y las observaciones y corolarios relativos á uno y otro.

(**) Quiénes fueron los más insignes géometras de la antigüedad, y quiénes en los tiempos modernos elevaron esta ciencia al más alto grado de perfeccion?

GEOMETRIA PLANA.

LINEA RECTA.

ÁNGULOS.

Definición del ángulo.

La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados.

Bisectriz de un ángulo.

Ángulos iguales, adyacentes, rectos, agudos, obtusos, complementarios y suplementarios.

Los ángulos adyacentes son suplementarios.

Valor de los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto.

Ángulos opuestos por el vértice: su igualdad.

PERPENDICULARES Y OBLÍCUAS.

Diferentes posiciones de dos rectas sobre un plano.

Perpendiculares, oblicuas y paralelas.

Por un punto dado en una recta ó fuera de ella, no se puede trazar más que una sola perpendicular á dicha recta.

Si desde un punto fuera de una recta se trazan á ésta una perpendicular y diferentes oblicuas, la perpendicular es más corta que todas; las oblicuas que se separen igualmente de la perpendicular, son iguales; y la oblicua que más se separe, es la mayor.

Distancia desde un punto á una recta.

Si en el punto medio de una recta se levanta á ésta una perpendicular, un punto cualquiera de la perpendicular equidistará de los extremos de la recta primera; y todo punto que no sea de la perpendicular, no equidistará de dichos extremos.

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados.

RECTAS PARALELAS.

Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas.

Dos rectas, una perpendicular y otra oblicua á una tercera, no son paralelas (*).—Consecuencias de una y otra proposición.

Ángulos que forman dos rectas cortadas por una secante.

Si dos rectas paralelas se cortan por una secante, los ángulos alternos son iguales, los correspondientes también lo son, y los internos ó externos de un mismo lado de la secante valen juntos dos rectos.—Lo contrario se verifica si las rectas no son paralelas.

Las partes de paralelas interceptadas entre otras paralelas, son iguales.

Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares son iguales ó suplementarios (**).

(*) Esta proposición es el *Postulado* de EUCLIDES, sabio matemático griego, cuyos *Elementos de Geometría*, escritos 300 años antes de J. C., han sido traducidos á todos los idiomas, sirviendo de texto por espacio de muchos siglos en todas las escuelas de matemáticas.

(**) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí, y las de dos ángulos opuestos por el vértice son una sola recta.

CIRCUNFERENCIA.

DEFINICION Y PROPIEDADES GENERALES DE LA CIRCUNFERENCIA.

Definicion de la circunferencia.

Rádios, diámetros, arcos, cuerdas, secantes y tangentes.

Circunferencias iguales.— Circunferencias concéntricas.

En toda circunferencia se verifican las propiedades siguientes:

El diámetro es la mayor de las cuerdas.

Todo diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.

A arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

A mayor arco corresponde mayor cuerda.

Todo diámetro perpendicular á una cuerda, la divide en dos partes iguales, y lo mismo á los arcos correspondientes.

Las cuerdas iguales equidistan del centro; y de las desiguales, la mayor se acerca más al centro.

Tres puntos que no están en línea recta determinan la posición de una circunferencia.

Si una recta y una circunferencia son tangentes, la recta será perpendicular al radio correspondiente al punto de contacto.

Por un punto dado en una circunferencia no se puede trazar más que una recta tangente de la misma circunferencia (*).

CIRCUNFERENCIAS SECANTES Y TANGENTES.

Circunferencias secantes.—Circunferencias tangentes.

Dos circunferencias no pueden tener más que dos puntos comunes.

Dos circunferencias secantes tienen su cuerda comun perpendicular á la línea de los centros; y si son tangentes, tienen su punto de contacto en la línea de los centros.

Posiciones relativas de dos circunferencias sobre un plano, y comparacion de la distancia de sus centros con la suma ó la diferencia de sus rádios.

MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

Medida de un ángulo.—Unidad angular.

Los ángulos formados en el centro de una circunferencia son proporcionales á los arcos correspondientes (**).

Division de la circunferencia en partes iguales.

Ángulos inscriptos: su medida.

Ángulos del segmento: su medida.

Ángulos que tienen su vértice en la circunferencia y cuyos lados son una cuerda y la prolongacion de otra: su medida.

Ángulos que tienen su vértice dentro de la circunferencia: su medida.

Ángulos que tienen su vértice fuera de la circunferencia: su medida.

(*) Si desde un punto dado dentro de una circunferencia trazamos varias cuerdas, ¿cuál será la menor de todas?—Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia iguales á una recta dada?

(**) Bastará demostrar este teorema en el caso de ser los arcos conmensurables, entendiéndose lo mismo en todas las demostraciones análogas.

POLÍGONOS.

PRELIMINARES RELATIVOS Á LOS POLÍGONOS.

Definición de la figura llamada *polígono*.

Sus lados, ángulos, perímetro, vértices, diagonales, base y altura.

Caractéres de los polígonos convexos.

Nombres de los polígonos segun el número de sus lados.

Polígonos equiláteros, equiángulos, regulares é irregulares.

TRIÁNGULOS Y SUS PROPIEDADES.

Los triángulos pueden ser equiláteros, isósceles, escalenos, rectángulos, obtusángulos y acutángulos.

En todo triángulo se verifican las siguientes propiedades :

Un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

La suma de sus ángulos es igual á dos ángulos rectos (*).

A lados iguales se oponen ángulos iguales.

A mayor lado se opone mayor ángulo.

Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los tres lados se encuentran en un mismo punto, y las bisectrices de sus ángulos tienen la misma propiedad.

TRIÁNGULOS IGUALES.

Figuras iguales.—Identidad y simetría.

Ángulos homólogos y lados homólogos de dos figuras iguales.

Dos triángulos son iguales cuando tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, un lado y los dos ángulos adyacentes, ó bien los tres lados.

Casos de igualdad de dos triángulos rectángulos.

TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

Figuras semejantes.—Sus lados homólogos y ángulos homólogos.

Toda recta paralela á uno de los lados de un triángulo, divide á los otros dos en partes proporcionales, y recíprocamente.

Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales, dos lados proporcionales é igual el ángulo que forman, ó bien los tres lados proporcionales.

Casos de semejanza de dos triángulos rectángulos.

Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, los triángulos parciales que resultan son semejantes al total y semejantes entre sí.

Consecuencias que resultan de la comparacion de los lados homólogos de estos triángulos (**).

(*) Este fecundísimo teorema, sin cuyo auxilio no puede darse un paso en la ciencia de la extension, es del ilustre PITÁGORAS, filósofo y matemático griego del siglo VI antes de J. C.

(**) En todo triángulo rectángulo el punto medio de la hipotenusa equidista de sus tres vértices.—La suma de las rectas que unen los tres vértices de un triángulo con un punto interior es menor que su perímetro y mayor que la mitad de este perímetro.

CUADRILÁTEROS.

Los cuadriláteros se dividen en trapezoides, trapecios y paralelogramos, y estos últimos pueden ser rectángulos, cuadrados, rombos y romboides.

La suma de los ángulos de todo cuadrilátero es igual á cuatro rectos.

Un cuadrilátero será paralelógramo si tiene los ángulos opuestos iguales, los lados opuestos iguales, ó dos lados iguales y paralelos.

Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes iguales.

En el cuadrado y rectángulo, las diagonales son iguales.

En el cuadrado y rombo, las diagonales son perpendiculares.

IGUALDAD DE LOS CUADRILÁTEROS.

Dos cuadriláteros serán iguales si tienen respectiva y ordenadamente iguales los cuatro lados y un ángulo homólogo, tres lados y los ángulos comprendidos por ellos, ó bien dos lados contiguos y los ángulos adyacentes á estos lados.

En los paralelógramos bastan dos lados contiguos y el ángulo que forman; en los rectángulos dos lados contiguos, y en los cuadrados sólo un lado.

SEMEJANZA DE LOS CUADRILÁTEROS.

Dos cuadriláteros son semejantes si los triángulos en que se pueden dividir lo son tambien y están igualmente colocados.

Semejanza de los paralelógramos, de los rectángulos y de los rombos.

