LA CAMPANA DE MANFREDONIA.

Ex libris D. Andrea
de Conti


B C D E
A
la
Triseccion

LA CAMPANA
DE MANFREDONIA.

TRATADO MATHEMATICO,

EN QVE SE RESVELVEN LAS INCOGNITAS PROPOSICIONES DE LA dimension del Circulo en diferentes partes iguales, la triseccion del Angulo, assi Rectilineo, como Curbilineo; la de dos medias proporcionales entre dos dadas, en que se comprehende la duplicacion del Cubo, la quadratura del Circulo, y otras, &c.

QVE CONSAGRA

A LA ALTEZA DEL AVGVSTISSIMO

SEÑOR DON FERNANDO,

PRINCIPE DE ASTVRIAS, N. Sor.

POR MANO

DEL EXmo. Sor. DON BALTHASAR PATIÑO, Marquès del Castelar, del Consejo de su Magestad, Secretario de Estado, y del Despacho Vniversal de la Guerra, &c.

EL CORONEL D. FRANCISCO BALBASOR, Comandante General de la Artilleria del Exercito, y Provincia de Andaluzia, Director de la Real Academia de Mathematicas, y Artilleria, en Cadiz.

AL EXC^{MO}. SEñOR DON Balthaſar Patiño, Marquès del Caſtelar, Comendador de Alange en la Orden de Santiago, del Conſejo de ſu Mageſtad en el de Guerra, ſu Gentil-Hombre de Camara, Embaxador electo à la Republica de Venecia, y Plenipotenciario en Italia, Secretario de Eſtado, y del Deſpacho Vniverſal de la Guerra, &c.

Exc^{mo}. Señor.

DEbe el acierto elegir los medios mas adequados para conſeguir el deſſeado fin que intenta, y teniendo yo el mas feliz en conſagrar eſte Opuſculo à lo ſoberano del Principe nueſtro ſeñor, no encuentra mi deſvelo mas proporcionado apoyo,

que

que à tanta altura lo encumbre, sino el benigno Patrocinio de V. Exc. en cuyas venas tantos heredados tropheos circulan, y por cuya literaria aplicacion, tantos le veneran prodigio de inteligencia; confio no malograrà V. Exc. este intento, por no quitarme la gloria que demuestro, si al fin mas sublime, el medio mas elevado; admitiendolo principalmente, no por el principio que lo mueve, bien si por el termino à que se dirige: assegurado, pues, de esta aceptacion, pongo en manos de V. Exc. estas nuevas invenciones, para que las ofrezca al Principe nuestro señor (Dios le guarde) supliendo lo defectuoso del holocausto, lo perficionado del Oferente, quedando yo en todo tiempo obsequioso à los preceptos de V. Exc. cuya Excma. Persona, la Divina Magestad felicite los muchos años que desseo. De esta Real Academìa de Mathematicas, y Artilleria de Cadiz à 24. de Junio de 1726.

Excmo. Señor.

B. L. M. de V. Exca.
su mayor servidor

Don Francisco Balbasor.

A

A LA ALTEZA

DEL AVGVSTISSIMO SEÑOR

DON FERNANDO

PRINCIPE DE LAS ASTVRIAS, NVESTRO SEñOR.

POngo à los Pies de V. A. eſte breve tratado, en que me atrevo à colocar ſu Nombre, por dàrle lo mas grande, y feliz que pude.

Dos ſiglos ha, que mandando el Quinto Catholico Progenitor del Auguſto Nombre de V. A. deſcubriò la practica, lo que la theorica de los mas Doctos Ingenios, negò conſtante muchos ſiglos; en el preſente en que los rayos de V. A. empiezan à iluminar nueſtro Eſpañol Emiſpherio, ſalen, no menos incognitas, que tenidas por impoſsibles Propoſiciones, à que las iluſtre, y ſublime lo claro de tanto Nombre.

No aſpiro à otro premio (aunque tantos ſe ofrecen) ſino continuar ſin intermiſsion haſta el

vlti-

vltimo aliento, lo que ha mas de treinta y seis años, començè, que es el Real servicio; no aviendo para mi mayor galardon : y que al mismo tiempo logrèmos los Subditos de V. A. (si esto puede servir de algun principio) adelantados progressos, convenientes à los profundos designios de V. A. à quien su Divina Magestad, prospere, y guarde los muchos años, que la Christiandad ha menester.

Don Francisco Balbasor,

APRO-

APROBACION DEL M. R. P. P.do FRAY Pedro Rodriguez Bravo, Prior que ha ſido de diferentes Conventos, en ſu Provincia de Andaluzia, del Orden de Predicadores, Conſultor del Santo Oficio de la Inquiſicion de la Ciudad de Llerena, Regente en el mayor de Santo Thomàs de Sevilla, y Examinador Synodal de ſu Arzobiſpado, y aora Prior actual del Convento de Señora Santa Ana, de la Ciudad de Carmona, &c.

POr Comiſsion del ſeñor Doctor Don Antonio Fernandez Raxo, Canonigo de la Santa Igleſia de Tarazona, Proviſor, y Vicario General de eſte Arçobiſpado de Sevilla, &c. He viſto con gran cuydado vn Tratado, cuyo titulo es: *La Campana de Manfredonia*, ſu aſſumpto, averiguar las incognitas en las Mathematicas, ò como dixo Ariſtoteles en ſus Predicamentos las libles, y no ſabidas, que ſon la inſcripcion del Eptagono, y Nonagono en el circulo, la triſeccion del Angulo, las dos medias proporcionales, y la quadratura del circulo, ſu Autor el Coronel Don Franciſco Balbaſor, Comandante General de la Real Artilleria del Exercito, y Provincia de Andaluzia.

Y aviendole leìdo, y ſiendo ſu blanco la Milicia, puedo dezir de la obra, que tiene los tres capitulos, à q̄

Iphicrates celebre General de los Athenienses, reduxo la Milicia, que son naturaleza, enseñança, y exercicio, como cita Roberto Valtaro, lib. 2. en quanto à lo primero, que es la naturaleza de la Milicia, esta dize mi Angel Thomàs 2.2. q. 123. art. 5. que mira por objecto, entre las empressas arduas, el conseguir la victoria de las mas dificiles: y teniendo por impossible algunos Mathematicos la averiguacion verdadera de las referidas Proposiciones, mira este tratado por objecto à lo que sobre puja à lo arduo, y siendo el mas principal acto de la fortaleza la perseverancia, segun enseña el mismo Santo Doctor en la question citada articulo 6. han sido muchos los años, que su Autor con gran desvelo ha perseverado en esta averiguacion, satisfaciendo à las contradiciones de hombres Doctos, como de la obra consta.

La doctrina, y enseñança Militar, dize el citado Roberto, y Julio Sexto Frontino en el lib. 4. de Estratagemas, que consiste en la ciencia, y sugecion Militar. Las Ciencias Militares, prueba el mismo Roberto en sus cinco libros de Milicia, que son todas las Mathematicas, y de estas le confiessan muy lleno al Autor de esta obra los hombres Doctos, que le conocen, y las resoluciones, que trae en este Tratado. La obediencia, y sugecion, dize el Apostol San Pedro, cap. 2. que se ha de tener à toda humana criatura: *Subiecti estote omni humanæ creaturæ propter Deum*. Y como parece en todo este tratado, su Autor en la correccion dèl, se ha sujetado à todos los Principes de las Mathematicas, à los

Di-

Directores de sus Academias que ay en estos Reynos, como à otros inteligentes de estas facultades.

En quanto à la tercera partida Militar, que es el exercicio, confiessa la obra, el mucho, que su Autor ha tenido en su especulacion, segun la multitud de modos con que resuelve, con gran acierto vna misma Proposicion, conformandose en todo à los Elementos de Euclides, y teniendo la verdadera Doctrina, la sugecion, como la falsa propriedad de libertad, como enseña mi Angel Thomàs 2.2.q. 11. art. 1. y sugetandose el Coronel Don Francisco Balbasor, en la resolucion de esta obra à los mayores, iguales, y menores, como es dicho. No hallo en su contenido cosa que desdiga à nuestra Santa Fè, ni à las buenas costumbres; con que soy de parecer, que se le puede conceder la licencia que su Autor pretende, para que se imprima. Este es mi parecer, *salvo meliori, &c.* Y para que conste lo firmè en este Convento de Señora Santa Ana de la Ciudad de Carmona, en 29. dias del mes de Noviembre de 1725. años.

Fray Pedro Rodriguez Bravo,
Pdo. y Prior.

LICENCIA DEL JUEZ Ordinario.

NOS el Doct. Don Antonio Fernandez Raxo, Canonigo de la Santa Iglesia de Tarazona, Provisor, y Vicario General de esta Ciudad de Sevilla, y su Arçobispado, &c. Por el tenor de la presente, y por lo que toca à la jurisdicion Ordinaria, y Eclesiastica, doy licencia para que se pueda imprimir, è imprima el Libro intitulado: la Campana de Manfredonia, *compuesto por el Coronel Don Francisco Balbasor, Comandante General de la Artilleria, y Director de la Real Academia de Mathematicas; atento à no contener cosa contra nuestra Santa Fè, y buenas costumbres, de que ha dado su Censura el M. R. P. M. Fray Pedro Rodriguez Bravo, del Orden de Predicadores, Regente que ha sido del Colegio de Santo Thomàs de esta Ciudad de Sevilla, y Prior actual del Convento de Señora Santa Ana de la Ciudad de Carmona; con tal, que al principio de cada impression se ponga dicha Censura, y esta mi licencia. Dada en Sevilla, à diez y ocho de Junio de mil setecientos y veinte, y seis años.*

Doct. Don Antonio Fernandez Raxo.

Por su mandado.
Francisco Ramos.
Secret.

APRO-

APROBACION DEL M. R. P. FRAY Pedro Hidalgo, Maestro en Artes, y Sagrada Theologia, Rector que fue del Mayor Colegio de Santo Thomàs de Sevilla, del Orden de Predicadores, y su actual Colegial, &c.

POr Comission del señor Licenciado Don Geronymo Barreda y Yebra, Canonigo de la Santa Iglesia de Compostela, del Consejo de su Mageftad, su Inquisidor Fiscal de la Santa Inquisicion de esta Ciudad de Sevilla, Juez de Imprentas, y Librerias de ella, y su Reynado. He visto con gran cuydado vn Libro su titulo: *La Campana de Manfredonia*, y su contenido en treinta y tres Proposiciones Mathematicas, en que se hallan, y resuelven la septimidad del Circulo, trisseccion del Angulo, las dos medias proporcionales, la Quadratura del Circulo, &c. su Autor el Coronel Don Francisco Balbasor, Comandante General de la Artilleria del Exercito, y Provincia de Andaluzia, Director de la Real Academìa de Mathematicas, y Artilleria, en la Plaza de Cadiz, &c. Y siendo la Sagrada Escriptura la Piedra de toque con que se hallan los quilates de las verdaderas Doctrinas, como las impurezas de las falsas; para dàr Censura à esta obra, me valgo de las reglas que para este intento dà Christo Señor nuestro, al cap. 7. de San Matheo, à donde su Mageftad dize, seràn conocidos los Sembradores de Doctrinas, por sus frutos: *A fructibus eorum*

cognos-

cognoscetis eos. El Padre Alapide, reduce estos frutos à dos clases, que son de Doctrina, y enseñança: *Per fructus arboris* (dize) *id est Doctoris, accipe, tum eius Doctrinam: tum eius opera.* La doctrina, y ciencia de vn Militar, son las Mathematicas, en estas, los hombres Doctos, que conocen, y han tratado al Coronel Don Francisco Balbasor, le hazen en la Arithmetica, vn Pytagoras; en la Geometrìa, vn Euclides; en la Algebra, vn Diophates; en la Pintura, vn Apeles; en la Musica, vn Orpheo; en la Astronomia, vn Atlante; en la Cosmografia, vn Estrabon; en la Maquinaria, vn Aristoteles; en la Estatica, vn Archimedes; en las disposiciones, y maximas de Batallas, vn Anibal; y en todas las demàs partes de las Mathematicas, Erudito.

Tum eius opera. Las Militares, reduxo San Juan Baptista, à tres puntos (Lucæ 3. vers. 14.) La primera, es la mansedumbre, que se consigue desterrando de sì la crueldad: *Neminem concutiatis.* Virtud tan precissa à vn Militar, que con ella mas que con la Espada, se consiguen los Reynos, dixo experimentado muchas vezes Julio Cesar: y esta se halla con vna afabilidad en el Coronel Don Francisco Balbasor, que le haze suavemente tratable con los mayores, Admistoso con los iguales, y Amoroso con los inferiores.

La segunda virtud Militar, dixo el Precursor de Dios, que consistìa en la verdad de referir à los Superiores, los hechos de los subditos: *Neque calumniam faciatis.* Y por la legalidad que tiene en esto el dicho Coronel, todos los Militares, que han servido, y sirven

ven à ſus ordenes, le admiran, y eſtiman.

La tercera, que el Santo ſeñala, es la Liberalidad, quien deſterrando la codicia, no dexa à las paſsiones que ſe eſtienda à conſeguir los bienes temporales, contra los terminos de la razon: *Et contenti ſtote ſtipendis veſtris.* Y teniendo eſtas prendas, compone eſta obra con las reſoluciones de las Propoſiciones referidas, mas dignas de lauro, que la reſolucion del Nudo Gordio, que con ſu eſpada hizo Alexandro Magno, preſagio de ſu Imperio en el Aſia, quanto và de vna materia à otra, y del numero mayor de hombres Doctos que han intentado deſatar eſtos, y no lo han conſeguido; con eſta obra, dà luz à los mas obſcuros laberintos que tienen las Mathematicas; dà baxel para llegar à las Islas encantadas del Occeano de eſtas facultades; y ſiendo el fruto de ella conforme al Arbol de ſu Autor: *Sic omnis arbor bona fructus bonos facit.* No hallo en ella, coſa que deſdiga à nueſtra Santa Fè, y buenas conſtumbres: con que ſoy de ſentir que puede V. S. dàr la licencia que ſu Autor pretende para que ſe imprima, *ſalvo meliori*, en eſte Mayor Colegio de Santo Thomàs de Sevilla, à tres dias del mes de Octubre de 1725. años.

Fray Pedro Hidalgo.

Arte abacus pulcher se se præbebat apertè,
Quem variè ornabant Epulis impleta Catina:
Quæ ipsos invasit non parva cupido vivendi.
Ast; hic, tunc monstrum, conduntur Opuscula mixta
Plusquam sex decies quæ inculcant Dogmata vestra:
Estque *Methesis eis* tituli Scriptura *Viretum*
Annuit huic nullus: cunctique recedere tentant.
Tuncque Thales pravidus demonstrans dulce catinum,
Authorem pravo describens omines solvit:
Movit in eiusdem paginis quod semper adesset
Princeps Euclides: cui postquam contulit anceps,
Totum perpendit quod conveniebat Amussim.
Angulus est istic iam dextra lance trisectus:
Suntque alia in totum propriæ Phænomena clara
Protulit Euclides: est Author dignus honore;
Laudibus extollet quem voce per æthera fama;
Vt pote difficiles iam solvit Numine nodos,
Tuque ferox monstrum, ne insitas verba referre;
Corque, tui vindex, desistas rodere nunquam,
Eia vir Excellens, Heros, qui maxima profers
Siste gradum, numquam, resonent tua scripta per Orbẽ,
Laudibus & Summis elatus carmine dulci,
Æternum vivas felix per sæcula semper.

*** *** *** *** ***

PERI,

PERIFRASIS POETICO.

AViendo el ingenio celebre
de BALBASOR, quien por maximo,
entre los mayores Principes
goza yà fueros de Oraculo;
cinco Puntos los mas criticos
echolos al mundo practicos;
ideò exponer al publico
vn Combite Mathematico.
Citò à esta Funcion magnifica
à los ingenios mas clasicos,
que en Theatros Academicos
fueron lucientes relampagos.
Aquel Insigne Geometrico
Talès Milesio, preambulo
fue del Combite symbolico,
ù Certamen enigmatico;
Siguiòle puntual el Inclyto
Ameriste, gran Cosmografo,
aunque vno, y otro politicos
se mantuvieron extaticos,
por poder como domesticos
hazer oficio de famulos.
Vino luego el Cathegorico
Theodoro Syrena, Aulico,
en Doctas Ciencias amplissimo;
entrò despues el enfatico
agudo, y fundado Hypocrates,
siguiòse el gran Cathedratico
Platon, que llegò por vltimo
Euclides Doctor Magnanimo,
à quien todos como à Principe;
pues rige imperioso el baculo,
el primer lugar benevolos

le cedieron ſin obſtaculo.
Circuyò el diſcreto Conclave
de la Meſa todo el ambito:
y à cada qual deſſeoſiſsimo
hecho vn impaciente Tantalo.
La materia Parabolica,
que al guſto ſirviò de pabulo
fue entre eſtudiados Epigrafas
cinco puntos Problematicos:
El primero como Prologo
fue *la triſeccion del Angulo*.
El ſegundo en proprios terminos
fue *la inſcripcion del Eptagono*.
El tercero hazer veridica
al entendimiento practico
la duplicacion equipara
del cubo, punto bien accido.
El quarto, *encontrar dos medias*
proporcionales, que es arduo
entre dos datos; y el vltimo
moſtrar, ſin faltarle atomo
la quadratura del Circulo.
Eſtos manjares, que cauſtico
de lamentos por dificiles
fueron, los previno placido
el Author, y por ſus rotulos
informado el conciliabulo,
vno los notò de inſipidos,
otro los tachò por accidos,
qual prorrumpiò: eſſo es apocrifo,
qual es aſſumpto phantaſtico,
qual ficcion apologetica,
y el que anduvo menos aſpero,
para el merecido credito
no daba ſu beneplacito.
Eſcuchò el Bexamen rigido

aquella

aquella de ingenios Atropos,
la embidia digo; que emula
obstenta en su rostro palido,
y feo, festivos jubilos,
al vèr, que con ceño arido
en desdoros contra el proximo
sus puntas afila el calamo.
Quisieron dexar colericos
todos, el lucido talamo,
pero oportuno, y solicito,
por evitar tanto escandalo,
Talès con acuerdo provido
alcançò vn plato, y monstrandolo
à todos, sirviò de estimulo,
que escusò à su Author de vn tartago;
y viendo que en sus periodos
à cada passo citandolo
se oia Euclides, incredulo
fue oja à oja cotejandolo
con sus elementos, liquido
tocando en su examen practico,
que las citas de sus clausulas
concordaban con sus parrafos.
Construyeron el Paraphrasis
de la triseccion del Angulo,
hasta llegar à lo vltimo;
y viendo el methodo organico,
que hasta el mas minimo apice
observaba, como à Oraculo,
dixo Euclides: por su merito
erigirle tabernaculo
debe el Orbe entre los celebres
Principes, que propugnaculo
de las Ciencias, honorifico,
fueron esplendor diafano.
De los otros para credito

Grva

sirva este examen de calculo;
pues lo fundado, y lo solido
con que describe del Angulo
la trileccion, es authentico
testimonio aun al mas candido
para arguir lo integerrimo
de sus estudios magnanimos.
Y tu monstruo vil, è intrepido
de augustas luzes sarcophago
sella esse labio maledico,
y ceda tu furor barbaro,
à quien tantos Geroglyficos
debe esculpir en los ambitos
de su Templo celeberrimo
la Fama, como à Clythomaco
Cartago immortales lapidas
por sus volumenes maximos.
Rindan, pues, festivos placemes
à este ingenio tan no parvulo,
que sobre el canto pulcherrimo
de tan Sabio Mathematico
echò el contra punto altissimo
de diestro Pintor Gerarchico,
y de celebrado Musico,
tanto, que le excede rapido
sus pinceles à Protogenes;
sus consonancias à Hymopaco
nada, pues, Author amplissimo,
sirva à tu Estudio de obstaculo
para dilatar benefico
por los estendidos ambitos
de el mundo, los buelos inclytos
de tu pluma, y no aya concavo,
que no llene por recondito
de lucir tu Numen maximo,

Antes

ANTES DE LEER CORRIGE LAS *siguientes Erratas.*

Pagina.	*Linea.*	*Erratas.*	*Corrige.*
6.	3.	Dimencion	Dimenſion
	20.	cañonicas	conicas.
17.	18.	no en	vo en
18.	20.	decrivaſe	deſcrivaſe
20.	6.	(10 40.cor.)	(10. 4. cor.)
25.	18.	(16. 6.)	(17. 6.)
39.	vltima.	2181.	4181.
47.	10.	BAH.	IAH
48.	12.	las	los
52.	19.	BKC es dos ſeptimas partes.	BK es vna ſeptima parte
54.	33.	(Parte 1. de eſte)	(Prop. 1. de eſte)
	35.	de eſta	eſte
55.	7.	FBD,	BFD,
	8.	BAD,	BD,
	vltima	AGR,	AGD,
56.	5. al margẽ	AG6135.	AG6134.
62.	9.	BN,	CN,
69.	15.	BAC,	DAC,
77.	23.	ſer ſeptima parte.	ſu ſeptima parte
79.	18.	la recta YG,	la recta IGK,
80.	8.	OMF,	OME,
	16.	EFM,	EFN,
82.	12.	BAB,	BAC,
	14.	BAN,	PAN,

Pa-

Pagina.	*Linea.*	*Erratas.*	*Corrige.*
83.	11.	dimencion.	dimension.
84.	1.	al diametro.	el diametro
90.	3.	abraze.	abrase
95.	22.	sextuplo.	sexuplo
99.	14.	$\frac{776.}{1277.}$	$\frac{766.}{1277.}$
113.	8.	A G,	B G,
114.	5.	A Y,	H I,
117.	vltima.	quadrado.	quebrado,
	Idem.	menos.	——
118.	1.	del radio A B.	del diametro B D,
	4.	A B,	B D,
	5.	la mitad d.	——
	Idem.	A B.	B D
	10.	9853.	9852.
122.	2.	D G,	A G,
125.	5.	desmuestrase.	demuestrase.
126.	12.	12063.	12603.
127.	2.	angulo arco, ò angulo.	—arco, ò angulo

NOTA.

En la Demonstracion de la septimidad, sobre que dà la Aprobacion el Rdo. Padre Vasquez, linea 45 de dicha demonstracion, dize, o à su igual A B F: debe dezir B A F.

APRO-

CENSVRA, Y APROBACION DE LA Tricession del Angulo, y Septimidad del Circulo, hallada por el Coronel Don Francisco Balbasor, Comandante General de la Artilleria del Exercito de Andaluzia, Director de la Real Academia de Mathematicas, y enseñanza de Artilleria en la Plaza de Cadiz: dada por el Rdo. P. Fray Pedro Vasquez Tinoco, Colegial, y Lector de Prima en el Mayor de Santo Thomas de Sevilla, del Sagrado Orden de Predicadores, Maestro en Artes, y Sagrada Theologia, Director de la Academia de Mathematicas, sita en dicho Mayor Colegio, por el Rey nuestro señor Don Luis Primero de feliz memoria.

PREVENCION AL QVE HUVIERE DE de leer, y juzgar esta nueva Inventiva.

1. EN todo orden Politico, Natural, y Divino tiene verdad la maxima Philosophica, de no recebirse la forma, sino es en el sujeto dispuesto. En el Politico, nos dizen Historias humanas, y Divinas, no ser recebido vno por Soberano, ò cabeza de vna Republica, quando esta se halla de pareceres, y dictamenes à èl

¶ muy

muy encontrada, si à esta las armas le conceden su libertad. En lo natural lo clama aun la experimental Philosophia, de no recibirse el fuego, sino es en sujeto por el calor alterado. En lo Divino, (principio, y fin, y por esso regla de todo lo criado) para que con la humana naturaleza se vniera en Persona la segunde la Trinidad Sagrada, procedieron como disposiciones, en el tiempo de 5198. años, las leyes de la naturaleza, escrita con sus Profetas Santos, clamando, y Doctrinas Sagradas, que por el curso de los tiempos se fueron aumentando. Vestido, pues, este Rey Supremo del humildissimo sacco de nuestra naturaleza, y saliendo à la Campaña de este Mundo con el Exercito de doze pobres Pescadores, con las armas de las virtudes, y prodigios, y pidiendo possession de la Ciudad, Cabeza de todas, que situada està en el centro del mundo menor el hombre, alterado este por el embidioso enemigo, comenzò à dividirse en parcialidades: mas su Magestad viendo, que llegaba la batalla, en que con vn Sagrado Madero avia de vencer al Enemigo, y señorearse del Mundo; y aunque los ocultos corazones penetraba, no quiso presentar la batalla, sin examinar el parecer de los doze Capitanes, que consigo llevaba, y con sabia prudencia, saliò de Jerusalen, y de otras partes à donde le negaban, y les llevò à la Ciudad de Cesarea Philipica, y alli les haze la pregunta de la verdad, diziendo: què sentia el mundo à cerca de su cons-

truccion,

truccion, y fabrica del Problema, que el Arcangel San Gabriel propuso à MARIA Santissima, y de la resolucion, y construccion, que en su virginal, y castissimo Vientre hizo el Espiritu Santo, que fue la Encarnacion del Verbo Eterno. A la qual pregunta, como refiere San Matheo al 16. de sus capitulos, vnos respondieron, que dezian algunos, ser su Magestad San Juan Baptista; otros, que el Profeta Elias; otros, que Jeremias; y otros, que vno de los Profetas, que estaban difuntos, y aora avia resucitado, como explica mi Cardenal Cayetano. Preguntò aora su Magestad à sus Discipulos su parecer à cerca de la propuesta; y el Apostol San Pedro, hallandose con buena disposicion para dezir verdades, y confessar esta, que es la summa, sin dilacion, responde, diziendo à su Magestad, que es por naturaleza la primera, y summa Verdad, fuente de que nacen todas, y del Eterno Padre Hijo: luego segun toda la Politica, Leyes de la naturaleza, y de lo Divino, si no ay disposicion para que la forma sea introducida, para que el Rey sea recebido, aunque sea el verdadero, y legitimo, no serà recebido por Rey, ni de sus alborotados Vassallos, si estos no estàn dispuestos para recebirlo.

2. Por la imitacion, qualquiera Christiano Catholico se puede llamar Christo, y por mas razones los Reyes, y Ministros Superiores; sin disputa nos lo concede toda Theologia: Luego segun esto,

y con el grano de sal dicho, al Coronel Don Francisco Balbasor, le podemos en la imitacion dezir, que es vn Christo, el qual passados 6922. años, que tiene de edad la Architectura del Mundo; en èl haze la propuesta de que sienta el mundo de la verdad del Problema, que ha hallado tocante à la Septimidad del Circulo? A que responde vn hombre Docto en las Mathematicas, que con titulo del señor Carlos Segundo las enseñò, despues de averlo tenido en su poder algun tiempo, en que se dà à entender, consultaria à hombres Doctos, que no se halla desembarazado para dàr su sentir: luego este hombre Docto, y prudente, con la negativa confiessa la verdad hallada por este Christo, como los demàs Apostoles callando (en la ocasion, que llevo referida) con San Pedro, que habla, confiessan la verdad.

3. Otros, à esta propuesta en la realidad Doctos, y prudentes Maestros, despues de mucho tiempo, han respondido, no que es algun Profeta difunto: pues si la inventiva individualmente la huvieran hallado en los sepulcros de otros, que son sus obras, y libros, yà dixeran, que esta inventiva era vn Profeta de los que en tantos siglos ha tenido la Mathematica; pero no han dicho, que es Profeta resucitado, que es mucho en abono de la propuesta: otro si, que es como vno de los Profetas, *aut vnum ex Prophetis*; que es vna buena practica de dividir al Circulo en siete partes iguales, pero que esta es, como las

que

que hasta el presente se han hallado, no la verdadera, ni es este el Mesias, que espera el Mundo Mathematico.

4. Y su Autor, desseando que esta verdad salga al siglo de hierro, al Orbe de las Mathematicas de Cadiz, remite el Problema, por mano del Theniente Coronel Don Marcelo Arrigoni, Comissario Provincial Comandante de la Artilleria à la direccion de las Reales Fundiciones de ella, sino à Cesarea Philipica, à la Ciudad de Sevilla, sino à vn San Pedro, à vno solo aquel semejante en el nombre de Pedro, recebidole en la circunstancia siguiente, que es de dezir verdades, y confessarlas, quando escrivia la question, en que los Theologos preguntan, si con sola la virtud natural del entendimiento, y los conciertos generales de Dios, y sin gracia especial, pueda el hombre en este estado, despues de la original culpa, conocer, y hallar qualquiera verdad de las del orden natural: en que se supone hablar de hombres de gran capacidad, y talento: y tienen la afirmativa sentencia el mas comun sentir de los Theologos, cuyas razones, por no ser del caso, callo. Contra este parecer entre muchos, ay el argumento siguiente, en cuya resolucion me hallaba, quando recebì el Problema.

5. El dividir el Circulo en siete, y en qualquiera numero de partes iguales, como su quadratura, las dos medias proporcionales, y la tricession del

del Angulo, ſon verdades naturales, pertenecientes à la Ciencia natural, como es la Geometrìa, y que tocamos ſenſiblemente. Eſtas aviendolas buſcado los hombres Doctos, que ha tenido la Mathematica en todos los ſiglos del mundo, no las han podido hallar: luego ſe dàn algunas verdades naturales, que el entendimiento humano, ſin gracia eſpecial, no puede hallar.

6. Quando recebì eſte Problema, dexando otras muchas, y doctas ſoluciones, à eſte argumento reſpondia con la ſiguiente, que es del M. R. P. Mro. Fray Juan de Bolibar, de mi Religion Sagrada, Cathedratico que fue de Prima de la Vniverſidad de Salamanca, diziendo, que de ſola la privacion del acto, no ſe infiere la negacion de la potencia, pues vno que eſtà privado del diſcurſo, no eſtà privado de la potencia diſcurſiva: y que aſsi de no aver hallado dichas verdades, aunque ſe confieſſa la carencia de la potencia, que es lo que ſe pregunta, mediante la qual potencia en adelante ſe podrà, y ſe hallarà de hecho, como otras coſas, que buſcandolas toda la Antiguedad, no las hallò, y las hallaron los Modernos.

7. Confirmaba eſta ſolucion con los ſiguientes exemplos: toda la antiguedad de los Monarcas mas Sabios, y poderoſos del mundo (*Malvenda en el lib. del Parayſo cap. 31.*) ſe empleò en buſcar el nacimiento del Nilo, y no le pudo hallar: y los Portu-

gueſes

gueses, no buscandole, le hallaron, fundados en los inconvenientes que hallaron los Antiguos buscando el nacimiento del Nilo, (*Rocaberti lib. 2. Apologetico cap. 4. à n 544.*) afirmaron, que la Zona torrida era inhabitable: tuvieron por irrision el dezir, que avia Antipodas en el Mundo, y este impossible lo hizo vèr la Nautica de Colon, con el poder de los señores Reyes Catholicos, cuya propuesta por lo dicho, fue tenida por vana en Castilla, Portugal, Inglaterra, y Francia: la qual, vista, y probada por el Ilustrissimo señor, mi señor, y Fundador de este mi Mayor Colegio, el señor Don Fray Diego Deza, resplandeciente Antorcha del Firmamento Dominicano, y persuadiendo à los señores Reyes Catholicos, cuyo Confessor era, à esta verdad, fue hallada el año de 1492. dia de mi Santo Patriarca Santo Domingo (*Hist. Thesoros de Indias tom. 1. cap. 1. y 2. y de otros papeles*) visto que avia Antipodas, y que la Zona Torrida era habitable.

8. Toda la Antiguedad (como consta de Philosophos, y Poetas) llena de hombres Sabios, trabaxò, y no pudo conseguir el hallar Maquina, que mediante el fuego de si arrojàra rayos, y centellas; y muy casualmente Fray Bartholomè Moreno, el año de 1380. en Alemania, hallò la Polvora, segun la mas corriente opinion (*Laurencio Beyer. in theatro vitæ humanæ Verbo Bonib.*) con que se han hallado la immemorable multitud de Maquinas

de

de fuego , y en ellas las Bombas , de las quales, de vna sola se refiere aver muerto sesenta hombres, de otra quarenta, y de otra cinquenta, que de vn solo rayo confiesso no averlo leìdo.

9. Dexo otro sin numero de inventivas que ignorò la Antiguedad, de que Polidoro Virgilio, escriviò ocho libros, como otro mayor numero, que despues se ha descubierto, que nos refieren cada vno de los tratados Mathematicos, que confiessan el adelantamiento de cada vna de las Artes, assi liberales, como mecanicas, todo lo qual confirma la referida solucion, y trae en su favor qualquiera inventiva, que ofrece vn hombre Docto, para luego que à nuestra noticia, ò censura llegue, no sea tenida por impossible, y mucho menos, quando en su contra, no se ofrece argumento de consideracion.

