AC/7.2-4

PROGRAMA

DE

MATEMÁTICAS.

AL/F 2-4

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS,

POR

D. ACISCLO F. VALLIN Y BUSTILLO,
Doctor en Ciencias y Catedrático de esta asignatura.

Obra declarada de texto por el Gobierno de S. M.

PROGRAMA GENERAL.

MADRID.
IMPRENTA DE SANTIAGO AGUADO,
CALLE DE LOS REYES, NÚM. 18.

Librerías de la Publicidad y de Cuesta.
La correspondencia se dirigirá al AUTOR, calle de la Luna, núm. 30.

1861.

Los tratados de ARITMÉTICA, ÁLGEBRA, GEOMETRIA, TRIGONOMETRIA Y TOPOGRAFIA, de que se compone esta obra, han sido aprobados para servir de texto en las Universidades, Institutos y Escuelas especiales por el Real Consejo de Instruccion pública y la Junta de Profesores del Real Instituto Industrial.

Los MM. RR. Arzobispos y RR. Obispos de casi todas las diócesis del Reino, se han dignado tambien señalar estos ELEMENTOS como texto para los Seminarios conciliares respectivos.

El AUTOR se reserva todos los derechos que le conceden la ley de propiedad literaria y los tratados internacionales vigentes.

Este Programa contiene los *Elementos de Matemáticas*, divididos en dos cursos, que comprenden: el primero los tratados de Aritmética y Álgebra, y el segundo los de Geometría y Trigonometría; y, si bien van encaminados á formar parte integrante de los estudios generales de la 2.ª enseñanza, tambien pueden y deben servir, con arreglo á la ley y reglamentos vigentes, para los estudios de aplicacion de la misma 2.ª enseñanza, en cada una de sus partes respectivas.

Si fuera posible establecer tantas enseñanzas distintas ó, mejor dicho, tantos establecimientos diferentes, como carreras científico-literarias comprende la ley de instruccion pública, tal vez sería conveniente redactar un programa para cada una de estas enseñanzas, prescindiendo por completo de las demás; pero no siendo fácil esta division por los crecidísimos gastos, que habia de originar, ha dispuesto la ley, y, á decir verdad, con mucho acierto, que se agreguen á los Institutos, base fundamental de la instruccion pública, otras varias enseñanzas, llamadas de aplicacion, para que, formando todas un solo establecimiento, pueda aprovechar cada carrera las asignaturas generales que necesite antes de entrar en las de su respectiva especialidad.

En la asignatura de Matemáticas, precisamente comun á casi todos los estudios de aplicacion, es en la que se tocan mayores dificultades para que su programa responda de una manera conveniente á esa relacion y enlace de unas y otras enseñanzas. No sería extraño, por lo mismo, que bajo el pretesto de que tal ó cual teorema, ó esta ú otra teoría no es de tan absoluta necesidad para el profesor mercantil, como para el perito industrial, se quisieran redactar y publicar cuatro ó cinco programas y textos distintos de Matemáticas, que diferenciándose sólo en muy pocas páginas ó quizá en muy pocas líneas, se les diera el nombre de la carrera respectiva.

No siendo posible la realizacion de este pensamiento por la complicacion, que necesariamente habia de introducir en la enseñanza, los gastos que originaría á los escolares y el excesivo personal de catedráticos, que tuvieran á su cargo en un mismo establecimiento cinco ó seis clases de matemáticas, algunas de las cuales no contarian tal vez más que uno ó dos alumnos; preciso es escogitar otro plan más en armonía con los intereses de los estudiantes y del Estado, sin que por eso la enseñanza se resienta en mucho, ni en nada por semejante economía.

El plan á que nos referimos, ha de consistir en la redaccion de un programa de matemáticas, comprensivo de las verdades más principales de la ciencia, sin que dejen de ser todas las necesarias para su mútua y completa inteligencia, por cuanto el suprimir, por ejemplo, un teorema ó una teoría, que parece de poca importancia, impide muchas veces explicar con claridad y exactitud alguna otra, que pueda ser de suma trascendencia en sus aplicaciones. Además, si el enlace de estas verdades es el que reclama la lógica para su más fácil comprension y lleva bien anotadas con algun asterisco en el cuerpo de la obra ó al final de cada tratado, ó de ambos modos aquellas cuestiones, que, sin ser de absoluta necesidad, amplían las materias que constituyen la asignatura; el programa así redactado y el texto correspondiente satisfarán á todas las exijencias y podrán servir para los estudios generales y de aplicacion consignados en la ley de instruccion pública y disposiciones posteriores.

Asistiendo á una sola clase de matemáticas los alumnos de los estudios generales y los de aplicacion, como pueden hacerlo y lo hacen efectivamente en casi todos los institutos de provincia (escepto en Sevilla y Barcelona) á la discrecion del catedrático, toca despues de clasificarlos, exigir á los primeros un estudio más fundamental y especulativo, cuyo principal objeto sea, además del conocimiento de la asignatura, el de enseñar á discurrir, por ser el estudio de las matemáticas base del de las otras ciencias. A estos alumnos debe encargárseles la demostracion de todos los teoremas fundamentales y de los principios, que dominan en la resolucion de los problemas, con más la explicacion y enlace de todas las materias referentes á cada tratado. De este modo, se consigue desenvolver, dar fuerza, vigor y precision al entendimiento de la juventud que aspira á los estudios superiores, é implantar al propio tiempo en su espíritu las nociones fundamentales eminentemente científicas de la cantidad, de la relacion y de la forma.

Los aspirantes á peritos mecánicos, químicos y agrónomos necesitan el conocimiento de los dos cursos de matemáticas con la misma extension que los anteriores con la particularidad sin embargo, de no serles tan necesario el desenvolvimiento especulativo, y sí mayor

desarrollo en la parte práctica, sobre todo en la resolucion de los problemas geométricos. Obligando pues á estos alumnos á estudiar por complemento de cada leccion las teorías, que á ella se refieran al fin de cada tratado, y muy particularmente las nociones de descriptiva, satisfará cumplidamente el programa al objeto á que se dirige.

Los alumnos mercantiles deben asistir únicamente al primer curso; ó sea al estudio de la aritmética y álgebra, cuidando el profesor de que atiendan mayormente á las abreviaciones del cálculo numérico, al uso y aplicaciones de los logaritmos, á los sistemas de pesas, medidas y monedas, á la resolucion de las reglas de tres, compañía, aligacion, interés, descuento y fondos públicos, y á las ecuaciones de 1.° y 2.° grado por lo mucho que facilitan y abrevian la resolucion del mayor número de cuestiones relativas al comercio y á la banca.

Todo esto cabe en el programa, sin perjudicar á ningun alumno de la clase. Un catedrático, que conozca bien la asignatura, puede seguir el plan indicado con suma facilidad, puesto que se reduce á ejercitar con más especialidad á los alumnos de comercio en la parte esencialmente práctica de su asignatura, á los de la 2.ª enseñanza en la especulativa ó teórica, y á los peritos industriales y agrónomos en la ampliacion de algunas teorías importantes, en la resolucion del mayor número posible de problemas geométricos y en las nociones de descriptiva, todo sin perjuicio de que, indistintamente, los más sobresalientes de cada seccion hayan de abrazar por completo la explicacion del profesor.

Lo dicho es justamente lo que se practica hoy y se ha practicado siempre respecto á la aplicacion y aprovechamiento de los alumnos, que concurren á una misma clase. El profesor necesita dividirlos en grupos y exigir mucho á los sobresalientes, bastante á los notablemente aprovechados, menos á los buenos y poco, pero algo á los medianos.

Los aspirantes á peritos agrónomos (terminados de este modo los dos años de matemáticas) pueden pasar con facilidad y ventaja al estudio de la topografía y agrimensura en una clase aparte, que pudiera estar á cargo de uno de los dos profesores de matemáticas, mediante la gratificacion del reglamento.

Los alumnos de comercio, una vez probado el primer año de matemáticas, ó sea la aritmética y el álgebra, deben pasar á su especialidad en el 2.° de carrera, en el cual pueden estudiar con grande aprovechamiento y fácil comprension la teneduría de libros, la teoría de las probabilidades y lo que se llama cálculo mercantil, una vez que ya están familiarizados con las transformaciones literales de mayor importancia.