Los cuadrados son todos semejantes.

POLÍGONOS EN GENERAL.

Todo polígono se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene menos dos, ó en tantos como lados tiene.

La suma de todos los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos rectos, como lados tiene menos dos. Fórmula.

Ángulos externos de un polígono. Su suma es igual á cuatro rectos.

Rádios y apotemas de los polígonos regulares (*).

IGUALDAD DE LOS POLÍGONOS.

Dos polígonos son iguales si constan del mismo número de triángulos respectivamente iguales y de la misma manera colocados.

Casos de igualdad de dos polígonos de n lados.

Igualdad de los polígonos regulares.

SEMEJANZA DE LOS POLÍGONOS.

Dos polígonos son semejantes cuando se pueden descomponer en el mismo número de triángulos, respectivamente semejantes y de la misma manera colocados.—Semejanza de los polígonos regulares.

Los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus lados y rectas homólogas.— Los perímetros de los polígonos regulares semejantes son entre sí como sus rádios y apotemas.

(*) Formar una tabla del valor de cada uno de los ángulos interiores y exteriores de los diez primeros polígonos regulares.

FIGURAS CIRCULARES.

Definición del círculo, corona ó anillo, sector, segmento y trapezio circulares.

Si dos cuerdas se cortan dentro de la circunferencia, las partes de la una son recíprocamente proporcionales á las partes de la otra.

Si desde un punto fuera de la circunferencia se trazan dos secantes (que terminen en los segundos puntos de interseccion), dichas secantes y sus segmentos externos son inversamente proporcionales.

Si desde un punto fuera de la circunferencia se trazan una tangente y una secante (que terminen la primera en el punto de contacto, y la segunda en el segundo punto de interseccion), la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.

Los círculos son iguales si tienen los ródios iguales.

Igualdad de las coronas, sectores y demas figuras circulares.

Todos los círculos son semejantes.

Semejanza de las demas figuras circulares.

POLÍGONOS INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS EN EL CÍRCULO.

Todo triángulo se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro (*).

En todo cuadrilátero inscripto en un círculo, los ángulos opuestos son suplementarios, y recíprocamente.

En todo cuadrilátero circunscripto á un círculo, la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos, y recíprocamente.

El rombo es siempre circunscriptible.

Todo polígono regular se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro.

Si una circunferencia se divide en partes iguales, y por los puntos de division se trazan cuerdas ó tangentes, el polígono inscripto ó circunscripto formado por ellas será regular.

La circunferencia es el límite superior de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, y el límite inferior de los perímetros de los polígonos regulares circunscriptos á ella.

Las circunferencias son proporcionales con sus ródios.

Razon de la circunferencia al diámetro. Fórmulas.

Valor aproximado del número π .

FÓRMULAS DEL LADO DE ALGUNOS POLÍGONOS REGULARES.

El lado del exágono regular es igual al ródio R.

El lado del triángulo equilátero es $R\sqrt{3}$

El lado del cuadrado es igual á $R\sqrt{2}$

El lado del decágono regular es $\frac{1}{2} R(\sqrt{5}-1)$

El lado del pentágono regular es $\frac{1}{2} R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Reglas prácticas para inscribir en un círculo estos polígonos.

(*) Dónde se hallará el centro de la circunferencia circunscripta si el triángulo es rectángulo, y dónde siendo isósceles ó equilátero? —Qué nuevos círculos determinan las bisectrices de los ángulos externos de un triángulo?

ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

ÁREAS DE LOS POLÍGONOS.

Area de una figura.—Unidad superficial.—Figuras equivalentes.

Los rectángulos de bases iguales son proporcionales á sus alturas, y si tienen iguales alturas, son proporcionales á sus bases.

Dos rectángulos cualesquiera son como los productos de sus bases por sus alturas.

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

El área de un paralelógramo es tambien igual á su base por su altura.

El área de un triángulo es la mitad de su base por su altura.

El área de un trapecio es igual á la mitad de sus bases por su altura.

El área de un polígono irregular es igual á la suma de las áreas de los triángulos en que puede descomponerse.

El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por la apotemia (*).

ÁREAS DE LAS FIGURAS CIRCULARES.

El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio. Fórmula.

El área de una corona es la diferencia entre las áreas de sus dos círculos.

El área de un sector circular es igual á la mitad del arco que le sirve de base por el radio.

El área de un segmento circular es la diferencia entre las áreas del sector y del triángulo correspondientes.

El área de un trapecio circular es la diferencia de las áreas de los sectores respectivos. Fórmula.

Las áreas de las figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados ó líneas homólogas.

Las áreas de los círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios.

EQUIVALENCIA DE LAS FIGURAS PLANAS.

Todo triángulo es mitad de un paralelógramo de la misma base y altura. Todos los triángulos, ó todos los paralelógramos, de igual base é igual altura, son equivalentes (**).

El rombo es mitad del paralelógramo construido sobre sus diagonales.

El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo equivale á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos (**).

Equivalencia del cuadrado construido sobre la suma de dos rectas.

(*) El área de un triángulo es tambien igual á la mitad de su perímetro por el radio de la circunferencia inscripta.— El área de un rombo es la mitad del producto de sus diagonales.

El área de un trapecio es igual á su altura por la paralela media entre sus bases.

En qué caso un triángulo, un paralelógramo y un cuadrado serán equivalentes?

(**) Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y los ángulos comprendidos por ellos son suplementarios, los triángulos serán equivalentes.

(***) Este célebre teorema, que tanto ha enriquecido todos los ramos de las matemáticas puras, lleva el nombre de PITÁGORAS, su inventor.

PROBLEMAS (*).

PROBLEMAS SOBRE LOS ÁNGULOS.

- Construir un ángulo igual á otro dado.
- Construir un ángulo, duplo, triplo, cuádruplo, etc., de otro dado.
- Dividir un ángulo en otros dos iguales, ó trazar su bisectriz.
- Hallar la bisectriz del ángulo que formarían dos rectas si se prolongasen lo suficiente para encontrarse.

PROBLEMAS SOBRE LAS PERPENDICULARES.

- Trazar una perpendicular á una recta dada, que pase por un punto dado en la misma recta.
- Trazar una perpendicular á una recta dada, que pase por un punto dado fuera de dicha recta.
- Trazar una perpendicular á una recta dada en su punto medio, ó dividir esta recta en dos partes iguales.
- Trazar una perpendicular á una recta dada, y que pase por uno de sus extremos.

PROBLEMAS SOBRE LAS PARALELAS.

- Trazar una paralela á una recta dada, bien sea por medio de las perpendiculares, por la igualdad de los ángulos alternos, ó por la igualdad de los correspondientes.
- Por un punto dado trazar á dos paralelas una secante tal, que la parte interceptada por las paralelas sea igual á una recta dada (**).

PROBLEMAS SOBRE LAS RECTAS PROPORCIONALES.

- Dividir una recta en partes iguales.
- Dividir una recta en partes proporcionales á otras dadas.
- Hallar una cuarta proporcional á las rectas m , n y p .
- Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas m y n .
- Hallar una media proporcional entre las rectas dadas m y n .
- Dividir una recta en media y extrema razon.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LA CIRCUNFERENCIA.

- Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco dado.
- Trazar por un punto dado una recta tangente de una circunferencia.
- Trazar una circunferencia tangente de una recta en un punto dado y que pase además por un punto también dado.
- Trazar una circunferencia tangente de otra dada en el punto A y que pase además por otro punto dado.
- Trazar una ó más rectas tangentes de dos circunferencias dadas.

(*) Preliminares acerca de los problemas geométricos.

(**) Cuál de los instrumentos de los estuches de matemáticas sirve para abreviar la resolución de los problemas referentes á las perpendiculares y paralelas?

CONSTRUCCION DE TRIÁNGULOS.

- Construir un triángulo dados los tres lados.
- Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.
- Construir un triángulo dado un lado y los ángulos adyacentes.
- Construir un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

CONSTRUCCION DE CUADRILÁTEROS.