10. En este supuesto, de que debe ser vista, y examinada la propuesta del Coronel Don Francisco Balbasor, entre otras muchas Septimidades de la circunferencia del Circulo, que tiene hallado, referirè las siguientes, que todas tienen vnas demonstraciones.

PRO-

PROPOSICION PROBLEMA.

Sobre vna recta dada terminada, formar vn Eptagono, Equilatero, y Equiangulo.

FIGVRA 42.

Dada la recta A B se ha de formar vn Eptagono, &c.

CONSTRVCCION.

DEsde A con la distancia A B descrivase el circulo B C D, y alarguese la B A en A hasta cortar su circunferencia en D: desde D (15.4.cor.3.) cortese la circunferencia D C, dozaba parte de toda la del circulo B C D, y desde C à la BD (12. 1.) baxese la perpendicular C G que corte la B D en G: desde B (30.6.) cortese B G en media, y extrema razon en I, y desde los puntos A y B con la distancia B I descrivanse dos arcos que se corten en E: con la misma desde E (Pos. 3.) descrivase el circulo A B F: Digo que en la circunferencia de este circulo, se ajusta siete vezes la recta A B, con la qual quedarà formado el Eptagono, Equilatero, y Equiangulo.

¶¶ PRE-

PREVENCION

LA circunferencia A F B (30. 3.) cortese en dos iguales en F, y tirese la recta B F quien cortarà la circunferencia B C D en K: tirese la recta F A alargandola en A hasta cortar la circunferencia B H D en H, y tirense las rectas H B, A K, alargandolas en B, y en K hasta concurrir ambas en algun punto L: cortese (10. 1.) H L en dos iguales en M, y tirese la recta M K: al triangulo L K M (5. 4.) circunscrivase el circulo K L M y la M L (10. 1.)cortense en dos iguales en N: en N sobre la M L (11. 1.) levantase la perpendicular N O, quien cortarà la K L en P, y tirese la recta H K.

DEMONSTRACION.

EN el circulo K L M, la recta L M està cortada en dos iguales en N, y los angulos en N, son rectos: luego (1. 3.) el centro de este circulo està en la recta N O, quien sin duda es el punto P, seccion de las dos rectas K L N O: por que si se dixere, que dicho punto P no es el centro de este circulo, lo serà otro qualquiera dentro, ò fuera del triangulo L K M en la recta N O como Q, y tirense por Q los diametros R S. T V: tirense las rectas V R. S T las que alargadas en R, y en T concurren en el punto X; y por quanto (suposicion) el

pun-

punto Q es centro del circulo K L M, ſeràn (15. D. 1.) los radios Q V. Q R. Q T. Q S. iguales entre sì; (24. D. 1.) los triangulos R Q V. T Q S, iſoſceles (5. 1.) los angulos ſobre las baſes iguales entre sì (15. 1.) el angulo R Q V ⌒ T Q S (32. 1.) los dos iſoſceles ſon Equiangulos, y (27. 1.) V R paralela à T S: pero eſtas alargadas concurren en el punto X, contra la (34. D. 1.) luego eſtas dos rectas no ſon paralelas, ni el punto Q es centro del circulo K L M: y lo miſmo ſe demueſtra, ſi en la recta N O ſe tomare por centro, otro qualquiera punto fuera del punto P: luego eſte es el centro de dicho circulo (14. D. 1.) K L es el diametro, y (31. 3.) el angulo K M L formado en el ſemicirculo es recto (13. 1.) el angulo K M H tambien es recto; la recta K M es comun en los triangulos K M H, K M L, y (con) M H ⌒ M L: luego (4. 1.) eſtos dos triangulos ſon iguales entre sì, la baſe K H ⌒ K L, y el angulo K H L ⌒ K L H, (32. 1.) el angulo externo A K H ⌒ A L H + K H L internos: pero (dem.) eſtos dos angulos iguales entre sì: luego (ax. 6.) el angulo A K H es duplo del angulo K H B, y (5. 1.) en el iſoſceles K A H el angulo A K H ⌒ A H K: luego (ax. 6.) el angulo A H K es duplo del angulo K H B (20. 3.) el angulo F A K es duplo del angulo F H K, el angulo K A B duplo del angulo K H B pero (dem.) el angulo F H K duplo del angulo K H B: luego (ax. 6.) el angulo F A K es duplo de angulo K A B, y (ax. 2.) el angulo B A F es triplo del angulo B A K: idem (con) la circunferencia A F ⌒ F B (36. 3.) la recta A F ⌒ F B, y el triangulo F A B (24. D. 1.) es vn iſoſceles (5. 1.) el angulo B A F ⌒ A B F, y en el iſoſceles A B K, el angulo A B K ⌒ A K B, ò à ſu igual A B F: luego (32. 1.) los dos iſoſceles A F B.. A B K, ſon equiangulos, el angulo A F B ⌒ B A K: pero (dem.) el angulo B A F triplo del angulo B A K: luego (ax. 6.) el angulo B A F, ò ſu igual A B F es triplo del angulo A F B, y (33. 6.) las circunferencias A F. B F, triplas de la circunferencia A B: luego (24. 3) la recta A B ſe acomoda ſiete vezes en la circunferencia del circulo B A F: con lo qual quedarà formado el Eptagono Equilatero, y (27. 3.) Equiangulo: luego ſobre vna recta dada terminada ſe forma, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

ADDICION

Algunos Mathematicos niegan la evidencia de que las rectas S T. V R; alargadas, concurren entre sì en vn punto X; à lo qual ſatisface el Author del modo ſiguiente.

PREPARACION.

ALargeſe la O N en N haſta cortar la circunferencia S V en Z, y en O ſobre la O Z (11. 1.) levanteſe la perpendicular O Y que corte la S X en

Y:

Y : tirèſe la recta Z Y , y en O ſobre la O Z (23. 1.) formeſe el angulo J O Z∽O Z Y: deſde Z à la O Y (31. 1.) tireſe la paralela Z J que corte la O J , en alguno punto J, y tirèſe la recta Y J : alarguèſe la Y O en O haſta cortar la V X en algun punto W.

DEMONSTRACION

EL angulo Y O Z es recto , Z J paralela à O Y: luego (29. 1.) el angulo Y O Z∽O Z J la O Z comun en los triangulos Y O Z, J Z O : luego (26. 1.) eſtos triangulos ſon iguales entre sì; O Y∽Z J, y (dem.)O Y paralela à Z J:luego(33. 1.) Y J es paralela à O Z,y(34. 1.)el anguloO Y J∽O Z J ò à ſu igual Y O Z: pero (dem.) el angulo Y O Z recto : luego (ax. 1.) el angulo O Y J tambien es recto, y (ax. 2.) el angulo O Y J+ J Y S es mayor de vn recto, (13. 1.) los angulos O Y S+O Y X ſon iguales à dos rectos: luego (ax. 3.) el angulo O Y X es menor de vn recto , y del miſmo modo ſe demueſtra, ſer el angulo Y W X menor de vn recto: luego (ax. 13.) las rectas T J. V R alargadas concurren.

IN-

INTRODVCCION AL Juicio del Problema.

14. AVnque al inferior no ſea licito juzgar, ò dàr leyes à cerca del ſer de las coſas à èl ſuperiores, puede juzgar à cerca del eſtado que tienen las coſas; enſeña mi Angel Thomàs (*q. 8. de verit art. 1. ad* 13.) y lo vimos en el juicio referido de San Pedro. Vna de las ſiete, y mayor maravilla que celebrò la Antiguedad en el mundo, fue el Templo de Diana, en el Aſia, cuya fabrica conſumiò el tiempo de 200. años (*Calepino verb. Miraculum*) empero ſe acabò, y para ella ſe buſcaron los mejores Artifices de todos ſiglos del mundo: para hallar la ſeptimidad del circulo, han concurrido los Gigantes, que ha tenido la Mathematica en todos los ſiglos del mundo, y no la han podido conſeguir: luego eſta obra es ſuperior à aquella, y à los ſiete milagros que celebrò el mundo: luego fuera temeridad grande, el querer yo imaginar, que podia ſer Juez del primero modo en ella.

15. Ni me he de hazer tan demaſiadamente inferior, que me niege lo que à vn inanimado perpendiculo ſe concede: Al parecer de todo hombre prudente, fuè mayor prodigio vno, y otro Templo de la Ley Antigua, que las referidas maravillas del mundo, y en la fabrica del ſegundo nos deſcrive el

Pro-

Profeta Zacharias (*cap.* 4 ℣. 10.) al Principe Zorobavel, con vn perpendiculo en las manos, para medir, ò regular este, aquella assombrosa Fabrica: luego del segundo modo aun aun el animado puede ser Juez.

16. Tenia el dicho perpendiculo siete ojos (que tales obras piden muchos para ser juzgadas) en quien se simbolizan las siete Artes Liberales, que estas siendo hermanas, por hijas del nobilissimo Padre el Entendimiento; à tal celebracion, llamò la Archictetura à sus hermanas: y assimismo en los siete ojos, se pueden representar siete partes, que dize Tulio, tener la prudencia, con que tales obras deben ser miradas. Aquellos siete ojos, dize el Padre Gaspar Sanchez, con algunos, que no estaban en el perpendiculo, si le miraban, y con su vista, à tal inanimado Juez le ilustraban.

17. Aunque de las siete Artes liberales (comprehendidas en Logica, Physica, y Mathematica) he sido Lector, y aun de la Theologia, confiesso con toda verdad la nada que en mi ay de todas estas facultades: empero, fundado en la Doctrina de mi Angel Thomàs, referida, de que puede ser Juez aun vn inanimado, alumbrado de exteriores resplandores, entro à juzgar esta obra, confiado en las luzes que me alumbraràn, y como al cauteloso Juez le pertenezca registrar los inconvenientes, que puede tener la sentencia que ha de dàr; antes de passar al juicio, refe-

referirè los argumentos que ay en contra, como las razones que ay, para sentenciar en favor, y de què modo.

PRIMERO ARGVMENTO.

18. CHristo Señor nuestro, dize, (*Mathæi* 10. ℣. 24.) que no ay Discipulo superior à su Maestro; es assi que ningun Maestro ha dado la septimidad del circulo: luego no la podrà dàr el Coronel Don Francisco Balbasor. Confirmase este argumento: La Antiguedad de Griegos, Caldeos, y Egypcios, tuvo los primeros hombres que buscaron esta septimidad, quienes consultaban à sus Idolos, à los Demonios; es assi que no la pudieron dàr: luego. Confirmase lo segundo: Lo que los Apostoles no conocieron, nadie, dize San Agustin, lo alcàzarà; es assi, que siendo entre estos San Lucas, Mathematico, no dexò hallada la septimidad del circulo, ni Adàn, à quien Dios infundiò las Ciencias las enseñò à sus hijos, ni Noè, ni Abraham, Doctissimos Mathematicos, ni otro Santo Doctor de la Ley de Gracia, en los quales huvo hombres esclarecidos en estas facultades, como San Agustin, San Severino, el Venerable Beda, San Isidoro Arzobispo de Sevilla, Santo Thomàs de Aquino, San Alberto Magno, y otros muchos, como consta de sus escriptos: luego.

19. Al argumento, y segunda confirmacion, dexando otras soluciones, que se pueden dàr fundadas

dadas

dadas en la Doctrina de San Juan Chrisostomo, digo, que como salva la veneracion de los Maestros de las Mathematicas, y Santos de vno, y otro testamento, y los Apostoles, han entrado tan crecido numero de inventivas en todas las facultades, que podrà, y tiene mucha puerta para entrar esta, y otras mayores, sin que perjudiquen su grandeza.

20. A la primera confirmacion, concedidas las premissas, niego la consequiencia: supongo, que los Demonios tienen ciencia especulativa, y practica de esta, y de todas las demàs verdades Mathematicas, que no hemos hallado, empero se niega la consequencia, que ellos consultados, dèn noticias de las tales verdades: lo primero, por no concedersselo Dios, ni permitirselo, para que los hombres Sabios, no concurran à consultarlos en semejantes materias, de què se siguirìan irremediables daños: lo segundo, que la obstentacion de su sobervia, se funda en lo grande, y claro de su natural entendimiento, y en ser sabidores de todas las verdades naturales, y si estas en que son particulares, las manifestàran, no tuviera motivo tanto su sobervia, y que ellos tanto obstinados obstentan; y assi aunque Dios esto se le permitiera, tales verdades, ellos no manifestàran.

¶¶¶ SE

SEGVNDO ARGVMENTO, con su respuesta.

21. EL segundo inconveniente, que tiene la propuesta, es dezir, que las tales lineas seràn paralelas, que el centro no està à donde se pretende, y esto con sola vna sencilla negacion, que para hombres entendidos, basta: mas para que vean los que mi aprobacion leyeren, del modo que de ella me he hecho capàz, la apoyo, ò confirmo con las siguientes replicas.

PRIMERA REPLICA.

22. FAlacia de peticion de principio, es pedir el que arguye, que debaxo de terminos diversos se le conceda lo que ha de probar, es assi, que suponer que las tales lineas concurren, es pedir que el centro del segundo circulo, està à donde se và à probar, pues esto se infiere de aquello: luego.

SEGVNDA.

23. LO mismo es probar ser dos lineas paralelas, porque no concurren, que el probar no ser paralelas, por el concurso: pues vno, y otro son correlativos de dissimilitud; es assi, que el probar que son paralelas, porque no concurren,

es falacia de peticion de principio, que en que se pide ser mas claro el no concurso, que el distar igualmente, porque Euclides no prueba ser paralelas las lineas, porque no concurran, si porque causen los angulos, como dize la 29. del primero; todo lo qual dize Aristoteles, ser paralogismo; hablando expressamente de esto, cuyas razones explica San Alberto Magno, 2. Posterior. tratado 6. cap. 1. luego.

TERCERA.

24. AVnque vna cosa sea manifiesta à los sentidos exteriores (que padecen error) no se ha de dàr por concedida en la Mathematica, ni se ha de dexar sin demonstracion: pues esta trata de la cantidad separada de todo lo que tocan los sentidos; y assi dize Aristoteles, 1. Posterior. lec. 12. que aunque fuera manifiesto à los sentidos, que los tres angulos de vn triangulo rectilineo, eran iguales à dos rectos, que no por esto avia Ciencia de esta verdad; y los Pitagoricos son reprehendidos, por dezir, que superfluamente se demuestra la 20. del 1. pues es manifiesta à los sentidos externos, como sobre ella refiere Commandino: es assi, que en este defecto cae dicho modo de probar: luego.

QVARTA.

25. QVe Aristoteles Principe de las Mathematicas en el lugar citado, y por la

razon, y otras alli dichas, dize, que aunque las demàs Mathematicas demueſtran *à poſteriori*, y demonſtracion por principios mediatos, que la Arithmetica, y Geometrìa, por ſer Ciencias maeſtras, ſolo demueſtran por radicales principios; es aſsi que la ſeptimidad es propoſicion Geometrica: luego no ſe demueſtra con dezir, que las tales lineas concurran, ò no, de que ſe infiere, ſer, ò no paralelas.

DIFINICIONES CON QVE SE
reſponde à los argumentos, y ſe dà ſu aplauſo à la Septimidad averiguada por el dicho Coronel Don Franciſco Balbaſor.

46. 1. ARgumento, es lo que de vna coſa conocida, infiere el conocimiento de otra ignorada.

2. Induccion, es la que del conocimiento experimental de los ſingulares materiales, infiere vna verdad vniverſal, como eſta, y que el todo es mayor que cada vna de ſus partes: luego vniverſalmente hablando, el todo es mayor que ſu parte.

3. Silogiſmo, es el que conſta de tres propoſiciones, mayor, menor, y concluſion.

4. Silogiſmo demonſtrativo, es el que de principios ciertos infiere vna concluſion. Topico, el que infie-

infiere la conclusion de principios probables; y Sophistico, el que de principios falsos.

5. Demonstracion *à priori*, es la que de principios proximos, ò radicales infiere vna conclusion; *à posteriori*, la que por los efectos prueba las causas; como que ay Dios, porque ay criaturas.

6. Demonstracion *propter quid*, es la que de radicales principios infiere vna conclusion.

7. Demonstracion *propter quia*, es la que infiere vna conclusion de principios mediatos, ò de los efectos.

SVPOSICIONES.

1. EL conocimiento de los sentidos, es el primero, y origen de todos los conocimientos de las Ciencias naturales; esto enseñan todos los Philosophos con Aristoteles 1. Methaph. cap. 1. y en otras muchissimas partes, como en el primero de los Physicos, cap. 1. pues todas las especies, con que el entendimiento conoce, son abstraìdas de las Phantasmas, archivo de especies de la fantasia, la qual toma, y recibe sus noticias del sentido comun, y este de vno de los sentidos externos, que al sentido comun concurren, para que dè sentencia de sus sensaciones.

2. La induccion, es la primera de todas las demonstraciones: esta suposicion se infiere de la antecedente suposicion, y es doctrina de Aristoteles, con

todos

todos los Logicos, 1. posteriorum lec. 30. pues el entendimiento de las verdades singulares infiere vna proposicion vniversal, como es dicho, es assi, que esta es induccion: luego.

3. A la induccion, se sigue la demonstracion *à posteriori*, y à esta la demonstracion *quia*, y la vltima, y mas perfecta de todas, es la demonstracion *propter quid*. Esta es doctrina de Aristoteles, con todos los Logicos, en diferentes capitulos del primero, y segundo de los posteriores: pues el entendimiento conociendo, procede de lo facil à lo dificil; y assi lo primero que conocen los sentidos, es el singular, de aqui el entendimiento infiere lo vniversal; por los efectos passa à indagar las causas remotas, principios de la demonstracion *propter quid*, y luego de aqui buelve investigando, hasta llegar à lo singular: luego.

4. Suposicion. Aunque la Mathematica trate de la cantidad abstraìda, esto es, que considere à la cantidad en quanto tal, y no en quanto blanca, ò tiene algun color, ò qualidad que tocan los sentidos exteriores, no trata la Mathematica de la cantidad separada de lo sensible, que tocan los sentidos externos. Esta doctrina es de todos los Philosophos, con Aristoteles, en el 3. de la Methaph. lec. 7. contra Pitagoras, Platon, y otros, Mathematicos antiguos, lo qual prueba con estas razones.

La primera. La misma cantidad de que trata la

Geo-

Geometrìa, y Arithmetica, tratan las demàs Mathematicas particulares; es assi, que la Musica es la Arithmetica en el oìdo; la Visoria es la Geometrìa en la vista; la Astronomìa no trata de otros Cielos, que de los que vemos; ni la Idrographia, de otro Globo terreno, que el que registramos con la vista; y assi de las demàs Mathematicas en particular: luego.

Lo segundo, que Aristoteles dize en el 6. de sus Ethicos, ser esta verdad tan manifiesta, que toda la Antiguedad practicaba enseñar despues de la Logìca las Mathematicas à los Niños, por lo manifiestas à los sentidos; y por esto Pthołomeo en el Prologo de su Almagesto Astronomico, explicado de muchos, dize, tener mas evidencia la Mathematica, que la Methaphysica, por tratar aquella de la cantidad, que tiene su ser en lo sensible. Esto supuesto.

RESPONDESE A LOS ARGVMENTOS.

27. A La primera replica, puesta en el num. 22. se concede la mayor, y se niega la menor: pues siendo diverso lo vno de lo otro, no es pedir se conceda lo mismo debaxo de diversos terminos: y si essa fuera falacia, lo fueran todas las demonstraciones, que de vno conocido infieren otro.

28. A la segunda replica, puesta en el num.

23. ſe dize, que ay ſer mas claro de dos maneras: el vn modo, es por ſu naturaleza, por quanto la coſa es mas inteligible: y aſsi Dios es mas inteligible que las criaturas; y todas las cauſas, que ſus efectos: el diſtar, ò no diſtar igualmente las lineas paralelas, ò no tales, ò cauſar los angulos, como pide Euclides, el concurſo, ò no concurſo: lo ſegundo, eſtà ſer vna coſa mas clara que otra, no en quanto à ſu naturaleza, ſi en quanto à nueſtro modo de conocer, que procedèmos de los ſingulares à lo vniverſal; de los efectos à conocer las cauſas, como es dicho, num. 29. y aſsi lo que alli dize Ariſtoteles, es que fuera peticion de principio, querer, que el efecto de concurſo, ò no concurſo, fuera por ſu naturaleza mas claro, no niega que *quoad nos*, ſea eſto mas evidente, y como en qualquiera verdad, lo primero ſe demueſtre *à poſteriori*, que *à priori*, y toda Ciencia ſuponga, y no niegue lo tocado por los ſentidos externos, eſtà bien probado *à poſteriori* el diſcurſo, y mal negado abſolutamente el ſupueſto, que ſe debia diſtinguir, y conceder *quoad ſenſum*, y queda duda *quoad intellectum*, por no dàrſe demonſtracion *à priori*, ni *propter quid*.

29. A la replica tercera, hecha en el num. 24. en que puede aver grandes equivocaciones, digo, lo primero ſer falſo abſolutamente no deber dàrſe por concedido en la Mathematica, lo que es manifieſto à los ſentidos externos: lo primero, que el conoci-

miento

miento, que es origen de todos, se debe dàr por assentado, y si este se niega, no tiene el que arguye argumento, ni prueba el que defiende; es assi, que el conocimiento de los sentidos externos, es el primero de todos: luego aunque se deba dezir, que tiene imperfecciones, no se debe, ni puede absolutamente negar en facultad alguna: pues este negado, estàn quitadas del medio todas las Ciencias.

30. Lo segundo que Aristoteles expressamente de la Mathematica, hablando con la razon dicha, con todos los Logicos enseña esto, y en consecucion suya, dize, que si vno estuviere en tal parte del Cielo, desde la qual viera à la Luna eclypsarse, y que la causa de esto era la interposicion de la tierra, que no avia lugar à disputa: pues lo que se busca con el argumento, es lo ignorado; y lo que perciben los sentidos infaliblemente, lo toca el entendimiento, y assi no ay lugar à disputa.

31. A lo que dize la replica, de tratar de la cantidad separada, es vn error de Platon, que impugna Aristoteles en el lugar citado; pues no es lo mismo cantidad abstraìda, que separada; lo primero dize, considerar el entendimiento vno sin lo otro; y lo segundo, que la cantidad està separada de lo material singular sensible, que dexamos dicho ser falso: y à lo siguiente à esto digo, que alli claramente Aristoteles procede contra los Philosophos, que no distinguian el entendimiento de los senti-

dos; y aſsi, ni el conocimiento intelectual, que es el cientifico del conocimiento de los ſentidos: y aſsi dize bien, que ſi ſe diera ſolo con los ſentidos externos, ſe conociera, que los tres angulos de vn triangulo tenia el valor de dos rectos, que por eſto no avia ciencia, como no ſe dà ciencia en vn irracional que conoce que los dos lados de vn triangulo ſon mayores que el tercero; pues de vn punto à otro camina à buſcar el alimento por la linea recta, y no por la curva: y es la razon, por no aver en el irracional entendimiento, en quien tiene ſu ſolio la ciencia: mas tambien alli dize, que en el ſujeto que tiene entendimiento, vna vez que los ſentidos tocan vn objecto, no puede el entendimiento dexar de tocarlo: pues aſsi como los ſentidos miran à ſus objectos, el entendimiento mira al ſuyo, y al medio por donde ſe le repreſenta, que ſon los balcones, ò ventanas de los ſentidos: es aſsi, que vna vez que ſe ponga el objecto delante de los ſentidos, no pueden dexar de percebirlo, ſino es que aya impedimento: luego vna vez que los ſentidos exteriores toquen vn objecto, le ha de tocar el entendimiento; ſi los caminos no eſtàn embarazados con algun accidente: luego ſi los ſentidos exteriores tocan en tales lineas todas las condiciones que ſe piden para ſer paralelas, el entendimiento tiene eſto por cierto; y el negar eſto abſolutamente, es contra los

pre-

preambulos de todas las facultades.

32. A lo vltimo de la replica està respondido con lo dicho; lo segundo, que yà dexamos supuesto, que à la induccion sensible, se siguen otras demonstraciones, hasta llegar à la mas perfecta, que prueba por radicales principios, y asi diziendo los Philosophos Pitagoricos, que para la 20. del 1. bastaba el conocimiento solo sensible, prosiguen descavelladamente, como es dicho, lo qual nosotros no dezimos, si que debemos dàr por supuesto, el que si dos lineas concurren, cuyo concurso tocan los sentidos, que no son paralelas, porque esto (como es dicho) lo toca inmediatamente el entendimiento, lo qual mas claro constarà de la solucion siguiente.

33. A la quarta replica, puesta en el num. 25. digo, que la demonstracion *propter quid*, es la que prueba vna conclusion por los primeros, y radicales principios: estos en la Mathematica son las definiciones de los numeros, y cantidades continuas de que trata la Geometrìa, de los axiomas, y postulados, antes de lo qual no ay otros principios en la Mathematica: luego estos son los radicales, y antes de estos no ay otros; de estos se infieren las proposiciones, ò conclusiones Arithmeticas, y Geometricas generales; y de estas proposiciones generales, infieren sus conclusiones las Mathematicas particulares, y contenidas debaxo de estas, y como sean conteni-

das gran parte de eſtas de la Philoſophia, que *à poſteriori* demueſtran las demàs Mathematicas, tienen los demàs modos de proceder.

34. Mas como es dicho en las definiciones num. 26. aquellos vniverſales principios no los toca el entendimiento, ſin que paſſen por los ſentidos, y ſin que aya primero las demonſtraciones imperfectas, no paſſa à la mas perfecta de todas; todas las propoſiciones de Geometrìa magiſtrales, fueron halladas con vn calculo material, y ſenſible, y eſto lo tocamos cada dia, y deſpues tienen vna de las demonſtraciones imperfectas, como de la acomodacion, paſſado tiempo les hallamos otra mas perfecta, haſta que por fin venimos à hallar la vltima. La 47. eſtuvo deſde Pitagoras haſta que huvo Euclides en el mundo, con ſola la demonſtracion imperfecta de vèr, que divididos los lados, que comprehenden el angulo recto, el vno en tres, y el otro en quatro partes iguales, que ſalìa el lado opueſto al angulo recto cinco: haſta que vino Euclides, y demonſtrò eſto por lineas, y Diophantes lo aumentò por numeros en el 3. de ſus Poriſmas, y en el libro 6. de ſu Algebra; luego ſiendo eſte modo de probar por el camino, que han tenido todas las inventivas haſta el preſente halladas, no ſe le ha de negar el eſtado que tiene, ni ſe le ha de conceder el que no dà abſolutamente, ſi debaxo de dubio ſe debe dexar, no conſtandonos por demonſtracion *à priori* lo

con-

contrario: como no ſeria bien, negàr las propoſiciones Geometras, que ay, quando ſolo tenian demonſtracion imperfecta, y mas el que para negarlas no ſeñalarà demonſtracion alguna; y con eſtos fundamentos ſe reſponde à quantos argumentos ſe pueden poner contra la Triſeccion.

JVICIO DEL PROBLEMA.

35. PAra juzgar el Rey Aſſuero, y dàr ſentencia à la inobediencia de la Reyna Vaſthi, mandò à los Juriſtas de ſu Reyno (*Eſthèr cap.* 1.) que vieſſen las leyes de ſus mayores eſtablecidas, para dàrle ſu debido, en tales, y à tales ſujetos ſegun las leyes ordenaſſen de tales hechos. Eſto hizo aquel Juez ſiendo Gentil, en que ſe nos dà à entender lo natural que es al hombre, juzgar ſegun el hecho, y las leyes del derecho nacidas de la ley natural, que no aniquilan las confuſiones del Gentiliſmo. La ley natural antecede al hecho juſto, y eſte al derecho poſitivo.

36. Yà tengo referido en el antecedente tratado, la naturaleza del Problema, en el num. 1. en que el Coronel Don Franciſco Balbaſor, dà la ſeptimidad del circulo, con todas las demonſtraciones, que ſemejantes inventivas tienen, en ſu reciente hallazgo, dexando dicho ſolo faltarle la vltima *à priori*, que es por radicales principios, y que

los

los hombres doctos que lo han visto, no han hallado *à priori* cosa en contra, ni juzgo se pueda hallar cosa, que no tenga muy adequada respuesta, y para dàrle la aprobacion debida, passo à las leyes del hecho.

37. Estas en Mathematica; son las inventivas, que han hallado hombres doctos; Hypocritaschio, que fue mucho antes que Aristoteles, quien floreciò 330. años, antes del nacimiento, hallò la Lunula; cuyos efectos son entre otros, dividir vn angulo en qualquiera numero de partes iguales, con que se divide el Circulo en 7. 9. 11. 13. 17. partes iguales, y otros numeros semejantes, para el mismo efecto entre otros vsaron algunos Antiguos la linea quadratix, que largamente describe, y procura purificar de mayores errores, el Padre Clavio, al fin del 6. de sus elementos. Nicomedes haze esto con la linea Conchoydes, de que largamente trata el Obispo Caramuel, Papo Alexandrino, con las lineas Conicas, de que largamente trata el Padre Gregorio de San Vicente, en su obra *de quadratura circuli*; Archimedes, mediante las lineas espirales, de que comunmente tratan los Autores en sus Geometrias practicas, lo qual và, como fundado en este supuesto falso; de que tengan entre si las cuerdas la misma razon, que los angulos, que estàn en circulos iguales, lo qual se falsifica en la 20. del 1. pues qualesquiera dos lados de todo triangulo son mayores

que

que el tercero; y no qualesquiera dos angulos del triangulo rectilineo son mayores que el tercero, por donde vnas vezes con dichas lineas salen mayores, y otras menores los errores que anotan los Comentadores de Aristoteles en el 1. de los Physicos, lec. 2. impugnando la quadratura de Brisson, y la Lunula de Hypocrates; nada de esto se hallarà en la breve operacion, con que dà el circulo dividido en siete partes iguales el Coronel Don Francisco Balbasor: luego si los dichos merecieron por las tales lineas los primeros aplausos, mas de justicia se le deben dàr al Commandante Don Francisco Balbasor, por esta septimidad, que dà hallada.

38. Despues de las dichas, siguense otras que han dado los Autores modernos, y posteriores à los dichos, algunos dixeron que se tomara por radio el lado del Pentagono, y el radio del tal circulo por lado Eptagono, al qual modo de dezir, por contradezirlo bien claramente la practica, dexo sus impugnativas especulaciones, que son muchas. Otros fundados en la razon que tiene el lado de las figuras de 3. 4. 5. 6. lados con el radio del circulo, de que se trata en el 13. de los Elementos de Euclides, señalaron por lado del Eptagono el seno recto de 60. grados, ò la mitad de la cuerda de la figura de tres lados, que tiene con el radio la razon de 3. à 4: en la potencia, à quien sobradamente impugna tambien la practica: otros viendo, que los angulos formados

en

en el centro de las figuras equilateras, llevan la razon de ser vn tercio, vn quarto, vn quinto de quatro rectos, y assi subiendo infinitamente, vsaron del artificio de dàr el lado de vn valor en todas las figuras, que es de 800. partes, y aumentar sobre el radio del Exagono $12\frac{1}{2}$. con q̃ dàn el radio del Eptagono con dicho lado, y assi subiendo con dicha progression Arithmetica, cuya diferencia es $12\frac{1}{2}$. que no son pocos, y por diferentes caminos, los quales tienen en contra lo dicho en el num. 37. ademàs de la practica no ser exacta.

39. Otros, pareciendoles que dezian algo particular, cayeron en los modos referidos, y tienen los mismos contras: y fue dezir, que se tome vna media proporcional (vnos dizen que Arithmetica, y otros que Geometrica) entre el lado del Exagono, y del Octagono, y que este era el lado del Eptagono, inscripto en el mismo circulo.

40. Otros, viendo estos inconvenientes, y pareciendoles que estaban seguros, para dividir al circulo en siete partes iguales, y en otro qualquiera numero, de que Euclides no diò regla; enseñan, tengan el largo trabajo determinado por Trigonometrìa, busquen el lado que le corresponde al Eptagono: como si para construir las tablas de los senos, no huviera el mismo trabajo, y en su fabrica no nos entraramos en el laberinto de las lineas racionales, è irracionales, de que trata, por 117.

 propo-

propofsiciones Euclides; en el dezimo, cuyo valor de las inconmensurables, no siendo perfectamente explicable; por numeros, vàn las tablas de los senos por mas exactas, que hagan con las contingencias, que hallan todos los dias los versados en ellas, ademàs de ser muy larga la operacion, y que para que salgan minutos, es necessàrio tomar vn radio, con que no se puede obrar en el papel, ò en vn plano, sino es reduciendole à menos denominacion, en que rára vez no hallamos la inconmensurabilidad, y otros inconvenientes, porque ha sido este camino no Geometrìco, poco vsado.