Esta enseñanza pudiera tambien encargarse á uno de los dos profesores de matemáticas del Instituto.

Los aspirantes á peritos químicos y mecánicos (terminados los dos años de matemáticas con las nociones de descriptiva) deben estudiar en el tercer año los unos las nociones de física y química, aplicadas á la industria, y los otros las nociones de física y mecánica que designasen los programas respectivos, cuyas asignaturas podian tambien desempeñarlas los catedráticos de física é historia natural.

De este modo, todas, ó casi todas las enseñanzas de aplicacion podrian establecerse en el mayor número de los institutos sin aumento alguno en el personal y con la única diferencia costosa de las gratificaciones á cuatro ó cinco de sus actuales catedráticos.

En Madrid, Sevilla, Barcelona y acaso Valencia, donde el número de alumnos es escesivo no hay posibilidad de aglomerarlos todos en una misma clase, siendo forzosa su division. En este caso se halla el catedrático más libre para extender su explicacion en una ú otra teoría segun que sus alumnos sean de comercio ó industriales, pero nunca lo será para que considere conveniente (ni mucho ménos necesaria) la formacion de un programa *ad hoc*. Además, entre sus mismos discípulos, habrá quienes se hallen más ó ménos dispuestos para el estudio, y no sería equitativo que, pudiendo adquirir los primeros un conocimienio más completo que tal vez los habilitara para otras carreras superiores, quedaran privados de los medios de conseguirlo, tan solo por la falta de un programa y un texto más completo de la asignatura.

Estas indicaciones, entre otras muchas que pudieran hacerse, nos parecen muy bastantes para probar la conveniencia de que haya un solo programa y un solo texto de matemáticas en su parte elemental sea cualquiera el objeto ulterior del alumno al estudiar este ramo de la segunda enseñanza.

Lo mismo se practica en las asignaturas de la facultad de ciencias: un solo programa de física, de química ó de mineralogia sirve lo mismo para los ingenieros y arquitectos, que para los médicos y farmacéuticos, siendo sin embargo muy diferentes las condiciones de estas carreras y muy diversos los grados de extension que de cada asignatura de la facultad de ciencias necesitan los alumnos de las demás facultades.

21 de agosto de 1861.

PRIMER AÑO.

ARITMETICA Y ALGEBRA.

Introduccion.

---

1. Nociones de lógica. Pág. 16.

Objeto de la LÓGICA y su relacion con las otras ciencias.
Ideas matemáticas. Su division en simples y compuestas, particulares y generales, abstractas y concretas.
Elementos del juicio: division de este en afirmativo y negativo, general ó particular.
Proposicion: sus elementos lógicos son sugeto, predicado y cópula.
Objeto del raciocinio y su division en inductivo y deductivo. Argumentacion y silogismo.
Qué es ciencia y en qué consisten los métodos analítico y sintético.
Método matemático.
Qué se entiende por definicion, axioma, postulado, teorema, problema, demostracion, corolario, escolio y lema.

2. Definicion y division de las matemáticas. Pág. 23.

Objeto de las MATEMATICAS como ciencia, que trata de la cantidad.
Definiciones de la cantidad, de la unidad, del número y de la extension: la pluralidad es el orígen más simple de la idea del número.
Las matemáticas se dividen en puras y mistas.
Las matemáticas puras se subdividen en tres tratados: ARITMÉTICA, ó ciencia de los números, GEOMETRIA ó ciencia de la extension, y ALGEBRA que trata de las leyes generales de toda cantidad.
Las matemáticas mistas se pueden subdividir en dos grandes secciones, una que hace aplicacion de la ciencia de la cantidad abstracta á los objetos de la naturaleza, y otra á los objetos del arte.
Tratados que constituyen cada una de estas secciones.

ARITMÉTICA.

3. Nociones preliminares. Pág. 29.

Definicion de la ARITMÉTICA.
Unidad y número entero.
Números abstractos y concretos.
Números homogéneos y heterogéneos, complejos é incomplejos.
Partes en que puede considerarse dividida la Aritmética.
Signos matemáticos.
Igualdad y desigualdad aritmética.
Operaciones que constituyen el cálculo aritmético.
Numeracion hablada ú oral y numeracion escrita.
Base de un sistema de numeracion.
Diferentes sistemas de numeracion.
Definiciones de la *adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices.*
Consecuencias de estas definiciones.
Signos que indican cada una de las operaciones anteriores y nombres de sus datos.
Números negativos, fraccionarios é incomensurables.
Composicion y descomposicion de los números.

Números enteros.

4. Numeracion decimal de los números enteros. Pág. 33.

Objeto de la numeracion oral ó hablada.
Unidades simples ó de primer órden, decenas, centenas, millares, decenas de millar, centenas de millar, unidades de millon, etc., etc.
Las unidades de un órden cualquiera son decenas respecto de las del órden inmediato inferior.
Palabras que, combinadas convenientemente, sirven para expresar todos los números enteros que se quieran.
Objeto de la numeracion escrita.
Caracteres, signos ó cifras de la numeracion decimal.
Valores absoluto y relativo de cada cifra.
Reglas para escribir y leer un número entero cualquiera.
Observaciones acerca de los diferentes sistemas de numeracion.
Numeracion romana (*).

5. Adicion de los números enteros. Pág. 37.

Postulado de la adicion ó sean sus principios fundamentales.
Adicion de un número entero con otro ú otros de una sola cifra.
Adicion de dos ó más números enteros cualesquiera.
Prueba de la adicion.
Observaciones generales acerca de esta operacion.

6. Sustraccion de los números enteros. Pág. 39.

Postulado de la sustraccion ó sean sus principios fundamentales.
Sustraccion de un número de una sola cifra de otro número entero.
Sustraccion de un número entero de otro número entero.
Prueba de la sustraccion.
Observaciones generales acerca de la misma operacion.
Hallar la diferencia entre un número y la suma ó diferencia de otros dos.

7. Multiplicacion de los números enteros. Pág. 43.

Definicion de la multiplicacion de un número por otro entero.
Consecuencias de esta definicion.
Principio fundamental de la multiplicacion de un número por otro.
Casos que pueden ocurrir en esta operacion:
Multiplicar un número entero por 10, 100, 1000, etc.

(*) Como repaso de esta leccion los alumnos deben resolver por sí mismos todos los ejercicios propuestos en el libro de texto, pág. 36.
Entiéndase lo mismo respecto de las demás cuestiones, que bajo el nombre de ejercicios se proponen al fin de cada teoría.

Multiplicar un número de una cifra por otro de una cifra.
Multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola.
Multiplicar un número entero por otro entero cualquiera.
Abreviaciones de la multiplicacion.
Prueba de la multiplicacion.
Observaciones generales relativas á esta operacion.
Producto de una suma ó diferencia indicada por un número entero.
Producto de varios factores.
Producto de dos ó mas productos indicados.
Número de cifras del producto de dos factores.
Alteraciones del producto por la variacion de los datos.

8. Division de los números enteros. Pág. 51.

Definicion de la division de un número por otro entero.
Consecuencias de la definicion anterior.
Principio fundamental de la division de un número por otro.
Casos que pueden ocurrir en esta operacion:
Dividir un número entero por 10, 100, 1000, etc.
Dividir un número de una ó dos cifras por otro de una sola, siempre que el cociente sea tambien de una cifra.
Dividir un número de varias cifras por otro de una sola.
Dividir un número entero por otro entero cualquiera. Tanteo de cada cifra del cociente.
Prueba de la division.
Observaciones generales relativas á esta operacion.
Cociente de una suma, de una diferencia ó de un producto indicado por otro número entero.
Cociente de un entero por un producto indicado de dos ó más factores.
Número de cifras del cociente de dos números enteros.
Alteraciones del cociente total por la variacion del dividendo y divisor.