- Construir un romboide dados dos lados contiguos ó adyacentes y el ángulo comprendido.
- Construir un rectángulo conocidos dos lados adyacentes.
- Construir un rombo conocidos un ángulo y un lado.
- Construir un cuadrado sobre una recta dada.
- Construir un rombo dadas sus diagonales.
- Construir un cuadrilátero dados tres lados y los ángulos comprendidos por ellos, ó bien tres ángulos y los dos lados adyacentes.

CONSTRUCCION DE POLÍGONOS EN GENERAL.

- Construir sobre una recta dada un polígono regular.
- Construir un polígono irregular.
- Construir un polígono idéntico á otro lado.
- Construir un polígono simétrico con otro dado.

CONSTRUCCION DE FIGURAS SEMEJANTES Á ORAS DADAS.

- Construir un triángulo semejante á otro.
- Construir un triángulo semejante á otro, sobre una recta dada.
- Construir un polígono semejante á otro dado.
- Construir un polígono semejante á otro, sobre una recta dada.

CONSTRUCCION DE FIGURAS EQUIVALENTES Á OTRAS DADAS.

- Transformar un triángulo en un paralelógramo equivalente.
- Reducir un polígono á otro que tenga un lado ménos.
- Reducir un círculo á triángulo.
- Cuadrar un triángulo, un paralelógramo, un trapecio, un polígono cualquiera regular ó irregular, y por último un círculo.
- Construir un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de otros dos.
- Construir un círculo equivalente á la suma ó á la diferencia de otros dos.
- Construir un polígono equivalente á la suma de otros dos, siendo todos semejantes entre sí.

CONSTRUCCION DE FIGURAS PROPORCIONALES Á DOS RECTAS DADAS.

- Construir un cuadrado que tenga con otro dado la misma razon que las rectas m y n .
- Construir un círculo que tenga con otro dado la razon de $m : n$.
- Dividir un triángulo en otros proporcionales á dos ó más rectas ó números dados.

Otros problemas gráficos.

Dados dos puntos A y B determinar con el compás otros muchos que se hallen en la misma dirección.

Trazar por un punto dado una recta equidistante de otros dos A y B.

Por un punto O dado fuera de una recta trazar otra que forme con la primera un ángulo igual á otro dado.

Dados dos puntos A y B fuera de la recta MN, hallar un punto O sobre esta recta tal que la suma de $AO+OB$ sea la menor posible.

Dividir una recta en partes proporcionales á los números 1, 3 y 5.

Trazar desde un punto dentro de la circunferencia una cuerda que resulte dividida por el medio en dicho punto.

Trazar una circunferencia igual á la suma ó á la diferencia de otras dos.

Trazar una circunferencia tangente de otras dos dadas.

Trazar una circunferencia cuyo radio sea R y que pase por dos puntos dados; por un punto y sea tangente de una recta ó de una circunferencia; que sea tangente de dos rectas; tangente de una recta y de una circunferencia, ó tangente de dos circunferencias.

Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente de una recta; ó que pase por un punto dado y sea tangente de dos rectas.

Construir un triángulo conocidos los elementos que se expresan en cada uno de los casos siguientes:

Un ángulo, uno de sus lados adyacentes y la longitud de la recta que une el medio de este lado con el vértice opuesto.

Dos lados y la longitud de la recta que une el medio de uno de ellos con el vértice opuesto.

Un lado, uno de los ángulos adyacentes y la longitud de su bisectriz.

Un lado y la circunferencia inscrita.

La circunferencia inscrita y una de las ex-inscriptas.

Dos de las circunferencias ex-inscriptas.

Construir un cuadrilátero dados los cuatro lados y un ángulo.

Construir un trapecio conocidos los cuatro lados.

Construir un paralelogramo conocidas las diagonales y un lado.

Cubrir una figura rectangular, como el piso de una sala, con triángulos equiláteros, cuadrados, exágonos regulares, y con la reunion de octógonos regulares y cuadrados.

Inscribir y circunscribir en una circunferencia dada los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16 y 20 lados.

Dado el lado de un triángulo equilátero ó el de un cuadrado, determinar gráficamente el radio de la circunferencia circunscripta.

Construir un triángulo equilátero equivalente á la suma ó á la diferencia de otros dos.

Construir un polígono equivalente á la diferencia de otros dos siendo todos semejantes entre sí.

Construir un círculo equivalente á otros tres círculos dados.

Dado un círculo, trazar otro concéntrico que divida al primero en dos partes equivalentes.

Construir un círculo equivalente á una corona ó anillo.

PROBLEMAS NUMÉRICOS RELATIVOS Á LAS LÍNEAS.

Hallar la razón de la circunferencia al diámetro, deduciendo antes las fórmulas, para, dado el lado de un polígono regular inscripto en una circunferencia, hallar el lado del inscripto de duplo número de lados y el del polígono circunscripto semejante (*).

Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen tres metros el uno y cuatro el otro.

Calcular la altura y los catetos de un triángulo rectángulo si los segmentos de la hipotenusa tienen de longitud tres y cinco metros.

Cuánto vale la diagonal de un cuadrado cuyo lado es de 10 metros?

Cuál es la distancia entre dos lugares situados en el Ecuador, cuya diferencia de longitud sea de 4° y $10'$?

Hallar el número de grados de un arco, cuyo radio es conocido, para que su longitud sea igual á una circunferencia dada.

Dadas dos circunferencias concéntricas, calcular la cuerda de la mayor, que sea tangente de la menor.

PROBLEMAS NUMÉRICOS RELATIVOS Á LAS ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

Cuál es la extensión de un terreno trapezoidal, suponiendo 150 metros la base mayor, 110 la menor y 200 metros la distancia entre ambas bases?

Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado es de 10 metros.

Transformar un rombo, cuyas diagonales son 100 y 60 metros, en un rectángulo equivalente.

Hallar el área de un círculo cuya circunferencia tiene 1 metro de longitud.

Hallar el radio de un círculo cuya área es de 100 metros cuadrados.

Hallar el radio de un círculo equivalente á otros tres, cuyos radios tienen de longitud 20, 28 y 29 metros.

Hallar el lado de un cuadrado equivalente á un círculo.

Calcular el radio de un círculo equivalente á un cuadrado dado.

Hallar la razón entre un círculo y un cuadrado isoperímetros.

Otros problemas numéricos.

Si el radio de un círculo es de 100 metros, ¿cuánto valdrán el lado del triángulo equilátero y el del cuadrado inscriptos? (**).

Siendo el lado del triángulo equilátero ó el del cuadrado de 100 metros, calcular el radio de la circunferencia circunscripta.

Hallar el número de grados de un arco que, rectificando, sea igual al radio.

Hallar numéricamente el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo cuya base sea de 48 metros y su altura de 54.

Cuál será la relación entre las áreas de dos triángulos si los vértices del uno son los puntos medios de los lados del otro?

Si la base de un rectángulo es doble de su altura, y tal que añadiendo un metro á cada lado, la superficie aumenta en un decámetro cuadrado, ¿cuáles son los lados del rectángulo?

(*) Hallar gráficamente una recta cuya longitud sea igual á una circunferencia dada.

(**) La altura de un triángulo equilátero inscrito en un círculo es la mitad de $3R$ y la del circunscripto es $3R$. El lado del primero es la mitad del lado del segundo.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

RECTAS Y PLANOS.

RECTAS PERPENDICULARES, OBLÍCUAS Y PARALELAS Á UN PLANO.

Determinacion de un plano.

Interseccion de una recta y un plano, y de dos planos entre sí.

Condiciones de una recta y un plano para ser perpendiculares, oblicuos ó paralelos.

Si una recta es perpendicular á otras dos que se cruzan por un pié en un plano, es perpendicular á este plano (*).

Por un punto dado en el espacio no puede trazarse más que una recta perpendicular á un plano, ni tampoco podrá trazarse más que un plano perpendicular á una recta dada.

Perpendiculares y oblicuas á un plano, trazadas desde un punto dado fuera de dicho plano.

Si desde el pié de una perpendicular á un plano se traza otra perpendicular á una recta, dada en dicho plano, y se une el punto común de estas rectas con otro cualquiera de la perpendicular primitiva, la última recta será perpendicular á la trazada desde un principio en el plano.

Por un punto del espacio no puede pasar más que una sola paralela á otra recta dada.