41. Otros, viendo los inconvenientes referidos, y la gran necessidad que ay de dividir el circulo en qualquiera numero de partes iguales, construyeron vnas tablas, en que dàn al radio el numero crecido de 10. cuentos, con que hallan los lados de las figuras, desde la de 3. hasta la de 80. lados; mediante vna regla de 3. lo qual tiene los mismos trabajos, y no es operacion tampoco Geometrìca.

42. De todos estos abismos de confusiones, cón la septimidad puesta en el num. 1. nos libra el Coronel Don Francisco Balbasor, à quien acompañan (y de que pueden hazer los Professores Mathematicos, sin los referidos inconvenientes, y con las dichas demonstraciones) hasta vnas doze septimidades, que dicho Commandante me ha franqueado con vn gran numero de proposiciones de la trisección

¶¶¶¶¶ del

del angulo, entre las quales, la primera que hallò; fue el año de 1709. aprobada en la Ciudad de Valencia por el Padre Maestro Thomàs Vicente Tosca, quien con su curso entero de Mathematica, ha honrado muchissimo la Nacion Española, y ha ilustrado à las Mathematicas, y cobrado grandissima estimacion en toda la Europa.

43. Hasta aqui las leyes de la naturaleza de la cosa, y las del hecho. Veamos, què coronas, y alabanças à tales obras dèn las leyes del derecho: el primero de todos, es el natural, este al Aguila, la adornò con vna natural, y hermosissima corona, que ilustra sus sienes, constituyendola reyna de la region del ayre, y de tan innumerables Provincias de aves que la ilustran: los meritos para esta Corona, dizen los naturales, reducirse à dos, el primero, ser el Aguila la que mas elevadamente en la region del ayre se remonta: la segunda, el ser entre los vivientes sensibles adornados de vista, la que con mas atencion mira al mas arduo visible, que es el Sol. Sin controversia, y en el comun sentir, los Escriptores de qualesquiera facultades son comparados con las aves; yà dexo escrito del modo que se han elevado los Escriptores Mathematicos en los visibles intelectuales mas arduos, que son la septimidad, la triseccion del angulo, y otros semejantes puntos de la Mathematica, y los desmayos que han tenido sus Icareos buelos, en la qual region ha estado bolando

quinze

quinze años con muchas horas de estudio cada dia el Coronel Don Francisco Balbasor, y con la inteligencia de los Geometricos libros 7. 8. 9. 10. 13. 14. y 15. que oy no se estudian, como lo dàn à entender sus obras, en las citas de estos libros, y lo confiessan los que le han tratado, el mayor Elementista, que han visto: de que ha resultado dàr vn buelo elevado sobre las aves Mathematicas, en las regiones mas tempestuosas que tiene la Geometrìa, à donde estando fixo el referido tiempo, ha registrado con mas cuydado, y atencion à los mas arduos visibles que tienen estas facultades, que todos los referidos. Luego atendiendo à esta ley natural, digo, deberse coronar por soberano de todas las Mathematicas aves, que han girado estas impenetrables Regiones.

44. A las leyes naturales, se siguen las positivas, que nacen de aquellas, à quienes las positivas atienden como à padres. A quienes las prendas naturales hizieron superior à todos, las antiguas leyes de los hombres sabios le hazian digno del Imperio: *Præstantissima facies digna est Imperio*: yà dexo probado ser el Coronel Don Francisco Balbasor, segun las leyes naturales, digno de la corona entre los Mathematicos: luego segun las leyes positivas tiene el mismo merito este. En apoyo de esto, vèmos la Ley Divina, hablando de ciencia en comun, al cap. 6. de la Sabiduria, que por estas palabras en los

Reyes pide la sabiduria: *Si ergo delectamini sedibus, & sceptris, ò Reges populi, diligere sapientiam est in perpetuum regnare*; y sobrados Autores ay que digan pedir en los Reyes entre otras las Mathematicas, verdad tan assentada, que quando los hombres en el mundo comenzaron à elegirlos, coronaban à los Sabios, que con sus ciencias podian defenderlos, como dize San Gregorio Nizeno, de la qual verdad, quien dessease vèr muchas pruebas, vea el cap. 2. del libro 1. que trae mi Angelico Doctor en sus Opusculos de la erudiccion de los Principes.

45. Y si quando en el mundo se ignoraban las medidas de las alturas, la Antiguedad, para que su memoria fuesse eterna, en los siguientes versos, llamandole Rey al Philosopho Zanagoras, muy sabio Geometra (*Beyerlein in theatro vitæ humanæ, verbo Geomet.*) le alaba por aver medido con vn perpendiculo la altura del Olympo: concluyo mi aprobacion con ellos, aplicandolos al Coronel Don Francisco Balbasor.

Afano Pythis vertex sublimis Olympi
Mensuram stadij decies sustollit in altum, &
Sestantis, perpendiculo, vt dimensio facta est,
A pedibus quatuor est tamen illa minor,
Filius Eumeli mensuram prodidit istam
Zenagoras: at tu Rex bone faustus ades.

Estos son los meritos del Coronel Don Francisco Balbasor, muy en comun referidos, que no escrivo

en

en particular teniendo tan dilatado campo, no por abstenerme de la falax lisonja, que tributar se acostumbra à hombres grandes, pues saben todos los que le conocen, ser lo dicho verdad, si por ser persona enemiga de proprias, aunque verdaderas alabanças, que es otro quilate que dà mi Angel Thomàs, en los libros citados de erudicion de Principes, à los hombres grandes. Este es mi sentir (salvo meliori) y para que mas conste à donde convenga, lo firmè en dicho Mayor Colegio en 5. dias del mes de Febrero de 1725.

Fray Pedro Vasquez Tinoco.

A LA OBRA DEL SEñOR CORONEL Don Francisco Balbasor, Theniente Provincial de la Artilleria de España, Commandante en Gefe que fue de los Exercitos de Navarra, Aragon, Cataluña, y Extremadura, y de los de Zeuta, durante la expedicion de Africa, y al presente de la de este Exercito, y Provincia, y Director de la Real Academia de Mathematicas, y Artilleria en la Plaza de Cadiz: ofrece vn su aficionado este

SONETO ACROSTICO.

D octo Francisco, cuya diestra plum....
F elizmente ha volado à la alta Espher..
R educiendo à verdad lo que quimer....
A juzgado de ingenios tanta summ.....
N o atrevida la embidia vil presum.....
C ontaminar tu obra, porque esper..... A
B urlando de su diente peste fier........
A ntidotos hallar que la consum........
L levela en ombros boladora Fam......
B uscando aun la Region mas peregrin..
A que ilumine el Orbe su luz clar.......
S ea el concavo Bronze, que te aclam..
O ficioso blason de tu doctrin.........
R everente padron, sublime ar........

EX-

EXPLICA SV AFECTO VN AMIGO
del Autor, en este

SONETO.

A LA TRISECCION DEL ANGVLO.

QVe peregrino assumpto el de tu diestra!
Con quanta solidez curiosa sabe
Vn thesoro exponer con docta llave,
Quando Trisexto el angulo demuestra;
Tu solo Antagonista en la Palestra,
Sin que te estorve el peso, ni te agrave,
De tan arduo Problema, serio, y grave
A la meta llegaste en la era nuestra:
Què Corona darèmos à tu frente,
Por esta Triseccion tan celebrada,
pues qualquiera parece incompetente?
Tu misma obra ha de ser quien laureada
mejor que nadie, la dexe dignamente,
pues de otra forma quedarà agraviada.

Ipsa quidem virtus sibimet pulcherrima merces.
Sillius Italicus.

A VNA DE LAS PROPOSICIONES demonstradas en la obra, que es la Septimidad del Circulo.

DEZIMA.

ES Balbasor, tu tarea
tan vtil al mundo todo,
que yo no sè de què modo
te la ha de premiar Astrea:
ni aun con la Docta Assamblea
de Athenas, hazes Gavilla;
pues merece mejor Silla,
quien construye en realidad
en vna Septimidad
vna Octava Maravilla.

A LAS DOS MEDIAS PROPORCIONALES: OTRO

DEZIMA.

DOs medias proporcionales
has hallado entre dos dadas,
y creo estàn bien halladas
segun todas las señales:
yo quisiera que cabales
tus alabanças oy vieras:
mas son muy vanas quimeras,
pues mucho se dudarà,
y à medias se quedarà
quando se juzguen enteras.

A LA QVADRATVRA: ESCRIVE OTRO
las siguientes

DEZIMAS.

BALBASOR, la Quadratura
del Circulo que has hallado,
aviendola demonstrado,
toda duda se assegura;
y pues que la Ciencia apura
tu discurso, à quien felize
ninguno le contradize,
viendo tan claro el exemplo
ponga la Fama en su Templo
Estatua, que te eternize.

Se infiere de no possible
lo dificil: esto es cierto;
pero no infiere el acierto
dificil: luego impossible:
BALBASOR haze visible,
lo que invisible creyò
el Docto que lo buscò:
dificil fuè para el Docto,
impossible fuè al indocto;
y èl à todos enseñò.

Ofrez-

Ofrezca la Diosa Esquiva
Corona à su docta frente;
y el guarismo solo quente
perpetuìdades que Viva:
y pues haze que perciba
el mundo tanta evidencia
demonstrando su experiencia
lo que antes de èl ningun Sabio,
proclamele todo labio,
primer Principe en su Ciencia.

AL MISMO ASSVMPTO EXPONE SV AFECTO otro Amigo del Author en la siguiente

OCTAVA ACROSTICA.

Bien digno fue Cortès, que todo el mundo
A su Nombre tribute immortal gloria,
Los thesoros que hallò son sin segundo,
Bastan à eternizarlo en la memoria;
Admirable mas bien serà el profundo
Sabio ingenio, que tienes en la historia,
Ofreciendo en el Circulo quadrado
Riquezas mas seguras que èl ha dado.

DEL

DEL MISMO A TODA LA OBRA.

SONETO.

NO pudiste volar mas altanero,
Insigne BALBASOR, tanto q̃ admira:
Pues aun de lince vista se retira
Lo que tu descubristes el primero:

Quanto tiene tu Libro es vn esmero,
Y todo lo que en èl la atencion mira,
A eternizar tu Nombre se conspira,
Sin el vano borron de lisonjero:

En Pintura, y dibuxo ventajosas
Tus manos dàn à Apeles grande zelo,
En la Musica, enlazas gusto, y arte,

Y en Campaña ninguno las viò ociosas:
Con que podrà dezirse sin rezelo:
Que eres Apolo en paz, en guerra Marte.

OCTAVAS,

CON QVE LA REAL, Y MILITAR Academia de Mathematicos, que està en el Colegio Mayor de Santo Thomàs de Sevilla, elogia la Septimidad, y à su Autor el Coronel Don Francisco Balbasor, Commandante General de la Real Artilleria del Exercito, y Provincia de Andaluzia, &c.

LOs sonorosos ecos de tu fama,
fatiga sean, BALBASOR, del viento;
mientras confusa admiracion aclama,
tu Poliphemo ingenio por portento:
pues caudaloso Nilo se derrama
por siete partes, que con arduo intento
del Circulo divides con tal arte,
que à todos es forçoso aventajarte.

Es esta division en el profundo
Oceano dificil dilatado
Geometrico empleo, no el segundo
escollo, en que el ingenio ha naufragado;

Y

y tu ſolo excediendo à todo el mundo
con diſcurſo feliz adelantado
ſutil le vences arribando à el Puerto
con ninguna diſtancia del acierto.

La que conſtruyes fabrica famoſa,
y le dàs epitheto de Campana,
à la que pareciò maravilloſa
de Manfredonia, excede ſoberana,
porque ſi muda ſe oſtentò glorioſa,
no es aſsi de eſta la eſtructura vana,
porque ſin ella (aunque de lengua agena)
toca curioſidad, milagro ſuena.

En fin, pues eres del horror tonante,
Marcial Miniſtro, puede eſtàr ſeguro
el Gran PHILIPO, ſi à tu fee conſtante,
tropheos fia, por que congeturo,
que en la que riges arma fulminante,
al enemigo, por mas fuerte muro
baxel de arquitectura peregrina
amenaza tu ingenio fatal ruyna.

*** *** ***

POE-

POEMA EN DECASYLABO, *que vn apassionado de la Real, y Militar Academia de Sevilla, haze al Author.*

EL Regio Solio, que ocupò Minerva
ceda à tu siempre luminoso Estudio:
pues pudo tu desvelo vigilante
hazer de obscuro caos fanal diurno.
Salgan yà de tu mente soberana
brillantes Astros de explendor mas puro:
la Esphera pueblen de lucientes rayos,
de ideas peregrinas sus coluros.
Todas las Mathematicas te aclamen
Norte feliz, que à Puerto mas seguro
conduzga Navegantes de la ciencia
guiando docto sus vndosos rumbos.
Plumas, y vozes de la fama ocupe
tu estudio infatigable con mil triumphos,
venerando los tiempos en el bronze
lo ingenioso, y vivaz de tu discurso.
Feliz logre el volumen peregrino,
que oy ofrece cientifico tu impulso,
Aguila Regia transcender la Esphera,
donde la imbidia vil subir no pudo.
Y tu, cuyo explendor docto merece
de la immortalidad gozar el fruto,
logra felice Fenix de la ciencia,
vivir glorioso sus eternos lustros.

OCTA-

OCTAVA.

LA Campana pendiente, ſin pendiente,
que Manfredonia colocò impoſsible
de dàr vozes à el Orbe, ſin que aliente
almas audàz ſu eco hazer ſenſible:
O y à peſar del mas agudo diente,
eco que BALBASOR hizo poſsible
dà à el Orbe todo en dulce melodìa,
oye el ſonido, eſcucha ſu armonìa.

PROLOGO A EL LECTOR.

SOn las Mathematicas, la mas guſtoſa delectable tarea del Eſtudioſo, pues como ſus demonſtraciones ſon à los exteriores ſentidos manifieſtas, halla el alma, aun en la opreſion terrena de lo corporeo, vn gozo inexplicable, que la fuerça à elevarſe à el mayor conocimiento del Summo Criador, que todas las coſas hizo en numero, peſo, y medida. A quien no admira el incomprehenſible numero de tantas, y tan diverſas nocturnas luminoſas antorchas? A quien no aſſombra el orden de lo recto, y obliquo en el herir de ſus luzes? A quien no paſma el orden ſuccesſivo de los Orbes? Siendo todos Celeſtes Globos Panegyriſtas, que nos vozean la Gloria de ſu Hazedor, ſin que la humana capazidad pueda ocupar los dilatados eſpacios de tan maravilloſas obras; y aun en las que caben debaxo de nueſtra Eſphera. Notorio es, ſe han ignorado muchas Propoſiciones neceſſariſsimas à el vſo de tã ſenſata, vtil,

pro-

provechoſa facultad, que ſepultadas en los paſſados ſiglos, han ſido ocultas à los mas perſpicazes Mathematicos, como ſon, la Triſeccion del Angulo, ò Arco; Inſcripcion del Eptagono, ò Septimidad del Circulo; la duplicacion del Cubo; la de dos medias proporcionales entre dos dadas; la quadratura del circulo, &c. que haſta eſtos tiempos han ſido incognitas.

Eſtas, pues, con otras, no de tanto peſo, ſon las que ofrezco en eſte breve Quaderno, à beneficio publico, halladas, y demonſtradas con el increible, laborioſo eſtudio de quinze años, en cuyo tiempo, parece impoſsible, aya podido tildar tantas planas de demonſtrativos borradores, que juntos, hizieran crecidiſsimos volumenes, ſin que los manejos Militares, que he tenido, aſsi ſubdito, como mandando en Gefe en el Real ſervicio de la Artilleria, en los Exercitos, y otras partes, con Comiſsiones particulares, Politicas, y Militares, ayan ſido obice à embarazar, ni interrumpir mi eſtudioſa tarea. Por las invenciones de dichas propoſiciones, verà el eſtudioſo, que ninguna ha ſido hallada acaſo, ſi bien, eſpeculando, y diſcurriendo con la linea, y el arco, ò ſea con el diametro, y la circunferencia del Circulo, fundamento de todas las Mathematicas.

Por lo que toca à la parte demonſtrable, no he tirado à pulirlas, ni abreviarlas, sì ſolo à que quedaſ-

ſen

sen demonstradas, sin obscuridades, ni citas dudosas: pues, siendo acceptables por los Mathematicos, no dexarà de aver muchos Eruditos que las corrijan, y acrisolen, dexandolas en su mayor perfeccion, con el aditamento de vn copiosissimo numero de Theoremas, que evidentemente se deducen de dichas proposiciones, assegurando, solo desseo acertar para el aprovechamiento comun. Vale.

NOTA.

LA Demonstracion de la Triseccion, ò Septimidad, que es lo mismo, se hallarà ab inconvenienti, de tres modos, en las Proposiones 10. 12. y 15. de los quales escogeràs el que mas te agradàre: y si quisieres adelantarla *à priori*, te serviràn los Theoremas de la Proposicion septima, que por mi como me hallo tan cansado en lo trabajado, yà no puedo continuar en esta satisfaccion.

EXPLICACION DE LAS CITAS.

LAs citas de los Elementos de Euclides, se notan entre parentesis del modo siguiente.

(Ax. 1.) Quiere dezir Axioma primero.
(3. d. 4.) Tercera definicion del Libro quarto.
(5. 1.) Proposicion quinta del Libro primero.

(P.5.Arch.) Proposicion quinta de Archimedes.
(P.7.de este) Proposicion septima de este tratado.
(cor.) Corolario.
(sch.) Scholio.
$\frown$ Igualacion, quiere dezir dos cosas iguales, A$\frown$B, la A igual à la B.
$+$ Esta señal quiere dezir suma de dos cantidades, A+B$\frown$C. que la A mas la B es igual à la C.
$-$ Esta señal quiere dezir, restar, A-B$\frown$C que la A menos la B es igual à la C.
(con.) Quiere dezir, que vna cosa està hecha, assi por la construccion de la figura, y lo mismo se entiende, por la prevencion.
(sup.) Es suponer la cosa hecha como por la construccion.
(dem.) Quiere dezir, que yà se ha demonstrado A$\frown$B, ò C+D$\frown$E.
(A$\frown$B$\frown$C) Quiere dezir, que las tres cantidades A. B. C. son iguales entre sì.

Quando se dize vna linea recta està cortada en extrema, y media razon, como AB cortada en C, se entiende, que la extrema, es el primer segmento à la izquierda de la linea; y quando se dize cortada en media, y extrema razon, el primer segmento à la izquierda, es la media.

Esta

(„) Esta señal al renglon, significa cosa traſladada con las miſmas expreſsiones de otro original.

NOTA.

La Figura 20, se repite de mayor tamaño en la Lamina quarta.

DEFINICIONES DEL *Angulo Curbilineo.*

1. EL Angulo Curbilineo, es el que ſe forma de dos circunferencias, que ſe tocan en vn punto.

2. El Angulo Curbilineo, cuyos centros eſtàn àzia vna miſma parte, llamaſe Corniangulo.

3. El Angulo Corniangulo, es de dos eſpecies: Equieſpherico, y Varieſpherico.

4. Angulo Equieſpherico, es el que ſe deſcrive con iguales radios.

5. Angulo Varieſpherico, es el que ſe deſcrive con dos radios deſiguales.

PRIN-

PRINCIPIOS CONDUCENTES A LA Triseccion del Angulo, en que se demuestra no ser impossible su dimencion, como afirma el P. Vlloa, de la Compañia de Iesus, Cathedratico de Mathematicas en la Corte de Madrid, en su obra de los Elementos de Euclides, tom. 1. part. 2. en la addiccion de vn scholio à la (9. 1.) en que dize.

„ ENseña Euclides, la Biseccion de qualquiera
„ angulo rectilineo; porque la triseccion de
„ qualquiera angulo rectilineo, es impossible,
„ valiendose solo del circulo, y de la linea recta.

De cuya opinion han sido algunos Mathematicos Antiguos, y de la misma Ozanam, en su Compendio Mathematico, lib. 1. scholio à la (9. 1.) de Euclides, expressando casi lo mismo que Vlloa, con lo siguiente.

„ Euclide nous enseigne la division d'vn angle
„ en deux soulemant, carpour la division de l'an-
„ gle entrois, no en quelque autre nombre impair,
„ est geometriquemant impossible : enne se ser-
„ vant que du cercle, & de la ligne droite comme
„ fait Euclide: parsemot geometriquemant on doit
„ isy entendre parle cercle, & par la ligne droite;
„ la Geometrie de Euclide ne se stendant pas Plus
„ loin;

„ loin: Y mas adelante dize: Ceux que cerchent
„ à diviser vn angle par exemple en trois parties
„ egales, en ne employant que le cercle, & que la
„ ligne droite, montrent quils ne entendent pas
„ bien la Geometriè se Probleme etant solide de
„ sa nature.

Lo mismo han dicho la mayor parte de los Mathematicos, tocante al celebre Problema Deliaco, en quanto à la duplicacion del Cubo, fundados en la respuesta, que diò el Demonio por la boca de la Estatua de Apolo, quando consultado en Dèlos, sobre el remedio que tendria la Peste que consumia à Athenas, respondiò, que cessarìa, si su Ara (que era cubica) se duplicase. Y vice versa el Area del Circulo impossible de averiguarse por Arithmetica, (respecto de su diametro) la han buscado la mayor parte de los Mathematicos modernos, por este camino, invirtiendo para ello la 1. lib. 12. de Euclides, siguiendo à Archimedes, sin atender al verdadero modo de la inventiva Geometrica, discurrida por los cèlebres Nicostrato, y Nicomedes, en su linea quadratriz, como se verà en adelante.

TRI-

TRISECCION DE ANGVLOS,

segun los Elementos de Euclides.

PROPOSICION I. PROBLEMA.

Sobre vna recta dada, formar vn Angulo igual à vna trigesima parte de vn recto.

FIGVRA 1. LAMINA I.

Dada la recta AB, se ha de formar vn Angulo igual à vna trigesima parte de vn recto.

CONSTRVCCION.

DEsde A con qualquiera distancia descrivase el circulo B C D, y desde B: (1, 4.) acomodese la recta B D ⌒ A B: en A sobre la AD (11. 1.) levantese la perpendicular A E, y desde D. (11. 4.) tirese la recta D F lado del Pentagono inscripto en dicho circulo, tirese A F, cortese (9. 1.) el angulo F A E en dos iguales con la A G: en A sobre esta (23. 1.) formese el angulo H A G ⌒ F A E: digo que el angulo B A H es vna trigesima parte de vn recto.

DEMONSTRACCION.

LA recta B D ⌒ A B, y esta es radio del circulo B C D: luego (15. 4. cor. 2.) el angulo B A D es dos tercias partes de vn recto: idem (con.) la recta D F es lado de vn Pentagono equilatero inscripto en vn mismo circulo, y (11. 4. cor.) el angulo D A F es seis quintas partes de vn recto, pero (con.) el angulo D A E es recto: luego (Ax. 3.) el angulo F A E es quatro quintas partes de vn recto, y (con.) el angulo H A G ⌒ F A E: luego (Ax. 3.) el angulo H A F ⌒ G A E: idem (con.) el angulo F A G ⌒ G A E: luego (Ax. 1.) el angulo HAF ⌒ F A G, y (dem.) el angulo F A E quatro quintas partes del angulo D A E recto: luego (Ax. 7.) qualquiera angulo H A F. F A G. G A E, es dos quintas partes de vn recto, ò dezima parte del angulo D A E: y (dem.) el angulo D A B dos tercias partes del angulo D A E: pero (Ax. 2.) el angulo H A E es tres dezimas partes del angulo D A E: luego (adiccion Apendiz lib. 5. num. 4. Kresa) el angulo D A B + H A E es 29. 30. avos de vn recto, y (dem.) el angulo D A E recto: luego (Ax. 3.) el angulo B A H es vna trigessima parte de vn recto: luego sobre vna recta dada se ha formado, &c. que es lo que se avia de hazer.

POR NVMEROS.

SI se considera la circunferencia del circulo divisible en 360. partes, llamada grados, siendo (15. 1. cor.) los angulos en A iguales à quatro rectos, estos juntos, seràn divisibles en 360. angulos, y (Ax. 3.) el Angulo D A E tendrà el valor de 90. grados, pues (con.) se hizo recto. El angulo B A D 60. F A D 72. luego (Ax. 3.) el agulo B A F 12. F A E 18. idem (con.) el angulo FAG ∾ GAE: H A G ∾ F A E: luego (Ax. 3.) los tres angulos F A G. G A E. H A F, son iguales entre sì, y cada vno serà de 9. grados; pero (dem.) el angulo B A F 12: luego (Ax. 3.) el angulo B A H, 3. es vna trigesima de vn recto.

SCHOLIO.

DE aqui se infiere el modo de formar 60. angulos diferentes, y cada vno divisible por el numero trinario en partes aliquotas; porque si del semicirculo se corta vn angulo de 3. grados, otro de 6. otro de 9. otro de 12. y otros, &c. se tendrà los 60. angulos que se anotan en la siguiente tabla, desde el num. 180. hasta el 3. y los numeros que tienen debaxo desde 60. à 1. son sus tercios, y en todos los contenidos en la tabla se hallan 20. angu-

los

los que tienen trifeccion Geometrica, cuyas conftrucciones fe executan con la circunferencia , y la linea recta ; fin que intervengan fecciones conicas , ni otra linea curba , como pretende el referido Ozanam ; luego enfeña Euclides la trifeccion de 20. angulos , que fon los que en dicha tabla fe diftinguen con efta feñal * y como dize el refran, quien haze vn cefto,&c. con lo que fe concluye la demonftracion ofrecida de no fer impofsible la trifeccion de qualquiera angulo retilineo, valiendofe folo del circulo , y de la linea recta.

TABLA DE LOS ANGVLOS

Trinarios.

* 180. 60.	177. 59.	174. 58.	* 171. 57.	168. 56.	165. 55.
* 162. 54.	159. 53.	156. 52.	* 153. 51.	150. 50.	147. 49.
* 144. 48.	141. 47.	138. 46.	* 135. 45.	132. 44.	129. 43.
* 126. 42.	123. 41.	120. 40.	* 117. 39.	114. 38.	111. 37.
* 108. 36.	105. 35.	102. 34.	* 99. 33.	96. 32.	93. 31.
* 90. 30.	87. 29.	84. 28.	* 81. 27.	78. 26.	75. 25.
* 72. 24.	69. 23.	66. 22.	* 63. 21.	60. 20.	57. 19.
* 54. 18.	51. 17.	48. 16.	* 45. 15.	42. 14.	39. 13.
* 36. 12.	33. 11.	30. 10.	* 27. 9.	24. 8.	21. 7.
* 18. 6.	15. 5.	12. 4.	* 9. 3.	6. 2.	3. 1.

NOTA.

COncedida, pues, la circunferencia del circulo, y la linea recta, para la trisección del angulo, se infiere concedido assimismo el compàs, con que se descrive la circunferencia, y la regla para formar la linea recta: luego con el sentir de Ozanam, si este fuera otro Euclides (para authorizar su dicho) se hallarà con gran facilidad la construccion, y demonstracion *à priori*, para dividir qualquiera angulo rectilineo dado en tres partes iguales, segun la siguiente.

PROPOSICION II. PROBLEMA.

Cortar la tercia parte de qualquiera Angulo rectilineo dado.

FIGVRA 2.

Dado el Angulo B A C, se ha de cortar su tercia parte.

CONSTRVCCION.

DEsde A con qualquiera distancia, descrivase el circulo B C D, y alarguese la B A en A indefinida: apliquese la regla en el punto C, de tal suerte, q̃ cortando la circunferencia en otro punto D, se halle

halle la diſtancia D E ∽ A D, y tirèſe la recta C D E que paſſarà por los tres puntos C, D, E; digo que el angulo A E C, es tercia parte del angulo B A C, tirèſe el radio A D.

DEMONSTRACION.

(con.) D E ∽ A D: luego (5. 1.) en el iſoſceles A D E el angulo D A E ∽ E, y (32. 1.) el angulo B A C ∽ A C D + E: pero el angulo D A E ∽ E: luego (Ax. 6.) el angulo A D C es duplo del angulo E: idem (5. 1.) en el iſoſceles C A D el angulo A D C ∽ A C D duplo del angulo E: luego (32. 1.) el angulo B A C ∽ A C D + E es triplo del angulo E, y eſte tercia parte, &c. Y aviendoſe executado eſta conſtruccion con ſolo la circunferencia deſcripta con el compàs, y con la linea recta formada con la regla, ſe ha hallado la triſeccion del angulo contra la ſentencia dada por el citado Ozanam: pero como ſemejante conſtruccion no tiene el apoyo del Principe de las Mathematicas Euclides, tampoco tiene lugar eſta conſtruccion entre los Geometras.

SCHOLIO.

DE eſta propoſicion ſe demueſtra el ſiguiente Theoréma.

PROPOSICION III. THEOREMA.

FIGVRA 2.

Si la circunferencia B F es tercia parte de la circunferencia B C, el angulo E es tercia parte del angulo B A C.

PREPARACION.

HAgaſe eſta conſtruccion dado el angulo F A C como quiera, y del circulo B C D, cortèſe (9. 1.) el angulo F A B, quarta parte del angulo F A C: alarguèſe F A en A haſta cortar la circunferencia en D, y tirèſe la recta C D, alargando eſta en D, y la B A, en A, haſta concurrir ambas en vn punto E: digo, que ſi la circunferencia B F,&c.

DEMONSTRACION.

(con.) EL angulo B A C es tres quartas partes del angulo F A C, y eſte (20. 3.)es duplo del angulo A D C: luego (Ax. 7.) el angulo A D C es duplo del angulo F A B, ò de ſu vertical D A E, y (32. 1.) el angulo A D C ⏜ A D E + E : luego (Ax. 6.) el angulo A D C es duplo del angulo E: pero (5. 1.) en el iſoſceles C A D, el angulo A D C ⏜ A C D: luego (Ax.6.) el angulo A C D es duplo del angulo E, y (32. 1.) el angulo BAC ∽ ACD + E, es triplo del angulo E: luego si la circunferencia F B, &c, que es lo que se avia de demonstrar.

SCHOLIOS.

1. DE este Theorema, y otros semejantes, como del Problema antecedente, se infieren modos para demonstrar la trisección del angulo *à priori*: pero tan inaplicables (segun mi corto entender) que yà como inutiles los dexo, reduciendose à averse de demonstrar, que vna linea recta passa por tres puntos, lo que no es facil conseguir.

2. Y en quanto à la segunda sentencia de Ozanam, en que nos publica, que la triseccion del angulo es vn Problema solido, como lo mismo expressa el Padre Lamy, Clerigo del Oratorio en Parìs, lib. 6. cap. 6. en el tratado de sus elementos de Geometrìa; sea, ò no sea solido este Problema; y concedido que lo sea, respecto de las tres cuerdas de los tres arcos, que en vn circulo, son bases de tres angulos iguales, se reduce su construccion à alargar la cuerda BC (Figura 3.) del arco total B I E C, de tal suerte, que añadiendole directamente la C G, sea la toda BG tripla de BH ∽ BI, cuerda del arco BI, tercia parte del arco BIC, y como para añadir à vna recta dada directamente, otra linea recta, no se necessita vsar de los Problemas solidos,

era escusada la advertencia de Ozanam, y de Lamy, como de otra suerte formar el equilatero H K I, (Figura 4.) de suerte, que qualquiera de sus tres lados sea cuerda del arco C H tercia parte del arco D C, &c.

PROPOSICION IV. PROBLEMA.

Cortar la novena parte de la circunferencia de vn circulo dado.

FIGVRA 5.

Dado el circulo B C D, se ha de cortar la novena parte de su circunferencia.

CONSTRVCCION.

POr el centro A tirese el diametro B D, y desde D con la distancia del radio, descrivase vn arco que corte la circunferencia en C: tirese la recta B C, y alarguese en C indefinida: en A sobre la B D (11. 1.) levantese la perpendicular A E que corte la circunferencia en E, y desde A (30. 6.) cortese A E en extrema, y media razon en F: desde F con la distancia A E radio, decrivase vn arco que corte la prolongada de la B C en G, y desde B (9. 6.) cortese B H tercia parte de B G; desde B (1. 4.) acomodenſe las rectas B I. I K cada vna ∽ B H: digo que la circunferencia B I. I K, y K C, cada vna es la novena parte de toda la del circulo B C D dado.