9. Elevacion á potencias de los números enteros. Pág. 62.

Formacion de una potencia cualquiera de un número entero.
Prueba de la elevacion á potencias.
Observaciones generales relativas á esta operacion.
Cuadrado de la suma de dos números enteros.
Diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos.
Cubo de la suma de dos números enteros.
Diferencia entre los cubos de dos números consecutivos.
Potencias del producto ó cociente indicado de dos números.
Producto ó cociente de las potencias de un mismo número.
Alteraciones del resultado de esta operacion por la variacion de los datos.

10. Raiz cuadrada de los números enteros. Pág. 63.

Definicion de la *raiz cuadrada* de un número.
Raiz cuadrada entera.
Diferencia entre la raiz cuadrada de un número y su raiz cuadrada entera.

Resto ó resíduo de esta operacion.
Extraer la raiz cuadrada de los números enteros menores que 100.
Número de cifras de la raiz cuadrada de un entero cualquiera.
Extraer la raiz cuadrada de los números enteros mayores que 100.
Fundamento de esta operacion.
Máximo resto de las raices cuadradas inexactas.
Casos en que basta la sola inspeccion de un número, para conocer que no tiene raiz cuadrada exacta.

11. Raiz cúbica de los números enteros. Pág. 68.

Definicion de la *raiz cúbica* de un número dado.
Raiz cúbica entera.
Diferencia entre la raiz cúbica de un número y su raiz cúbica entera.
Resto ó resíduo de esta operacion.
Extraer la raiz cúbica de los números enteros menores que 1000.
Número de cifras de la raiz cúbica de un entero dado.
Extraer la raiz cúbica de los números enteros mayores que 1000.
Fundamento de esta operacion.
Máximo resto de las raices cúbicas inexactas.
Casos en que basta la sola inspeccion de las cifras de un número entero, para conocer que no tiene raiz cúbica exacta. (*)

12. Principios fundamentales de la divisibilidad de los números. Pág. 75.

Números múltiplos de otro dado.
Factores, divisores, sub-múltiplos ó partes alícuotas de un número dado.
Números primos.
Tabla de los números primos menores que 100.
Si dos ó más números tienen un divisor comun, la suma ó diferencia de ellos tendrá el mismo divisor.
Consecuencias de este teorema.
Si uno de los factores de un producto tiene un divisor, el producto tendrá el mismo divisor.
Si dos números tienen un divisor comun, el resto, que resulta de dividir el mayor por el menor, tendrá el mismo divisor. Si el resto y el menor de los números dados tienen un divisor comun, el otro número tendrá el mismo divisor.
Si un número tiene un divisor, todas sus potencias tendrán el mismo divisor.

13. Caracteres de divisibilidad de un número por otro. Pág. 77.

Reglas para conocer por la inspeccion de las cifras, que componen un número, si este es divisible por 10, 100, 1000 etc., por 2, por 5, por 4, por 25, por 8, por 125, por 3, por 9 y por 11.

(*) Raices de diferentes grados, cuya determinacion depende de las cuadradas y cúbicas. Prueba de la extraccion de raices. Observaciones generales. Pág. 72.

14. Máximo comun divisor de dos ó más números. Pág. 80.

Definicion del máximo comun divisor de dos ó más números.
Números primos entre sí.
El m. c. d. de dos números es igual al m. c. d. del menor y del resto que resulta de dividir el uno por el otro.
Regla para hallar el m. c. d. de dos números.
Todo divisor comun de dos números lo es tambien de su m. c. d. (*)
Si dos números se multiplican ó se dividen por otro, su m. c. d. resultará multiplicado ó dividido por este otro.
Si dos números se dividen por su m. c. d. los cocientes serán primos entre sí; y recíprocamente.

15. Números primos. Pág. 83.

Todo número no divisible por la série de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13,... hasta obtener un cociente entero menor que el divisor, será número *primo*.
Todo número primo, excepto el 1, 2 y 3, es un múltiplo de 6, aumentado ó disminuido en una unidad.
Números primos entre sí, dos á dos.
Todo número, que es divisor de un producto de dos factores y primo con uno de estos factores, es tambien divisor del otro factor.
Un número primo, que es divisor de un producto, lo es por lo menos de uno de sus factores.
Si un número es divisible por dos ó más primos entre sí dos á dos, es tambien divisible por el producto de todos ellos. (**)

16. Factores simples y compuestos de un número dado. Pág. 86.

Regla para descomponer un número dado en sus factores simples ó primos.
Un mismo número no admite dos descomposiciones diferentes en factores primos.
Regla para hallar todos los factores de un número dado.
Número total de estos factores ó divisores.

17. Mínimo múltiplo comun de varios números. Pág. 89.

Definicion del mínimo múltiplo comun de varios números:
Regla para hallar dicho mínimo múltiplo.
Observaciones sobre esta regla.
El m. m. c. de dos números es igual á su producto, dividido por el m. c. d. de los mismos números.

(*) Hallar el m. c. d. de tres ó más números dados. Pág. 81.
(**) Tabla de los números primos comprendidos entre 1 y otro número cualquiera. La série de estos números es ilimitada ó indefinida. Pág. 85.

Números fraccionarios ó quebrados.

18. Numeracion de los quebrados. Pág. 91.

Orígen de los números fraccionarios ó quebrados.
Unidad fraccionaria.
Definicion de los números fraccionarios. Su numerador y denominador.
Nomenclatura de las diferentes unidades fraccionarias.
Cómo se escriben y cómo se leen los números fraccionarios.
Quebrados propios é impropios.
Números mistos.
Cociente completo ó total de dos números enteros.
Convertir un número entero en fraccionario.
Alteraciones de los números fraccionarios por la variacion de sus términos.
Un número fraccionario no varía aunque se multipliquen su numerador y denominador por un mismo número entero cualquiera, ó se dividan el uno y el otro por un divisor comun á ambos.
Simplificacion de los números fraccionarios. Fracciones irreducibles.
Reduccion de dos ó más números fraccionarios de diferentes denominadores á otros equivalentes y de un mismo denominador.

19. Numeracion de los decimales. Pág. 97.

Unidad fraccionaria decimal.
Nomenclatura de estas unidades.
Números fraccionarios decimales ó simplemente números decimales.
Reglas para escribir y leer los números decimales.
Un número decimal no varía aunque se añadan ó quiten ceros de su derecha.
Alteraciones de un número decimal, si se corre la coma uno ó más lugares á la derecha ó á la izquierda.

20. Adicion de los números fraccionarios. Pág. 100.

Sumar dos ó más quebrados de uno mismo ó de diferentes denominadores.
Sumar un entero y un quebrado, ó sea reducir un número misto á fraccionario.
Sumar dos ó más números mistos.
Sumar enteros y fraccionarios con uno ó más números mistos.
Sumar dos ó más números decimales.

21. Sustraccion de los números fraccionarios. Pág. 101.

Restar un quebrado de otro, tengan ó no un mismo denominador.
Restar un quebrado de un entero.
Restar un número misto de otro misto.
Restar un entero ó un quebrado de un misto, y al contrario.
Restar un número decimal de otro decimal.

22. Multiplicacion de los números fraccionarios. Pág. 103.

Multiplicar un quebrado por un entero, y al contrario.
Multiplicar un quebrado por otro quebrado.
Multiplicar un número misto por otro misto.
Multiplicar un entero ó quebrado por un número misto y al contrario.
Orden de los factores en la multiplicacion de quebrados.
Producto de una suma ó de una diferencia indicada de dos números por un quebrado ó un misto.
Producto de tres ó más factores quebrados ó mistos.
Quebrados de quebrados.
Multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros.
Multiplicar un número decimal por un número entero.
Multiplicar un número decimal por otro decimal.

23. Division de los números fraccionarios decimales. Pág. 106.

Dividir un quebrado por un entero, y al contrario.
Dividir un quebrado por otro quebrado.
Dividir un número misto por otro misto.
Dividir un entero ó un quebrado por un número misto, y al contrario.
Cociente de la suma, diferencia ó producto indicado de dos números por un quebrado ó un misto.
Dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros.
Dividir un número decimal por un número entero.
Dividir un número decimal por otro decimal.
Aproximacion del cociente de dos números enteros ó decimales, ó un entero y otro decimal, con ménos error que una unidad decimal dada.
Nociones sobre las fracciones decimales periódicas.