Si una recta es perpendicular á un plano, toda recta paralela á la primera será perpendicular al mismo plano.

Una recta paralela á otra trazada en un plano es paralela á este plano.

Proyeccion de un punto y de una línea cualquiera sobre un plano.

Ángulo de una recta con un plano.

ÁNGULOS DIEDROS.

Definicion del ángulo diedro y nombres de sus elementos.

Ángulos diedros iguales.

Ángulos diedros adyacentes, rectos, agudos, obtusos, complementarios, suplementarios y opuestos por su arista.

Ángulos rectilíneos, correspondientes á un diedro: son todos iguales.

Si dos ángulos diedros son iguales, los rectilíneos correspondientes, tambien lo serán. A mayor diedro corresponde mayor rectilíneo.

Los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos correspondientes.

Medida de un ángulo diedro.

(*) Toda recta oblicua á un plano es perpendicular á otra trazada por su pié en el mismo plano.

PLANOS PERPENDICULARES, OBLÍCUOS Y PARALELOS ENTRE SÍ.

Definicion de los planos perpendiculares entre sí, oblicuos y paralelos.
Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por ella será tambien perpendicular al primero.

Si dos planos son perpendiculares entre sí, las perpendiculares á uno de ellos, trazadas por diferentes puntos de la interseccion comun, estarán todas en el otro plano.—Luego si dos planos son perpendiculares á un tercero, la interseccion comun tambien lo será.

Dos planos á una misma recta son paralelos, y la interseccion de dos planos paralelos con un tercer plano son rectas paralelas.

Rectas y planos verticales y horizontales (*).

ÁNGULOS POLIEDROS.

Definicion del ángulo poliedro.

Sus vértices, caras, aristas, ángulos planos y diedros.

Ángulos poliedros suplementarios. Ángulos poliedros regulares.

Ángulos triedros. Descomposicion de un ángulo poliedro en tantos triedros como caras tiene, ó en tantos triedros como caras tiene ménos dos.

En todo ángulo triedro se verifican las propiedades que siguen :

Un ángulo plano es menor que la suma de los otros dos.

A todo ángulo triedro corresponde otro triedro suplementario.

La suma de los tres ángulos planos es menor que cuatro rectos.

La suma de los tres diedros es mayor que dos rectos y menor que seis.

Igualdad de los ángulos triedros.

SUPERFICIES CURVAS DE REVOLUCION.

Generacion de las superficies curvas que se consideran en la Geometría elemental.

Superficies regladas.

Superficies de revolucion: cónicas, cilíndricas y esféricas.

Plano tangente de una superficie de revolucion.

SUPERFICIES CÓNICA Y CILÍNDRICA.

Generacion de la superficie cónica de revolucion.

Su interseccion con un plano perpendicular, oblicuo ó paralelo al eje.

Secciones cónicas (**).

Definicion y trazado de la parábola, de la elipse y de la hipérbola.

Desarrollo de la superficie cónica sobre un plano.

Generacion de la superficie cilíndrica de revolucion.

Su interseccion con un plano perpendicular, oblicuo ó paralelo al eje.

Desarrollo de la superficie cilíndrica sobre un plano.

(*) Por un punto dado en un plano ó fuera de él, ¿cuántos otros planos podrán trazarse perpendiculares, oblicuos ó paralelos al primero? — Por una recta perpendicular, oblicua ó paralela á un plano, ¿cuántos otros pueden pasar perpendiculares al primero? Si dos rectas no están en un mismo plano, ¿lo estarán en planos paralelos?

(**) La circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, se llaman *secciones cónicas*. Débese á PLATON el descubrimiento de las tres últimas.

SUPERFICIE ESFÉRICA.

Generacion de la superficie esférica.

Eje, polos, centro, radios y diámetro de la superficie esférica.

Interseccion comun de la superficie esférica y un plano.

Circunferencias máximas y menores. Sus propiedades.

Polos de una circunferencia (*).

Planos y rectas tangentes de una superficie esférica.

Contacto é interseccion de dos superficies esféricas.

Angulo esférico: su medida.

Triángulo esférico: puede tener uno, dos ó tres ángulos rectos ú obtusos (**).

La línea más corta, que se puede trazar sobre la superficie esférica entre dos puntos de la misma, es el arco menor de circunferencia máxima que pasa por ellos.

POLIEDROS.

PRELIMINARES RELATIVOS Á LOS POLIEDROS.

Definicion de los poliedros en general.

Caras, aristas, vértices, diagonales, base y altura de un poliedro.

Nombres de los poliedros segun el número de sus caras.

Poliedros regulares.

Area lateral y total de un poliedro.

PIRÁMIDES.

Definicion de la pirámide.

Pirámide triangular, cuadrangular, romboidal, pentagonal, etc., segun la figura de la base.

Pirámide regular: su apotema.

Toda pirámide puede descomponerse en tantos tetraedros como lados tiene el polígono de su base, ó en tantos como lados tiene menos dos.

Teoremas que resultan de cortar una pirámide por un plano paralelo á la base.

Trozo de pirámide.

El área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del perímetro de la base por la apotema de la pirámide.

Area total.

Area lateral y total de un trozo de pirámide.

Desarrollo sobre un plano de la superficie lateral y total de una pirámide y de un trozo de pirámide.

(*) Si desde un punto de la superficie esférica se traza, con una abertura constante de compás, una curva sobre la misma superficie, esta curva será una circunferencia y el punto fijo uno de sus polos. Si la abertura de compás es igual á la cuerda de un cuadrante, la curva descrita será una circunferencia máxima.

(**) En el triángulo *birectángulo*, cada uno de los lados que forman el ángulo oblicuo es un cuadrante. Si el triángulo es *trirectángulo*, todos sus lados son cuadrantes.

PRISMAS.

Definición del prisma.

Caras laterales, bases y altura del prisma.

Prismas rectos, oblicuos, regulares é irregulares.

Prismas triangulares, trapeciales, rombales, exagonales, segun la figura de sus bases.

Paralelepípedo y cubo. Sus propiedades.

Todo prisma puede descomponerse en tantos prismas triangulares como lados tiene su base, ó en tantos como lados tiene ménos dos.

El área lateral de un prisma es igual al producto de una de sus aristas laterales por el perímetro de una seccion que le sea perpendicular.

El área lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura por el perímetro de una de sus bases.

Área total.

Desarrollo sobre un plano de la superficie lateral y total de un prisma.

POLIEDROS EN GENERAL.

Todo poliedro se puede descomponer en pirámides, y por consiguiente en tetraedros.

No hay más que cinco poliedros regulares, y éstos son el tetraedro, exaedro, octaedro, dodecaedro y el icosaedro.

Relacion del número de aristas, caras y vértices de estos poliedros.

Área lateral y total de un poliedro cualquiera.

El área total de un poliedro regular es igual al producto del área de una cara por el número de ellas.

Apotema y centro de un poliedro regular (*).

IGUALDAD Y SEMEJANZA DE LOS POLIEDROS.

Poliedros iguales.

Dos tetraedros son iguales si lo son respectivamente: una cara y los ángulos diedros adyacentes; dos caras y el ángulo diedro comprendido; tres caras, ó bien todas las aristas.

Los poliedros regulares de igual número de caras son iguales si tienen una arista igual.—En los poliedros regulares no hay diferencia entre la identidad y la simetría.

Poliedros semejantes.

Dos tetraedros son semejantes si tienen: una cara semejante é iguales los ángulos diedros adyacentes; dos caras semejantes é igual el ángulo diedro comprendido; tres caras semejantes, ó bien los ángulos diedros iguales.

Las áreas de los poliedros semejantes son como los cuadrados de sus aristas homólogas.

(*) Formar una tabla del número de aristas, caras y vértices de los cinco poliedros regulares, sabiendo que el teorema de Euler está formulado en la igualdad $A+2=C+V$.

Si por los centros de las caras de un poliedro regular se levantan perpendiculares, se encontrarán en un mismo punto y serán iguales. Estas perpendiculares se llaman *apotemas* y el punto comun *centro* del poliedro.

CUERPOS REDONDOS (*).

CONO DE REVOLUCION.