DEMONSTRACION.

La demonſtracion de eſta propoſicion, ſe incluye con otras mas adelante.

N O T A.

ESta cõnſtrucion es la primera que ſe propone (ſch. 2. p. ant.) porque dado el angulo B A C igual à dos tercias partes de dos rectos, y el circulo B C D, tirada la cuerda B C, y añadida directamente la recta C G, ſerà ſu tercia parte, B H ∽ à la cuerda B I, I K, ò K C, de vn arco, cuyo angulo K A C es tercia parte del angulo B A C, y demonſtrandoſe ſer aſsi, ſerà la circunferencia K C novena parte de toda la circunferencia del circulo B C D dado: pero en eſta conſtruccion, es manifieſto no aver intervenido Problemas ſolidos, ni ſecciones canonicas, como ni tampoco mas lineas curbas, que las de circulos, y lineas rectas: luego ſea, ò no, ſolido el Problema de la triſeccion del angulo, no haze al caſo.

PROPOSICION V. PROBLEMA.

En el centro de vn circulo dado, formar vn angulo rectilineo, y dividirle en tres angulos iguales.

FIGVRA 4.

En el centro A del circulo B C D, se ha de formar vn angulo, y dividirle en tres iguales.

CONSTRVCCION.

TIrèse el diametro B E, y desde A (30. 6.) cortèse A E en extrema, y media razon en F, desde E con la distancia E F descrivase la circunferencia F D, y con la misma desde B descrivase la circunferencia G C: tirènse las rectas A C. A D, y en A sobre la A C (23. 1.) formèse el angulo CA H ⌒ B A C: en A sobre la A E formèse el angulo DAI ⌒ E A D: digo que el angulo C A D formado en el centro A està dividido en tres angulos iguales C A H. H A I. I A D.

DEMONSTRACION.

(con:) LOs radios AB. A E, estàn cortados en extrema, y media razon en F, y en G, y cada vno (15. 4. cor. 1.) es lado de vn exagono que ſe puede inſcrivir en el circulo B C D; y ſi à la A E ſe le añadiere directamente la E F, ſerà (5. 13.) toda la A E F cortada en media, y extrema razon en E: luego (9. 13.) E F, ò ſu igual B G es lado del Decagono, que ſe puede inſcrivir en dicho circulo, y (con.) E D ⌒ E F, B C ⌒ B G: luego (10. 4. cor.) el angulo B A C, ò E A D es vna quinta parte de dos rectos, y (con.) el angulo B A C ⌒ C A H, E A D ⌒ D A I: luego (Ax. 1.) cada vno de eſtos angulos es igual à vna quinta parte de dos rectos, y todos quatro juntos, ſon iguales à quatro quintas partes de dos rectos: idem (13. 1.) dichos quatro angulos + el angulo I A H ſon iguales à dos rectos: luego (Ax. 3.) el angulo I A H es tambien vna quinta parte de dos rectos: luego (Ax. 8.) los tres angulos C A H. H A I. I A D ſon iguales entre sì: luego en el centro de vn circulo, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

N O T A.

LA invencion de eſta propoſicion, ſolo ſirve para la explicacion del ſegundo modo, que ſe expreſſa en èl (ſch. 2. p. 3. de eſte:) porque tiradas las cuerdas C H. H I. I D, y con la diſtancia H C, I D, deſde los puntos I, y H ſe deſcriven dos arcos que ſe corten en K tiradas las rectas K H, K I, y demonſtrando que el triangulo K I H es equilatero, eſtarà demonſtrada la triſeccion del angulo, y aunque en esta construccion se demuestra ser assi, no es facil demonstrarse en qualquiera otra construccion, de la triseccion de qualquiera angulo; pero tampoco en esta ha concurrido Problema solido, ni, &c. Luego no haze al caso que el Problema de la triseccion del angulo, sea, ò no solido.

SCHOLIOS.

1. DE esta construccion se me presenta el modo de delinear la Campana de Manfredonia, de la qual por comun Adagio se dize, que quanto mas la tocan, menos se oye.

2. Descriptas, pues las circunferencias GC. FD, desde los puntos B, y E con la distancia BF, ò EG, descrivanse las circunferencias GL. FL, las que se cortaràn en L, y desde L con la distancia de vna linea recta LC, ò LD descrivase la circunferencia CD, y se tendrà delineada la Campana de Manfredonia en la figura CDFLGC.

NOTA.

EL Artifice de esta Campana, ofreciò à los moradores de Manfredonia, que su sonido se oirìa por todo el mundo; pero aviendola construìdo, y puesto en su lugar, fueron los vezinos à tocarla, y como por mas, que la movian, no respondiesse con sonido alguno, occurrieron quexosos al Cons-

Conſtructor, quien les ſatisfizo ; diziendoles: que la Campana eſtaba en toda perfeccion, y apta à oirſe por todo el mundo, como tenia ofrecido, luego que le puſieran el badajo, ò lengua correſpondiente, al ſonido, que pretendia tuvieſſe, del qual no ſe avia obligado en ſu contrata, ni era tampoco de ſu profeſsion la fabrica de ſemejante inſtrumento.

Eſta relacion me hizo vna tarde con harto deſconſuelo vn Gondolero en Venecia, natural de Manfredonia, conduciendome en ſu Barco al paſſeo del Canal grande, añadiendo, que haſta aquel dia, nadie ſe avia atrevido à ponerle badajo, dando por impoſsible que el ſonido, que cauſaſe, ſe oyera por todo el mundo.

Parece, que à la obra de eſta Campana, tiene ſemejança el Problema ſolido de la triſeccion del Angulo, diſcurrido por Ozanam, pues ſin duda, no ſiendo de ſu profeſsion la fabrica del badajo para la conſtruccion, y demonſtracion con el hueco de ſu Problema, dexò para otro Artifice la execucion.

Reſpondile yo al Marinero, que para el comun beneficio, y conſuelo de los de ſu Pueblo, diſpondria, que la referida Campana ſonaſſe en adelante, y ſe oyeſe por todo el mundo, con cierto badajo; que ſe me avia ocurrido formarle; y aſsi poniendo manos à la obra, y conſultando mi intento con el circulo, y la linea recta, hallè que la Campana ſe avia

de

de inſcrivir primero en vn circulo, lo que executè del modo ſiguiente.

2. En el circulo B C D por el centro A (Figura 5.) tirèſe el diametro B D, y la circunferencia B C D (30. 3.) cortèſe en dos iguales en C: deſde B, y deſde D con la diſtancia de la cuerda del arco B C, ò C D deſcrivanſe las circunferencias C E. C F, y deſde los miſmos puntos B, y D con la diſtancia B E, ò D F deſcrivanſe las circunferencias E G. F H. que corten la del circulo B C D en los puntos G, y H, deſde C con la diſtancia de vna recta tirada deſde C à G, ò deſde C à H, deſcrivaſe la circunferencia G H, y ſe tendrà inſcripta en el circulo B C D dado, la Campana C E G H F C, que ſe pide.

3. Para la fabrica del badajo de la Campana, me vì preciſſado à forxar algunos inſtrumentos de nueva invencion, pero como nuevo en el manejo de la lima, quedaban toſcos ſus cortes; y aviendo buſcado en eſte Orbe Oficial inteligente para ſu refino, ſe me ofreciò cierto Maeſtro, diziendo: que ſi los metales de mis inſtrumentos, eran de toda ley, me darìa en cada 24. horas, afinado vno de ellos, y de no ſer de ley, el deſengaño de ſu inutilidad; alegrème (como ſe puede creer) de aver encontrado tan buen Artifice, pero franqueandole al punto vn inſtrumentillo hecho à propoſito para cortar vna linea recta, de tal ſuerte, que los cubos de ſus ſegmentos tuvieſſen entre sì razon dupla, du-

rante

rante dos años de tiempo, me fue diziendo estaba trabajando en èl, y como despues de algun tiempo mas, se lo llevase la Parca, quedè sin el alivio que esperaba, y sin el desengaño de las calidades de los metales.

4. Sin embargo, desseoso de finalizar mi obra, aviendome franqueado Euclides, todos los instrumentos de su fragua, continuè como pude mi trabajo en los siguientes.

PROPOSICION VI. PROBLEMA.

A vna recta dada, añadirle directamente otra linea recta, de tal suerte, que el rectangulo de la dada, y de esta con la añadida como de vna, sea igual al quadrado de la añadida.

FIGVRA 6.

Dada la recta AB, se le ha de añadir directamente otra recta BG, de tal suerte que el rectangulo de la AB, y de la AG sea igual al quadrado de la BG añadida.

CONSTRVCCION.

LA recta AB (10. 1.) cortèse en dos iguales en C, y en A sobre la AB (11. 1.) levantèse la perpendicular AD indefinida: desde A (3. 1) cortèse

tèſe A D ⌒ A C, y tirèſe la recta B D : deſde D con la diſtancia D A deſcrivaſe el circulo A E F, cuya circunferencia cortarà la B D en F, y alarguèſe la B D en D haſta cortar la circunferencia en E : idem alarguese A B en B indefinida, y deſde B (3. 1.) cortèſe B G ⌒ B E : digo que la recta B G es la añadida, que ſe buſca.

DEMONSTRACION.

EN el circulo A E F (15. d. 1.) D E ⌒ D F ⌒ A D, y (con.) A D ⌒ A C ⌒ B C : luego (Ax. 6.) E F ⌒ A B y (con.) A B es perpendicular à A D: luego (16. 3. cor.) A B es tangente al circulo A E F, y (36. 3.) el rectangulo B E F es igual al quadrado de A B, ò à el de ſu igual E F : luego (30. 6.) la recta E B eſtà cortada en extrema, y media razon en F, la E F es la media, y (dem.) E F ⌒ A B, idem (con.) E B ⌒ B G: luego (5. 13.) A G eſtà cortada en extrema, y media razon en B, y (16. 6.) el rectangulo B A G es igual al quadrado de B G : luego à vna recta dada ſe le ha añadido directamente, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

PROPOSICION VII. PROBLEMA.

Dado qualquier angulo agudo, ſin exceder à la (9. 1.) formar tres iſoſceles, cuyos angulos verticales con èl dado, tengan entre ſi razon dupla.

FIGVRA 7.

Dado el angulo B C D, ſe han de formar tres triangulos, &c.

CONSTRVCCION.

EL angulo B C D (9. 1.) cortèſe en dos iguales con la A C; y deſde C con qualquiera diſtancia, cortèſe la C A en A: con la miſma deſde A deſcrivaſe el circulo B C D, y deſde C con la diſtancia C B, ò C D, deſcrivaſe el circulo B D E: alargueſe la A C en C haſta cortar la circunferécia BDE en E, y tirenſe las rectas E B. E D quienes paſſando por la circunferencia B C D las cortaràn en los puntos F, y G; tirènſe las rectas A B. A D: digo, que los tres triangulos B A D. B C D. B E D, ſon iſoſceles, y que ſus angulos verticales con el angulo dado, tienen entre sì razon dupla.

DEMONSTRACION.

EN los circulos BCD, BED, los triangulos BAD BCD, ſon iſoſceles, y (2o.3.) el angulo B A D es duplo del angulo B C D (8.1.) el triangulo C A B ∽ C A D; los angulos ſobre ambas baſes iguales entre sì, y los opueſtos à las baſes iguales entre sì, A E comun en los triangulos E A B, E A D: luego (4.1.) eſtos dos triangulos ſon iguales entre sì, la baſe E B ∽ E D, y (24. d. 1.) el triangulo B E D es vn iſoſceles (20. 3.) el Angulo B C D duplo del angulo B E D, y (dem.) el angulo B A D duplo del angulo B C D, &c. luego dado qualquier angulo, &c. què es lo que ſe avia de hazer.

SCHOLIO I.

DE aqui ſe ſiguen vn numero infinito de Theoremas, de los quales ſe demonſtraràn algunos de ellos conducentes à la triſeccion del angulo.

PREVENCION.

ALarguèſe D A en A haſta cortar la B F en H, y la circunferencia B C D en I. tirèſe la cuerda I G, y deſde C à la E D (12. 1.) tirèſe la perpendicular C K, al triangulo E C K (5.4.) circunſcrivaſe el circulo K C E: tirènſe las rectas D F. B G. A F. A G.

NVM. 1.

Los triangulos E F D. E C B ſon iſoſceles, y iguales entre sì.

DEMONSTRACION.

EN el circulo E B D (15. d. 1.) los radios ſon iguales entre sì: luego (24. d. 1.) los triangulos E C D. E C B, ſon iſoſceles: idem (prop. ant.) E B ⌒ E D: luego (8. 1.) eſtos dos iſoſceles ſon iguales entre sì, los angulos ſobre ambas baſes iguales entre sì, y los opueſtos à las baſes iguales entre sì.

NVM. 2.

Los triangulos EFD. EGB ſon iſoſceles, y iguales entre sì.

DEMOSNTRACION.

(dem. n. 1.) EL angulo C B E ⌒ C D E (26. 3.) la circunferencia CF ⌒ CG, y (27. 3.) los angulos C B F. C D F. C B G. C D G ſon iguales entre sì, ò à ſus iguales C E B. C E D: luego (Ax. 6.) los angulos F E D. F D E. G B E, ſon iguales entre sì, y (24. d. 1.) los triangulos E F D. E G B ſon iſoſceles (dem.) E D ⌒ E B: luego (8. 1.) eſtos dos iſoſceles ſon iguales entre sì.

COROLARIO.

DE aqui ſe ſigue, que los iſoſceles F A D. G A B, ſon iguales entre sì, los triangulos A F E. A G E, iguales entre sì, y los iſoſceles F A B. G A D iguales entre sì.

NVM. 3.

El angulo A D G eſtà cortado en tres angulos iguales con las rectas F D. C D.

DEMONSTRACION.

(dem.) EL angulo F D C ∽ C D E ∽ C E D (20. 3.) el angulo A C D duplo del angulo C E D, y (dem.) el angulo A D C ∽ A C D : luego (Ax. 6.) el angulo A D C es duplo del angulo C D G, ò de su igual F D C : luego (Ax. 7.) los tres angulos A D F. F D C. C D G son iguales entre sì, (20. 3.) los tres angulos IAF. FAE. CAG iguales entre sì, y (26. 3.) los tres arcos I F. F C. C G iguales entre sì.

NVM. 4.

Las rectas C K. I G son paralelas.

DEMONSTRACION.

(con.) C K es perpendicular à E D : luego (10. d. 1.) los angulos en K son rectos, y (31. 3.) el angulo I G D formado en el semicirculo es recto : luego (27. 1.) C K es paralela à I G.

COROLARIO.

De aqui se sigue (34. d. 1.) que alargadas ambas rectas en ambas partes al infinito, nunca concurren ni se cortan.

NVM. 5.

El centro del circulo C K E circunscripto al triangulo E C K està en el lado mayor de este triangulo.

DEMONSTRACION.

(dem. n. 4.) EL angulo C K E recto: luego (31. 3.) inversa la circunferencia C K E, es semi-

ſemicirculo; E C es el diametro, y en èl eſtà el centro del circulo: pero (18. 1.) E C H es el mayor lado del triangulo E C K: luego, &c.

NUM. 6.

El circulo E K C es tangente al circulo B C D.

DEMONSTRACION.

(dem. n. 5.) EL centro del circulo E K C eſtà en la recta A E, y (con.) tambien en la miſma recta eſtà el centro A del circulo B C D: luego (11. 3.) ambos circulos ſolo ſe tocan en el punto C: luego ſon entre sì tangentes.

NUM. 7.

Si qualquiera angulo B F D, ò B C D formado en la circunferencia de vn circulo B C D, es duplo de qualquiera otro, B E D, formado fuera de ella, teniendo ambos angulos por comun baſe vna miſma circunferencia B L D con la cuerda B D, y ſi al triangulo B E D (5. 4.) ſe circunſcrive vn circulo, ſu centro eſtarà en vn punto de la circunferencia B C D.

PREVENCION.

Tirènſe los radios A B, A D, y al triangulo B A D imaginèſe circunſcripto vn circulo.

DEMONSTRACION.

(ſup.) EL angulo B A D eſtà formado en la circunferencia de vn circulo que paſſa por los puntos B, A, D, y el punto A, es centro del circu-

lo

lo B C D formado fuera de ella, ò en la circunferencia del circulo B C D: idem (20.3.) el angulo B A D: es duplo del angulo B C D formado en su circunferencia, pues tienen ambos angulos por base la comun circunferencia B L D: pero (sup.) el angulo B C D formado en la circunferencia del circulo B C D es duplo del angulo B E D formado en la circunferencia del circulo B E D, teniendo ambos por base la comun circunferencia B M D: luego (Ax. 8.) el centro del circulo B E D està en la circunferencia del circulo B C D: luego si qualquiera angulo, &c.

NVM. 8.

Si dos Angulos F B G. F D G tienen por base la comun circunferencia F G mitad de la circunferencia B L D, y alargadas las cuerdas menores B F. D G causadas de ambos angulos, concurren con la recta A E tirada por el centro A, las dichas cuerdas alargadas, formaràn con las cuerdas D E, B G dos isoscèles E G B, E F D equiangulos.

PREVENCION.

Tirèse la recta B D, y al triangulo E B D (5. 4.) circunscrivase el circulo B D E.

DEMONSTRACION.

EL triangulo E B D (3. d. 4.) està inscripto en el circulo B D E, y (20. 3.) el angulo que se formare en el centro de este circulo, teniendo por base la cir-

circunferencia BMD dupla de la circunferencia FG, ſerà duplo del angulo B E D formado en ſu circunferencia: pero (num. 7.) el centro del circulo B D E eſtà en vn punto de la circunferencia del circulo B C D, y (21. 3.) el angulo formado en el centro del circulo B D E, y en la circunferencia B C D teniendo por baſe la circunferencia B L D ſerà igual al angulo B F D, ò à ſu igual B G D: pero (dem.) dicho angulo formado en el centro del circulo B D E es duplo del angulo B E D formado en ſu circunferencia: luego (Ax. 6.) el angulo B F D es duplo del angulo B E D, y (32. 1.) el angulo externo B F D $\frown$ F E D + F D E internos: luego (Ax. 6.) el angulo B F D es tambien duplo del angulo F D E, ò de ſu igual E B G, y (Ax. 7.) el angulo G E B $\frown$ G B E $\frown$ E D F (6. 1.) E G $\frown$ G B, B F $\frown$ F D: luego (24. d. 1.) los triangulos E G B, E F D ſon dos iſoſceles, y (32. 1.) equiangulos: luego ſi dos angulos, &c.

NVM 9.

Si vn angulo B G D formado en la circunferencia de vn circulo B C D es duplo de otro angulo B E D formado fuera de ella, teniendo ambos por baſe la comun circunferencia B L D, y la recta tirada deſde el centro A al angulo B E D corta la circunferencia F G en dos iguales, tambien la miſma A E divide el angulo B E D en dos iguales.

PRE-

PREVENCION.

LAs rectas E B, E D, passando por la circunferencia B C D, las cortan en los puntos F, y G, tirèse la recta F G, quien passando por la A E le cortarà en el punto P, y alarguèse la E A en A, hasta cortar la circunferencia B C D en L: tirènse las rectas L F, L G, C F, C G.

DEMONSTRACION.

(17.d.1.) LA circunferencia C F L $\frown$ C G L. idem (suposicion) la circunferencia C F $\frown$ C G: luego (Ax. 3.) la circunferencia FBL $\frown$ GDL, y (29. 3.) la recta F L $\frown$ G L (24. d. 1.) el triangulo F L G es vn isòscele: luego (3. 3.) P L, es perpendicular à F G, P F $\frown$ P G, y (10.d. 1.) los angulos en P son rectos; E P comun en los triangulos E P F. E P G: luego (4. 1.) estos dos triangulos son iguales entre sì, la base E F $\frown$ E G, el angulo E F P $\frown$ EGP, y el angulo F E P $\frown$ G E P; luego si vn angulo formado en la circunferencia de vn circulo es duplo de otro angulo, &c.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que si se tira la cuerda B D, y al triangulo B D E, se circunscrive vn circulo, serà su centro el punto C.

PREVENCION.

Tirènse las rectas C B. C D.

DEMONSTRACION.

(32. 1.) EL angulo B G D externo, es igual à los dos internos G E B + G B E: pero (ſup.) el angulo B G D es duplo del angulo B E D: luego (Ax. 7.) el angulo G E B ∽ G B E, idem (ſup.) la circunferencia C F ∽ C G: luego (27. 3.) el angulo F B C ∽ C B G ∽ C D G: idem (dem.) el angulo C E B ∽ C E G, y el angulo G E B ∽ G B E: luego (Ax. 7.) los angulos C B G. C E B. C E D. C D E ſon iguales entre sì (6. 1.) C D ∽ C E ∽ C B, y (9. 3.) el punto C es centro de vn circulo circunſcripto al triangulo D B E.

NVM. 10.

Si dos circulos deſiguales B C D. B E D ſon entre sì ſecantes, y deſde vn punto como C tomado en la circunferencia del circulo menor, ſe forman como quiera dos iſoſceles E C B. E C D, de ſuerte que ambos angulos Verticales concurran en C. y las baſes ſean cuerdas del circulo mayor, el punto tomado en la circunferencia del circulo menor es centro del circulo mayor.

DEMONSTRACION.

(ſup.) LOs triangulos E C B. E C D, ſon iſoſceles (6. 1.) B C ∽ C E ∽ C D: luego (9. 3.) el centro del circulo B E D es el punto C, los angulos verticales de ambos triangulos concurren en el punto C, y las baſes E B. E D ſon cuerdas del circulo mayor E B D: luego ſi dos circulos, &c.

NVM.

NVM. 11.

Si los angulos verticales de tres iſoſceles B C D. E C B. E C D (que tienen comunes los lados C B. C D.) eſtàn formados en la circunferencia de vn circulo B C D; y deſde C à las baſes mayores E B. E D caen perpendiculares, eſtas alargadas en C, concurriràn en los miſmos puntos en que las baſes de ambos triangulos corten la circunferencia B C D en F, y en G.

PREVENCION.

Cortèſe (10. 1.) E C en dos iguales en N, y deſde N con la diſtancia N E, ò N C deſcrivaſe el circulo E K C O, quien cortarà las baſes E B. E D, en los puntos O, y K: tirènſe las rectas C O. C K. C F. C G.

DEMONSTRACION.

(ſup.) Los triangulos E C B. E C D ſon iſoſceles; (5. 1.) los angulos ſobre las baſes ſon iguales entre sì: (6. 1.) ſus lados iguales entre sì, y (21. 3.) el engulo F D C $\frown$ F B C: luego (Ax. 1.) el angulo F D C $\frown$ F E C, y (Ax. 2.) el angulo F E D $\frown$ F D E: luego (6. 1.) F E $\frown$ F D (dem.) C D $\frown$ C E: luego (8. 1.) el triangulo FCD $\frown$ FCE, el angulo C F D $\frown$ C F E, y el angulo F C E $\frown$ F C D: idem (31. 3.) el angulo C K E formado en el ſemicirculo es recto, y (13. 1.) el angulo C K D tambien es recto: (3. 3. cor.) E K $\frown$ K D, y (32. 1.) el angulo K C E $\frown$ K C D : pero (dem.) el angulo F C D $\frown$

 FCE:

FCE: luego (Ax. 2.) el angulo FCE + KCE ∽ FCD + KCD, y (15. 1. cor.) todos los angulos al redor de C son iguales à quatro rectos: luego (Ax. 7.) los angulos FCD + KCD son iguales à dos rectos, y (14. 1.) las rectas FC + KC componen vna linea recta FK, y de la misma suerte, se demuestra que las rectas OC + CG componen vna linea recta GO: idem (con.) CO es perpendicular à EB, y CK perpendicular à ED: luego estas alargadas en C concurren en los puntos F, y G secciones de las bases EB, ED, en la circunferencia del circulo BCD: luego si los angulos Verticales de tres isosceles, &c.

NVM. 12.

Si vn quadrilatero EFLG tiene dos lados contiguos iguales entre sì EF ∽ FL, y en sus extremos dos angulos opuestos iguales entre sì FEG ∽ FLG, tambien los otros dos lados son iguales entre sì, EG ∽ GL.

PREVENCION.

Cortèse los dos angulos iguales con la EL.

DEMONSTRACION.

(sup.) EF ∽ FL: luego (24. d. 1.) el triangulo EFL es vn isosceles (5. 1.) el angulo FEL ∽ FLE: idem (sup.) el angulo FEG ∽ FLG: luego (Ax. 3.) el angulo GEL ∽ GLE, y (6. 1.) GL ∽ GE: luego si vn quadrilatero, &c.

SCHOLIO II.

IBa prosiguiendo en demonstrar Theoremas, quando reparè, que yà tenia fraguado sobrados instrumentos para determinar la modulacion del Badajo de la Campana, y para no cargar mi equipaje con mas fardos de papeles, que despues causarìan molestia à quien les huviesse de repartir en las expeciarias, passo adelante.

SCHOLIO III.

LOs Problemas, ò Theoremas de la division del circulo en 7. y 9. parte iguales, como los de la trisección del arco, ò angulo, assi rectilineo, como curbilineo, tienen vna semejante demonstracion, y para que esta se apropie al que se quisiere, escrivo primero varias construcciones de cada genero, excluyendo de ellas mas de cien invenciones, por dos motivos, el primero, para escusar el embarazo de las laminas; y el segundo por averseme reprobado algunas de ellas, por diferentes Mathematicos, con el calculo trigonometrico (siendo assi, que las tenia demonstradas geometricamente ab inconvenienti) quienes satisfechos de su tanteo, como si fuera vna muy exacta demonstracion, publicaban los paralogismos de mis proposiciones, sin hazerse el cargo de las nulidades que acarrea la Trigonometrìa, reducida *à operatio praxis*, siempre que en las operaciones, ò son multiplices las equaciones, ò en

ellas

ellas concurren lineas incomesurables, como lo son la diagonal del quadrado cō su lado, el lado del equilatero con su area; toda, ò parte de la circunferencia con su diametro, ò radio, (11. 13.) este con qualquiera cuerda de vn arco, y las partes entre sì, y vna linea recta cortada en extrema, y media razon (6. 13.) pues de estas en particular, han supuesto aproximaciones, que bueltas à mis manos, he hallado muy disformes; y para convencerles, formè estas siguientes Tablas.

TABLA PRIMERA

DE APROXIMACION DE LAS cantidades absolutas, correspondientes à las partes de una linea recta cortada en extrema, y media razon.

Extrema.	Media.	Total.
1.	2.	3.
2.	3.	5.
3.	5.	8.
5.	8.	13.
8.	13.	21.
13.	21.	34.
21.	34.	55.
34.	55.	89.
55.	89.	144.
89.	144.	233.
144.	233.	377.
233.	377.	610.
377.	610.	987.
610.	987.	1597.
987.	1597.	2584.
1597.	2584.	4181.
2584.	4181.	6765.
2181.	6765.	10946.

TABLA SEGUNDA.

DE LAS PARTES QUADRADAS de la misma.

Extrema.	*Media.*	*Total.*
1.	3.	8.
2.	5.	13.
3.	8.	21.
5.	13.	34.
8.	21.	55.
13.	34.	89.
21.	55.	144.
34.	89.	233.
55.	144.	377.
89.	233.	610.
144.	377.	987.
233.	610.	1597.
377.	987.	2584.
610.	1597.	4181.
987.	2584.	6765.
1597.	4181.	10946.

LA formacion de ambas tablas, que se pueden continuar al infinito, se infiere de la (2. 14.) porque la razon, que tiene la primera à la segunda, es como

como la ſegunda à la tercera ; luego (17. 6.) es manifieſto, que el rectangulo de dos de las expreſſadas cantidades extremas ,con el quadrado de la media, ſolo difiere de la vnidad mayor,ò menor: luego eſtas ſon las cãtidades mas proximas de la toda,y ſegmentos de vna linea recta cortada en extrema , y media razon: pero los defectos ſiempre ſon menores en las cantidades mayores;y como à qualeſquiera de las tres cantidades mayores (2. 14.) ſe hallan ſiempre otras mayores, es evidente el deſacierto de querer cotejar por trigonometrìa los angulos de vn triangulo, quando en ſus lados concurren lineas incommeſurables, lo que dexo de explicar por ſer notorio à qualquiera Geometra , las partes que ſe deben dàr conocidas en vn triangulo, para reſolver las demàs ; y concluyo, diziendo : que concurriendo en vn triangulo lineas incommeſurables,es canſarſe ſin fruto, el querer juſtificar ſus partes por Trigonometrìa , como ni tampoco aproximacion razonable , ſi en el triangulo concurren dos lineas incommeſurables ; y ſi mis adverſarios quiſieren authorizar eſta practica por demonſtrativa , ſe veràn preciſſados à dàr por demonſtradas las dos ſiguientes propoſiciones.

* *

F PRO-

PROPOSICION VIII. PROBLEMA.

Hallar la ſeptimidad del circulo por la dimenſion del diametro, ò ſea cortar dos ſeptimas partes de la circunferencia de vn circulo dado.

FIGVRA 8.

Dado el circulo B C D, ſe han de cortar dos ſeptimas partes de ſu circunferencia.

CONSTRVCCION.

TIrèſe el diametro B D, y el radio A D (9.6.) cortèſe en 720. partes iguales, tomeſe A E 449. y en E ſobre la A D (11. 1.) levanteſe la perpendicular C F que corte la circunferencia en C, y en F, digo que la circunferencia C D F, es dos ſeptimas partes de toda la del circulo B C D dado.

PREVENCION.

Tirèſe la recta F A, y alarguèſe en A haſta cortar la circunferencia en G.

DEMONSTRACION.

(con.) EL angulo A E F es recto, y (15. d. 1.) A F ∽ A D; pero (con.) A D, es 720. luego (Ax. 1.) en el triangulo rectangulo la hypote-

nuſa

nuſa A F, es 720. ſu complemento logarithmico 7.1426675. y el logarithmico del lado A E, que por (con.) es 449. ſerà 2.6522463. ſu ſuma 9.7949138. es ſeno de 38. grados, y 34. minutos (y mas algunos ſegundos) el angulo A F E, y el angulo E A F cumplimiento à recto, ſerà de 51. grados, y 26. minutos, menos algunos ſegundos, igual à vna ſeptima parte de quatro rectos, y (33.6.) la circunferencia F D ſerà la ſeptima parte de la circunferencia total del circulo B C D; pero el arco C D ∽ D F; luego la circunferencia C D F, es dos ſeptimas partes de toda la del circulo B C D dado.

SEGVNDO MODO.

DAdo el circulo B C D, y el diametro B D dividido en 5760. partes iguales (9.6.) deſde B, (1.4.) acomodeſe la recta B C de 5189. de dichas partes, y tirada la recta C D, en el triangulo rectangulo B C D, ſerà como la hypotenuſa B D al radio, aſsi el lado B C al ſeno del angulo B D C 64. grados, y 17. minutos, con mas algunos ſegundos, igual al verdadero angulo, que debe ſer de 64. grados, y dos ſeptimos; de cuyos ambos modos ſe infiere la ſeptimidad, pues el exemplo prueba la coſa por ſemejança *contrarijs contraria curantur*. Si con el arte de la trigonometria ſe niegan mis propoſiciones, no conviniendo eſta demonſtracion con el artificio de la conſtruccion, conviniendo el artificio con la demonſtra-

 cion,

cion, queda probada; por que la conſequencia ſe coli-ge de otra; de la calidad ſe conoce la eſpecie; de la propriedad la eſſencia de la cauſa; de la cauſa ſe infie-ren los efectos, y del efecto ſe viene à la cauſa; de eſta al ſignificado, del ſignificado ſe infiere la parte, de eſta el todo, del todo la concluſion; y ſi vn prin-cipio es poſitivo, el todo es afirmativo; porque lo que conviene con vn antecedente, tambien convie-ne con otro conſequente: luego, &c. ſin embargo, no es por eſte modo que pretendo reſolver el Pro-blema de la ſeptimidad.

PROPOSICION IX. PROBLEMA.

Cortar dos ſeptimas partes de la circunferencia de vn circulo dado.

FIGVRA 9.

Del circulo B C D ſe han de cortar dos ſeptimas partes de ſu circunferencia.

CONSTRVCCION.