24. Elevacion á potencias de los números fraccionarios. Pág. 111.

Elevar un quebrado ó un número misto á una potencia cualquiera.
Las potencias de una fraccion van disminuyendo á medida que aumenta el índice de la potencia.
Todas las potencias de un quebrado irreducible son tambien irreducibles.
Elevar un número decimal á una potencia de cualquier grado.
Número de cifras decimales del resultado.

25. Extraccion de raices de los números fraccionarios. Pág. 112.

Extraer la raiz cuadrada de un quebrado, cuyos dos términos tienen raiz cuadrada exacta, y tambien si solo la tiene uno de ellos, ó si no la tiene ninguno.
Raiz cuadrada de un número misto.
Aproximacion de la raiz cuadrada de un entero, quebrado ó misto con ménos error que una unidad fraccionaria dada.
Extraer la raiz cúbica de un quebrado, cuyos dos términos tienen raiz cú-

bica exacta, y tambien si solo la tiene uno de ellos, ó si no la tiene ninguno.
Raiz cúbica de un número misto.
Aproximacion de la raiz cúbica de un entero, quebrado ó misto con ménos error que una unidad fraccionaria dada.
Raiz cuadrada de los números decimales.
Aproximacion de la raiz cuadrada de un número entero ó decimal con ménos error que una unidad decimal dada.
Raiz cúbica de los números decimales.
Aproximacion de la raiz cúbica de un número entero ó decimal con menos error que una unidad decimal dada.

26. Reduccion de los números decimales á quebrados ordinarios y viceversa. Pág. 118.

Transformar un número decimal exacto ó de limitado número de cifras en quebrado comun ú ordinario.
Reducir una fraccion decimal periódica pura á quebrado ordinario: condiciones del denominador de este quebrado.
Reducir una fraccion decimal periódica mista á quebrado ordinario: condiciones del denominador de este quebrado.
Procedimiento general para reducir un quebrado ordinario á decimal.
Casos en que puede el quebrado ordinario convertirse exactamente en decimal, en una fraccion decimal periódica pura ó en una periódica mista.
Número de cifras de la fraccion decimal en el primer caso, del período en el segundo, y de la parte no periódica en el tercero.
Observaciones acerca de los números fraccionarios. *Fracciones contínuas.

Números incomensurables.

27. Cálculo de los números incomensurables. Pág. 124.

Definicion de los números comensurables é incomensurables.
Si la raiz $n.^{ma}$ verdadera de un número entero ó fraccionario no es otro número entero ó fraccionario, será incomensurable.
Variaciones de los elementos de un número incomensurable bajo la forma de una raiz indicada, sin que altere su valor.
Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices de los números incomensurables solos, ó combinados con otros comensurables.

28. Generalidad del cálculo aritmético. Pág. 129.

Expresar por medio de las letras del alfabeto y por consiguiente de una manera general, no solo todas las propiedades de los números sean enteros, faccionarios ó incomensurables, y las variaciones del resultado en todas las operaciones del cálculo; sino tambien los teoremas y reglas prácticas mas notables de la multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices.

Comparacion de los números.

29. Igualdades y desigualdades. Pág. 130.

Propiedades de toda igualdad aritmética.
Ecuacion numérica.
Propiedades de toda desigualdad aritmética.
Inecuacion numérica.
Comparacion de igualdad. El resultado es cero ó la unidad.
Comparacion de desigualdad, de donde resultan las
Diferencias, equidiferencias y progresiones por diferencia;
Razones, proporciones y progresiones por cociente.

30. Diferencias, equidiferencias y progresiones por diferencia. Pág. 131.

Comparacion de dos números por medio de su diferencia.
Antecedente y consecuente de una *diferencia.*
Diferencias inversas.
Alteraciones de una diferencia variando el antecedente ó el consecuente ó uno y otro á la vez.
Definicion y propiedades de las equidiferencias.
Hallar uno de sus términos, conocidos los tres restantes.
Definicion y propiedades de las progresiones por diferencia.
Fórmulas para hallar el último término, el primero, la diferencia y la suma de todos los términos de una progresion por diferencia: su traduccion al lenguaje vulgar.
Intercalacion de un número cualquiera de términos medios diferenciales entre dos números dados.
Aplicaciones á varios ejemplos.

31. Razones, proporciones y progresiones por cociente. Pág. 135.

Comparacion entre dos números por medio de su cociente ó *razon.*
Antecedente y consecuente de una razon.
Razones inversas ó recíprocas.
Alteraciones de una razon variando sus términos.
Definicion y propiedades de las proporciones por cociente.
Hallar uno de sus términos, conocidos los tres restantes.
Séries de razones iguales: sus propiedades.
Definicion y propiedades de las progresiones por cociente.
Fórmulas para hallar el último término, el primero, la razon y la suma de todos los términos de una progresion por cociente: su traduccion al lenguaje ordinario.
Intercalacion de un número cualquiera de medios proporcionales entre dos números dados.
Aplicaciones á varios ejemplos.

Logaritmos.

32. Definicion y propiedades de los logaritmos. Pág. 142.

Definicion de los logaritmos, deducida de la analogía entre dos progresiones: una por diferencia, que empieza por cero; y otra por cociente, cuyo primer término sea la unidad.
Diferentes sistemas de logaritmos.
Un mismo número puede tener diferentes logaritmos, y un mismo logaritmo puede corresponder á diferentes números.
Base de un sistema de logaritmos: puede ser entera, fraccionaria ó incomensurable.
Propiedades generales de los logaritmos y sus aplicaciones al modo de hallar el producto ó el cociente de dos números, ó bien una potencia ó raiz de un número dado.

33. Construccion y disposicion de las tablas logarítmicas. Pág. 144.

Progresiones de Briggs.
Característica y mantisa de sus logaritmos, llamados ordinarios ó vulgares. La característica consta de tantas unidades como cifras menos una tiene el número correspondiente.
Procedimiento elemental para hallar el logaritmo de un número primo, por ejemplo, 2.
Logaritmos de los números compuestos de dos ó mas factores.
Disposicion de las tablas de Vazquez Queipo.

34. Uso de las tablas de logaritmos. Pág. 147.

Hallar por medio de las tablas los logaritmos de
Un número entero mayor que el máximo de las tablas;
Un número fraccionario mayor que la unidad;
Una fraccion ordinaria;
Una fraccion decimal.
Logaritmos negativos y complementos logarítmicos.
Dado un logaritmo que no se halle en los tablas, determinar su número correspondiente en los siguientes casos:
Si su característica no se halla en las tablas;
Si no se halla la mantisa;
Si el logaritmo es negativo;
Si el logaritmo dado tiene la forma complementaria.
Definicion y uso del complemento logarítmico.

35. Aplicaciones de los logaritmos. Pág. 150.

Resolucion de diferentes problemas, en que se hallen combinadas la multiplicacion y division de varios números enteros y fraccionarios.
Ejemplos de elevacion á potencias y extraccion de raices por medio de los logaritmos.

Hallar el 4.° término de una proporcion, empleando los logaritmos.
*Comparacion de las fórmulas de las progresiones por diferencia, y los logaritmos de las de las progresiones por cociente. (*)

APLICACIONES DE LA ARITMETICA.

36. Pesas, medidas y monedas. Pág. 153.

Números abstractos y concretos.
Una misma cantidad puede expresarse por diferentes números, segun la unidad que se tome por término de comparacion.
Unidades principales, tanto del antiguo sistema llamado de Castilla, como del legal métrico decimal.
Su relacion con la unidad fundamental respectiva.
Sus múltiplos y divisores en ambos sistemas.

37. Reduccion de un número concreto á unidades superiores ó inferiores. Pág. 156.

Reducir un número incomplejo entero ó fraccionario á unidades de especie inferior.
Reducir un número incomplejo á unidades de especie superior.
Reducir un número complejo á incomplejo de especie inferior.
Reducir un número complejo á incomplejo de especie superior ú otra intermedia.
Abreviaciones, que ofrece en todas estas cuestiones el uso del sistema métrico decimal.