Generacion del cono de revolucion.
Trozo de cono.
Interseccion de un cono y un plano secante.
Cono equilátero.
Plano tangente del cono.
El área lateral de un cono es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de su base.
Area total. Fórmulas.
Area lateral y total de un trozo de cono de bases paralelas.
Igualdad y semejanza de dos conos.

CILINDRO DE REVOLUCION.

Generacion del cilindro de revolucion.
Interseccion de un cilindro y un plano secante.
Cilindro equilátero.
Plano tangente del cilindro.
El área lateral del cilindro es igual al producto de su lado ó altura por la circunferencia de su base.
Area total. Fórmulas.
Igualdad y semejanza de dos cilindros.

ESFERA.

Generacion de la esfera.
Toda seccion de la esfera por un plano es un círculo.
Círculos máximos y menores de la esfera.
Sector y segmento esférico.
Planos tangentes de la esfera.
El área de la esfera es igual al producto de su diámetro por una circunferencia máxima. Fórmula.
El área de la esfera es cuádruple de la de uno de sus círculos máximos.
Las áreas de las esferas son como los cuadrados de sus rádios.
Esferas iguales.
Todas las esferas son semejantes.
Poliedros inscriptos y circunscriptos en la superficie esférica.
Todo tetraedro es inscriptible y circunscriptible en la superficie esférica.
Los poliedros regulares se pueden tambien inscribir y circunscribir en una superficie esférica, y recíprocamente.

(*) Llámanse en general *cuerpos redondos* los terminados por una superficie reglada ó de revolucion por sí sola, ó cortada por un plano ó dos planos paralelos. Tales son el cono, el cilindro y la esfera.

VOLUMENES DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS.

Volúmen de un cuerpo. Unidad de volúmen. Poliedros equivalentes. Dos paralelepípedos rectos y rectángulos de bases iguales son proporcionales á sus alturas.

Si los paralelepípedos tienen alturas iguales, serán como sus bases. Si dos paralelepípedos no tienen ni bases ni alturas iguales, serán entre sí como los productos de sus tres dimensiones.

El volúmen de un paralelepípedo es igual al producto de su base por su altura.

El volúmen de un prisma es igual al producto de su base por su altura.

El volúmen de una pirámide es igual al tercio del producto de su base por su altura.

Volúmen de un poliedro cualquiera.

El volúmen de un poliedro regular es igual al tercio del producto de su área por su apotema.

Los volúmenes de los poliedros semejantes son como los cubos de sus aristas y rectas homólogas.

VOLÚMEN DE LOS CUERPOS REDONDOS.

El volúmen de un cono es igual al tercio del producto de su base por su altura. Fórmula.

El volúmen de un cilindro es igual al producto de su base por su altura. Fórmula.

El volúmen de la esfera es igual al tercio del producto de su área por su radio, ó tambien á dos terceras partes del diámetro por el área de un círculo máximo. Fórmula (*).

EQUIVALENCIA DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

Dos pirámides, dos conos, ó una pirámide y un cono de una misma altura y bases equivalentes, son equivalentes.

Dos prismas, dos cilindros, ó un prisma y un cilindro de una misma altura y bases equivalentes, son equivalentes.

Toda pirámide es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.

Considerando un cono y un cilindro equiláteros circunscriptos á una esfera, el cilindro será equivalente á dos terceras partes del cono, y la esfera lo será á dos tercios del cilindro, ó á cuatro novenos del cono (**).

(*) El volúmen de un trozo de cono de bases paralelas es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas.— La determinación del volúmen de la esfera se deduce del siguiente lema: El volúmen del cuerpo originado por la revolucion de un triángulo que gira alrededor de una recta que pasa por uno de sus vértices y se halla en el mismo plano, es igual á la superficie que describe la base del triángulo por el tercio de su altura.

(**) A cuál de los matemáticos de la antigüedad se deben estas proposiciones?

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

ÁREAS DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

- Calcular los metros de papel pintado que se necesitan para cubrir las paredes de un salón.
- Cuál es el área de un icosaedro regular, cuya arista es de 10 metros?
- Cuál es el área de un cono cuya altura sea de 10 metros y la circunferencia de su base de 314 decímetros?
- Hallar el lado de un cono equilátero cuya área lateral es 1 metro cuadrado.
- Cuál es el radio de una esfera que tiene de superficie 100 metros cuadrados?
- Hallar el área de la superficie de la Tierra en kilómetros cuadrados.
- Calcular el radio de una superficie esférica equivalente á las áreas totales de un cono y un cilindro equiláteros, de 10 metros de radio.
- Trazar por dos puntos dados sobre la superficie esférica, una circunferencia máxima.
- Trazar por tres puntos dados sobre la misma superficie, una circunferencia menor (*).

VOLUMENES DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

- Calcular el número de metros cúbicos de agua que puede contener el estanque del Retiro de Madrid.
- Hallar el volumen de la más alta de las pirámides de Egipto.
- Hallar el volumen de un desmonte de 500 metros de longitud, siendo el ancho del camino 5 metros, la altura del desmonte dos metros y medio, y su abertura por la parte superior 8 metros.
- Hallar el lado de un cubo de doble volumen que otro dado.
- Hallar el volumen de un cono, cuya altura es de 15 metros y el radio de la base de 12.
- Calcular la capacidad de un pozo cilíndrico, cuyo diámetro es de 2 metros y su profundidad de un hectómetro.
- Hallar las dimensiones de un cilindro equilátero de un litro de capacidad.
- Hallar el volumen de una esfera cuya área sea igual á dos hectáreas.
- Si un cono, un cilindro y una esfera tienen igual radio, cuál será la altura de los dos primeros para que todos tres tengan igual volumen.
- Cuántos kilogramos pesarán dos esferas, una de oro y otra de plata, suponiendo que el radio de la primera es de 1 decímetro y el de la segunda de 2 decímetros.
- Cuál es el diámetro de una bala de cañon de 40 kilogramos?

(*) Hallar el centro de una superficie esférica que pase por cuatro puntos dados, ó hallar un punto equidistante de otros cuatro.

Dada una superficie esférica hallar su radio por medio de una construcción gráfica.

TRIGONOMETRÍA.

NOCIONES PRELIMINARES.

Definición de la TRIGONOMETRÍA.

Trigonometría rectilínea y Trigonometría esférica.

Objeto de la resolución numérica de los triángulos.

Líneas trigonométricas.

División de la Trigonometría en dos partes; una que enseña la teoría de las líneas trigonométricas, y otra que trata de la resolución de los triángulos por medio del cálculo (*).

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

DEFINICIONES DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

Definición del seno y de la tangente trigonométrica de un arco ó ángulo cualquiera.

El seno de un arco es también la mitad de la cuerda del arco duplo.

Consecuencias que resultan de estas definiciones, relativamente á la variación del seno y de la tangente de un arco que, empezando por cero grados, llega á 180° .

Definiciones del coseno y cotangente de un arco.

Arcos y líneas trigonométricas positivas y negativas.

Las líneas trigonométricas del primer cuadrante se suponen siempre positivas: las opuestas á ellas son negativas.

Las líneas trigonométricas de dos arcos de igual magnitud, uno positivo y otro negativo, son respectivamente iguales, pero llevan signo contrario, el seno, la tangente y la cotangente.

Las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios son respectivamente iguales, pero llevan signo contrario, el coseno, la tangente y la cotangente.

Tabla de los valores de las líneas trigonométricas, correspondientes á los arcos cero, uno, dos, tres y cuatro cuadrantes positivos.

Máximo y mínimo valor absoluto del seno, coseno, tangente y cotangente de un arco.

Una línea trigonométrica dada corresponde á una infinidad de arcos, uno menor y los demás mayores que un cuadrante.

(*) Quiénes dieron á la *Trigonometría* la forma sencilla y cómoda que hoy tiene, introduciendo á principios del siglo X el uso de las *líneas trigonométricas*, en vez de las *cuerdas* que ántes se usaban?

FÓRMULAS DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE UN ARCO.

Las relaciones que existen entre las líneas trigonométricas de un arco son las siguientes :

El cuadrado ó segunda potencia del rádio es igual á la suma de los cuadrados del seno y del coseno.