POr el centro A tirèſe el diametro B D, y deſde B (10. 1.) cortèſe B E quarta parte de A B: deſde D (1. 4.) acomodèſe la recta D C ⌒ D E, y tirèſe la recta A C: deſde A (30. 6.) cortèſe A C en extrema, y media razon en F: tirèſe la recta D F, y deſde D

(1. 4).

(1. 4.) acomodèſe la recta D H ⌒ D F : digo, que la circunferencia B C H es dos ſeptimas partes de toda la del circulo B C D.

PREVENCION.

TIrèſe A H, y el angulo B A H (9. 1.) cortèſe en dos iguales con la I A, alargandola en A indefinida: deſde K à la B D (12. 1.) tirèſe la perpendicular K L alargandola en L haſta cortar la circunferencia en M, alarguèſe tambien en M, y la A H en H haſta concurrir ambas en algun punto N: cortèſe (10. 1.) K N en dos iguales en O, y tirèſe la recta O H: al triangulo N O H (5. 4.) circunſcrivaſe, el circulo H N O, y la O N (10. 1.) cortèſe en dos iguales en P: en P ſobre la O N (11. 1.) levantèſe la perpendicular P Q, quien cortarà la N H en R, y tirènſe las rectas A M. K N.

DEMONSTRACION.

(con.) EN el circulo N H O, O N eſtà cortada en dos iguales en P, y los angulos en P ſon rectos: luego (1. 3. cor.) el centro de eſte circulo eſtà en la recta P Q, que ſin duda es el punto R, ſeccion de las rectas N H, P Q: porque ſi ſe dixere, que dicho punto R no es el centro de eſte circulo, lo ſerà otro qualquiera, dentro, ò fuera del triangulo N H O en la recta P Q, como S, y tirènſe por S los diametros T V. X Z: tirènſe las rectas V X. Z T, las que alargadas

gadas en X, y en T, concurren en el punto Y, y por quanto por la suposicion el punto R es centro del circulo H N O, seràn (15. d. 1.) los radios S T. S Z. S V. S X iguales entre sì (24. d. 1.) los triangulos T S Z. X S V. isosceles (5. 1.) los angulos sobre las bases iguales entre sì, (15. d. 1.) el angulo T S Z ∽ X S V (32. 1.) los dos isosceles son equiangulos, y (27. 1.) T Z paralela à X V: pero estas dos rectas alargadas cócurren en el punto Y, contra la (34. d. 1.) luego estas dos rectas no son paralelas, ni el punto S es centro del circulo H N O, y lo mismo se demuestra, si en la recta P Q se tomare por centro otro qualquiera punto fuera del punto R: luego este es el centro de dicho circulo. (17. d. 1.) N H es el diametro, y (31. 3.) el angulo H O N formado en el semicirculo, es recto, (13. 1.) el angulo H O K, tambien es recto; la recta O H es comun en los triangulos O H K. O H N, y (con.) O K ∽ O N: luego (4. 1.) estos dos triangulos son iguales entre sì, la base H K ∽ H N, y el angulo H K O ∽ H N O (32. 1.) el angulo externo A H K ∽ H N K + H K N: pero (dem.) estos dos angulos iguales entre sì: luego (Ax. 6.) el angulo A H K es duplo del angulo H K M (5. 1.) en el isosceles H A K el angulo A H K ∽ A K H: luego (Ax. 6.) el angulo A K H es duplo del angulo H K M (20. 3.) el angulo I A H es duplo del angulo I K H, y el angulo H A M duplo del angulo H K M: pero (dem.) el angulo I H K duplo del angulo HK M: luego (Ax. 6.)

el

el angulo I A H es duplo del angulo H A M : idem (con.) el angulo I A H ∽ B A I (15. 1.) el angulo B A I ∽ K A D: luego (Ax. 1.) los tres angulos B A I. I A H. K A D, ſon iguales entre sì : pero (5. 1.) en el iſoſceles M A K el angulo A K M ∽ A M K, y (con.) los angulos en L ſon rectos : luego (32. 1.) los triangulos L A K. L A M ſon equiangulos, el angulo M A L ∽ L A K, y (dem.) el angulo L A K ∽ I A H ∽ B A I: luego (Ax. 1.) el angulo M A L ∽ B A I, ò à ſu igual B A H, y (dem.) el angulo I A H duplo del angulo H A M: luego (Ax. 2.) los angulos B A I + I A H + H A M + F A D juntos, ſon los duplos del angulo H A M, y (13. 1.) los angulos B A H + H A D, ſon iguales à dos rectos; luego (Ax. 3.) el angulo H A M, es vna ſeptima parte de dos rectos, y el angulo B A I ſeptima parte de quatro rectos, y (Ax. 2) el angulo B A H dos ſeptimas partes de quatro rectos (15. 1. cor.) todos los angulos al rededor de A ſon iguales à 4. rectos luego (33. 6.) la circunferencia B C H, es dos ſeptimas partes de toda la del circulo B C D dado, què es lo que ſe avia de hazer.

SCHOLIO.

Eſta demonſtracion *ab inconvenienti*, la examinò muy de eſpacio el R. P. Vlloa, en el año de 1720. y al cabo de algun tiempo, ſin aprobar, ni negar, reſpondiò, que aviendo declarado impoſsible en ſu obra citada en el primer cap. de eſte, la triſeccion del angulo, no podia aprobar ſe hallaſſe la ſeptimidad.

Viſta de algunos Oficiales de la Academia de Guardias Marinas, negaron ſer el punto R centro del circulo H N O, diziendo, que las rectas V X, y Z T, alargadas no concurrian en Y.

Viſta por el R. P. Cañas, en el eſpacio de quatro meſes continuos, que la tuvo en ſu poder, reſpondiò, que muchas vezes la avia tomado en la mano, y que otras tantas la avia dexado, por ſer muchas ſus ocupaciones; pero paſſada à manos del R. P. Tinoco, à las quarenta y ocho dias de ſu examen, reſpondiò con la Cenſura, y aprobacion inſerta.

OTRA CONSTRVCCION ſemejante à la antecedente.

FIGVRA 10.

DAdo el circulo B C D E, tirèſe el diametro B D, y deſde B. (1. 4.) acomodèſe la recta B C ∽ AB: tirèſe la recta C D, y en A ſobre la B D (11. 1.) tirèſe la perpendicular A E: tirèſe la recta E D, y el angulo A E D (9. 1.) cortèſe en dos iguales con la E F que corte la circunferencia en F: tirèſe la recta B F, quien paſſando por la C D le cortarà en G, y tirèſe la recta E G, alargandola en G, haſta cortar la circunferencia en H: digo que la circunferencia B C H es dos ſeptimas partes de toda la del circulo dado.

OTRA

OTRA. FIGVRA 11.

DAdo el circulo B C D, tirèſe el diametro B D; y en A ſobre la B D (11. 1.) tirèſe la perpendicular A E: deſde E con la diſtancia del radio, deſcrivaſe la circunferencia F A G, que corte la circunferencia B C D en los puntos F, y G, y tirèſe la recta F G: corteſe (30. 6.) B D en media, y extrema razon en H, y tirèſe la recta F H: deſde F (3. 1.) corteſe F I ∽ F H, y tirèſe la recta I B: deſde B (1. 4.) acomodeſe la recta B C ∽ I B: digo que la circunferencia B C es dos ſeptimas partes de toda la del circulo dado.

Ambas ſe demueſtran por la antecedente, ò por la que ſe ſigue.

PROPOSICION X. PROBLEMA.

Hallar vna linea recta igual à la cuerda de vn arco ſeptima parte de la circunferencia de vn circulo dado.

FIGVRA 12.

Dado el circulo B C D, ſe ha de hallar vna linea recta, &c.

CONSTRVCCION.

POr el centro A, tirèſe el diametro B D, y la circunferencia B C D (30. 3.) cortèſe en dos igua-

 les

les en C: desde C (sch. 1. p. 5. de este) en el circulo B C D inscrivase la Campana de Manfredonia C E F G H, y la circunferencia F G (30. 3.) cortese en dos iguales en X, y tirese la recta E X: digo que esta es la que se busca.

PREVENCION.

Desde B (1. 4.) acomodese la recta B K ⌒ X E, desde K, la recta K I, y desde D la recta D M, cada vna igual à la EX: tirèse la recta AI, y alarguèse la K A en A hasta cortar la circunferencia en L: tirèse la recta L M, alargando esta en M, y la A I en I hasta concurrir ambas en algun punto N: cortèse (10. 1.) L N en dos iguales en O, y tirèse la recta I O: al triangulo O I N (5. 4.) circunscrivase el circulo O I N, y la circunferencia O P N (30. 3.) cortese en dos iguales en P: tirèse O P, y en O (11. 1.) levantese la perpendicular O Q que corte la circunferencia en Q: desde Q à la O P (31. 1.) tirèse la paralela Q R, y tirènse las rectas L I. P Q.

DEMONSTRACION.

(con.) EL angulo P O Q es recto: luego (31. 3.) las circunferencias P O Q. P R Q son semicirculos, P Q es el diametro, y en èl està el centro del circulo O I N, que sin duda es el punto S, seccion

ſeccion de las rectas P Q. I N. porque ſi ſe dixere, que eſte punto S no es el centro de eſte circulo, lo ſerà otro qualquiera dentro, ò fuera del triangulo O I N en el diametro P Q, como T, y tirenſe las rectas O T V, V Q, y en la ſupoſicion de ſer el punto T centro del circulo O I N ſeràn (15. d. 1.) T P. T O. T Q. T V, iguales entre sì (24. d. 1.) los triangulos P T O. Q T V, iſoſceles, (15. 1.) el angulo P T O ∽ V T Q. (32. 1.) los dos iſoſceles ſeràn equiangulos: luego (27. 1.) la recta O P es paralela à Q V: pero por la prevencion, Q R es paralela à O P: luego (30. 1.) Q R es paralela à Q V, y (con.) eſtas dos rectas eſtàn tiradas de vn miſmo punto Q, comun concurſo contra la (34. d. 1.) luego eſtas dos rectas no ſon paralelas, ni el punto T es centro de eſte circulo, y lo miſmo ſe demueſtra, ſi ſe tomare por centro otro qualquiera punto en la P Q fuera del punto S: luego el punto S es centro del circulo O I N, I N es el diametro, y (31. 3.) el angulo I O N formado en el ſemicirculo N O I es recto; idem (13. 1.) los angulos I O N + I O L ſon iguales à dos rectos: luego (Ax. 7.) eſtos dos angulos ſon iguales entre sì, O I es lado comun de los triangulos I O N. I O L, y (con.) O L ∽ O N: luego (4. 1.) eſtos dos triangulos ſon iguales entre sì, la baſe I N ∽ I L, y el angulo I L N ∽ I N L: idem (32. 1.) el angulo externo A I L ∽ I L N + I N L internos: pero (dem.) eſtos dos angulos iguales entre sì: luego (Ax. 6.) el angulo A I L es duplo del angulo I N L, ò de su igual I L M: pero (5. 1.) el angulo A I L ⌢ A L I: luego (Ax. 6.) el angulo A L I es duplo del angulo I L M, y (20. 3.) el angulo K A I es duplo del angulo K L I, el angulo I A M duplo del angulo I L M: luego (Ax. 6.) el angulo K A I es duplo del angulo I A M: idem (con.) los arcos B K. K I. D M. son iguales entre sì, y (27. 3.) los tres angulos B A K. K A I. D A M. son iguales entre sì: pero (demonstrado) el angulo K A I, duplo del angulo I A M: luego (Ax. 2.) los angulos B A I + I A D son septuplos del Angulo I A M: idem (13. 1.) los angulos B A I + I A D son iguales à dos rectos: luego (Ax. 3.) el angulo I A M es vna septima parte de dos rectos, ò dos septimas partes de quatro rectos: pero (15. 1. cor.) los angulos al rededor de A son iguales à quatro rectos, y (33. 6.) los angulos en vn circulo, son entre sì como sus arcos en quien insisten: luego (Ax. 1.) la circunferencia B K C es dos septimas partes de toda la del circulo B C D: luego de este se ha cortado, &c. que es lo que se avia de hazer.

PROPOSICION XI. PROBLEMA.

Cortar la novena parte de la circunferencia de vn circulo dado.

FIGVRA 13.

Dado el circulo B C D, ſe ha de cortar la novena parte de ſu circunferencia.

CONSTRVCCION.

TIrèſe el diametro B D, y el ſemi circulo B C D (1.4.) cortèſe en tres iguales con las rectas A C. A E, alargando eſta en E indefinida: cortèſe (9. 1.) el angulo B A E en dos iguales con el radio A F, y tirèſe la recta F D: deſde D, con la diſtancia de eſta deſcrivaſe la circunferencia F G, que corte la A G en G, y tirèſe la recta G C, quien cortarà la circunferencia E C en el punto H: digo, que la circunferencia C H es la novena parte de toda la del circulo dado.

PREVENCION.

Tirèſe el radio A H.

DE-

DEMONSTRACION.

POr la demonſtracion de la ſeptimidad, demueſtraſe el angulo E A H tercia parte del angulo E A C: luego el angulo H A C ſerà dos tercias partes del angulo E A C: idem (con.) los tres angulos B A E. E A C. C A D ſon iguales entre sì, y (13. 1.) todos juntos ſon iguales à dos rectos: luego (Ax. 3.) el angulo H A C es dos novenas partes de dos rectos, ò vna novena parte de quatro rectos: pero (15. 1. cor.) los angulos en el centro A ſon iguales à quatro rectos: luego (33. 6.) el arco C H es la novena parte de toda la circunferencia del circulo B C D dado; luego del circulo ſe ha cortado, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

COROLARIO.

1. DE aqui ſe ſigue la inſcripcion del nonagono es intelegible.

2. Idem: ſe ſigue la dimencion del circulo en 360. partes iguales; porque el angulo E A H tercia parte del angulo E A C es de 20. grados: luego ſi por la biſeccion (9. 1.) ſe corta eſte E A H en quatro angulos iguales, ſerà cada vno de 5. grados, y ſi de vno de eſtos (part. 1. de eſte) ſe corta vn angulo de 3. grados ſerà (Ax. 3.) el reſiduo vn angulo de 2. grados; y ſi de eſta biſeccion (9. 1.) ſe corta en dos iguales, ſerà cada vno de vn grado, ò vna parte de 360. de quatro rectos: luego, &c.

REGISTRO DE ESTA PROPOSICION por Trigonometria.

PREVENCION.

TIrèse la recta D G, y la cuerda B F, y se tendràn al triangulo B F D rectangulo, y los triangulos D A G. A C G. obliquangulos; y porque en el triangulo B F D se dà el angulo F B D recto, se tiene tambien conocida la diagonal B A D, que se puede suponer de 10000. partes, y por la construcion el angulo F B D de 75. grados, y el angulo B D F de 15. luego trigometricamẽte se sabrà el logarithmo de la DF 3.9849438. ò de su igual D G: luego en el triangulo obliquangulo D A G se tienen conocidos dos lados A D. D G, y vn angulo opuesto D A G de 120. grados: escrivase el cumplimiento del logarithmo de DF, ò D G, el seno del angulo de 60. grs. y el logarithmo de 5000. y se tendrà el angulo A G R de 26. gra-

Como el radio à la B D.. 10000.. 40000000. asi el seno de 75. grados...... 9. 9849438.

DF 3. 9849438.

D G ...... 6.0150562.
seno de 60.gs. 9.9375306.
A D 5000... 3.6989700.
26. 38.
A G D..... 9.6515568.

grados, y 38. minutos, y el angulo A D G de 33. y 22.

Hallar el lado A G, eſcrivaſe el cumplimiento del logarithmo del angulo A G D 9.6515568. y ſerà 0.3484432. el logarithmo de A D, y el ſeno del angulo A D G, y ſe tendrà 6134. por la A G

A G D	.....0.3484432.
A D	...... 3.6989700.
A D G 33.22.	9.7403587.
6134. A G.	3.7877719.

En el triangulo G A C ſe tienen conocidos dos lados A G 6134. A C 5000. y el angulo intermedio G A C de 60. gs.

Sumenſe los dos lados, y ſeràn 11134. ſu diferencia............. 1134.

A G	.... 6135.
A C	.... 5000.
Suma	.... 11134.
Diferencia	...... 1134.

Eſcrivanſe la mitad de la ſuma, y la mitad de la diferencia, eſcrivaſe el cumplimiento logarithmo de 5567. y el logarithmo de 567. con el de latangente de 60. grs. ſemi ſuma de los angulos

no

ro conocidos, y el logarithmo 9.2465225. darà el valor de vn angulo de 10. grados semidiferencia de los angulos que se buscan, el que summado con los 60. semisuma de los mismos, darà el angulo A C H de 70. grados.

5567.	6. 2543788.
567.	2. 7535831.
60. grs.	10. 2385606.
	9. 2465225.

Pero (15. d. 1.) en el circulo B C D, AH ∽ A C: luego (24. d. 1.) el triangulo C A H es vn isosceles, y (5. 1.) el angulo A C H ∽ A H G: luego (Ax. 1.) el angulo A H C tambien es de 70. grados, y (32. 1.) tres angulos de qualquiera triangulo son iguales à dos rectos: ò à 180. grados: luego (Ax. 3.) el angulo H A C, es de 40. grados; novena parte de quatro rectos: luego (33. 6.) el arco C H es vna novena parte de toda la circunferencia del circulo B C D.

NOTA.

EL angulo A G D, se ha tomado de 26. grs. y 38. ms. menor de lo justo: luego el angulo A D G 33. y 22. cumplimiento à recto, es mayor de lo justo: luego tambien el lado A G saldrà mayor, y la diferencia de la semisuma sale mayor, de lo qual se sigue, que el angulo A C H sale mayor 16. segundos, y 16. terceros, cuyo error se atribuye à esta operacion, y no à la construccion.

SEGVNDO MODO.

FIGVRA 14.

Dado el circulo B C D.

CONSTRVCCION.

POr el centro A tirèſe el diametro B D, y deſde D (1.4.) acomodèſe la recta D C ⌒ A D, deſde D, con la diſtancia D B deſcrivaſe la circunferencia B E F, y alarguèſe B D haſta cortar eſta en F: tirèſe C A; y alarguèſe en A haſta cortar la circunferencia B E F en algun punto E: deſde E (30.3.) cortèſe E G quarta parte de la circunferencia E G F, y deſde G por el centro A tirèſe la recta G A H que corte la circunferencia B C D en algun punto H: digo, que el ſegmento C H, es la novena parte de toda la circunferencia del circulo B C D dado.

TERCER MODO.

FIGVRA 15.

CONSTRVCCION.

TIrèſe el diametro C D, y deſde C (1.4.) acomodèſe la recta B C ⌒ A C: tirènſe las rectas A B. B D, y deſde D con la diſtancia D B deſcrivaſe la circunferencia B E, que corte el diametro D C en E:

cortè-

cortèse (9. 1.) del angulo B A C su quarta parte F A C con el radio A F, y tirèse la recta C F: desde E con la distancia C F descrivase vn arco, que corte la circunferencia E B en G, y tirèse el radio A G H: digo que la circunferencia B H es vna novena parte de toda la del circulo B C D dado.

QVARTO MODO.

FIGVRA 16.

Dado el circulo B C D.

CONSTRVCCION.

Tirèse el diametro B D, y desde B con la distancia A B cortèse su circunferencia en C: tirèse la recta A C, y (30. 3.) la circunferencia B C D, cortèse en dos iguales en E: cortèse la circunferencia E D en dos iguales en F, y desde F à la B D (31. 1.) tirèse la paralela F G indefinida, y en D sobre la B D (11. 1.) levantèse la perpendicular D G que corte la F G en G: Item (30. 6.) cortèse A B en media, y y extrema razon en H, y tirèse la recta G H: desde G con la distancia G H, descrivase la circunferencia H I; digo que la circunferencia B I, es la novena parte de la del circulo B C D.

QINTO MODO.

FIGVRA 17.

Dado el circulo B C D.

CONSTRVCCION.

TIrèſe el diametro C D, y alarguèſe en D al infito: deſde C con la diſtancia A C cortèſe la circunferencia C B, y tirèſe la recta C B: deſde C (30.6) cortèſe eſta en extrema, y media razon en E, y à la C D (P. 6. de eſte) añadaſe la extrema D F: tirèſe F E, y alarguèſe en E haſta cortar la circunferencia en G tirènſe las rectas A B. A G: digo, que el ſector de circulo A B G es vna novena parte del circulo B C D.

SEXTO MODO.

Con ſola la abertura de compàs que ſe deſcrive vn circulo, cortar la novena parte de ſu circunferencia.

FIGVRA 18.

CONSTRVCCION.

DEſde A con qualquiera diſtancia, deſcrivaſe el circulo B C D, y deſde qualquiera punto B, tomado en la circunferencia, deſcrivaſe la circunferencia D A E, quien cortarà la antecedente en C: deſde;

desde C descrivase la circunferencia A F G, quien cortarà la B C D en F, y tirèse la recta F B, quien cortarà la circunferencia A C en H: desde H descrivase vna circunferencia, que corte la A F G en G, y tirèse la recta B G, quien cortarà la circunferencia C H en I: desde I, descrivase la circunferencia K B E quien cortarà la D A E en los puntos E, y K: tirèse la recta E K, quien cortarà la recta B G en L, y desde L descrivase vna circunferencia, que corte la del circulo B C D en M: desde M descrivase la circunferencia A L N, que corte la del circulo B C D en N: digo, que la circunferencia N C es la novena parte de toda la del circulo B C D dado.

NOTA.

Qualesquiera de estas Construcciones tienen la misma demonstracion, que se ha dicho en la del primer modo.

SCHOLIO.

DE aqui se infiere el modo de formar vn angulo curbilineo corniangulo B A C igual à vna tercia parte de dos rectos, y cortar su tercia parte B A N; porque si se tiraren las rectas A B. A C, siendo por la construccion, la circunferencia B C, sexta parte de la del circulo B C D, serà (15. 4. cor. 2.) el angulo rectilineo B A C, igual à vna tercia parte de dos rectos: idem (15. d. 1.) A B ≏ A C, y (con.) las circunferencias A B, A C, tienen iguales radios (24. 3.)

el ſegmento A B A ⌒ A C E (Ax. 8.) ſus angulos mixtilineos ſon iguales entre sì: luego (Ax. 3.) ſi del angulo rectilineo B A C ſe excluye el angulo mixtilineo B A B, y (Ax. 2.) ſe le añade ſu igual C A C, ſerà (Ax. 8.) el rectilineo B A C igual al curbilineo B A C: pero el angulo rectilineo B A C es igual à vna tercia parte de dos rectos, luego tambien el curbilineo B A C es vna tercia parte de dos rectos, y (dem.) la circunferencia B N, novena parte de la del circulo B C D, y dupla de la circunferencia B N: luego por eſte miſmo ſcholio ſe demueſtra que el angulo corniangulo B A N es tercia parte del angulo corniangulo B A C, &c.

COROLARIOS.

1. De aqui ſe ſigue, que los triangulos eſphericos A C B A. A C N A. A N B A, ſon entre sì como 3. 2. y 1. es claro, y no neceſsita demonſtracion.

2. Aſsimiſmo, que el ſector de circulo B A C B es igual al triangulo eſpherico B C A B.

3. Que el triangulo mixtilineo A C B A es igual al triangulo eſpherico B C A B, eſto es tomando para el mixtilineo la recta A C.

4. Que el triangulo eſpherico A F C B A es quintuplo del triangulo eſpherico A N B A. es facil la demonſtracion.

NOTA.

AVnque à los seis modos expressados, son superfluos los demàs que se pueden añadir, para dividir vn circulo en nueve partes iguales, no omito el poner el siguiente, por ser tan expedida su construccion, y curiosa su practica.

SEPTIMO MODO.

Por solo los tres postulados descrivir vn circulo, y cortar la novena parte de su circunferencia.

FIGVRA 19.

DEsde qualquiera centro A con qualquiera distancia (3.) descrivase el circulo B C D, y con la misma desde qualquiera punto B tomado en su circunferencia, descrivase la circunferencia C E: desde C (con la misma) descrivase otra B C, quecorte la antecedente en F, y (1.) tirèse la recta C A (2.) alargandola en A hasta cortar la circunferencia B C D, en el punto D: desde C (3.) con la distancia C D, descrivase la circunferencia D F, y tirèse (1.) la recta B A (2.) alargandola en A hasta cortar la circunferencia D F en F. tirèse la recta E F, quien passando por la circunferencia B C le cortarà en el punto G: digo, que la circunferencia B G, es la novena parte de toda la del circulo B C D.

De-

Demuestrase como las antecedentes, y lo misma la de la (P. 3. de este) que se dixo se demonstraria en adelante.

PROPOSICION.

En el centro de un circulo, formar un angulo de 103. grados.

FIGVRA 3. LAMINA I.

CONSTRVCCION.

POr el centro A del circulo B C D, tirèse el diametro B D, y este (9. 6.) cortèse en 23. partes iguales: desde B (1. 4.) con la distancia de 18. partes, cortèse la circunferencia en C, y tirèse la recta A C, digo, que el Angulo B A C es el que se pide: tirènse las rectas B C. C D.

BD. 23. C. L.	8. 6382722.
Radio	10. 0000000.
BC. . 18. . . L. .	1. 2552725.
51. . . . 30.	9. 8935447.

DEMONSTRACION.

EL angulo B C D (31. 3.) es recto: luego (trigonometria) en el triangulo rectangulo B C D, es como la hipotenusa B D al radio, assi el lado B C al seno del angulo B D C 51. grados, y 30. minutos, que por salir tan exacto, satisface al entendimiento,

de

de suerte, que equivale, como si fuera demonstracion Geometrica; y (20. 3.) el angulo B A C es duplo del angulo B D C: luego (Ax. 6.) este angulo es de 103. grados, que es lo que se avia de hazer.

COROLARIO.

De aqui se sigue, que el angulo C A D, es de 77. grados, porque (13. 1.) los angulos en A, son iguales à dos rectos, ò à 180. grados, y (dem.) el angulo B A C 103. luego (Ax. 3.) el angulo C A D, es de 77. grados.

SCHOLIO.

De esta Proposicion se infiere modo para cortar el circulo en 360. partes iguales, y otras infinitas partes, lo que se consigue con la adiccion, ò substraccion de diferentes angulos conocidos: porque si del angulo C A D 77. se resta (11. 4.) vn angulo de 72. grados serà el residuo 5. grados, y luego se dividirà el circulo en 72. partes iguales. Item, si al angulo de 5. grados se le añade el de 45. semirecto, se tendrà vn angulo de 50. grados, y su cumplimiento à recto serà de 40. grados, con el qual se divide el circulo en nueve partes iguales.

PROPOSICION XII. PROBLEMA.

Cortar la tercia parte de qualquiera angulo rectilineo agudo.

FIGVRA 20.

Dado el angulo B A C, ſe ha de cortar ſu tercia parte.

CONSTRVCCION.

DEſde A, con qualquiera diſtancia, deſcrivaſe el circulo B C D, y alarguèſe B A en A haſta cortar la circunferencia en D: tirèſe la recta D C, y alarguèſe en C indefinida: cortèſe (9. 1.) del angulo BAC, ſu quarta parte E A C con el radio A E, y tirèſe la recta D E F indefinida: deſde E (3. 1.) cortèſe E F ⌒ E D, y deſde D, la D G ⌒ D F: en G ſobre la D G (11. 1.) levantèſe la perpendicular G H indefinida, y la D G (10. 1.) cortèſe en dos iguales en I: deſde I à la H G (31. 1.) tirèſe la paralela I K quien cortarà la circunferencia B C D en K, y tirèſe la recta A K: digo, que el angulo K A C, es tercia parte del angulo B A C.

PREVENCION.

EN A, ſobre la A K (23. 1.) formèſe el angulo L A K ⌒ K A C, y tirèſe la recta G L, alargandola en L, haſta cortar la circunferencia C D B en M: tirèſe la recta M D, y al triangulo D M G (5. 4.) circunſcrivaſe el circulo G D M: tirenſe las rectas A M. A L. L D. M C. K M. K D. K G.

DE-

DEMONSTRACION.

(con.) EL angulo H G D es recto, I K paralela à H G: luego (29. 1.) los angulos en I tambien ſon rectos: Idem (con.) D G eſtà cortada en dos iguales en I: luego (3. 3.) el centro del circulo G D M eſtà en la ſecante I K, quien ſin duda es el punto K: porque ſi ſe dixere, que eſte punto no es el centro de eſte circulo, ſealo otro qualquiera, dentro, ò fuera del triangulo G K D en la recta I K, como N, ò en ella prológada como O, y tirènſe las rectas D N P: D O Q que corten la circunferēcia en P, y en Q: tirènſe las rectas P G. Q G, y ſuponiendo qualquier centro N, ò en O ſerà (31. 3.) el angulo P G D, ò Q G D recto: idem (dem.) el angulo H G D recto: luego (12. d. 1.) el angulo H G D ∽ P G D, el todo igual à la parte, ò el angulo H G D ∽ Q G D, lo que es abſurdo, y lo miſmo ſe demueſtra, ſi ſe tomare por centro otro qualquiera punto fuera del punto K: luego eſte es el centro del circulo G D M, y (15. d. 1.) los radios K G. K M. K D, ſon iguales entre sì, (24. d. 1.) los triangulos G K D. G K M, ſon dos iſoſceles, y (con.) K L ∽ K C (27. 3.) el angulo K M L ∽ K D C: luego (26. 1) los dos iſoſceles K M G. K D G, ſon iguales entre sì, G M ∽ G D, y el angulo G K M ∽ G K D: idem (15. d. 1.) A K ∽ A M ∽ A D, y (dem.) K M ∽ K D: luego (8. 1.) los dos iſoſceles K A M. K A D ſon iguales entre sì, y (dem.) el angulo

La G

GKM ∽ GKD : luego (Ax. 2.) el angulo GKM+AKM ∽ GKD+AKD : pero (15. 1. cor.) todos eſtos angulos al rededor de K, ſon iguales à quatro rectos : luego (Ax. 7.) los dos angulos GKD+AKD, ſon iguales à dos rectos; y (14. 1.) las rectas AK. KG, componen vna linea recta AG: idem (32. 1.) el angulo AKD externo, es igual à los dos internos AGD+KDG, y (dem.) el angulo AGD ∽ KDG: luego (Ax. 6.) el angulo AKD, ò ſu igual ADK es duplo del angulo KDG; idem (20. 3.) el angulo BAK es duplo del angulo BDK, el angulo KAC duplo del angulo KDC, y (dem.) el angulo BDK, duplo del angulo KDC : luego (Ax. 6.) el angulo BAK, es duplo del angulo KAC, el angulo BAC triplo del angulo KAC, ò eſte tercia parte del angulo BAC : luego de eſte ſe ha cortado, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

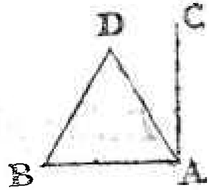
SCHOLIOS.

1. SI el angulo, de q̃ ſe ha de cortar ſu tercia parte, fuere obtuſo como el angulo BAR, ſe cortarà (9. 1.) en dos iguales con la AC, y hecha la miſma conſtruccion (P. ant.) cortando del angulo BAC ſu tercia parte KAC, ſe tendrà el angulo BAK, tercia parte del angulo BAR: porque ſiendo el angulo KAC tercia parte del angulo BAC, y (con.) el angulo BAR duplo del angulo BAC, el angulo BAK du-

plo

plo del angulo K A C, es dos tercias partes del angulo B A R: luego el angulo B A R es triplo del angulo B A K, y efte tercia parte: luego fi el angulo es obtufo, &c. que es lo que fe avia de hazer.

2. La trifeccion del angulo recto B A C, es muy fabida, pues fi defde A, con qualquiera diftancia A B, fe forma (1. 1.) el equilatero A B D es el angulo D A C tercia parte del angulo B A C recto: porque (con.) el triangulo A B D es equilatero: luego (5. 1. cor.) es equiangulo (32. 1.) fus tres angulos fon iguales à dos rectos, y (Ax. 3.) el angulo B A D es vna tercia parte de dos rectos, ò dos tercias partes de vn recto: pero (fup.) el angulo B A C es recto: luego (Ax. 3.) el angulo B A C es tercia parte del angulo B A C.



NOTA.

LA conftruccion de efta trifeccion, fe puede abreviar, ò executar, fin exceder à la (9. 1.) por que aviendofe cortado la D G ⌒ D F, fi fe tira la A G, efta por lo demonftrado cortarà el arco C K tercia parte del arco B C.

***　***　***

SEGVNDO MODO.