38. Adicion de los números concretos. Pág. 159.

Los sumandos deben ser del mismo género. Siendo de una misma especie, la suma será de la especie de los sumandos.
Sumar números incomplejos de una misma ó de diferente especie.
Sumar dos ó más números complejos.

39. Sustraccion de los números concretos. Pág. 160.

Los datos deben ser de un mismo género. Cuando son de una misma especie, el resultado será de la especie de los datos.
Restar de un número incomplejo otro de la misma ó de diferente especie.
Restar un número complejo de otro complejo ó incomplejo.

(*) Por mucha extension que quiera darse á la teoría de los logaritmos en una obra de texto, ha de estar siempre muy lejos de la explicacion que precede á las Tablas de V. Queipo. El catedrático, por lo tanto, debe completar estas indicaciones del programa con los preliminares de dichas Tablas.

40. Multiplicacion de los números concretos. Pág. 161.

El multiplicador debe considerarse siempre como abstracto, y por consiguiente, las unidades del producto serán de la misma especie que las del multiplicando.
El problema más frecuente en la multiplicacion de los números concretos es aquel, en que se trata de averiguar el valor de un número, conocido el valor de la unidad.
Multiplicar un número incomplejo por otro incomplejo.
Multiplicar un número complejo por un incomplejo.
Multiplicar un número incomplejo ó complejo por otro complejo.
Multiplicacion de los números concretos por el método de las partes alícuotas.

41. Division de los números concretos. Pág. 164.

Si los datos son homogéneos, el resultado será un número abstracto.
Si son heterogéneos, el divisor se considera como abstracto, en cuyo caso el cociente será de la misma especie que el dividendo.
El problema, que generalmente se resuelve en la division de los números concretos es; averiguar el valor de una unidad, conociendo el de un número.
Dividir un número incomplejo por otro.
Dividir un número complejo por un incomplejo.
Dividir un número incomplejo ó complejo por otro complejo.

42. Comparacion de los números concretos. Pág. 168.

Condiciones para que cuatro números concretos formen proporcion.
Proporcionalidad directa entre cuatro números concretos.
Proporcionalidad inversa entre cuatro números concretos.
Regla práctica para conocer, si la proporcionalidad entre los cuatro números de una cuestion dada es directa ó inversa.
Un mismo número puede ser á la vez directa ó inversamente proporcional á otros varios, y tambien directamente proporcional á unos é inversamente proporcional á otros.

42. Regla de tres. Pág. 169.

Lo que se entiende por *regla de tres.*
Su division en directa é inversa.
Reglas prácticas para resolver una y otra.
Método de reduccion á la unidad para resolver las cuestiones de regla de tres simple.
Regla de tres compuesta.
Su resolucion, bien sea empleando dos ó más proporciones, ó por el método de reduccion á la unidad.

44. Regla de compañía. Pág. 172.

Definicion de la *regla de compañía.*
Casos que pueden ocurrir: 1.° que el tiempo sea el mismo y diferentes los capitales; 2.° que los capitales sean iguales y el tiempo diferente; y 3.° que sean diferentes los tiempos y los capitales.
Resolucion de varios ejemplos en cada uno de estos casos.
Lo que se entiende por descomponer un número en partes proporcionales á otros números dados. Ejemplos de aplicacion.

45. Regla de aligacion. Pág. 174.

Su definicion. Se divide en directa é inversa.
Resolucion de una y otra, y aplicacion á varios ejemplos.
Ejemplos en que las especies, que se han de mezclar, sean más de dos.
Las cuestiones comprendidas en la regla de aligacion inversa son indeterminadas.

46. Regla de interés. Pág. 176.

Lo que se entiende por *interés* del dinero.
Interés simple y compuesto.
Resolucion de varias cuestiones de interés simple cuando el tiempo es un año, ménos de un año, ó más de un año. Proporciones que se emplean en cada caso. Giro de letras.
Interés compuesto.
Fórmula general para hallar el capital y sus intereses compuestos durante un tiempo dado.
*Fórmulas logarítmicas, que se deducen de la fórmula anterior.
Su aplicacion á la resolucion de varios ejemplos.

47. Reglas de descuento. Pág. 178.

Letras de cambio. Su aceptacion y endoso.
Daño y beneficio del papel.
Lo que se entiende por *descuento* de una letra ó pagaré, que vence á un plazo dado.
Resolucion de varios ejemplos, en los que se supone el descuento igual al interés del valor nominal de la letra.
Resolucion de varios ejemplos, en los que se supone el descuento igual al interés del valor real de la letra.
¿Cuál de estos descuentos es el legal y justo?

48. Fondos públicos. Pág. 180.

Rentas contra el Estado, consolidada y diferida.
La diferida se convierte en consolidada el 1.° de julio de 1870.
Títulos de estas deudas y sus cupones.
Precios ó cambios corrientes.
Resolucion de varios problemas relativos á estas rentas.

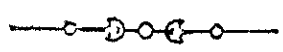
Otras deudas del Estado.
Empresas particulares reconocidas por la ley, y cuyos efectos se cotizan en la Bolsa de Madrid.
Modelo de un BOLETIN ESPECIAL de los *Agentes de cambios* de Madrid.

49. Regla conjunta. Pág. 180.

Objeto de la *regla conjunta*. Regla de *cambio*.
Fundamento de su resolucion.
Aplicacion á varios ejemplos.
Tabla de los cambios de España con las principales plazas de Europa.
Ventajas de la regla conjunta sobre el método de proporciones.

*50. Rentas perpétuas, vitalicias y anualidades. Pág. 182.

Lo que se entiende por renta perpétua.
Rentas vitalicias.
Anualidades satisfechas durante un tiempo determinado.
Diferencias entre estas rentas.
Una renta perpétua puede considerarse como equivalente á un capital cuyo interés iguale á la renta.
Fórmula del valor actual de una renta perpétua que debiera empezar á pagarse dentro de t años.
Hallar el valor actual, C, de una anualidad, a, pagadera durante t años, á $100r$=R por 100.
De la fórmula que resuelve el problema anterior se deducen otras, para determinar cualesquiera de las cantidades C, a, t, r ó R, conocidas las demás.
Tabla de la probabilidad de la vida humana.
Aplicaciones á varios ejemplos.



(*) Teoría de los diferentes sistemas de numeracion. Pág. 185.
Abreviaciones en la multiplicacion, division y extraccion de raices. Pág. 188.

ÁLGEBRA.

51. Nociones preliminares. Pág. 5.

Definicion del Algebra.
Unidad numérica y geométrica.
Comensurabilidad é incomensurabilidad de las cantidades.
Cantidades literales: su division en positivas y negativas, reales é imaginarias.
Division del Algebra en dos partes.
Signos algebraicos y representacion de la unidad positiva, negativa é imaginaria.
Coeficiente de una cantidad literal.
Cantidad ó expresion algebráica.
Valor numérico ó geométrico de una expresion algebraica.
Las cantidades algebráicas se dividen en enteras, fraccionarias y radicales.
Cantidades monomias y polinomias.
Grado de un monomio ó polinomio.
Polinomios homogéneos.
Igualdad y desigualdad algebráica.
Relacion de las cantidades negativas entre sí y con cero.
Fórmulas algebráicas: su aplicacion á varios ejemplos.

PARTE PRIMERA.—CÁLCULO ALGEBRÁICO.

Cantidades algebráicas enteras.

---

52. Adicion de las cantidades algebráicas enteras. Pág. 9.

Objeto de la adicion algebráica.
Carácter positivo ó negativo de la suma.
Adicion de dos ó más monomios.
Términos semejantes. Su reduccion á uno solo.
Adicion de dos ó más polinomios.
Todo polinomio es la suma algebráica de sus términos.
El valor numérico ó geométrico de un polinomio no varía, aunque se altere el órden de sus términos.

53. Sustraccion de las cantidades algebráicas enteras. Pág. 11.

Objeto de la sustraccion.
Carácter positivo ó negativo del resíduo.
Sustraccion de un monomio de otra expresion algebráica.
Sustraccion de un polinomio de otra expresion algebráica ó literal.
Todo polinomio se puede considerar como la diferencia de dos expresiones literales, compuestas de sus mismos términos.