La tangente es igual al rádio por el seno, dividido por el coseno de dicho arco.

La cotangente es igual al rádio por el coseno, dividido por el seno del mismo arco.

Fórmulas que resultan de estos teoremas.

Otras fórmulas que se deducen de las anteriores.

El rádio es medio proporcional entre la tangente y la cotangente de un arco cualquiera.

Conocido el rádio y el seno de un arco, hallar las demas líneas trigonométricas del mismo arco (*).

Valores de las líneas trigonométricas de algunos arcos.

Transformacion de las fórmulas anteriores, suponiendo el rádio igual á la unidad.

Dada una fórmula en el supuesto de ser el rádio igual á la unidad, transformarla en la correspondiente á otro rádio mayor ó menor que la unidad (**).

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA DE DOS ARCOS.

Deducir las fórmulas del seno y del coseno de la suma y de la diferencia de dos arcos a y b , en funcion de los senos y cosenos de estos arcos.

Traduccion de estas fórmulas al lenguaje ordinario.

Transformar en productos la suma y la diferencia de los senos y cosenos de dos arcos.

Su aplicacion á la suma $\text{sen } a + \text{sen } b$.

Deducir de las fórmulas anteriores el siguiente teorema:

$$(\text{sen } a + \text{sen } b) : (\text{sen } a - \text{sen } b) :: \text{tang } \frac{1}{2} (a+b) : \text{tang } \frac{1}{2} (a-b)$$

Traduccion de este teorema al lenguaje ordinario.

Deducir las fórmulas de la tangente y cotangente de la suma y de la diferencia de dos arcos, en funcion de las tangentes de dichos arcos.

Transformar en productos la suma ó la diferencia de las tangentes ó cotangentes de dos arcos.

(*) Conocido el rádio y la tangente de un arco, hallar las demas líneas trigonométricas. La tangente y cotangente de un mismo arco son cantidades recíprocas, como lo son tambien el coseno y la secante.

(**) Hallar por una construccion gráfica los arcos á que pertenece una línea trigonométrica dada.—Sabiendo que el seno de un arco comprendido entre 90° y 180° es igual á 480 milímetros de los 1000 en que se supone dividido el rádio, calcular el coseno, la tangente y la cotangente de dicho arco.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS RELATIVAS Á LOS MÚLTIPLOS DE UN ARCO.

Deducir las fórmulas del seno y coseno del duplo, triplo, cuádruplo, etc., de un arco en funcion del seno y coseno de este arco.

Deducir las fórmulas de la tangente y cotangente de los múltiplos de un arco, en funcion de la tangente y cotangente de dicho arco.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS RELATIVAS Á LA MITAD DE UN ARCO.

Deducir las fórmulas del seno y coseno de la mitad de un arco en funcion del seno y coseno de dicho arco.

Deducir las fórmulas de la tangente y cotangente de la mitad de un arco en funcion de la tangente de dicho arco.

Fórmulas de la tangente de la mitad de un arco, en funcion del seno y coseno de este arco (*).

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

CONSTRUCCION DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

Tablas trigonométricas.

Fórmulas que bastan para su construccion.

Cuál de las líneas trigonométricas conviene calcular directamente y hasta qué número de grados del arco?

Demostrar que todo arco menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente; y tambien que el seno de un arco menor que un cuadrante es mayor que la diferencia entre el arco y la cuarta parte del cubo del mismo arco. Fórmulas.

Hallar el seno del arco igual á 1 minuto.

Deducir de este resultado la construccion de las tablas trigonométricas naturales de minuto en minuto.

Transformacion de las tablas trigonométricas naturales en ordinarias ó logarítmicas.

DISPOSICION Y USO DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS ORDINARIAS.

Disposicion de las tablas trigonométricas logarítmicas.

Hallar los logaritmos de las líneas trigonométricas de un arco cualquiera de estas tablas.

Dado un logaritmo de las mismas tablas, hallar el valor del arco correspondiente.

Hallar los logaritmos de las líneas trigonométricas de un arco, que no se encuentre en las tablas.

Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, que no se halle en las tablas, calcular el arco correspondiente.

(*) Aplicacion de las fórmulas anteriores á la division de la circunferencia en partes iguales.--Transformar, por medio de los *ángulos auxiliares*, una suma ó diferencia indicada en otra expresion bien dispuesta para el cálculo logarítmico.

RESOLUCION NUMÉRICA DE LOS TRIÁNGULOS.

TEOREMAS PARA LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Los teoremas fundamentales para la resolucion numérica de los triángulos rectángulos, son los siguientes :

- 1.º El rádio de las tablas es á la hipotenusa del triángulo, como el seno de un ángulo agudo es al cateto opuesto, ó bien, como el coseno de un ángulo agudo es al cateto adyacente.
- 2.º El rádio de las tablas es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente es al cateto opuesto á dicho ángulo.
- 3.º El cuadrado ó segunda potencia de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostracion de cada uno de estos teoremas y consecuencias que se deducen de los mismos, suponiendo el rádio igual á la unidad.

RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO DADA LA HIPOTENUSA Y UN CATETO.

Siendo los datos a y b , deducir las fórmulas para hallar el otro cateto c y los ángulos agudos B y C .

Su aplicacion á un caso particular, por ejemplo :

$$a=125,2 \text{ metros y } b=81 \text{ metros.}$$

RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO DADA LA HIPOTENUSA Y UN ÁNGULO AGUDO.

Siendo los datos a y B , deducir las fórmulas para hallar el otro ángulo C y los catetos b y c .

Su aplicacion al ejemplo particular que sigue :

$$a=500 \text{ metros y } B=50^{\circ}...30'$$

RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCIDOS LOS DOS CATETOS.

Fórmulas para hallar las incógnitas de este problema, que son los dos ángulos agudos y la hipotenusa.

Aplicacion de estas fórmulas en el supuesto :

$$b=1850 \text{ metros y } c=1110 \text{ metros.}$$

RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO DADO UN CATETO Y UNO DE LOS ÁNGULOS AGUDOS.

Siendo los datos b y B , deducir las fórmulas para calcular el otro ángulo C , la hipotenusa a y el cateto c .

Aplicacion de estas fórmulas á un caso particular :

$$b=1850 \text{ metros y } B=50^{\circ}...30'$$

TEOREMAS PARA LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

Los teoremas fundamentales para la resolucion de los triángulos oblicuángulos, son los siguientes:

- 1.º Los senos de sus ángulos son entre sí como sus lados opuestos.
- 2.º La suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la semi-suma de los ángulos opuestos á dichos lados es á la tangente de la semi-diferencia.
- 3.º El cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, ménos el duplo del producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido.

Demostracion de cada uno de estos teoremas.

RESOLVER UN TRIÁNGULO DADO UN LADO Y DOS ÁNGULOS.

Siendo los datos a , B y C , hallar las fórmulas para calcular los valores del otro ángulo A , y los de los lados b y c .

Aplicacion : $a=1000$ metros, $B=60^\circ$ y $C=80^\circ$

RESOLVER UN TRIÁNGULO DADOS DOS LADOS Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO.

Si los datos son a , b y C , las incógnitas serán A , B y c .

Fórmula para hallar la tangente de $\frac{1}{2}(A-B)$; y por consiguiente, los valores de cada una de las incógnitas de este problema.

Suponiendo $a=150$ metros, $b=180$ y $C=117^\circ$, calcular los valores de los ángulos A y B , y el del tercer lado c .

RESOLVER UN TRIÁNGULO DADOS DOS LADOS Y UNO DE LOS ÁNGULOS OPUESTOS.

Suponiendo los datos a , b y A , deducir las fórmulas que determinan los valores de las incógnitas A , B y c .

Discusion de este problema.

Su resolucion en los casos siguientes :

$$\begin{array}{lll} a=25,5 \text{ metros,} & b=38,4, & A=128^\circ,5 \\ a=65,2 & b=85,9 & A=79^\circ...50'' \end{array}$$

RESOLVER UN TRIÁNGULO CONOCIDOS SUS TRES LADOS.

Las incógnitas en este caso son los ángulos A , B y C .