Cortar la tercia parte de qualquiera angulo rectilineo agudo por los tres postulados.

FIGVRA 21.

Del angulo B A C se ha de cortar su tercia parte.

CONSTRVCCION.

DEsde A con qualquiera distancia (post.3) descrivase el circulo B C D, y con la misma desde C descrivase vna circunferencia A E F, alarguèse (2.) C A en A, hasta cortar la circunferencia B D en G, y la B A en A, hasta cortar la misma en D, y alargandola en D indefinida: tirèse (1.) la recta D C, y alarguèse en C indefinida: desde D con la distancia D C (3.) descrivase la circunferencia C H, quien cortarà la prolongada de la B D en H, y tirèse (1.) la recta H C, quien cortarà la circunferencia A E en E: alarguèse (2.) la H C en C, hasta cortar la circunferencia A E F en F, y desde E (3) con la distancia E F descrivase la circunferencia F I, que corte la prolongada de la D C en I: tirèse la recta I G, quien cortarà la circunferencia B C D en K, y tirèse (1.) la recta A K; digo, que el angulo K A C, es tercia parre del angulo B A C,

TERCER MODO.

FIGVRA 22.

Cortar la tercia parte de qualquiera angulo rectilineo B A C agudo.

CONSTRVCCION.

DEſde A con qualquiera diſtancia, deſcrivaſe el circulo B C D, y alarguèſe la B A en A haſta cortar ſu circunfetencia en D; tirèſe la cuerda B C, y eſta (10. 1.) cortèſe en dos iguales en E: deſde B, (1.4.) acomodèſe la recta B F ⌒ B E, y tirèſe la recta D C alargandola en C indefinida; deſde D (3. 1.) cortèſe D G ⌒ D B, y tirèſe la recta F G, quien paſſando por la circunferencia le cortarà en el punto H: tirèſe A H: digo que el angulo H A C, es tercia, parte del Angulo B A C dado.

PROPOSICION XIII. PROBLEMA.

Cortar qualquiera angulo curbilineo corniangulo equirradio, en tres angulos iguales.

FIGVRA 23.

Dado el angulo curbilineo B A C ſe ha de cortar en tres iguales.

CONS-

CONSTRVCCION.

HAllase (1. 3.) el centro del arco A C, y serà el punto D: tirèse A D, y desde A con la distancia de esta, descrivase el arco E D C, que cortarà la curba A B en B, y la curba A C en C: tirènse los radios A B, y A C, y el angulo rectilineo B A C (P. 11. de este) cortèse en tres angulos iguales con los radios A F, y A G: desde F con la distancia A F descrivase el arco A H, y con la misma desde G el arco A E: desde H descrivase el arco A F, y desde E el arco A G: digo, que las curbas A F, y A G cortan el angulo curbilineo B A C en tres angulos iguales.

PREVENCION.

Desde C con la distancia del radio A C, descrivase el arco A D.

DEMONSTRACION.

EN el circulo E D C (15. d. 1.) todos sus radios son igüales entre sì: idem (con.) con la distancia del radio se han descripto los arcos AE. AH. AD, y con el mismo los arcos A G. A F: el punto D es centro del arco A C, y el arco A B es equirradio con el arco A C: luego (Ax. 1.) todos los dichos arcos, y los arcos C D. F H, y G E, son iguales entre sì: luego (23. d. 1.) los triangulos curbilineos C A D. F A H. G A E son equilateros, y (5. 1: cor.) equiangulos; luego (4, 1.) dichos triangulos son iguales

entre

entre sì : idem (con.) los tres angulos rectilineos B A G. G A F. F A C, ſon iguales entre sì : luego (26. 3.) los arcos B G. G F. F C. ſon iguales entre sì: luego (8. 1.) los triangulos curbilineos B I A K G. G K A L F. F L A M C. ſon iguales entre sì, y los angulos curbilineos B A G. G A F. F A C. ſon iguales entre sì : luego el angulo curbilineo B A C ſe ha cortado,&c. que es lo que ſe avia de hazer.

COROLARIO.

De aqui ſe ſigue, que la ſuperficie de vn ſector de circulo B A C, es igual à la de vn triangulo curbilineo B I A M C quando el ſector, y el curbilineo tienen por baſe vna miſma, ò iguales circunferencias deſcriptas con iguales radios, y los lados del curbilineo (4. d. de eſte) equirradios, porque (dem.) la recta A B ∽ A C, y la curba A I B ∽ A M C: luego (Ax. 8.) el ſegmento B I A B ∽ C M A C, luego (Ax. 3 y 2.) el ſector BAC menos el ſegmento B I A B mas el ſegmento C A M C, que es el curbilineo B I A M C B es igual à dicho ſector B A C: luego la ſuperficie,&c.

PROPOSICION XIV. PROBLEMA.

Cortar qualquiera angulo curbilineo, corniangulo, varieſpherico en tres angulos iguales.

FIGVRA 24.

Dado el angulo curbilineo B A C varieſpherico, ſe ha de cortar en tres angulos iguales.

CONSTRVCCION.

HAllaſe (1.3.) el centro del arco A B, y ſerà el punto D, y por la miſma hallaſe el centro del arco A C, y ſerà el punto E: tirènſe las rectas A D. A E, y el angulo D A E (P. 11. de eſte) cortèſe en tres angulos iguales con las rectas A F, y A G: deſde F con la diſtancia de la A F deſcrivaſe el arco A H indefinido, y deſde G con la diſtancia de las A G, deſcrivaſe el arco A I indefinido: digo, que eſte, y el arco A H cortan el angulo B A C en tres angulos iguales.

PREVENCION.

DEſde A con la diſtancia A E, deſcrivaſe el arco E C que corte A C en C: deſde A con la diſtancia A F, deſcrivaſe el arco F H que corte A H en H: deſde A, con la diſtancia A G, deſcrivaſe el arco G I que corte A I en I, y deſde A con la diſtancia A D deſ-

descrivase el arco D B que corte A B en B; en A sobre la A E (23. 1.) hagase el angulo E A K ∽ E A F.

DEMONSTRACION.

(con.) A D es radio comun de los arcos A B, y B D: y A E tambien comun de los arcos A C, y C E: luego (23. d. 1.) los triangulos rectilineos A B D. A C E son equilateros, y (5. 1. cor.) equiangulos: idem (28. 3.) el arco D B ∽ A B, y el arco E C ∽ A C: luego (5. 1.) el angulo mixtilineo A D B ∽ D A B, y el mixtilineo E A C ∽ A E C: pero (dem.) los rectilineos B D A, C E A equilateros, y equiangulos: luego (1. d. 6.) los mixtilineos A B D A. A C E A. son semejantes: idem (con.) A F es radio comun de los arcos A H, y H F, y el radio A G de los arcos A I, y I G: luego (Ax. 1.) estos dos triangulos son semejantes entre sì; y à los triangulos A B D A. A C E A: luego (5. 1.) sus angulos mixtilineos sobre sus bases son iguales entre sì: idem (con.) los tres angulos rectilineos D A G. G A F. F A E son iguales entre sì, y el angulo E A K ∽ F A E: luego (Ax. 8.) los quatro angulos D A G. G A F. F A E. E A K son iguales entre sì: luego (Ax. 3.) el angulo mixtilineo B A D --- G A F ∽ H A F --- F A E, y el angulo H A F --- F A E ∽ C A E --- E A K: luego (Ax. 6.) los angulos C A K. H A E. I A F. B A G, son iguales entre sì: luego (Ax. 2. y 3.) el angulo C A K +

EAK --- HAE ∽ HAE + FAE --- IAE: el angulo HAE + FAE --- IAF ∽ IAF + GAF --- BAG: luego (Ax. 8.) los angulos curbilineos CAH. HAI. IAB son iguales entre sì: luego el angulo curbilineo BAC se ha cortado, &c. que es lo que se avia de hazer.

PROPOSICION XV. PROBLEMA.

Sobre una recta dada terminada, formar un eptagono equilatero, y equiangulo.

FIGVRA 25.

Dada la recta AB terminada se ha de formar un eptagono equilatero, y equiangulo.

CONSTRVCCION.

Desde B (9. 6.) cortèse BC quatro septimas partes de AB, y en B sobre la AB (11. 1.) tirèse la perpendicular BD indefinida: desde B (3. 1.) cortèse BD ∽ BC, y tirèse la recta AD: desde A, y desde B con la distancia AD descrivanse dos arcos, que se corten en E, y con la misma desde E descrivase el circulo ABF: digo, que en la circunferencia de este circulo se ajusta siete vezes la recta AB, con lo qual queda formado el eptagono equilatero, y equiangulo.

PREVENCION.

Cortèse (10. 1.) A B en dos iguales en G, y tirèse la recta G E alargandola en E hasta cortar la circunferencia en F: tirènse las rectas A F. B F. y en A sobre la A B (23. 1.) formese el angulo B A H ∽ A F B.

DEMONSTRACION.

Demuestrase (trisección) el angulo B A H tercia parte del angulo B A F: idem (con.) AG ∽ BG, y (15. d. 1.) AE ∽ E B: luego (8. 1.) el triangulo E G A ∽ E G B, el angulo A E G ∽ G E B, y (13. 1.) el angulo A E G ∽ B E G, E F ∽ E A ∽ E B: luego (4. 1.) el triangulo A E F ∽ B E F, la base FA ∽ FB: luego (24. d. 1.) el triangulo F A B es vn isosceles (5. 1.) los angulos sobre la base son iguales entre sì, y por lo demonstrado triplos del angulo vertical (33. 6.) las circunferencias F A. F B triplas de la circunferencia A B: luego (24. 3.) la recta A B se acomoda siete vezes en toda la circunferencia del circulo A B F: luego sobre vna recta dada, &c. que es lo que se avia de hazer.

THEOREMAS DE LA SEPTIMIDAD.

1. *Si al angulo recto se le añade ser septima parte, la suma de ambos angulos serà dos septimas partes de quatro rectos.*

2. *Si al angulo semi recto, se le añade su septima parte, la suma de ambos angulos serà vna septima parte de quatro rectos.*

3. *Si al angulo tercia parte de dos rectos, se le añaden cinco septimas partes, la suma de ambos angulos serà dos septimas partes de quatro rectos.*

4. *Si à vn angulo septima parte de quatro rectos se le añade su sexta parte, la suma de ambos angulos serà igual à dos tercias partes de vn recto.*

5. *Si del angulo recto se resta tres septimas partes, el residuo serà vna septima parte de quatro rectos.*

6. *Si de vn angulo igual à dos tercias partes de vn recto, se resta su septima parte, el residuo serà vna septima parte de quatro rectos.*

7. *Si de la circunferencia del semicirculo B C D (Fig. 10.) se corta desde B, su tercia parte B C: desde D, su quarta parte D F, y se corta el residuo C H E en dos partes semejantes en H: esto es como C B à F D, asi C H à H F, tendràn entre sì las circunferencias B C H, y D F H, la razon de 4. à 3. es facil su demonstracion.*

PRO-

PROPOSICION XVI. PROBLEMA.

Dados dos circulos de vn comun radio, cortar ſin el compàs la ſeptima parte de vna circunferencia, dos ſeptimas de la otra, cortar vn angulo ſeptima parte de dos terceras de vn recto, y inſcrivir en vno de los circulos dados vn triangulo iſoſceles, cuyos angulos ſobre la baſe ſean triplos del angulo vertical.

FIGVRA 26.

Dados los circulos B C D. A E D deſcriptos de vn comun radio A F, ſe ha de cortar ſin el compàs la ſeptima parte de vna circunferencia, y dos de la otra, &c.

CONSTRVCCION.

TIrènſe las rectas D A B. E A C : E D, y la B F, quien cortarà la A E en G, y la E D en H: tirèſe A H I que corte la circunferencia B C D en I, y tirèſe la recta I G que corte la B D en K: tirèſe E K L que corte la circunferencia B C en L, y tirèſe la recta L A M N que corte la circunferencia D A E en N: tirèſe N F O que corte la circunferencia L C en O, y tirènſe las rectas O E. O M. E M. E F: digo, que la circunferencia L O C, es vna ſeptima parte de la

del

del circulo B C D, que la circunferencia E N es dos ſeptimas partes de la del circulo A D E, que el angulo M A F es vna ſeptima parte de dos terceras de vn recto, y que el triangulo O E M es vn iſoſceles, cuyos angulos ſobre la baſe ſon triplos del angulo vertical.

DEMONSTRACION.

DEmueſtraſe como la antecedente, que el triangulo O M F, es vn iſoſceles, y que los angulos ſobre la baſe ſon triplos del angulo vertical: idem (20. 3.) el angulo E A M es duplo del angulo E O M: pero (32. 1.) y por lo demonſtrado el angulo E O M es vna ſeptima parte de dos rectos: luego (Ax. 6.) el angulo E A M, ò (15. 1.) ſu vertical L A C es vna ſeptima parte de quatro rectos, y (33. 6.) la circunferencia L O C vna ſeptima parte de toda la del circulo B C D: idem (20. 3.) el angulo E F M es duplo de el angulo E A M: luego por lo demonſtrado (33. 6.) la circunferencia E N es dos ſeptimas partes de toda la del circulo A E D: idem (con.) el triangulo A E F es equilatero, y (15. 4. cor. 2.) qualquiera angulo E A F es dos tercios de vn recto: pero (P. antec. theor. 6.) el angulo E A M es ſeis ſeptimas partes del angulo E A F: luego (Ax. 3.) el angulo M A F es vna ſeptima parte del angulo E A F igual à dos terceras partes de vn recto: luego dados dos circulos de vn comun radio, ſe ha cortado ſin el compàs, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

PRO-

PROPOSICION XVII. PROBLEMA.

Cortar la parte que ſe pide de qualquiera angulo rectilineo dado.

FIGVRA 27.

Dado el angulo B A C ſe ha de cortar ſu tercia parte.

CONSTRVCCION.

DEſde A con qualquiera diſtancia, deſcrivaſe el circulo B C D, y tirèſe la recta B C: deſde A à la B C (31. 1.) tirèſe la paralela D F diametro, y en A ſobre la D F (11. 1.) levanteſe la perpendicular A G indefinida. El radio A D (30. 6.) cortèſe en extrema, y media razon en H, y deſde D (1. 4.) acomodeſe la recta D I ∽ A H: tirèſe I H alargandola en H haſta concurrir con la A G en algun punto G, y tirènſe las rectas G B. G C las que cortaràn el diametro D F en los puntos K; y L: deſde L (9. 6.) cortèſe L M, tercia parte de K L, y tirèſe la recta G M N que corte la circunferencia B C en algun punto N: tirèſe A N: digo, que el angulo N A C es el que ſe pide tercia parte del angulo B A C.

PREVENCION.

ALarguèſe la G A en A, haſta cortar la cuerda B C en O, y la circunferéncia B N en el punto P.

DEMONSTRACION.

DEmueſtraſe (triſeccion) el angulo B A C triplo del angulo N A C, y ſerà el angulo B A N duplo : idem (con.) los angulos D A G. F A G ſon rectos, y la B C paralela à D F : luego (29. 1.) los angulos en O ſon rectos (3.3.) O B ∽ O C (15.d.1.) A B ∽ A C : luego (8. 1.) el triangulo AOB ∽ AOC, el angulo B A O ∽ O A C (dem.) el angulo B A B triplo del angulo N A C : luego (Ax. 7.) el angulo B A C es triplo del angulo B A N, y el angulo N A B duplo : luego (33. 6.) el arco B C es ſexuplo del arco P N, P N C triplo, B A N quadruplo, N C duplo, &c. Idem (dem.) O B ∽ O C, los angulos en O rectos, y la O G es comun en los triangulos G O B. G O C: luego (4. 1.) eſtos dos triangulos ſon iguales entre sì, G B ∽ G C, y (dem.) K L paralela à B C : luego (4.6.) A K ∽ A L, y (con.) K L tripla de M L, K M dupla, y (Ax. 7.) A L tripla de A M, K M quadrupla, y M L dupla : pero (dem.) la circunferencia B C tripla de N C, ò ſexupla de P N; B N quadrupla, N C dupla, &c. luego (11. 5.) ſon ſemejantes el arco B C al arco B N como K L à K M, el arco B N al arco N C como

K

K L à M L, y los demàs,&c. luego (alternando) son proporcionales los segmentos del arco B C con los segmentos de la recta K L: luego todas las rectas tiradas del punto G à la circunferencia B C cortan el arco B C, y la recta K L en partes proporcionales: luego del mismo modo se cortarà otra qualquiera parte del angulo B A C, ò otra qualquiera, cortando la K L en tantas partes iguales en que se pide dividir vn angulo, que es lo que se avia de hazer.

SCHOLIO.

DE aqui se sigue la dimencion del circulo en las partes iguales que se quisiere: porque si se dà el angulo B A C recto, y se corta (por esta) en qualesquiera partes iguales se cortarà assimismo en otras tantas la circunferencia del circulo B C D, ò de otra qualquiera consta de la (32. 1. cor. 4.) con la qual escuso la demonstracion, de diferentes exemplos, que para ello se ofrecen.

N O T A.

COnsiste el acierto de la operacion de esta Proposicion, en dàr con exactez el punto artificial G, y fuera mas facil, y mas seguro si se hallara modo para dàr desde los puntos F, y D la intersecacion G, ò cortar desde A la perpendicular A G, por lo qual no he hallado modo mas facil, siendo assi, que proximamente

mente al diametro DF con qualquiera recta GD, ò GF, ſon entre sì como el quadrado de DF, 800. al quadrado de GD, ò GF 881. y el radio AF con AG como el quadrado de AD 200. al quadrado de AG 681: cuya razon he hallado en el calculo trigonometrico.

Es facil demonſtrar, que el triangulo IDH es vn iſoſceles, cuyos angulos ſobre la baſe ſon duplos del angulo vertical: luego ſi deſde los eſtremos del diametro de vn circulo D, y F ſe corten ambos radios en extrema, y media razon en los puntos H, y Q, y deſde los puntos H, y Q con la diſtancia AH, ò AQ ſe deſcriven las circunferencias AI. AR, y ſe tiràn las rectas IH. RQ, eſtas alargadas en H, y en Q, concurriràn en G punto artificial.

PROPOSICION XVIII. PROBLEMA.

Entre dos rectas dadas, como quiera, hallar dos medias proporcionales.

FIGVRA 28.

Dadas las rectas V, y X, ſe han de hallar dos medias proporcionales.

CONSTRVCCION.

Tireſe qualquiera recta BE indefinida, y deſde qualquiera punto A, corteſe (3. 1.) AE ⏜ V. AB ⏜ X. corteſe (10. 1.) BE en dos mitades en F, y deſde F con la diſtancia F E, ò F B, deſcrivaſe el circulo B C E D : en E ſobre la B E (11. 1.) tirèſe la perpendicular E G indefinida, y el ſemicirculo B C E (30. 3.) cortèſe en dos mitades en H : tirèſe la recta E H, y eſta (10. 1.) cortèſe en dos mitades en I: tirèſe A I, y deſde E (3. 1.) cortèſe E G quadrupla de A I: tirèſe G A, quien paſſando por la circunferencia le cortarà en D, y alarguèſe G A en A haſta cortar la circunferencia en C : digo, que las rectas A C, y A D ſon las dos medias proporcionales que ſe buſcan.

PREVENCION.

Deſde los puntos A, y E con la diſtancia A D deſcrivanſe dos arcos, que ſe corten en K, y tirènſe las rectas K E. K A, alargando eſta en A indefinida : deſde B con la diſtancia B A, deſcrivaſe vna circunferencia, que corte la K L en L : tirèſe B L, y deſde K à la B L (31. 1.) tirèſe la paralela K M, que corte la B E en M : tirèſe la recta L M.

DEMONSTRACION.

(con.) A K ⌒ K E, A B ⌒ B L : luego (24. d. 1.) los triangulos A K E, A B L ſon iſoſceles (5. 1.) los angulos ſobre las baſes ſon iguales entre sì (15. 1.) el angulo B A L ⌒ E A K : luego (32. 1. cor. 1.) eſtos dos triangulos ſon equiangulos, el angulo A B L ⌒ A K E : idem (con.) K M es paralela à B L : luego (29. 1.) los triangulos A K M, A B L ſon equiangu-

los

los (demueſtraſe triſeccion) el angulo A L B duplo del angulo A L M, y (dem.) el angulo BAL ⌒ ALB; luego (Ax. 6.) el angulo B A L es duplo del angulo A L M, y (32. 1.) el angulo externo BAL ⌒ ALM + A M L internos: luego (Ax. 7.) el angulo A M L ⌒ A L M: (6. 1.) A M ⌒ A L, y (dem.) los triangulos A B L. A M K equiangnlos: luego (Ax. 8.) los triangulos A B L. A K M. A K E ſon equiangulos, y (4. 6.) ſon proporcionales A B à A L, aſsi A M à A K, y como A M à A K, aſsi A K, à A E: pero (dem.) A L ⌒ A M: luego (11. 5.) A B es à A L, ò à ſu igual A M, como eſtà à la A K continuas proporcionales, y (dem.) A M à A K como eſtà à la A E continuas proporcionales: luego A B. A L. A K. A E ſon quatro rectas continuas proporcionales, y (35. 3.) A B es à A C como A D à A E: luego AB. AC. AD. A E, ſon quatro rectas continuas proporcionales: idem (con.) A E ⌒ V. A B ⌒ X: luego entre dos rectas dadas como quiera, ſe han hallado, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

SCHOLIO.

DE aqui ſe ſigue la duplicacion del cubo: porque ſi por conſtrucion ſe dà la A E dupla de A B, ſerà (33. 11.) la recta A B à la recta A E, aſsi el cubo de la A C al cubo de la A B, eſto es el cubo de la A C duplo del cubo de la A B. Con lo qual ſe podrà duplicar el Ara de la Eſtatua de Apolo, para que ceſſe la

peſte

pefte de efta incognita propoficion tan deffeada entre los Mathematicos, y de tanto beneficio; y vtilidad de efta ciencia, con la qual fe refuelven vn numero infinito de Propoficiones.

PROPOSICION XIX. THEOREMA.

La efphera cuyo diametro es cuerda de vn arco, fuma de vna fexta, y octava parte de la circunferencia de vn circulo, es mitad, ò femifuma de otra efphera de cuyo circulo maximo es cuerda.

FIGVRA 29.

CONSTRVCCION.

DEfcrivafe qualquiera circulo B C D, y por fu centro A, tirèfe el diametro B D: defde B: (1.4.) con la diftancia del radio, cortèfe fu circunferencia en E, y tirèfe el radio A E, en A fobre la A E (11.1.) levantèfe la perpendicular A F, y el angulo E A F (9.1.) cortèfe en dos iguales con el radio A C: tirèfe la recta B C, y efta (10.1.) cortèfe en dos iguales en G defde G con la diftancia G B, ò G C, defcrivafe el circulo B C H: digo, que la efphera B C H, cuyo diametro B C es cuerda del circulo maximo B C D, es mitad de fu efphera B C D.

PREVENCION.

ALarguèſe B D en D indefinida, y deſde D (3. 1.) cortèſe D I ∽ A D: cortèſe (10. 1.) I B en dos iguales en K, y deſde K con la diſtancia K I, ò K B deſcrivaſe el circulo B L I M: deſde A con la diſtancia B C deſcrivaſe vn arco, que corte la circunferencia B L I en L, y tirèſe L A alargandola en A haſta cortar la circunferencia I M B en M.

DEMONSTRACION.

DEmueſtraſe (P. 18. de eſte) las rectas A B. A M. A L. A I continuas proporcionales; idem (con.) A B. A D. D I, ſon iguales entre sì, (Ax. 6.) A I dupla de A B: luego (33. 11.) la razon, que tiene la A I à la A B, tiene el cubo de la A L al cubo de la A I, ò de ſu igual B D: pero (con.) A L ∽ B C: luego el cubo de la B D es duplo del cubo de la B C, y (18. 12.) la eſphera cuyo diametro es B D, es dupla de la eſphera, cuyo diametro es B C: idem (con.) B C, es cuerda de vn arco compueſto de la ſexta, y octava parte de la circunferencia B C D: luego la eſphera, &c. que es lo que ſe avia de demonſtrar.

COROLARIO.

DE aqui ſe infiere el modo de hallar continuadas, al infinito la ſemiſuma de qualeſquiera eſphera: porque ſi en el circulo B C K ſe inſcrive, ò ſe acomoda la cuerda de vn arco ſexta, y octava parte de ſu cir-

cunfe-

cunferencia ferà fu cuerda diametro de vna efphera mitad de la que fu diametro es B C, y quarta parte de la que fu diametro es B D; luego de la mifma fuerte fe continuarà al infinito.

Tambien fe figue, que la Lunula efpherica B H C D B, con la Lunula efpherica B C D B M I B, fon entre sì como 4. à 27. fe infiere de la (33. 11.) y afsi la efphera B C D à la efphera B L I M.

SCHOLIO.

AQui fe me ofrecen dos cofas, la primera, que geometricamente fe pueden dàr en la Pantometra los lados de los cubos por las dos Propoficiones antecedentes, y las lineas cordometricas por el Scholio de la (P. 17. de efte.) Y la fegunda, el que fe puede vfar de eftas lineas para hallar qualquiera angulo de grados, y minutos, lo que ferà de vna grande vtilidad para infinitas operaciones, fin embargo de no anotarfe en la Pantometra mas, que los grados.

PROPOSICION I.

Abrir la Pantometra en las lineas cordometricas, de fuerte, que las cuerdas de los numeros iguales, tranfverfales, defde vn grado hafta 60. exceden de otros tantos minutos à los mifmos numeros, que feñala la Pantometra defde fu centro en cada vna de fus dos lineas cordometricas.

OPERACION.

COn la distancia de 61. grados, tomados desde el centro de la Pantometra en vna de las lineas cordometricas, abraze la Pantometra en los dos numeros 60. de ambas lineas, y dexando el instrumento inmobil: digo, que todas las cuerdas transversales de dos numeros iguales exceden de otros tantos minutos à las de los mismos numeros tomados desde el centro de la Pantometra en vna de dichas lineas.

DEMONSTRACION.

(con.) LA cuerda de los 60. grados desde el centro de la Pantometra, y la transversal de los dos 60. son entre sì como 60. à 61. esto es como 60. grados, à 60. grados, y 60. minutos, luego (2. 6.) como 60. à 61. Assi 50. grados, à 50. grados, y 50. minutos, ò como 60. à 61. Assi 10. grados, à 10. grados, y 10. minutos, y como 60. à 61. Assi 1. grado, à 1. grado, y 1. minuto, luego, &c. el todo como en la siguiente Tabla.

TA-

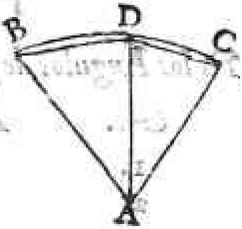
TABLA.

De los Angulos de grados, y minutos, desde 1. hasta 60.

Grs.	Ms.	Grs.	Ms.
1.	1.	31.	31.
2.	2.	32.	32.
3.	3.	33.	33.
4.	4.	34.	34.
5.	5.	35.	35.
6.	6.	36.	36.
7.	7.	37.	37.
8.	8.	38.	38.
9.	9.	39.	39.
10.	10.	40.	40.
11.	11.	41.	41.
12.	12.	42.	42.
13.	13.	43.	43.
14.	14.	44.	44.
15.	15.	45.	45.
16.	16.	46.	46.
17.	17.	47.	47.
18.	18.	48.	48.
19.	19.	49.	49.
20.	20.	50.	50.
21.	21.	51.	51.
22.	22.	52.	52.
23.	23.	53.	53.
24.	24.	54.	54.
25.	25.	55.	55.
26.	26.	56.	56.
27.	27.	57.	57.
28.	28.	58.	58.
29.	29.	59.	59.
30.	30.	60.	60.

PROPOSICION II.

PETICION.



Pidese formar sobre vna recta dada vn angulo de 57. grados, y 31 minutos.

FIGVRA.

Dada la recta A B, se ha de formar vn angulo de 57. grados, y 31. minutos.

OPERACION.

DEsde A, con las distancias de 60. grados, tomados desde el centro de la Pantometra, descrivase la circunferencia B C, tomando tambien desde el centro la cuerda de 61. grados, abrasse con este la Pantometra en los dos numeros 60. de ambas lineas cordometricas: dexèse el instrumento inmobil, y desde B. (1. 4.) acomodese la recta B D ⌒ à la cuerda transversal de 31. grados: desde D (1. 4.) acomodese la recta D C ⌒ à la cuerda de 26. grados, tomada desde el centro de la Pantometra, y tirèse la recta A C: digo, que el angulo B A C es el que se pide.

DEMONSTRACION.

(con.) EL radio A B es igual à la cuerda de 60. grados, tomados desde el centro de la Pantometra

tometra en vna de las lineas cordometricas, y la recta B D es cuerda de vn arco de 31. grados, tomada en las lineas transversales de la misma Pantometra, abierta en los dos 60. con la distancia de la cuerda de 61. grados: luego (P. antec.) la cuerda B D será de 31. grados, y 31. minutos respective à la cuerda A B de 60. grados, idem (con.) la recta D C es igual à la cuerda de 26. grados, tomados desde el centro de la Pantometra: luego (Ax. 2.) el arco B D + D C será vn arco de 57. grados, y 31. minutos, y (33. 6.) tambien lo es el angulo B A C: luego sobre vna recta dada se ha formado, &c. que es lo que se avia de hazer.

NOTA.

DEl mismo mòdo se formarà qualquiera otro angulo de grados, y minutos, cortando siempre primero vna porcion de arco de grados correspondientes à los minutos del angulo que se pide, y cortando despues otro arco, residuo de todo el arco de dicho angulo propuesto, la suma de ambos arcos, será el total del angulo, obrando como en el exemplo antecedente.

ADVERTENCIA.

SI se quisiere tomar el radio A B mayor, ò menor, de la distancia, que ay desde el centro de la Pantometra al punto de 60. grados, se harà la misma operacion con dos Pantometras, abriendo la vna en los nume-

numeros 60. de las lineas cordometricas cõn la distancia del radio, que se quisiere, y tomando en ella la distancia de los dos numeros 61. se abrirà la otra Pantometra en los dos 60. y dexando ambos instrumentos inmobiles, se harà la misma operacion.

PROPOSICION XX. THEOREMA.

El triangulo isosceles, cuya base es el diametro de vn circulo, y la perpendicular tirada desde el angulo vertical à la base, se compone de vn lado del equilatero, y del quadrado, ambos inscriptos en el mismo circulo, es igual al mismo circulo.

FIGVRA 30.

SVPOSICION.

EL triangulo E D C es vn isosceles, tiene por base el diametro D C del circulo B C D, y la perpendicular A E se compone de vn lado del equilatero, y del quadrado, ambos inscriptos en el circulo B C D: digo, que el isosceles E D C es igual al mismo circulo B C D.

PREPARACION.

COrtèse (10. 1.) A E en dos iguales en X, y alarguese C D en D indefinida: desde A (3. 1.) cortèse A F ∽ A X, y tirèse la recta F B: en B sobre la

F B (11. 1.) tirèſe la perpendicular B G que corte el radio A C en el punto G, y tirèſe la recta B G: cortèſe (10. 1.) A B en dos iguales en H; y el angulo B A C (9. 1.) cortèſe en dos iguales con la A I radio: en H ſobre la A B (11. 1.) levantèſe la perpendicular H K que corte el radio A I en K, y tirenſe las rectas K B. K G: al triangulo B K G (5. 4.) circunſcrivaſe el circulo B K G, cuyo centro ſea el punto L, y deſde H (9. 6.) cortèſe H M tercia parte de H B: en M ſobre la A B (11. 1.) levantèſe la perpendicular M N que corte la cuerda B K en N, y tirèſe la recta A N alargandola en N haſta cortar la circunferencia B I en el punto O.

DEMONSTRACION.