54. Multiplicacion de las cantidades algebráicas enteras. Pág. 12.

Carácter positivo ó negativo del producto de dos factores.
Multiplicacion de dos ó más monomios.
Variacion del signo del producto de tres ó más monomios, cambiando los signos de los factores.
Multiplicacion de un polinomio por un monomio.
Multiplicacion de dos ó más polinomios.
Número máximo y mínimo de términos del producto de dos polinomios.
Ejemplos notables de la multiplicacion algebráica.

55. Division de las cantidades algebráicas enteras. Pág. 16.

Carácter positivo ó negativo del cociente.
Division de dos monomios.
Signo del cociente, si varian los signos del dividendo y divisor.
Toda cantidad afecta de exponente cero equivale á la unidad.
Division de un polinomio por un monomio.
Division de un polinomio por otro, sea el cociente exacto ó inexacto: casos en que se verifica esto último.
Division de un monomio por un polinomio.
Ejemplos notables de la division algebráica.

56. Elevacion á potencias de las cantidades algebráicas enteras. Pág. 23.

Carácter positivo ó negativo de las diferentes potencias de una expresion algebráica.
Elevacion á potencias de los monomios.
Elevacion á potencias de los polinomios. Reglas prácticas para el cuadrado y cubo.

57. Extraccion de raices de las cantidades algebráicas enteras. Pág. 25.

Carácter positivo ó negativo de la raiz de una cantidad algebráica.
Extraccion de raices de los monomios.
Raiz cuadrada exacta ó inexacta de los polinomios: casos en que se verifica esto último.
Raiz cúbica exacta ó inexacta de los polinomios: casos en que se verifica esto último. (*)

Expresiones fraccionarias literales.

58. Preliminares relativos á las fracciones literales. Pág. 34.

Definicion de estas expresiones algebráicas.
Una cantidad fraccionaria no varia de valor, aunque se multipliquen ó se dividan sus dos términos por otra cantidad cualquiera.
Simplificacion de las expresiones fraccionarias literales.
Reduccion de dos ó más de estas expresiones de diferentes denominadores á otras equivalentes, pero de un mismo denominador.

59. Cálculo de las expresiones fraccionarias. Pág. 35.

Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices de las cantidades fraccionarias literales.
Observaciones generales acerca de las mismas cantidades, y su aplicacion á la division inexacta y extraccion de raices irracionales de los polinomios, sean estos enteros ó fraccionarios.

60. Exponentes negativos. Pág. 38.

Toda cantidad con exponente negativo es el cociente de la unidad por la misma cantidad con exponente positivo.
Toda expresion fraccionaria puede transformarse en otra de forma entera equivalente, con uno ó más exponentes negativos.
Las cantidades con exponentes negativos se calculan por las mismas reglas que las que llevan exponentes positivos.
Aplicacion de los exponentes negativos á la division y extraccion de raices inexactas de los polinomios.

(*) Observaciones acerca de la generalidad de los resultados del cálculo algebráico, cualesquiera que sean los valores particulares de los datos y las transformaciones, que reciban estos, para llegar al resultado definitivo.

Cantidades radicales.

61. Preliminares relativos á las cantidades radicales. Pág. 42.

Definicion de estas expresiones algebráicas.
Una cantidad radical no varía de valor, aunque se multiplique el índice por un número entero, con tal que se eleve la cantidad subradical á la potencia del mismo grado, que indique dicho número. Tampoco varía, aunque se divida el índice del radical por uno de sus divisores, con tal que se extraiga de la cantidad subradical la raiz del mismo grado, que indique dicho número.
Simplificacion de las expresiones radicales.
Reduccion de dos ó más radicales de diferentes índices á otros de un índice comun y el menor posible.

62. Cálculo de las cantidades radicales. Pág. 44.

Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices de las expresiones radicales, sean monomias ó polinomias.
Cantidades radicales conjugadas.
*Transformar la expresion: $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, en otra de la forma: $\sqrt{A'}+\sqrt{B'}$

63. Exponentes fraccionarios. Pág 48.

El exponente fraccionario positivo ó negativo de una cantidad expresa la raiz del grado, que indique su dominador, de la misma cantidad con el numerador por exponente.
Toda expresion radical puede convertirse, por lo tanto, en otra de forma racional con exponentes fraccionarios.
Las cantidades con exponentes fraccionarios se calculan lo mismo que las que llevan exponentes enteros. Aplicacion á varios ejemplos. (*)

Cantidades imaginarias.

64. Cálculo de las expresiones imaginarias. Pág. 52.

Definiciones y preliminares.
Forma propia de las expresiones imaginarias.
Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extracion de raices de las expresiones imaginarias, sean monomias ó polinomias.

(*) Observaciones generales acerca de los exponentes. Pág. 50.

Cantidades imaginarias conjugadas.

*Transformacion de $\sqrt{A+B\sqrt{-1}}$ en otra expresion de la forma: $A'+B'\sqrt{-1}$, ó bien $\sqrt{A''}+\sqrt{B''}.\sqrt{-1}$

Aplicaciones de este procedimiento á varios ejemplos numéricos. (*)

Fórmula de Newton y sus aplicaciones.

---

65. Combinaciones, permutaciones y productos diferentes. Pág. 59.

Qué se entiende por combinaciones, permutaciones y productos diferentes de varias letras.

Formar las permutaciones binarias, ternarias, etc., de un número dado de letras.

Número de estas permutaciones en cada caso.

Fórmula general siendo n el número de letras, y tomando m en cada permutacion.

Formar los productos binarios, ternarios etc., de varias letras.

Número de estos productos en cada caso.

Fórmula general.

El número de productos diferente de n letras tomadas de m en m, es el mismo que tomándolas de $n-m$ en $n-m$.

66. Deduccion de la Fórmula de Newton. Pág. 62.

Ley general del producto de varios factores binomios, cuyo primer término es comun.

Deducir de la proposicion anterior la potencia $n.^{sima}$ ó del grado n de un binomio, ó sea la fórmula de Newton.

Término general de esta fórmula.

Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos, en la fórmula del binomio de Newton son iguales. (**)

67. Aplicaciones de la Fórmula de Newton. Pág. 66.

Elevar, por medio de la fórmula de Newton, un binomio á una potencia cualquiera. Regla práctica.

Elevacion de polinomios, á cualquiera potencia.

Deducir la regla general para extraer la raiz $n.^{sima}$ ó del grado n de un polinomio dado.

(*) Observaciones generales acerca de las expresiones imaginarias. Pág. 56.
(**) Triángulo de Pascal. Pág. 64.
Transformaciones de la fórmula de Newton y sus aplicaciones numéricas.

PARTE SEGUNDA.—COMPARACION ALGEBRÁICA.

Ecuaciones y problemas de primer grado.

---

68. Preliminares relativos á las ecuaciones. Pág. 69.

Definiciones de la identidad, de la igualdad y de la ecuacion.
Ecuaciones numéricas y literales.
Solucion de una ecuacion con una incógnita.
Raices de una ecuacion con una incógnita.
Solucion de una ecuacion con dos ó más incógnitas.
Qué se entiende por resolver una ecuacion.
Ecuaciones equivalentes.
Grado de una ecuacion con una incógnita.
Grado de una ecuacion con dos ó más incógnitas.
Ecuaciones puras, mistas, completas, incompletas, imposibles ó absurdas, determinadas é indeterminadas.
Los valores de las incógnitas de una ecuacion permanecen los mismos, aun cuando se agregue á sus dos miembros una misma cantidad, se multipliquen ambos por un mismo factor, ó se eleven á la misma potencia.
Consecuencias de esta verdad relativamente á la simplificacion y transformacion de las ecuaciones.