Fórmulas de $\cos A$, $\cos B$ y $\cos C$, en funcion de los tres lados.

Transformacion de las fórmulas anteriores en otras logarítmicas, para hallar el seno, el coseno ó la tangente de la mitad de los ángulos A , B y C ; y por consiguiente, el valor de estos mismos ángulos.

Siendo $a=200$, $b=250$ y $c=300$ metros, resolver el triángulo.

SUPLEMENTO AL PROGRAMA

DE

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRIA.

Piquetes, jalones, cinta, cadenilla y plomada.

Descripcion y modo de usar estos instrumentos en el campo.
Resolver sobre el terreno con la cadena ó cinta y los piquetes, los problemas que siguen:
Dividir un ángulo en dos partes iguales.
Trazar una perpendicular á una recta.
Trazar la alineacion de dos puntos en los casos más sencillos.
Medir distancias accesibles.
Medicion de alturas.

Carcabon ó escuadra de agrimensor.

Descripcion del cartabon cilíndrico ó prismático.
Resolver con dicho instrumento los siguientes problemas.
Trazar perpendiculares á una recta dada.
Prolongar una recta, si algun obstáculo impide hacerlo directamente.
Determinar la distancia entre dos puntos, uno accesible y otro inaccesible, ó los dos inaccesibles.
Medir la superficie de un terreno y trazar su plano.

Plancheta y alidada.

Descripcion de la plancheta. Trípodes.
Alidada de pínulas.
Alidada de anteojo.
Verificacion y rectificacion de la alidada.
Medir el ángulo de dos rectas sobre el terreno.
Medir distancias inaccesibles.
Medir alturas accesibles ó inaccesibles por su pié.
Medir y levantar el plano de un terreno de corta extension.

Brújula.

Descripcion de la brújula.
Meridiana verdadera y meridiana magnética.
Declinacion de la brújula.
Medir un ángulo con la brújula.
Medir y levantar el plano de un terreno.
Orientar un plano.

Grafómetro.

Descripcion del grafómetro.
Nuñez ó nonius.
Medir el ángulo de dos rectas por medio del grafómetro.
Medir y levantar el plano de un terreno (*).

(*) Brevísimas indicaciones acerca del *teodolito*.

Niveles.

Objeto de estos instrumentos.

Descripcion de los tres niveles más generales, que son el de albañil, el de agua y el de aire.

Rectificacion de los niveles.

Calcular con el nivel de albañil la pendiente de un camino, ó sea el ángulo que forma una recta con el horizonte.

Nivelacion.

Objeto de la nivelacion.

Líneas de nivel verdadero y de nivel aparente.

Línea de nivel.

Nivelacion simple y compuesta.

Determinar la diferencia de nivel entre dos puntos en los diferentes casos que pueden ocurrir, siempre que se coloque el nivel una vez sola.

Hallar la diferencia de nivel entre dos puntos, empleando la nivelacion compuesta.

Perfiles y curvas de nivel.

Planos topográficos.

Operaciones que constituyen el levantamiento de un plano.

Breves indicaciones acerca de cada una de ellas.

Cubicacion de desmontes y terraplenes de las vías de comunicacion.

Copia y reduccion de un plano.

Diferentes sistemas para copiar un plano.

Reduccion de un plano por cuadrículas.

Escala de reduccion.

Descripcion y uso del pantógrafo (*).

(*) Dibujo topográfico : colores que se emplean en el trazado lineal de un plano.

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

PARA

LOS EXÁMENES DE FIN DE CURSO.

Los examinandos deben terminar el ejercicio teórico de cada una de las tres cuestiones del grupo que les toque en suerte, resolviendo en el acto los respectivos ejemplos ó problemas del libro de texto ú otros análogos propuestos por los jueces del Tribunal de examen.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

- 1** — Sistemas de numeracion.
Progresiones por diferencia : fórmulas.
Resolucion de una ecuacion completa de 2.º grado.
- 2** — Operaciones que constituyen el cálculo aritmético.
Progresiones por cociente: fórmulas.
Resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el método de sustitucion.
- 3** — Abreviaciones de la multiplicacion de los números enteros.
Formar las permutaciones binarias y ternarias de las nueve cifras significativas de nuestro sistema de numeracion.
Fórmulas para resolver las cuestiones de interés compuesto.
- 4** — Division de los números enteros.
Fórmula de Newton y su aplicacion al desarrollo de la potencia de quinto grado de binomio $a+b$.
Resolver la ecuacion $\sqrt{5x-1} = 1+x$
- 5** — Teoremas ó principios fundamentales de la divisibilidad.
Regla de descuento : su resolucion.
Resolucion de las ecuaciones exponenciales.
- 6** — Teoría del m. c. d. de dos ó más números.
Regla de compañía : su resolucion.
Resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el método de igualacion.
- 7** — Teoría de los números primos.
Regla de cambio : monedas extranjeras y su par monetaria.
Resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el método de reduccion.

- 8**— Factores simples y compuestos de un número dado.
Regla de interés.
Resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por el método de sustitucion.
- 9**— Mínimo múltiplo comun de dos ó más números.
Unidades principales tanto del antiguo sistema de pesas y medidas de Castilla como del métrico decimal.
Resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por el método de igualacion.
- 10**—Raíz cuadrada de los números enteros mayores que 100.
Exponentes negativos.
Resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por el método de reduccion.
- 11**—Raíz cúbica de los números enteros mayores que 1000.
Exponentes fraccionarios.
Resolucion de una ecuacion de primer grado con una ó varias incógnitas.
- 12**—Multiplicacion de los quebrados ordinarios y decimales.
Elevacion al cuadrado y al cubo de un polinomio.
Dada la suma S y el cociente Q de dos incógnitas hallar las fórmulas de sus valores.
- 13**—Elevacion al cuadrado y extraccion de la raíz cuadrada de los quebrados ordinarios.
Multiplicacion y division de las cantidades radicales.
Hallar dos números cuyo producto sea P y su cociente Q.
- 14**—Elevacion al cubo y extraccion de la raíz cúbica de los quebrados ordinarios.
Fórmulas para hallar la suma de todos los términos de una progresion por diferencia y de los de otra por cociente.
Hallar tres números que sumados dos á dos den 10, 20 y 30.
- 15**—Reduccion de quebrados ordinarios á decimales.
Multiplicacion de los números complejos.
Hallar dos números cuya suma sea S, su diferencia D y su producto P.
- 16**—Reduccion de quebrados decimales á ordinarios.
Propiedades generales de los logaritmos.
Resolver la ecuacion $2x^2+4x+5=0$.
- 17**—Aproximacion de las raíces cuadradas con ménos error que una milésima.
Division de los números complejos.
Hallar dos números cuya suma sea igual á su producto.
- 18**—Unidades de capacidad en el sistema métrico decimal y su relacion con las del antiguo sistema de Castilla.
Números inconmensurables.
Resolucion de dos ó más ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas.

- 19** — Aproximacion de las raíces cúbicas con ménos error que una milésima.

Multiplicacion y division de dos monomios imaginarios.

Resolucion de dos ó más ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas.

- 20** — Unidades de peso en el sistema métrico decimal y sus relaciones con las del antiguo sistema de Castilla.

Regla de aligacion.

Interpretacion de los símbolos a^0 , a^{-1} , $a^{\frac{1}{2}}$, $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{a}$, $\frac{0}{0}$, ∞

- 21** — Multiplicacion y division de los números mixtos.

Unidades de longitud en el sistema métrico decimal y su relacion con las del antiguo sistema de Castilla.

Resolver la ecuacion exponencial $12^{x-1} = 100$.

- 22** — Division de los quebrados ordinarios y decimales.

Uso de las tablas de logaritmos.

Hallar dos números divisibles el uno por 3 y el otro por 5 y cuya suma sea 100.

- 23** — Caracteres de divisibilidad de un número por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, por 8, por 9, por 10 y por 11.

Division de dos polinomios y de un monomio por un polinomio.

Resolver el sistema de ecuaciones $\{x + y = a \text{ y } x^2 + y^2 = b\}$

- 24** — Adicion y sustraccion de los números fraccionarios.