POr la triſeccion demueſtraſe el angulo B A I triplo del angulo O A I. Idem (con.) el angulo B A I ∽ I A C: luego (Ax. 3.) el angulo B A C es ſextuplo del angulo O A I, el angulo O A C quadruplo, y el angulo B A O duplo del angulo O A I; pero (33. 6.) los angulos en el centro A ſon entre sì como ſus arcos en quien inſiſten: luego el arco C B es ſextuplo del arco O I, el arco O C quadruplo, el arco I C, ò ſu igual I B triplo, y el arco B O duplo del arco O I: idem (con.) A H ∽ B H, B H, tripla de H M, A M quadrupla, B M dupla de H M: luego (7. d. 5.) el arco B C es à A B como el arco C O à A M, el arco C I es à A H, aſsi el arco I B à B H, y el

arco

arco B O es à B M, como el arco O I à H M, y alternando convirtiendo, y permutando los ſegmentos del quadrante B C ſon ſemejantes con los ſegmentos del radio A B, y ſi deſde A ſe corta de la A H ſu tercia parte A P, y ſe levanta en P ſobre la A B la perpendicular P Q, que corte la curba B K G en Q, tirando el radio A R que paſſe por el punto Q, ſe demonſtrarà ſer el arco C R tercia parte del arco I C, ò de ſu igual I B: ò ſi deſde B ſe corta vna tercia parte de la B M hecha la miſma operacion, ſe cortarà vna tercia parte del arco B O, &c. Idem (con.) las perpendiculares ſobre la A B, y los radios en el quadrante B A C ſe corten entre sì en la curba B G: luego (por lo demonſtrado) la perpendicular tirada deſde qualquiera punto del radio A B, ſobre eſta à la curba B G, y el radio que paſſa por dicho punto corten el arco B C, y el radio A B en partes proporcionales: luego (11. 5:)

,, la curba B G al radio A B es como eſtà à la A G
,, (porque ſino es aſsi) deſde A con la diſtancia A N;
,, deſcrivaſe el quadrante S T, y deſde N à la A C
,, (12. 1.) tirèſe la perpendicular N V: luego ſerà
,, la curba B G à la A B como A C à A T ſegun ſe
,, propone: el quadrante B C al lado A B, es como el
,, radio A C à A T, y ſiendo tambien el quadrante
,, B C al quadrante S T, como el radio A C al radio
,, A N, ſerà (2. 12. cor. 2.) el quadrante S T ⌢ A C,
,, ò A B ſu igual; tambien el quadrante B C al radio
,, C Q es como el quadrante S T al arco T N: pero

(dem.)

„ (dem.) B C à B O como A B à A M : luego (11. 5.)
„ A B es à A M como S T à T N, y alternando A B
„ es à S T como A M à T N; y aviendo probado ser
„ A B igual al quadrante S T se sigue ser A M, ò N V
„ su igual, igual al arco T N, lo que es absurdo: luego
„ el quadrante B C à A T, no es como A C à A T,
„ mayor que A D: por modo semejante probarè,
„ no poder ser el quadrante B C con A B como A B
„ con A V menor que A G: luego son proporciona-
„ les el quadrante B C con A B, como A B con A G:
Idem (con.) el angulo G B F es recto, y la A B perpendicular à F G: luego (8. 6.) A G es à A B como esta à la A F, y (dem.) A G à A B, assi A B à la curba B C: luego (9. 5.) la recta A F, es igual à la curba B C: Idem (con.) A E es dupla de A F, y la circunferencia DBC dupla de B C: luego (Ax. 6.) la recta A E es igual à la semicircunferencia del circulo B C D, y (P. 5. de Arch. cor. 1.) el rectangulo del radio A C, y de la semicircunferencia C B D es igual al circulo: pero (dem.) A E ∽ C B D semicircunferencia del circulo B C D: luego (Ax. 1.) el rectangulo E A C, ò E A D, es igual al circulo B C D: pero (41. 1.) el rectangulo E A C, es igual al triangulo E D C: luego este es igual al circulo B C D, que es lo que se avia de demonstrar.

SCHOLIO.

LA demonstracion de esta quadratura, es al pie de la letra, segun el Padre Tosca, *tom. 1. tratad.* 3.

 lib.

lib. 7. *Prop.* 13. de ſu Compendio Mathematico, ſobre la linea quadratriz diſcurrida, y no determinada por Geometrìa, por los celebres, y muy antiguos Mathematicos Nicoſtrato, y Nicomedes.

La formacion de la linea quadratriz de eſtos, expreſſa dicho Toſca, en la (P. 10.) del citado libro, y es la curba B K G en el quadrante B C, de la qual no determinaron por Geometrìa el punto G.

Eſte punto, pues, en mi inventiva lo doy por conſtruccion por modo muy diſtincto del de Nicoſtrato, lo que ni eſte, ni nadie pudo executar, reſpecto de que no hallaron la triſeccion del angulo para demonſtrar la ſemejança de los ſegmentos de vna linea recta, con los ſegmentos de vna linea curba circular, ſiendo ambas lineas entre sì incomenſurables, por lo que todas las proporciones numericas dadas por Archimedes, y otros, tocante à la razon, que tienen entre sì el diametro de vn circulo con ſu circunferencia, ſon inciertas, aunque las vnas mas proximas de otras; y ſiendo aſsi, que para el conocimiento de la cantidad quadrada del area del circulo, es neceſſario tener alguna razon del diametro con ſu circunferencia, doy la ſiguiente: quadrado del diametro 1277. quadrado de vna linea recta, igual à ſu circunferencia 12603. menor del verdadero quadrado de eſta linea: pero en terminos menores no ſe hallarà otra mas proxima à la verdadera, lo que ſe verifica, con las ſiguientes proporciones, ò razones.

RAZONES DE ARCHIMEDES.

Diametro.	Circunferencia.
7.	22. mayor.
71.	223. menor.
497.	1562. mayor.
497.	1561. menor.

Quadrense ambas razones, y seràn

Diametro.	Circunferencia.
49.	484. mayor.
5041.	49729. menor.
247009.	2439844. mayor.
247009.	2436721. menor.

Formese la regla de 3. como el quadrado.

1277. à 12603. assi 49. à 483. $\frac{776}{1277}$.

1277. à 12603. assi 5041. à 49750. $\frac{973}{1277}$.

1277. à 12603. assi 247009. à 2437787. $\frac{428}{1277}$.

Y se hallarà, que la razon de 1277. con 12603. es mas proxima de las expressadas de Archimedes, y de otros muchos, y declarandose, que la razon de

Adriano Mecio, diametro 113. y circunferencia 355. es la mas exacta, de quantas se han hallado, pero mayor de la verdadera: se hallarà assimismo, que la de 1277. con 12603. es mas exacta: pues el quadrado de 113. es 12769. y el de 355. es 126025. los que cotejados con los quadrados de la expressada, sale quadrado $126020\frac{167}{1277}$ menor de quadrado 126025. luego, &c.

COROLARIOS.

1. EL area de vn sector de circulo es igual al rectangulo hecho de la mitad de su arco, y del radio: infierese de lo demonstrado.

2. De esta proposicion se sigue, que la semisuma de vn lado del equilatero, y del quadrado, ambos inscriptos en vn mismo circulo, es igual à la quarta parte de la circunferencia del mismo circulo: es evidente.

3. El rectangulo del diametro de vn circulo, y de la semisuma de vn lado del equilatero, y lado del quadrado ambos inscriptos en vn mismo circulo, es igual al mismo circulo.

4. El rectangulo del radio de vn circulo, y de la suma del lado del equilatero, y del lado del quadrado, ambos inscriptos en el mismo circulo, es igual al mismo circulo.

5. El triangulo rectangulo, cuya base es radio de vn circulo, y la perpendicular, es suma del lado de

de vn equilatero, y de vn quadrado, ambos inscriptos en vn mismo circulo, es igual al mismo circulo.

PROPOSICION XXI. PROBLEMA.

Sobre el radio de vn circulo, formar vn triangulo rectangulo, cuya altura sea igual à la circunferencia del mismo circulo.

FIGVRA 31.

Dado el circulo B C D, y el radio A D, se ha de formar vn triangulo, cuya altura sea igual à la circunferencia del mismo circulo.

CONSTRVCCION.

ALarguèse D A en A, hasta cortar la circunferencia en C, desde C con la distancia C D, descrivase el circulo D E F, y desde D (septimidad) cortèse la circunferencia D E septima parte de la del circulo D E F: tirèse la recta A E, y alarguèse en E indefinida: en D sobre la A D (11. 1.) levantèse la perpendicular D G, que corte la A G en G: digo, que el triangulo A D G es, el que se busca, y que la altura D G, es igual à la circunferencia del circulo B C D dado.

PRE-

PREVENCION.

CORtèſe (10. 1.) D G en dos iguales en H, y D H en dos iguales en I: alarguèſe la C D en D indefinida, y deſde A (3. 1.) cortèſe A K = D I: tirèſe B K, y en B ſobre la B K (11. 1.) levanteſe la perpendicular B L, que corte al radio A C en L: deſde C con la diſtancia C A (1. 4.) cortèſe la circunferencia C B en M, y tirèſe A M: deſde B (9. 6) cortèſe B N tercia parte de A B, y en N ſobre la A B (11. 1.) levantèſe la perpendicular NO, que corte la A M en O: tirènſe las rectas O B. O L, y al triangulo B O L (5. 4.) circunſcrivaſe la circunferencia L O B; deſde A (9. 6.) cortèſe A P, tercia parte de A N, y en P ſobre la A B, (11. 1.) levantèſe la perpendicular P Q, que corte la curba B O L en Q: tirèſe A Q R, que corte la circunferencia en R: deſde B (9. 6.) cortèſe B S tercia parte de B N, y en S ſobre la A B (11. 1.) levantèſe la perpendicular S T, que corte la curba B O L en T: tirèſe la recta A T V, que corte la circunferencia en V.

DEMONSTRACION.

DEmueſtraſe (triſeccion) el angulo B A V, tercia parte del angulo B A M, y el angulo B A M tercia parte del angulo B A C: idem (con.) el angulo B A C es recto, y el angulo M A C, es dos tercias partes de vn recto: luego (Ax. 3.) el angulo B A M,

es

es tercia parte del angulo B A C, y (dem.) el angulo B A V, tercia parte del angulo B A M : luego (Ax. 3.) el angulo B A V, es la novena parte del angulo B A C, el angulo V A M dos novenas partes del angulo B A C, y (dem.) el angulo R A C, tercia parte del angulo M A C : luego tambien el angulo R A C es dos novenas partes del angulo B A C, y (Ax. 1.) el angulo R A C ⌒ V A M, el angulo M A R quatro novenas partes del angulo B A C, y (Ax. 2.) el angulo V A C ocho novenas partes, B A R ſiete, V A R ſeis; pero (33. 6.) los angulos en el centro A, ſon entre sì como ſus arcos : luego (Ax. 8.) la circunferencia B C eſtà dividida en el miſmo numero de partes : idem (con.) B S, es tercia parte de N B, eſta tercia parte de A B : luego (Ax. 3.) B S es la novena parte de A B, S N dos novenas partes, A N ſeis : idem (con.) A P es tercia parte de A N : luego (Ax. 1.) A P ⌒ S N, dos novenas partes de A B, P N quatro novenas partes de A B, A S ocho, P B ſiete, A N ſeis, &c. y (dem.) los angulos comprehendidos en el quadrante B C eſtàn divididos en el miſmo numero de partes, que el radio A B : luego (11. d. 5.) la razon, que tiene el arco B C al arco V C, tiene la A B à la S A, y como el arco C V al arco C M, aſsi A S à A N, ò como el arco B R à R C, aſsi B P à P A, y los demàs, &c. luego alternando, componiendo, y permutando, ſon proporcionales los ſegmentos del quadrante B C con los ſegmentos del radio A B, y (con.) las perpendicu-

lares

lares ST. NO. PQ. AL, y los radios AB. AV, AM. AR. AC, ſe cortan entre sì en la curba BOL: luego (Ax. 8.) qualquiera perpendicular tirada deſde vn punto de la curba BOL al radio AB, y el radio, que paſſa por dicho punto, cortan el arco BC, y el radio AB en partes proporcionales: luego (11. 5.) la curba BC al radio AB es como eſta à la AL: porque ſino es aſsi, deſde A con la diſtancia AO, deſcrivaſe el quadrante XZ, y deſde O à la AC (12. 1.) tirèſe la perpendicular OY: luego ſerà la curba BC à la AB como AC à AZ ſegun ſe propone: el quadrante BC al radio AB es como el radio AC à AZ; y ſiendo tambien el quadrante BC al quadrante XZ, como el radio AC al radio AO, ſerà (2. 12. cor. 2.) el quadrante XZ ⌒ AC, ò AB ſu igual: tambien el quadrante BC al arco CM es como el quadrante XZ al arco OZ, y (dem.) CB à CM, como AB à AN: ſerà AB à AN como XZ à OZ: y alternando AB à XZ, como AN à OZ; y aviendo probado ſer AB igual al quadrante XZ, ſe ſigue ſer AN, ò OY ſu igual, igual al arco OZ, lo que es abſurdo: luego el quadrante BC à AB, no es como AB à AZ mayor, que AL, por modo ſemejante, probarè, no poder ſer el quadrante BC con AB, como AB, à AY menor que AL: luego ſon Proporcionales el quadrante BC con AB, como AB con AL. idem (con.) el angulo LBK es recto, la AB es perpendicular à KL luego (8.6.) AL es à AB como

eſta

esta à la A K, pero (dem.) A L à A B, assi esta à la curba B C: luego (9. 5.) la recta A K, es igual al arco B C: idem (con.) D G es quadrupla de A K, y (15. 1. cor.) toda la circunferencia del circulo B C D, es quadrupla de la circunferencia B C: pero (dem.) A K ⌒ à la circunferencia B C: luego (Ax. 6.) la recta D G es igual à toda la circunferencia B C D, del circulo B C D, y (con.) el triangulo A D G formado sobre el radio A D es rectangulo, y la D G es su altura: luego sobre el radio de vn circulo se ha formado, &c. que es lo que se avia de hazer.

SCHOLIOS.

1. Esta Demonstracion es la misma de la Proposicion antecedente, y se ha repetido aqui, para mayor claridad.

2. El triangulo A D G (P. 5. Archimedes) es igual al circulo B C D, y si se tiran las rectas A H, A I, serà el triangalo A D H, igual al semicirculo, y el triangulo A D I, igual à la quarta parte de dicho circulo.

3. Assimismo prevengo, ser la construccion expuesta à no executarse perfectamente para el concurso de las dos rectas A G, y D G en el punto G, lo que mejor assegurarà el punto G del modo siguiente.

 Dado

Dado el circulo B C D, ſe ha de formar vn triangulo rectangulo, cuya baſe ſea igual al radio, y ſu altura à la circunferencia.

CONSTRVCCION.

POr el centro A, tirèſe el diametro D C, alarguèſe en C al infinito: deſde C con la diſtancia C D, deſcrivaſe el circulo D E F, quien cortarà la D F en F, y deſde D (ſeptimidad) cortèſe la circunferencia D E, ſeptima parte de toda la del circulo D E F: deſde F cortèſe F J, igual à la mitad de A D, y tirèſe la recta E J: deſde los puntos A, y D con la diſtancia E J, deſcrivanſe dos arcos, que ſe corten en W, y con la miſma deſde W deſcrivaſe el circulo A D G: tirèſe A W, y alarguèſe en W haſta cortar la circunferencia en G: tirèſe la recta D G, y ſe tendrà el triangulo A D G rectangulo, y la D G ſerà igual à la circunferencia del circulo B C D dado, el todo como en la antecedente: porque (31. 3.) el angulo A D G es recto, y la A E: ſe ha dado como en la primera conſtruccion: luego el angulo D A E es el miſmo angulo: y (32. 1.) por conſiguiente vno, y otro triangulo ſon equiangulos (26. 1.) iguales entre sì.

PRO-

PROPOSICION XXII. PROBLEMA.

Formar vn quadrado igual à vn circulo dado.

FIGVRA 32.

Dado el circulo B C D, ſe ha de formar vn quadrado igual al miſmo circulo.

CONSTRVCCION.

POr el centro A, tirèſe el diametro D C, y alarguèſe en C al infinito: deſde D (6. 4.) tirèſe la recta D B, lado del quadrado inſcripto, y deſde C (1. 4.) acomodeſe la recta C E ⌒ A C: tirèſe la recta D E, y deſde A (3. 1.) cortèſe A F ⌒ D E, deſde F cortèſe F G ⌒ D B: cortèſe (10. 1.) A G en dos iguales en H, y deſde C (3. 1.) cortèſe C I ⌒ A H: cortèſe (10. 1.) D I en dos iguales en K, y deſde K con la diſtancia K I, ò K D, deſcrivaſe el ſemicirculo D L I: en C ſobre la D I (11. 1.) levantèſe la perpendicular C L, que corte la circunferencia D L I en L, y ſobre la C L (46. 1.) deſcrivaſe el quadrado C L M N: digo que eſte es igual al circulo B C D dado.

DEMONSTRACION.

(con.) LA cuerda C E ⌒ A C: luego (15. 4. cor. 4.) la recta D E, es lado de vn triangulo equilatero inſcripto en el circulo B C D, y (con.) la recta D B es lado del quadrado inſcripto en el miſmo circulo, A F ∽ D E, F G ∽ D B: luego (Ax. 2.) A G, es la ſuma de vn lado del equilatero, y lado del quadrado, ambos inſcriptos en el circulo B C D, y (con.) A H ∽ H G, ∽ C I: luego (Ax. 7.) C I es la ſemiſuma del lado del equilatero, y quadrado ambos inſcriptos en el circulo B C D: luego (P. 20. de eſte) la recta C I es igual à la quarta parte de la circunferencia del circulo B C D, y (P. 5. Archimedes) el rectangulo del diametro C D, y de la quarta parte de la circunferencia del circulo B C D, es igual al miſmo circulo, y (Ax. 1.) aſsi lo es el rectágulo de C I, y C D: idem (con.) C L es perpendicular à I D, y (13. 6. cor. 1.) es media proporcional entre C I, y C D: luego (17. 6.) el quadrado de C L, es igual al rectangulo de CI, y CD, y (dem.) eſte igual al circulo B C D: luego (Ax. 1.) el quadrado de C L, es igual al circulo B C D, y (con.) el rectangulo C L M N es quadrado: luego eſte es igual, &c. que es lo que ſe avia de hazer.

PROPOSICION XXIII. PROBLEMA.

Hallar vna linea recta igual à qualquiera arco dado.

FIGVRA 33.

Dado el arco B C, ſe ha de hallar vna linea recta igual à dicho arco.

CONS-

CONSTRVCCION.

DEl arco B C (25.3.) deſcrivaſe el circulo B C D, y por el centro A tirèſe A B : en A ſobre la A B (11. 1.) levantèſe la perpendicular A D, y alarguèſe en A indefinida : en el quadrante B A D (P. 20. de eſte) deſcrivaſe la curba B F, quien paſſando por la A C, la cortarà en el punto G : deſde A (P. 21. de eſte) cortèſe A E igual al arco B D, tirènſe las rectas B E. B F, y deſde G à la D E (31. 1.) tirèſe la paralela G H, quien paſſando por la recta B F, la cortarà en el punto I, y la recta A B en K : digo, que la recta K H, es igual al arco B C.

DEMONSTRACION.

EN el triangulo B E F (con.) G H es paralela à E F: luego (4. 6. cor. 1.) los triangulos B A E. B A F ſon ſemejantes : luego (4. 6.) A B es à A F como B K à K I, y como A B à A E, aſsi B K à K H, pero (P. 21. de eſte) B D es à A B, como B C à B K, y por la miſma A E $\propto$ B D : luego (Ax. 8.) B C $\propto$ K H, que es lo que ſe avia de hazer.

SCHOLIO.

SI el arco dado fuere mayor del quadrante, como B C L duplo de B C, ò C L, ſe harà la miſma operacion en ſu mitad B C, y el duplo de la recta K H ſerà igual à la curba B C L, y ſi fuere mayor del ſemicirculo

circulo, como B L M quadruplo de B C haziendo la misma operacion, como si fuere el arco B C la linea quadrupla, del H K, serà igual al arco B L M.

PROPOSICION XXIV. PROBLEMA.

Describir un circulo, cuya circunferencia sea igual à una recta dada.

FIGVRA 34.

Dada la recta A B, se ha de describir un circulo, que su circunferencia sea igual à dicha linea recta.

CONSTRVCCION.

EN qualquiera extremo de la recta A B como en B, (11. 1.) levantèse la perpendicular B C indefinida : y desde B con qualquiera distancia, descrivase vn circulo que corte la B C en C : hallèse (P. 21. de este) la recta B D igual à la periferia del circulo C, tirèse C D, y desde A à la C D (31. 1.) tirèse la paralela A E, que corte la B E en E : tomèse B E como radio, y descrivase el circulo F: digo, que la periferia de este es igual à la recta A B

DE-

DEMONSTRACION.

(con.) A E, es paralela à D C: luego (4. 6. cor. 1.) los triangulos A E B. D C B son semejantes: luego (4.6.) la razon, que tiene la D B à la B C, tiene la A B à la B E: idem (con.) la recta D B es igual à la periferia del circulo, cuyo radio es B C: luego (Ax. 1.) la recta A B, es igual à la periferia del circulo, cuyo radio es B E: idem (con.) el circulo F se ha descripto con la distancia B E: luego (Ax. 8.) la circunferencia del circulo F es igual à la recta A B, que es lo que se avia de hazer.

PROPOSICION XXV. PROBLEMA.

Dado qualquiera radio, describir una porcion de arco igual à una recta dada.

FIGVRA 33.

Dado el radio A B, y la recta O, cada una como quiera, se ha de describir una porcion de arco igual à la recta O.

CONSTRVCCION.

Desde A con la distancia A B descrivase el circulo B C D, y en A sobre la A B (11. 1.) levantèse la perpendicular A D, y alarguèse en A indefinida: en el sector B A D (P. 20. de este) descrivase la curba

B F,

BF, tirèſe la recta BF, y en B perpendicular à eſta tirèſe BE, que corte la AE en E: deſde A (3. 1.) cortèſe de la AE la AN ∽ O, y en N perpendicular à AE, tirèſe NH, que corte la EB en algun punto H: deſde H à la AN (31. 1.) tirèſe la paralela HK, y prolonguеſe en K, haſta cortar la curba BF en G: tirèſe AG, y alarguèſe en G, haſta cortar el arco BD en C: digo, que el arco BC es igual à la recta O dada.

DEMONSTRACION.

ES la miſma de la (P. 22. de eſte) porque (con.) AN ∽ O: AB, y NH perpendiculares à AN: luego (10. d. 1.) los angulos en A, y en N ſon rectos: idem (con.) KH es paralela à AN: luego (35. d. 1.) el rectilineo ANHK es paralelogrammo: luego (34. 1.) KH ∽ AN; pero (dem.) AN ∽ O: luego (Ax. 1.) KH ∽ O; idem (P. 22. de eſte) KH ∽ al arco BC: luego eſte igual à la recta O, que es lo que ſe avia de hazer.

PROPOSICION XXVI. PROBLEMA.

Hallar una linea recta igual à la quarta parte de la circunferencia de un circulo dado.

FIGURA 35.

Dado el circulo BCD, ſe ha de hallar una linea recta igual à la quarta parte de ſu circunferencia.

CONS-

CONSTRVCCION.

POr el centro A tirèse el diametro CD, y alarguèse en D al infinito: desde D (P. 11. de este.) cortèse D E novena parte de toda la circunferencia del circulo B C D, y desde D con la distancia de la cuerda D E, descrivase vna circunferencia que corte C F en F: desde B (1. 4.) acomodèse la recta B G ∾ A F, quien cortarà la A C en H, y en B sobre la A G (11. 1.) levantèse la perpendicular B I, que corte la A F en I: digo, que la A I es igual à la quarta parte de toda la circunferencia del circulo B C D dado. Y la demonstracion es la misma de la (P. 20. de este.)

PROPOSICION XXVII. PROBLEMA.

Hallar vna linea recta igual à la quarta parte de la periferia de vn circulo dado.

FIGVRA 36.

Dado el circulo B C D, se ha de hallar vna linea recta igual à la quarta parte de su circunferencia.

CONSTRVCCION.

TIrèse el diametro B D, y el semicirculo B C D (30. 3.) cortèse en dos iguales en C: tirèse la recta C A, y alarguèse en A indefinida: desde C (1.4.)

 acomò-

acomòdese la recta C E ⌒ A C, y tirèse A E : desde B (9. 6.) cortèse B F, tercia parte de A B, y en F sobre la A B (11. 1.) levantèse la perpendicular F G, que corte la A E en G, y desde A (3. 1.) cortèse A H ⌒ A G: desde H à la C H (P. 6. de este) añadase A I, de suerte, que la I C estè cortada en extrema, y media razon en H, y à las rectas A I, A B, hallasse la tercera proporcional A K : digo, que esta es igual à la curba B C, quarta parte de toda la circunferencia del circulo B C D dado.

OTRA MAS LIBERAL.

FIGVRA 36.

CONSTRVCCION.

POR el centro A del circulo dado B C D, tirèse el diametro B D, y en A sobre este (11. 1.) levantèse la perpendicular C A L, alargandola en L indefinida : desde L (septimidad) cortèse la circunferencia L M, septima parte de toda la del circulo B C D, y desde C (30. 3. y 9. 1.) cortèse la circunferencia C N quarta parte de la circunferencia L M: tirèse la recta M N, quien cortarà la A C en I, y à las rectas A I. A B (12. 6.) hallàse la tercera proporcional A K : digo, que esta es igual al arco B C, quarta parte de toda la circunferēcia del circulo BCD dado.

La demonstracion de ambas, es la misma de las Proposiciones 20. y 21. de este tratado.

OTRA

OTRA.

FIGVRA 36.

TIrèse el diametro BD, y en A, sobre la BD, (11. 1.) levantèse la perpendicular CALK indefinida: desde C con la distancia CA, cortèse la circunferencia CB en el punto E, y tirèse la recta AE: desde B (9. 6.) cortèse BF, tercia parte de BA; y en F sobre la AB (11. 1.) levantèse la perpendicular FG, que corte la AE en G: desde A (3. 1.) cortèse AO ∽ FG, y tirèse la recta DO: desde D (1. 4.) acomòdese la recta DP ∽ DO, y tirèse la recta BP, quien cortarà la AC en I: desde B à la PD (31. 1.) tirèse la paralela BK, quien cortarà la prolongada de la AL en K: digo, que la AK es igual à la curba BC, &c. de toda la circunferencia del circulo BCD dado.

La demonstracion de ambas, es la misma de las Proposiciones 20. y 21. de este.

ADVERTENCIA.

LA quadratura lineal de qualquier modo que se construya, ò se hallare, si es perfecta, no admite el examen trigonometrico, por concurrir en qualquier caso lineas incomensurables, y angulos no averiguables, y la quadratura que admite dicho examen, no es perfecta.

1. Examinèse por trigonometrìa esta vltima, en la qual se tienen conocidos, ò faciles de conocer los

tres triangulos B P D. B A K. B A I, rectangulos, y equiangulos, como aſsimiſmo los triangulos A F G. D A O, y ſiendo por conſtruccion el angulo B A C recto, el angulo C A E dos tercias partes de vn recto, ſerà el reſiduo B A E, tercia parte de vn recto, y de 30. grados; tambien por la conſtruccion B F, es tercia parte de A B, y ſuponiendo eſta 12. ſerà A F 8: luego en el triangulo rectangulo A G F ſe tienen conocidos los angulos, y vn lado; hallèſe el otro lado, como el radio conocido à la A F 8.

aſsi la tangente del angulo F A G de 30. grados, y ſe tendrà el logarithmo del lado F G, ò de ſu igual A O, cuya raiz, y quadrado, nos quedan incognitas en la Trigonometrìa, ſin embargo eſte logarithmo nos ſervirà para otra analogia. En el triangulo rectangulo O A D, ſe tiene conocidos A D ⌒ A B 12. y el logarithmo de AO: luego AD à A O, aſsi el radio a la tangente del angulo A D O inaverigua-ble, y ſu proximo de 21. grados 3. minutos, y 6. ſegundos: luego (32. 1.) ſe ſabrà el angulo A O D proximo de 68. grados 56. minutos, y 54. ſegundos, el ſeno de 68. grados, y 56. minutos, ſerà logarith-

Radio.	10. 0000000.
A F.	0. 9030900.
tang. 30. grs.	9. 7614394.
	0. 6645294.

A D. C. L.	8.9208188.
A O logar.	0.6645294.
Radio.	10.0000000.
21. grs. 3. ms. 6.	5. 9.5853482.

mo 9. 9699574. y el ſeno de la diferencia, que correſponde à 54. ſegundos, ſerà 436. que ſumados daràn 9.9700010. logarithmo proximo de 68. grados 56. minutos, y 54. ſegundos: luego en el triangulo rectangulo A O D, como el ſeno del angulo A O D al lado A D, aſsi el radio à la hipotenuſa D O, cuya raiz, ni ſu quadrado ſe halla por eſta trigonometrìa; porque ſiendo el logarithmo de ſu quadrado 2. 2183604. es el quadrado de D O mayor de 165. y menor de 166. por cuyos dos numeros averiguada la recta A K por el numero 165. ſale menor de lo juſto, y por el numero 166. mucho mayor de lo juſto: tomo pues la ſemiſuma de ambos numeros 165½. por el quadrado de D O, ò de ſu igual D P, ò toda la ſuma 331. y duplicando tambien el quadrado de B D 576. ſerà 1152. el de A B 144. ſerà 288. y por la (47. 1.) ſe tendrà el quadrado de P B 821. pero (dem.) los triangulos B P D, K A B equiangulos: luego (4. 6.) ſerà como D P quadrado 331. à P B quadrado 812. aſsi A B quadrado 288. à A K quadrado 714. ciento y catorze, trecientos y treinta y vn avos, igual al quadrado de la quarta parte de la circunferencia del circulo B C D, cuyo quadrado de ſu diametro B D es 1152. los que reducidos à la eſpecie del quadrado ſeràn 381312. menos 236448.

		9 9700010.
A O D.		0. 0299990.
A D.	12.	1. 0791812.
		0000000.
		1. 1091802.

eſto

esto es los quadrados del radio A B 381312. y el quadrado de la quarta parte de la circunferencia, ò de su igual A K 236448. y estas dos cantidades reducidas será quadrado de AB 11916. de AK 7389. tomèse la mitad del quarto del de A B, y el quadruplo del de A K, y se tendrà quadrado del diametro B D 2979. y el quadrado de toda la periferia del circulo 29556. que tambien tiene tercio: luego.

Diametro.	*Circunferencia.*
quadrado 993.	quadrado 9853.

La circunferencia sale mayor de lo justo: luego el quadrado, que se tomò de la D O por 165½. es mayor; y tomandole por 165. sale menor, como se puede experimentar: luego es inaveriguable el computo trigonometrico para la quadratura, si es perfecta.

2. Para la segunda parte, la quadratura, que admite el calculo trigonometrico, aunque proxima, no es perfecta.

Supongase, que en el isosceles D E C, (Fig. 30.) los ang. sobre la base CD, sean duplos del angulo vertical D E C, cuya base es el diametro D C, tirada la recta A E, se tendràn los triangulos E A D. E A C, en los quales (10. 4. cor.) se tendràn conocidos sus angulos A D E de 72. grados, y A E D de 18. Supongase el radio A D 7: luego en el triangulo rectangulo E A D,

serà

ſerà como el radio al lado A D, aſsi la tangente del angulo A D E al lado A E mayor de 21. y menor de 22. que ſin duda eſta quadratura ſerà mas exacta de la proporcion de Archimedes; diametro 7. circunferencia 22: luego (10.4.) ſi ſobre el diametro de vn circulo ſe forma vn iſoſceles, cuyos angulos ſobre la baſe ſon duplos del angulo vertical, eſte triangulo ſerà igual al circulo: pero ſi en lugar del num. 7. ſe conſtituye A D quadrado 1277. hecha la miſma operacion, ſale el quadrado de A E menor de la razon dada 1277. para el quadrado del diametro, y 12603. para el quadrado de la circunferencia; pero eſta aunque tan proxima à la verdadera, es menor: luego la quadratura por dicho iſoſceles, aunque proxima, es menor, y falſa.

Radio.	10.0000000.
A B. 7.	0.8450980.
tang. 72. grs.	10.4882240.
	1.3333220.

PROPOSICION XXVIII. PROBLEMA.

Formar vn quadrado igual à vn circulo dado.

FIGVRA 37.

Dado el circulo B C D, ſe ha de formar vn quadrado igual à dicho circulo.

CONS-

CONSTRVCCION.

DEſde qualquiera punto E tomado en la circunferencia, cortèſe (ſeptimidad) de eſta ſu ſeptima parte, E F : y (triſeccion) deſde E, cortèſe de la circunferencia E F ſu tercia parte E G : tirèſe la recta G F, y eſta (10. 1.) cortèſe en dos iguales en H : por el centro A tirèſe A H, y alarguèſe por ambas partes indefinida : deſde H (3. 1.) cortèſe H I ⌒ H G, ò à ſu igual H F, y deſde A à la G F (31. 1.) tirèſe la paralela D C alargandola por ambas partes indefinida: tirènſe las rectas I F L. I G K que corten la K L en los puntos K, y L, y deſde A (3. 1.) cortèſe A M ⌒ A I: tirènſe las rectas M K. M L : digo, que el rectilineo I K M L es vn quadrado igual al circulo B C D dado.