69. Resolucion y discusion de una ecuacion de primer grado con una incógnita. Pág. 72.

Forma general de una ecuacion de primer grado con una incógnita.
Regla para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita.
Su aplicacion á varios ejemplos.
Discutir los diferentes valores de la incógnita, en la ecuacion $Ax=B$, cuando A y B no son cero, cuando uno es cero y otro no, y finalmente cuando ambos son cero.
Interpretacion de los símbolos: $\frac{A}{0}$, $\frac{A}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$ y $\infty-\infty$ como valores de la incógnita en una ecuacion de primer grado.

70. Resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Pág. 77.

Forma general de una ecuacion de primer grado con dos incógnitas.
Sistema de ecuaciones.
Solucion de un sistema de ecuaciones.
Sistemas determinados é indeterminados.
Qué se entiende por resolver un sistema de ecuaciones.
Sistemas equivalentes de dos ó más ecuaciones.
Qué es *eliminar* una incógnita en un sistema de dos ecuaciones.
Cuáles son los métodos de eliminacion más conocidos.
Resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por cada uno de los métodos de sustitucion, comparacion y reduccion.

Aplicacion á varios ejemplos numéricos y literales.
Las ecuaciones de un mismo sistema pueden ser distintas, deducirse unas de otras, ó ser incompatibles ó contradictorias.
Fórmulas generales de la resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. (*)

71. Resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Pág. 80.

Forma general de una ecuacion de primer grado con tres incógnitas.
Qué es *eliminar* una incógnita en un sistema de tres ó mas ecuaciones.
Diferentes métodos de eliminacion.
Resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por cada uno de los métodos de sustitucion, comparacion y reduccion.
Aplicacion á varios ejemplos.
Resolucion de otros en los que no se hallen todas las incógnitas en cada una de las ecuaciones dadas. (**)

72. Resolucion de un sistema de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas. Pág. 83.

Regla para resolver un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.
Aplicacion á varios ejemplos en los que no se hallen todas las incógnitas en cada una de las ecuaciones del sistema propuesto.
Observaciones generales acerca de la eliminacion.

73. Ecuaciones de primer grado con menor ó mayor número de incógnitas. Pág. 84.

Regla general para resolver un sistema de dos ó mas ecuaciones con menor número de incógnitas.
Igualdades de condicion.
Resolver una ecuacion de primer grado con dos, tres ó más incógnitas.
Resolver dos ó más ecuaciones con mayor número de incógnitas.
Soluciones enteras y positivas.

74. Problemas de primer grado con una ecuacion y una incógnita. Pág. 86.

Preliminares.
Qué se entiende por plantear y resolver un problema.
Problemas determinados, indeterminados y más que determinados.
Resolucion de varios problemas numéricos, cuyas soluciones sean positivas.
La de otros, cuyas soluciones sean negativas.
La de otros, cuyas soluciones sean: ∞, 0 y $\frac{0}{0}$.

(*) Discusion de estas fórmulas generales. Pág. 79.
(**) Fórmulas generales de la resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Pág. 62.

75. Problemas generales con una ecuacion y una incógnita. Pág. 90.

Resolucion de varios problemas generales de primer grado con una ecuacion y una incógnita, siendo el primero: «hallar dos cantidades, cuya suma sea S y su diferencia D.»

Dos correos salen á la vez de los puntos A y B, cuya distancia es D, caminando con movimiento uniforme en la direccion A... B... C. El correo que sale de A anda *a* kilómetros por hora y el que sale de B anda *b*. Se pregunta á qué distancia del punto A se deberán encontrar.

Observaciones acerca de los problemas generales.

76. Problemas de primer grado con dos ecuaciones y dos incógnitas. Pág. 92.

Resolucion de varios problemas numéricos de primer grado con dos ecuaciones y dos incógnitas, cuyas soluciones sean positivas.

La de otros, cuyas soluciones todas sean negativas, ó unas positivas y otras negativas.

La de de otros, cuyas soluciones sean: ∞, 0 y $\frac{0}{0}$

77. Problemas generales con dos ecuaciones y dos incógnitas. Pág. 93

Resolucion de varios problemas generales de primer grado con dos ecuaciones y dos incógnitas, siendo el primero: «hallar dos cantidades, cuya suma sea S y su diferencia D.»

Dada la snma S y el cociente Q de dos incógnitas, hallar las fórmulas que determinen sus valores.

Problema de los correos, cuyas ecuaciones son: $x-z=D$ y $\frac{x}{a}=\frac{z}{b}$

78. Problemas de primer grado con tres ó más ecuaciones é igual número de incógnitas. Pág. 94.

Resolucion de varios problemas numéricos de primer grado con tres ó más ecuaciones é igual número de incógnitas, y cuyas soluciones todas sean positivas, ó unas positivas y otras negativas, etc., etc.

Hallar tres cantidades, que sumadas dos á dos, den por sumas A, B y C.

79. Problemas de primer grado con más ecuaciones que incógnitas. Pág. 95.

Resolver, entre otros problemas de primer grado con mas ecuaciones que incógnitas, los siguientes: «hallar dos números, cuya suma sea S, su diferencia D y su cociente Q; y tambien dos números, cuya suma sea S, su diferencia D y su producto P.»

80. Problemas de primer grado con ménos ecuaciones que incógnitas. Pág. 95.

Resolucion de varios problemas numéricos de primer grado, cuyo número de ecuaciones sea menor que el de las incógnitas.
Hallar dos números divisibles el uno por 3 y el otro por 7 y cuya suma sea 100.
Hallar dos números, cuya suma sea igual á su producto.
Condiciones, que pueden hacer determinado un problema indeterminado.
Aplicacion á varios ejemplos.

Ecuaciones y problemas de segundo grado.

81. Resolucion de una ecuacion de segundo grado con una incógnita. Pág. 98.

Forma general de las ecuaciones puras y mistas de segundo grado.
Resolucion de las ecuaciones puras ó incompletas.
Sus raices son siempre iguales, una positiva y otra negativa.
Resolucion de las ecuaciones mistas ó completas de segundo grado.
Regla práctica para esta resolucion.
Aplicacion á varios ejemplos.
Suma y producto de las raices de una ecuacion mista de segundo grado.

82. Discusion de las raices de una ecuacion de segundo grado. Pág. 101.

Forma general de una ecuacion completa de segundo grado con una incognita.
Su transformacion en otras cuatro por la combinacion de los signos de los dos últimos términos.
Las raices de estas ecuaciones pueden ser reales, una positiva y otra relativa; reales é iguales positivas ó negativas; reales y desiguales positivas ó negativas; y tambien imaginarias.
Aplicacion á varios ejemplos numéricos.

*83. Resolucion de dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas. Pág. 102.

Fórmula general de las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas.
Resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, cuando una de las ecuaciones es de primer grado, con respecto á una incógnita.
Resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, siendo una y otra de segundo grado, con respecto á ambas incógnitas. (*)

(*) Aunque la resolucion general de estas cuestiones pertenece á la parte superior del Algebra, pueden hacerse aquí indicaciones muy importantes, y resolverse varios ejemplos de aplicacion práctica.

*84. Ecuaciones de segundo grado con menor ó mayor número de incógnitas. Pág. 103.

Resolver una ecuacion de segundo grado con dos ó mas incógnitas.
El número de soluciones es indefinido.
Resolver dos ecuaciones de primero y segundo grado, ó solo de segundo grado, con tres ó más incógnitas. (*)
Resolver dos ó más ecuaciones de primero y segundo grado, ó solo de segundo grado con menor número de incógnitas. (*)
Igualdades de condicion.

85. Problemas de segundo grado con una ecuacion y una incógnita. Pág. 105.

Resolucion de varios problemas numéricos con una ecuacion pura de segundo grado y una incógnita.
Interpretacion de las raices negativas é imaginarias.
Resolucion de varios problemas numéricos con una ecuacion mista de segundo grado y una incógnita.
Interpretacion de las raices negativas é imaginarias.

86. Problemas generales. Pág. 107.

Resolucion de varios problemas generales de segundo grado con una sola ecuacion y una incógnita, siendo entre otros, los siguientes:
Hallar dos números, cuya suma sea, S, y su producto P.
Hallar dos números, cuya diferencia sea, D, y su producto P.
Hallar en la línea recta que une dos luces A y B de intensidades diferentes, el punto igualmente iluminado por las dos.