Extraccion de la raíz cuadrada de un polinomio.

Qué número se debe añadir á los dos términos de la fraccion $\frac{2}{5}$ para que se convierta en $\frac{2}{5}$?

- 25** — Reducir un número complejo á incomplejo de la especie superior.

Extraccion de la raíz cúbica de un polinomio.

Hallar entre dos luces A y B de intensidades diferentes, el punto igualmente iluminado por las dos.

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.

- 1—Teoría de las perpendiculares y oblicuas.
Demostración gráfica del teorema de Pitágoras.
Deducir las fórmulas del seno, coseno, tangente y cotangente del duplo de un arco en función de las líneas trigonométricas del mismo arco.
- 2—Teoría de las paralelas.
Reducir un polígono á otro que tenga un lado ménos.
Resolver un triángulo rectángulo conocida la hipotenusa y un cateto.
- 3—Propiedades de las rectas trazadas dentro de la circunferencia.
Construir sobre una recta dada un triángulo equilátero, un cuadrado y un exágono regular.
Resolver un triángulo rectángulo conocida la hipotenusa y un ángulo agudo.
- 4—Propiedades de las rectas tangentes de una circunferencia.
Construir un polígono equivalente á la suma de otros dos siendo todos semejantes entre sí.
Resolución de un triángulo rectángulo conocidos los dos catetos.
- 5—Circunferencias secantes y tangentes.
Demostrar el teorema llamado de las tres perpendiculares en la Geometría del espacio.
Resolver un triángulo rectángulo conocidos un cateto y un ángulo agudo.
- 6—Medida de los ángulos inscriptos en la circunferencia y también de los formados en la circunferencia por una cuerda y una tangente.
Propiedades que se verifican en los ángulos triedros.
Volumen de los cuerpos redondos y sus fórmulas.
- 7—Medida de los ángulos cuyo vértice está fuera de la circunferencia y también de los formados en la misma circunferencia por una cuerda y la prolongación de otra.
Áreas de los cuerpos redondos y sus fórmulas.
Resolver un triángulo oblicuángulo dado un lado y dos ángulos.

- 8** — Medida de los ángulos formados dentro de la circunferencia por los segmentos de dos cuerdas.
Formulas del lado del triángulo equilátero y del cuadrado inscriptos en una circunferencia.
Resolver un triángulo oblicuángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.
- 9** — Propiedades del triángulo : su demostracion.
Trazar una circunferencia tangente de una recta en un punto dado y que pase ademas por otro punto tambien dado.
Resolver un triángulo oblicuángulo conocidos dos lados y uno de los ángulos opuestos.
- 10** — Igualdad de triángulos.
Definicion y propiedades de las superficies cónicas y cilíndricas de revolucion.
Resolver un triángulo oblicuángulo conocidos los tres lados.
- 11** — Semejanza de triángulos.
Propiedades de la superficie esférica. Determinacion de su área : fórmula.
Fórmula del coseno, la tangente y la cotangente de un arco en funcion del radio y el seno del mismo arco.
- 12** — Diferentes especies de cuadriláteros : sus propiedades.
Trazar una circunferencia tangente de otra dada en el punto A y que pase ademas por otro punto dado.
Deducir las fórmulas del seno y del coseno de la suma de dos arcos en funcion del seno y coseno de dichos arcos.
- 13** — Igualdad de los cuadriláteros.
Si una recta es perpendicular á otras dos que se cortan por su pié en un plano, es perpendicular á este plano.
Deducir la fórmula de la tangente de la suma de dos arcos en funcion de las tangentes de dichos arcos.
- 14** — Semejanza de los cuadriláteros.
Calcular el lado de un cuadrado equivalente á un círculo : resolucion gráfica de este problema.
Volúmenes de los prismas, pirámides y poliedros regulares.
- 15** — Propiedades de los polígonos en general.
Rectificacion gráfica de la circunferencia.
Deducir la fórmula de la tangente de la diferencia de dos arcos en funcion de las tangentes de dichos arcos.
- 16** — Igualdad de polígonos.
Construir un cuadrado que tenga con otro dado la misma razon que las rectas m y n .
Teoremas para la resolucion de los triángulos oblicuángulos.
- 17** — Semejanza de polígonos.
Construir un círculo doble de otro dado.
Deducir las fórmulas del seno y del coseno de la mitad de un arco en funcion del coseno del mismo arco.

- 18**— Figuras circulares: su igualdad y semejanza.
Construir un polígono idéntico y otro simétrico con otro dado.
Teoremas para la resolución de los triángulos rectángulos.
- 19**— Demostrar que todo triángulo se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro.
Construir un polígono semejante á otro dado, sobre una recta dada.
Poliedros regulares: determinación de sus áreas y volúmenes.
- 20**— Propiedades del cuadrilátero inscripto en una circunferencia.
Trazar una recta tangente de dos circunferencias dadas.
Área y volumen del cono y trozo de cono de revolución.
- 21**— Propiedades del cuadrilátero circunscrito á un círculo.
Construir un cuadrado equivalente á un polígono regular.
Área y volumen del cilindro de revolución: fórmulas.
Medición de distancias sobre el terreno con la cadenilla y los piquetes.
- 22**— Inscribir en un círculo un triángulo equilátero y un cuadrado, un exágono y un octógono regulares.
Ángulos diedros: su medida y propiedades.
Área y volumen de la esfera: fórmulas.
Medir la superficie de un terreno con la escuadra de agrimensor.
- 23**— Área de los polígonos.
Construir un cuadrado equivalente á un polígono irregular.
Hallar el volumen de una esfera cuya área es de 100 metros cuadrados.
Descripción y uso de la plancheta y la brújula.
- 24**— Área de las figuras circulares: fórmulas.
Construir un círculo equivalente á la diferencia de otros dos.
Teoremas para la determinación de los volúmenes de los poliedros.
Descripción de los niveles de albañil, de agua y de aire.—Nivelación.
- 25**— Equivalencia de las figuras planas.
Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado es de 10 metros.
Deducir la siguiente fórmula:
$$\text{sen } A + \text{sen } B : \text{sen } A - \text{sen } B :: \text{tang. } \frac{1}{2} (A+B) : \text{tang. } \frac{1}{2} (A-B)$$

Brevisimas indicaciones acerca del levantamiento de un plano topográfico.

OBRAS DE TEXTO DEL DR. VALLIN Y BUSTILLO.

Madrid, librería de Hernando, Arenal, 11.

Primera enseñanza.

	Reales.
Principios y ejercicios de LECTURA.	2
EL TESORO DE LECTURA en prosa y verso.	5
ENCICLOPEDIA INFANTIL.	5
ARITMÉTICA para los niños.	4
GEOMETRÍA para los niños.	4
GEOGRAFÍA para los niños.	4
GEOGRAFÍA É HISTORIA de España.	2
ATLAS de Geografía, sin texto.	6
ATLAS de Geografía, con texto.	10

Segunda enseñanza.

Principios y ejercicios de ARITMÉTICA.	4
Programa de estos Principios y ejercicios.	2
Principios y ejercicios de GEOMETRÍA.	4
Programa de estos Principios y ejercicios.	2

Elementos de Matemáticas:

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.	25
GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA y Nociones de TOPOGRAFÍA.	25
Programa general de Matemáticas.	4

Algunas de estas obras han sido adoptadas para la instrucción elemental de

S. A. R. el Infante D. Fernando,

y todas sirven de texto en los más acreditados establecimientos de enseñanza.

La favorable acogida que han merecido del público en sus respectivas y numerosas ediciones se debe principalmente al método, concisión y claridad con que están escritas; á los muchos ejercicios y cuestiones prácticas que abrazan, y á lo agradable que se hace á los niños su estudio, por las noticias históricas, mitológicas, estadísticas, geográficas, administrativas, etc., que encuentran á cada paso.

Se hallan de venta en MADRID en la librería de Hernando; y en BARCELONA en la de Bastinos é Hijo. A los que compren más de 100 ejemplares se rebajará el 20 por 100 de su importe, y el 25 por 100 de 500 en adelante. El AUTOR vive en Madrid, calle del Arenal, núm. 16.