PREVENCION.

A las rectas C D. I K (11. 6.) hallèſe la tercera proporcional A N.

DEMONSTRACION.

DEmueſtraſe A N igual à la quarta parte de la circunferencia del circulo B C D : luego (P. 5 de Archimedes) el rectangulo del diametro C D con A N, es igual al circulo B C D, y (con.) C D. I K. A N. ſon continuas proporcionales : luego (17. 6.) el quadrado de I K es igual al circulo B C D, y ſiendo facil de monſtrar, que el rectilineo I K M L es vn

qua-

quadrado; luego este es igual al circulo B C D, que es lo que se avia de hazer.

PROPOSICION XXIX. PROBLEMA.

Cortar $\frac{1}{100}$ de vna recta dada con tres secciones.

FIGVRA 38.

Dada la recta B D, se ha de cortar $\frac{1}{100}$ parte.

CONSTRVCCION.

Cortèse B D en dos iguales en A, y desde A con la distancia A B, descrivase el circulo B C D E: desde A (*9. 6.*) cortèse A F dos quintas partes de A B, y desde D con la distancia D F, descrivase vna circunferencia, que corte la B C D E en C, y en E: tirèse la recta C E: digo, que el segmento A G es $\frac{1}{100}$ parte de B D.

DEMONSTRACION.

(con.) A F es dos quintas partes de A B $\frown$ A D: luego (Ax.*6.*) B D, es 10. D F. 7. idem (con.) C D $\frown$ D F: luego (Ax. 1.) C D es 7. idem (31. 3.) el angulo B C D es recto, y assi los angulos en G tambien son rectos: luego (8.*6*.cor.) los triangulos B C D. C G D son semejantes, y tienen el angulo D comun: luego (4. *6.*) B D 10. es à C D 7. como C D à D G $4\frac{9}{10}$ ò B D 100. à D G 49. pero (dem.) A B $\frown$ A D: luego (Ax. 7.) A D 50: luego (Ax. 3.) A D — D G es $\frac{1}{1}$: luego D G es $\frac{1}{50.}$ parte de A D, ò de su igual A B: pero (dem.) B D 100. luego (Ax. 7.) A G, es $\frac{1}{100.}$ parte de B D, que es lo que se avia de hazer.

PROPOSICION XXX. PROBLEMA.

Entre el diametro de un circulo, y uno de sus segmentos hallar la media proporcional.

FIGVRA 38.

Entre el diametro B D del circulo B C D, y qualquiera segmento D H se ha de hallar la media proporcional.

CONSTRVCCION.

EN H sobre la B D (11. 1.) levantese la perpendicular H K, que corte la circunferencia en K: y tirese la recta D K: digo, que esta es la que se busca.

PREVENCION.

Tirese la recta B K

DEMONSTRACION.

(con.) LOs angulos en H son rectos, y (31. 3.) el angulo B K D formado en el semicirculo es recto, el angulo D, comun en los triangulos B K D, BKD. KHD: luego (32. 1.) estos dos triangulos son equiangulos (4.6.) son proporcionales BD à DK, asi DK à DH, y alternando BD, es à DK como esta à la DH: pero (con.) BD, y DH son las extremas dadas: luego (Ax. 8.) DK es la media hallada, que es lo que se avia de hazer.

PROPOSICION XXXI. PROBLEMA.

Dadas dos lineas rectas, la mayor diametro de vn circulo, y la menor vno de sus segmentos, hallar la tercera proporcional, como la mayor à la menor, asi la menor à la que se busca.

FIGVRA 38.

Al diametro BD, y al segmento DI, se ha de hallar vna linea recta tercera proporcional.

CONSTRVCCION.

DEsde D (1. 4.) acomodèse DK $\frown$ DI, y desde K à la BD (12. 1.) tirèse la perpendicular KH: digo, que la recta DH, es la que se busca.

DEMONSTRACION.

(Dem. antec.) BD. DK. DH son continuas proporcionales (con.) DK $\frown$ DI: luego (11. 5.) BD es à DK como esta à la DH, tercera proporcional.

PROPOSICION XXXII. PROBLEMA.

Con la misma abertura de Compàs, que se descrive vn circulo, hallar vna linea recta, cuyo quadrado sea igual à dicho circulo.

FIGVRA 39.

DEsde qualquiera centro A con qualquiera distancia, descrivase el circulo B C D, y por el centro A tirèse el diametro B E : (con la misma) desde E descrivase el circulo C D F, quien cortarà la circunferencia B C D en C, y en D, alarguèse B E en E, hasta cortar la circunferencia C D F en F, y tirènse las rectas C F. D F (con la misma) desde C descrivase vn arco, que corte la C F en G, y desde D vn arco, que corte la D F en H : tirènse las rectas A G, A H, y desde G, y H descrivanse los arcos D I. C K, que corten la A G. A H en los puntos I, y K : desde los puntos C, y K, descrivanse dos arcos, que se corten en L, y desde D, y I dos arcos, que se corten en M : tirènse las rectas G L. H M, y alarguense en L, y en M hasta cortar la circunferencia en N, y en O, tirèse la recta N O, quien passando por la B E la cortarà en P, digo, que el quadrado de la E P, es igual al circulo B C D dado.

PRE-

PREVENCION.

Hallèse (P. antec.) al diametro E B, y al segmento E P la tercera proporcional E Q.

DEMONSTRACION.

DEsmuestrase (P. 20. y 21. de este) la recta E Q. igual à la quarta parte de la circunferencia del circulo B C D: luego (P. 5. de Archimedes) el rectangulo del diametro E B, y de la quarta parte de su circunferencia, es igual al circulo B C D, y (con.) E B. E P. E Q. son continuas proporcionales (17. 6.) el quadrado de E P, es igual al rectangulo de E B, y E Q, y (dem.) E Q igual à la quarta parte de la circunferencia del circulo B C D, y el rectangulo del diametro E B con la quarta parte de su circunferencia igual al mismo circulo: luego (Ax. 8.) el quadrado de la E P es igual al mismo circulo B C D: luego con la misma abertura de compàs, &c. que es lo que se avia de hazer.

SCHOLIOS.

1. OTras muchas construcciones he hallado para quadrar el circulo, las que omito añadir à este tratado, por no tener mas demonstraciones, que la expressada, ni resultar de ellas entera satisfacion en los calculos trigonometricos, siendo asi, que con laboriosos artificios, he procurado

do estas averiguaciones; y por fin solo he hallado; quedando el angulo A B K (Fig. 36.) de 57. grados, y 31. minutos se puede tener razon de la quadratura. porque siendo en el triangulo rectangulo B A K como el radio à vn lado conocido, A B quadrado 1277: assi la tangente de 57. grados, y 31. minutos al lado A K quadrado 3150½. su quadruplo quadrado 12604. y tomado por el quadrado del diametro del circulo los 1277. serà el quadrado de su circunferencia 12604. proximo mayor, y aviendose dado (sch. P. 20. deste) la proporcion del diametro del circulo con su circunferencia como quadrado 1277. y 12063. menor; se infiere, ser la verdadera quadratura la que se hallare por dicho angulo dado, aunque no tuviesse la demonstracion Geometrica expressada en las Proposiciones 20. ò 21. de este tratado, el angulo 57. grados, y 31. minutos, se hallarà por el scholio de la (P. 17. de este) ò por el de la (P. 19. del mismo.)

2. De la demonstracion de la quadratura, se infiere que la curba B L (Fig. 31.) es vna linea mediatriz entre el radio A B, y el quadrante B C. porque se ha demonstrado, que las rectas que de ellas se tiràn perpendiculares, al radio A B, y las que tiradas desde el centro A cortan en partes proporcionales el radio A B, y el quadrante B C: luego la curba B L es vna linea mediatriz entre el radio A B, y el quadrante B C.

3. De la linea mediatriz se sigue, el modo de la dimencion del circulo, angulo, arco, ò angulo en las partes que se quisiere, lo que se consigue con mas facilidad, hallando primero la linea mediatriz por los modos siguientes.

PRIMER MODO.

DAdo el quadrante A C B en el circulo B C D (Fig. 40.) alarguèse B A en A, hasta cortar la circunferencia en D, y desde C, con la distancia C A descrivase vna circunferencia, que corte el arco C D en E: tirèse A E, y desde D (*9. 6.*) cortèse D F, tercia parte de A D; en F sobre la A D (11. 1.) levantèse la perpendicular F G, que corte la A E en G, y sobre la A D, descrivase el semicirculo A H D, desde G à la A D (31. 1.) tirèse la paralela G H, que corte la semicircunferencia en H, y tirèse la recta A H, alargandola en H hasta cortar la circunferencia C D en I: tirèse la recta I B, quien cortarà la A C en K, y la A B (10. 1.) cortèse en dos iguales en L: tirèse la recta L G, y con la distancia de esta desde los puntos B, y K, hagase la intersecacion M (con la misma) desde M, descrivase la circunferencia B K, y esta serà la linea mediatriz.

SEGVNDO MODO.

Se colixe de la siguiente Proposicion.

PRO-

PROPOSICION XXXIII. PROBLEMA.

Cortar de qualquier angulo dado la parte que ſe pide.

FIGVRA 41.

Dado el angulo B A C, ſe ha de cortar ſu tercia parte.

CONSTRVCCION.

ALarguèſe B A en A indefinida, y deſde A con qualquiera diſtancia, deſcrivaſe vna circunferencia, que corte la prolongada en D: con la miſma deſde D, deſcrivaſe la circunferencia A E F, y con la miſma deſcrivaſe otra, que corte la A B en G: deſde A con la diſtancia A F, deſcrivaſe el circulo B C F, y en A ſobre la B F. (11. 1.) levantèſe la perpendicular A H, que corte la circunferencia en H: deſde H con la diſtancia A H deſcrivaſe vn arco, que corte la circunferencia F H en I, y tirèſe la recta A I: deſde A (9. 6.) cortèſe A K tercia parte de A I, y deſde K à la A H (31. 1.) tirèſe la paralela E L, que corte la circunferencia A E F en E: tirèſe la recta F E, y alarguèſe en E, haſta cortar la A H en M, deſde F. (9. 6.) cortèſe F N tercia parte de A F, y en N ſobre la A F (11. 1.) levantèſe la perpendicular N O que corte

 la

la A I en O: tirèse la recta O G, y con la distancia de esta desde los puntos B, y M, hagase la comun intersecacion P; con la misma desde P descrivase la circunferencia B M, quien cortarà la A C en Q, y desde Q à la A B (12. 1.) tirèse la perpendicular Q R: desde R (9. 6.) cortèse R S, tercia parte de A B, y en S sobre la A B (11. 1.) levantèse la perpendicular S T, que corte la curba B M en T: tirèse la recta A T V: digo, que el angulo V A C es tercia parte del angulo B A C dado.

DEMONSTRACION.

SI se demuestra (triseccion) el angulo V A C tercia parte del angulo B A C, queda tambien demonstrado, que la curba B Q es la linea mediatriz entre la recta R B, y la curba C B: porque (con.) R S, es tercia parte de B R, y (33. 6.) la circunferencia V C es tercia parte de la B C: luego (7. d. 5.) R S es à R B como C V à C B, y como G B à R B, assi V B à C B: luego alternando, son proporcionales los segmentos de la recta R B à los de la curba C B: idem (con.) las rectas S T, y R Q son perpendiculares al radio A B, y ambas se cortan con los radios A V. A C. en la curba B Q: luego esta es vna linea mediatriz, &c. idem, si se demuestra (quadratura,) que la recta A M, el radio A B, y la curba B H, son continuas proporcionales, tambien se demuestra, que la A R es à R B como H C à C B, y como R S à R B, assi C V à C B: pero (con.)

RS es tercia parte de RB: luego (7.d.5.) CV es tercia parte de CB, y (33.6.) el angulo V A C tercia parte del angulo B A C, y de la misma suerte se cortarà la parte que se pide de qualquier angulo rectilineo dado,&c.

SCHOLIOS.

1. DE aqui se infiere la dimension del circulo en las partes iguales que se quisiere: porque si se divide (P. antec.) el arco B H en siete partes iguales se tendrà la septimidad del circulo; si en nueve, el Nonagono, y si en onze, el Onzagono,&c. lo que se infiere de la (32.1.cor.4.)

2. Lo segundo, tambien se infiere el modo de formar sobre vna recta dada, y terminada, qualquiera Poligono regular: porque si sobre la A B se quisiere formar vn Pentagono Equilatero, y Equiangulo, en A sobre la A B (11.1.) levantèse la perpendicular AH, y (P. antec.) del angulo B A H cortèse su quinta parte C A H: en A sobre la A H (23.1.) formèse el angulo H A X ∽ C A H, y el angulo B A X serà el de la figura del Pentagono, es facil de demonstrar, como asimismo el determinar la figura, y asi qualquiera otra de lados, y angulos iguales.

3. Asimismo, si se demuestra, que las rectas AM. AB, y la curba B H, son continuas proporcionales, se tendrà (12.6.) vna linea recta igual à la curba BH

quar-

quarta parte de la circunferencia del circulo B C D, y (13. 6.) se hallarà vna linea recta, cuyo quadrado sea igual al circulo: luego por sola esta Proposicion se resolverà la mayor parte de todas las de este tratado.

OTRO MODO DE DEMONSTRAR la triseccion del angulo.

FIGVRA. 43.

HAgase la misma Construccion de la Proposicion 12. y alarguèse la G A en A hasta cortar la circunferencia en I, y en I sobre la I G (23. 1.) formèse el angulo H I K ⩏ I H D, y alarguènse las rectas A C. I K, por todas partes al infinito; pero estas alargadas nunca concurren: luego (34. d. 1.) estas dos rectas son paralelas, y (29. 1.) el angulo H A C ⩏ H I K, pero (con.) el angulo H I K ⩏ A H D: luego (Ax. 1.) el angulo H A C ⩏ I H D, y (5. 1.) en el isosceles H A D el angulo A H D ⩏ A D H, ò à su igual H A C: (20. 3.) el angulo B A H es duplo del angulo B D H, ò de su igual H A C: luego (Ax. 2.) el angulo B A C es triplo del angulo H A C: luego, &c.

*** *** ***

MODO PRACTICO DE TRICESSAR el angulo.

Tambien para Praxis, se puede vsar de la Proposicion 2. de este tratado; para cortar qualquiera angulo rectilineo, ò corniangulo en tres angulos iguales, lo que se facilita del modo siguiente.

OPERACION.

EN el perfil de vna regla C D E (Fig. 2. Lam. 1.) señalense como quiera dos puntos D, y E, y dado el angulo B A C como quiera: desde A con la distancia D E descrivase el circulo B C D, y alarguese la B A en A indefinida: apliquese la regla al punto C, de suerte, que el punto D corte la circunferencia en vn punto como D, y el punto E corte la prolongada de la B A en algun punto E: tirese la recta C D E, y el radio A D: digo, que el angulo B E C, es tercia parte del angulo B A C dado, y la demonstracion es la misma de dicha Proposicion.

ENIG-

ENIGMA

A LA QVADRATVRA DEL CIRCVLO.

REDONDILLA.

Si triplicas la vnidad,
y la colocas delante,
el circulo en vn instante
quadraràs con claridad.

SOLVCION.

EScrivase, el num. 1, y (1. d. 7.) serà la vnidad: esta (16. 7.) tripliquese, y (2. d. 7.) se tendrà el numero 3. à este escrivase por delante el numero 1. y se tendrà el numero 31. digo, pues, que si el diametro de vn circulo, se considera lado de cubo 1. el lado de cubo 31. serà vna linea recta igual à la circunferencia del mismo circulo.

Las razones dadas por Archimedes, para la quadratura, son

Diametro.	*Circunferencia.*
497.	1562.
497.	1561.

La primera circunferencia mayor, la segunda menor.

Cubi-

Cubiquese cada vna de estas tres cantidades ; y seràn.

Diametro.	*Circunferencias.*
122763473.	3811036328.
	3803721481.

Formèse regla de tres con la razon propuesta, como cubo 1. à cubo 31. asi cubo 122763473. à cubo 3805667663. y se hallarà, que la razon de cubo... 1. à cubo 31. es mucho mas exacta que las razones referidas : pues el numero 3805667663. es menor de la mayor 3811036328. y mayor del menor 3803721481. luego,&c.

COROLARIOS.

1. DE esta razon hallada, se infiere (18. 12.) que la que tiene el cubo del diametro de vn circulo, al cubo de vna linea recta igual à su circunferencia, tiene el cubo del radio, al cubo de vna linea recta igual à la semicircunferencia, ò como el cubo del semiradio, al cubo de vna linea recta, igual à la quarta parte de su circunferencia.

2. El Cubo del radio de vn circulo, al cubo de vna linea recta, igual à la quarta parte de su circunferencia tienen entre sì la razon de 8. à 31.

3. El cubo del diametro de vn circulo, al cubo de vna linea recta igual à la quarta parte de su circunferen-

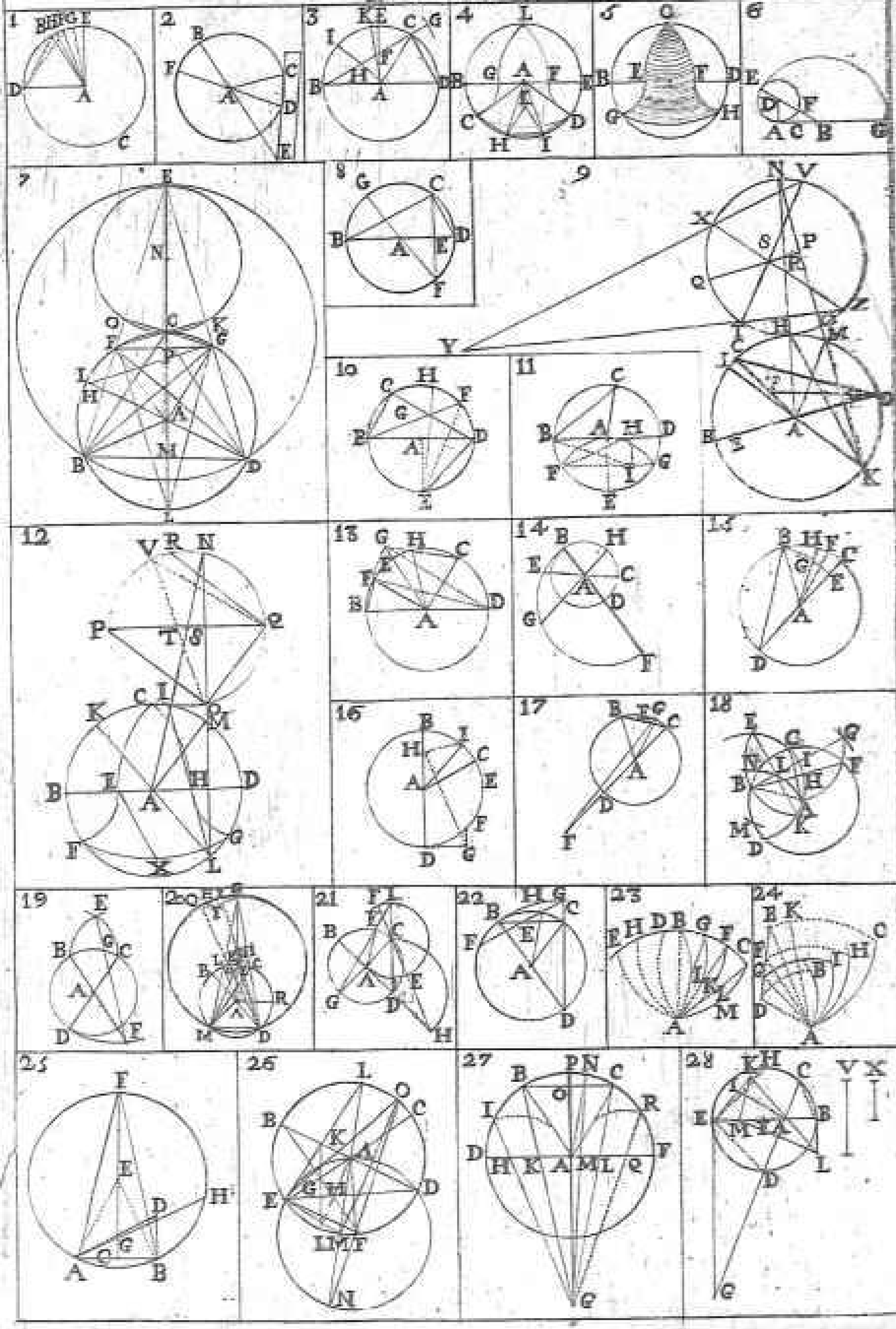
ferencia ſon entre sì, como 64. à 31. y (5.P. de Arch.) la media proporcional entre el diametro del circulo, cubo 64. y vna linea recta igual à la quarta parte de ſu circunferencia cubo 31. es lado de vn quadrado igual al circulo:

NOTA.

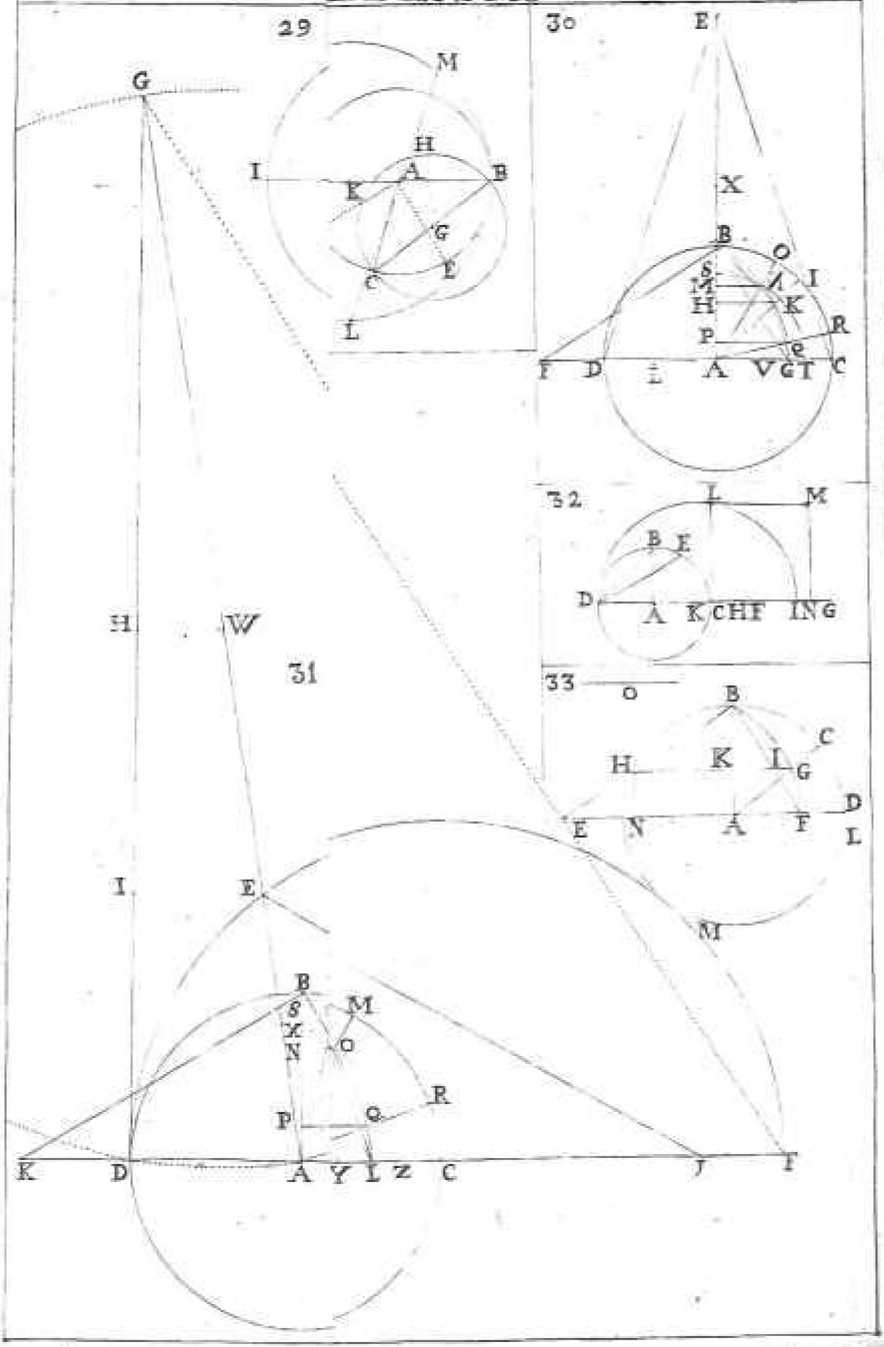
SI con la diſtancia del diametro de vn circulo ſe abre la Pantometra en los dos numeros 64. de las lineas Stherometricas, y la diſtancia de los dos numeros 31. ſe añade directamente al diametro, ſe hallarà (13.6.) entre eſtas vna media proporcional, cuyo quadrado ſerà igual al miſmo circulo.

FIN.

LAMINA. I

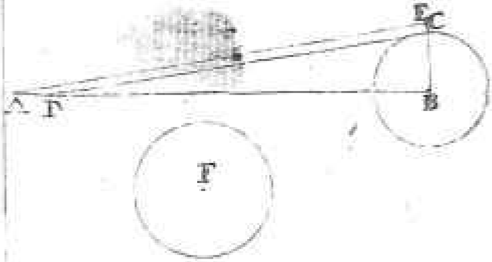


LAMINA.II

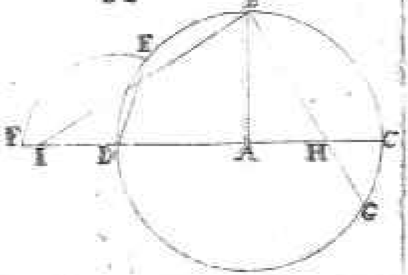


LAMINA. III

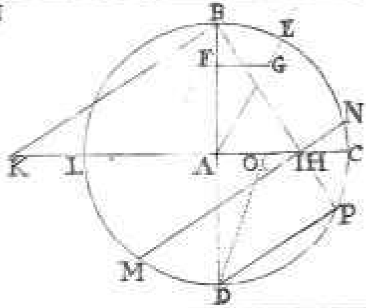
34



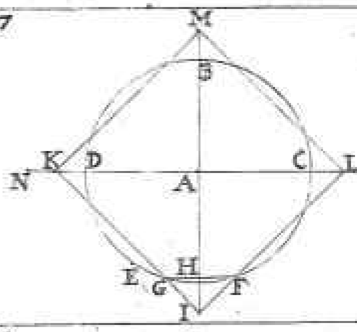
35



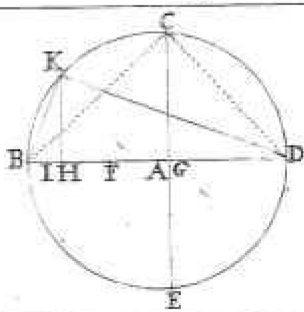
36



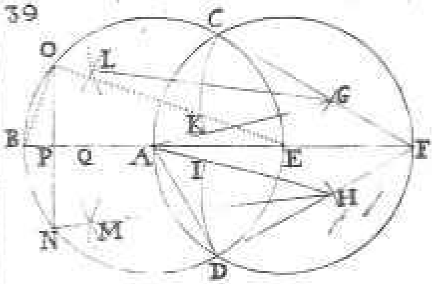
37



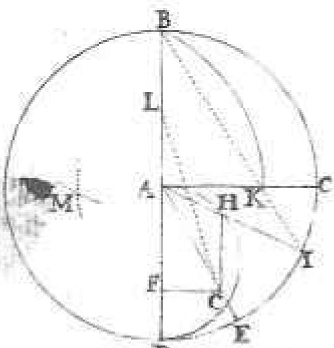
38



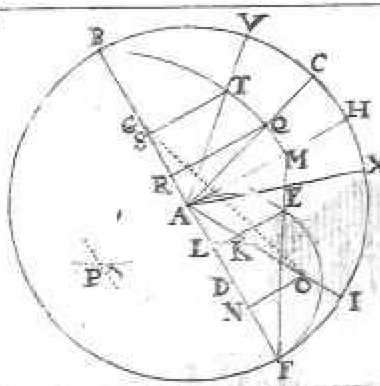
39



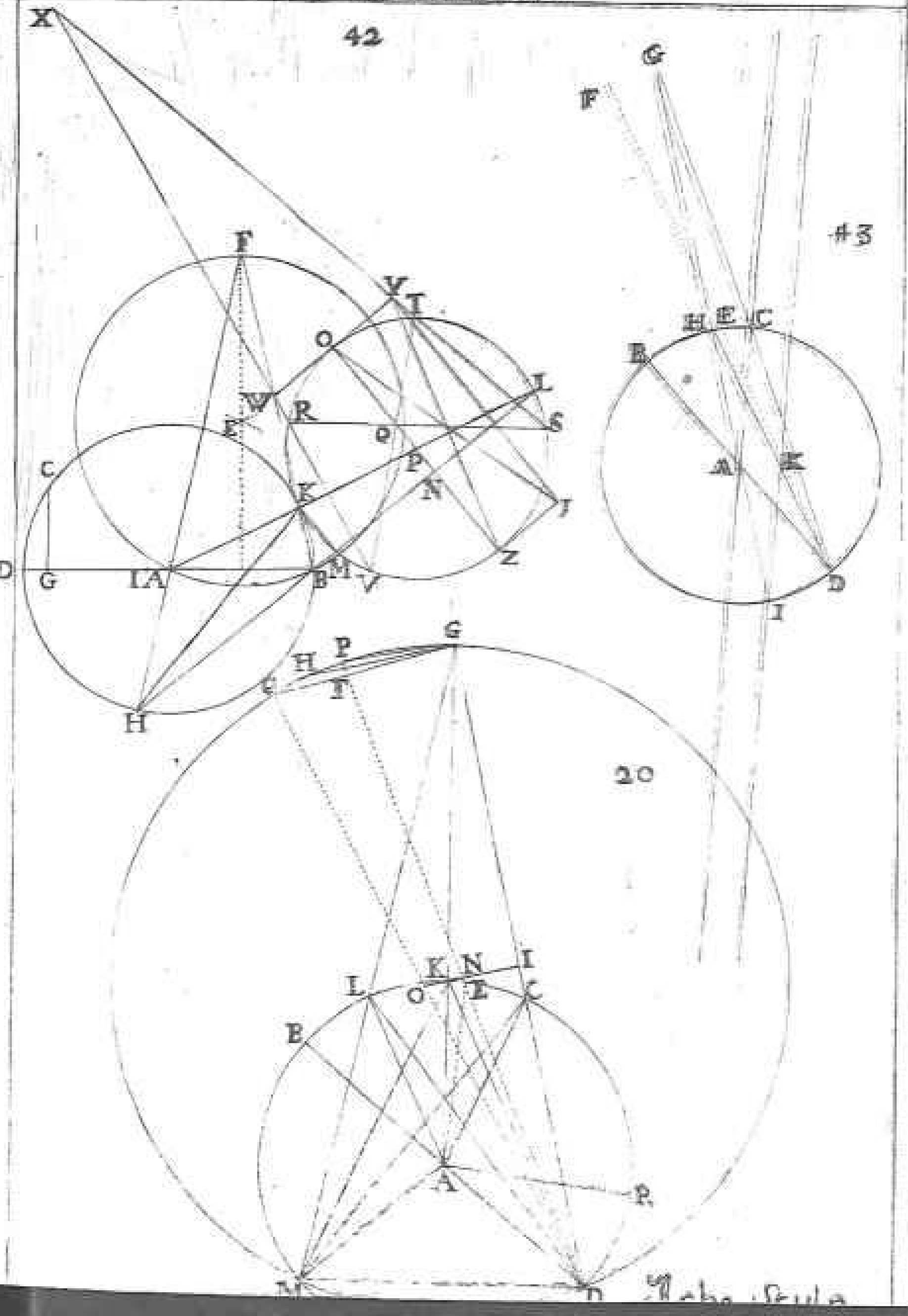
40



41



LAMINA. IV



INDICE
DE LO QVE CONTIENE
ESTE TRATADO.

Prop.

Otro

Con licencia: *En Sevilla, por Iuan Franciſco Blas de Queſada, Impreſſor Mayor de dicha Ciudad. Año de 1726.*