87. Problemas de segundo grado con dos ecuaciones y dos incógnitas. Pág. 108.

Resolver entre otros problemas de segundo grado con dos ecuaciones y dos incógnitas de primero y segundo grado, ó solo de segundo grado, los siguientes:
Hallar dos números cuyo producto sea P, y su cociente Q.
Descomponer el número S en otros dos cuyo producto sea igual á P.
Hallar dos números, cuya suma sea igual á su producto, y tambien á la diferencia de sus cuadrados.

88. Problemas de segundo grado con más ó ménos ecuaciones que incógnitas. Pág. 109.

Resolver varios problemas de segundo grado con mas ó menos ecuaciones que incógnitas, y entre ellos los siguientes:
Hallar dos números enteros y positivos, tales que el exceso de su producto sobre el doble de su diferencia sea igual á 100.
Hallar tres números, cuya suma sea, S, y la de sus cuadrados, S.'

(*) Aunque la resolucion general de estas cuestiones pertenece á la parte superior del Algebra, pueden hacerse aquí indicaciones muy importantes, y resolverse varios ejemplos de aplicacion práctica.

Logaritmos.

89. Preliminares para la teoría de los logaritmos. Pág. 111.

Potencias de la unidad.
Las potencias cuyos exponentes son positivos, de un número mayor que la unidad son mayores, y aquellas cuyos exponentes son negativos son menores que la unidad.
Lo contrario se verifica en las potencias de un número menor que la unidad.
Propiedades de las potencias sucesivas de un número mayor que la unidad.
Consecuencias de dichas propiedades.

90. Definicion y propiedades de los logaritmos. Pág. 112.

Definicion del logaritmo de un número considerado como exponente de otro conocido y constante, llamado base.
Sistema de logaritmos.
La base es arbitraria; pero siempre el logaritmo de la unidad es cero; el logaritmo de la base es 1; y los números negativos no tienen logaritmos.
Particularidades que se verifican en el sistema de logaritmos, cuya base es mayor que la unidad.
Propiedades generales de los logaritmos, cualquiera que sea el sistema á que se refieran, deducidas de las ecuaciones $b^x=y$, $b^{x'}=y'$
Consecuencias de las propiedades anteriores relativamente á las abreviaciones de la multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices.

91. Construccion de las tablas logarítmicas. Pág. 114.

Regla práctica para hallar el logaritmo de un número entero (escrito en el sistema de numeracion decimal), con menos error que una unidad fraccionaria dada.
Logaritmos ordinarios negativos.
Transformacion de un logaritmo negativo en otro de característica negativa y mantisa positiva; y viceversa.
Logaritmo, cuya mantisa sea positiva, de una fraccion.
Observaciones acerca de los diferentes sistemas de logaritmos.
Dado el logaritmo de un número, N, en el sistema cuya base es B, hallar el logaritmo del mismo número en otro sistema diferente. (*)

92. Aplicaciones de los logaritmos. Pág. 117.

Aplicacion de los logaritmos á las fórmulas algebráicas.
Qué se entiende por ecuaciones exponenciales.
Resolucion de varias ecuaciones exponenciales de primero y segundo grado por medio de los logaritmos.

(*) Conmensurabilidad é incomensurabilidad de los logaritmos.
Identidad de los logaritmos considerados aritmética ó algebráicamente.

Inecuaciones de primero y segundo grado.

93. Resolucion de las inecuaciones de primero y segundo grado. Pág. 120.

Definicion de las desigualdades é inecuaciones.
Propiedades de unas y otras.
Resolucion de una inecuacion de primer grado con una incógnita.
Resolucion de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita.
Resolucion de una inecuacion de segundo grado con una incógnita.
Observaciones generales.

Progresiones.

94. Progresiones por diferencia. Pág. 123.

Fórmula para hallar un término cualquiera de una progresion por diferencia.
Otras formulas, que se deducen de la anterior.
Intercalacion de medios diferenciales entre dos números dados.
Fórmula para hallar la suma de todos los términos de una progresion por diferencia.
Otras fórmulas, que se deducen de la anterior.
*Problemas generales que resuelven las fórmulas del término general y de la suma de todos los términos ó sean los diez que resultan al hallar dos de las cinco cantidades: A, D, n, U y S, conocidas las tres restantes.
Aplicaciones numéricas.

95. Progresiones por cociente. Pág. 125.

Fórmula para hallar un término cualquiera de una progresion por cociente.
Otras fórmulas, que se deducen de la anterior.
Intercalacion de medios proporcionales entre dos números dados.
Fórmula para hallar la suma de todos los términos de una progresion por cociente.
Otras fórmulas que se deducen de la anterior.
Límite superior de la suma de todos los términos de una progresion por cociente creciente ó decreciente al infinito. (*)
*Resolucion de los diez problemas generales, que resultan al hallar dos de las cinco cantidades: A, Q, n, U y S, conocidas las tres restantes.
Aplicaciones numéricas.

(*) Fórmula para hallar el producto de todos los términos de una progresion por cociente. Pág. 126.
(*) Suma de las potencias de un mismo grado de los términos de una progresion. Pág. 128.

96. Fórmulas relativas al interés simple y compuesto. Pág. 140.

Fórmula general para la resolucion de todas las cuestiones de interés simple.
Otras fórmulas que se deducen de la anterior.
Fórmulas logarítmicas.
Su aplicacion á varios ejemplos.
Interés compuesto.
Fórmula para resolver las cuestiones de interés compuesto.
*Generalidad de esta fórmula aunque el tiempo sea un número fraccionario de años.
Otras fórmulas que se deducen de la anterior.
Fórmulas logarítmicas, y su aplicacion á varios ejemplos.
Fórmulas correspondientes al interés compuesto cuando á las condiciones ordinarias se añade la de que el capital total sea duplo, triplo, cuádruplo, ó en general n veces mayor que el primitivo.
Fórmula que expresa el valor de n anualidades y sus intereses compuestos.
Fórmula que expresa la anualidad que debe satisfacerse durante un tiempo determinado para amortizar un capital.
Otras fórmulas que se deducen de las anteriores.
Aplicaciones numéricas de todas ellas. (*)

*97. Números figurados. Pág. 129.

Definiciones de los números figurados de primero, segundo, tercero, etc. órden.
Los números figurados de primer órden se dividen en diferentes clases.
Los números figurados de segundo órden se dividen en naturales, triangulares, cuadrados, pentágonos etc.
Todos los números de este órden se llaman en general números polígonos.
Los números de tercer órden se llaman tambien piramidales.
Observaciones acerca de los números figurados en general.

*98. Pilas de balas de los parques de artillería. Pág. 130.

Fórmulas para hallar el número de balas de una pila triangular (ó sea una pirámide triangular equilátera),
Pila cuadrangular (pirámide cuya base es un cuadrado).
Pila rectangular (trozo de un prisma triangular ó prisma triangular truncado que descansa sobre una cara lateral).
Aplicaciones numéricas.

(*) Véanse las Tablas de logaritmos de Vazquez Queipo. Pág. 53.

*99. Máximos y mínimos de las expresiones algebráicas. Pág. 151.

Qué se entiende por *máximo* de una funcion.
Qué es *mínimo* de una funcion.
Descomponer la cantidad A en dos sumandos cuyo producto sea un máximo.
Descomponer una cantidad A en dos factores, cuya suma sea un mínimo.
Regla práctica para hallar el máximo ó mínimo ó el máximo y mínimo de una funcion.
Hay funciones que no tienen máximo ni mínimo.
Aplicaciones á varios ejemplos.

*100. Ecuaciones binomias. Pág 152.

Forma general de las ecuaciones binomias.
Su transformacion en $y^n \pm 1 = 0$
Resolucion de las siguientes ecuaciones:

$y^2 \pm 1 = 0$ | $y^3 \pm 1 = 0$ | $y^4 - 1 = 0$ | $y^6 - 1 = 0$ | $y^8 - 1 = 0$

Diferentes valores de la raiz *n.sima* ó del grado n de una cantidad.
Algunas de las propiedades mas notables de estos valores.

SEGUNDO AÑO.

GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA.

A