GEOMETRÍA ELEMENTAL.

GEOMETRÍA ELEMENTAL

POR

D. Juan Argullós y Sedano

Catedrático numerario de Matemáticas
en el Instituto Provincial de 2.ª Enseñanza de Jerez de la Frontera.

Juan Argullós y Sedano

JEREZ
IMPRENTA DE «EL GUADALETE,» Á CARGO DE J. PAREJA,
CALLE COMPÁS, NÚM. 2.
1897

GEOMETRÍA ELEMENTAL.

INTRODUCCIÓN.

1. Llámase EXTENSIÓN la magnitud limitada del espacio indefinido, en que se hallan colocados todos los cuerpos.

Obsérvese que todo cuerpo tiene sus límites, que le separan del resto del espacio, los cuales son tan comunes á aquél como á éste, constituyendo lo que se llama SUPERFICIE del cuerpo. Cuando dos de éstas se encuentran, la parte común, que limita á ambas, se denomina LÍNEA. Finalmente, si dos líneas se cortan, la intersección de éstas recibe el nombre de PUNTO.

Aun cuando las superficies, líneas y puntos forman parte inseparable de los cuerpos, se puede, por medio de la abstracción, concebir y estudiar separadamente, como si cada una de aquéllas tuviera existencia real.

2. En el espacio ocupado por un cuerpo, supónense tres direcciones distintas, que se llaman *dimensiones,* las cuales se distinguen unas de otras con los nombres de *longitud* ó largo, *latitud* ó ancho, y *profundidad* ó grueso, que también se suele llamar espesor ó altura. Las super-

ficies únicamente poseen longitud y latitud; en las líneas se admite una sola dimensión, y ésta es la longitud; y finalmente, el punto matemático, por ser infinitamente pequeño, carece de forma y de tamaño apreciable, y por lo tanto, de dimensión alguna.

3. Así como haciendo abstracción de las dimensiones de un cuerpo, se ha llegado á adquirir idea de las superficies, líneas y puntos, así también, á partir del punto geométrico, se puede tener conocimiento de las líneas, superficies y cuerpos. Al considerar que un punto se mueve, en el trayecto recorrido se ve la línea; á su vez, las diferentes posiciones por que pasa una línea, que se traslada de un paraje á otro, puede suponerse que engendran una superficie; y finalmente, el movimiento continuo de una superficie se admite que da origen al cuerpo geométrico.

Como quiera que éstos varían hasta el infinito, tanto en tamaño como en forma, se infiere de aquí la inmensa diversidad que puede existir en las líneas y superficies que á aquéllos pertenecen, y por lo tanto, la conveniencia de que se proceda á su clasificación.

Con tal motivo, las líneas se dividen en *rectas, quebradas* y *curvas.*

4. No es fácil dar una definición rigurosa de la línea recta; no obstante, á pesar de esta dificultad, todos la conocen y saben trazarla. Sirva de ejemplo la dirección
FIG. 1. que presenta un hilo bien tirante.

Línea quebrada ó *poligonal* es el conjunto de varias rectas (*) diferentes, que poseen dos á dos un extremo
FIG. 2. común.

(*) Para mayor brevedad, se ha convenido en decir recta y curva en vez de línea recta y línea curva.

Curva es la línea en la cual se verifica que ninguna porción de ella, por pequeña que sea, es recta. Fig. 3.

Análogamente las superficies se dividen en *planas, quebradas* y *curvas.*

5. *Superficie plana* ó simplemente *plano,* se llama á la superficie que coincide con la recta que determinan dos cualesquiera de sus puntos. Pudiera citarse á los espejos usuales como ejemplo de superficie plana (*).

Se da el nombre de *superficie quebrada* á la que, sin formar un solo plano, se compone de varias superficies planas que se cortan dos á dos.

Superficie curva es aquella de la que ninguna porción, por pequeña que sea, es plana.

La representación gráfica de los cuerpos, superficies y líneas, y las combinaciones que con unas y otras se obtienen, da lugar á la formación de las FIGURAS.

6. Siendo la extensión una magnitud medible, las investigaciones que acerca de la misma se hagan, pertenecen, según lo dicho (ARITM.ª 2), al dominio de la GEOMETRÍA, ó sea á la parte de las Matemáticas cuyo objeto es el estudio tanto de las propiedades como de la medida de la extensión.

Como quiera que las figuras que se consideran no siempre tienen todos sus puntos situados en un mismo plano, ha sido conveniente dividir el estudio de esta parte de las Matemáticas en dos grandes secciones; la primera

---

(*) Así como en realidad no pueden existir cuerpos desprovistos de materia, ni superficie alguna que carezca de grueso, ni línea que no posea algún ancho y grueso, ni punto que no tenga extensión apreciable, tampoco, rigurosamente hablando, hay superficie que sea un plano perfecto, en atención á que, por excelente que sea su pulimento, siempre se dejarán sentir en ella los efectos que son anejos á los poros y pequeñas oquedades que indispensablemente tiene que contener.

comprende la extensión cuyos puntos se hallan en un mismo plano, y se llama GEOMETRÍA PLANA Ó DE DOS DIMENSIONES; y la segunda, cuyos elementos geométricos no están en su totalidad en un solo plano, se la denomina GEOMETRÍA DEL ESPACIO Ó DE TRES DIMENSIONES.

PRIMERA PARTE.

GEOMETRÍA PLANA Ó DE DOS DIMENSIONES.

LIBRO I.

FIGURAS RECTILÍNEAS.

SECCIÓN PRIMERA.

LÍNEAS RECTAS Y POLIGONALES.

CAPÍTULO I.

Línea recta.

ARTÍCULO 1.º

Nociones preliminares.

7. La línea recta puede considerarse engendrada por las diferentes posiciones que toma un punto, cuando moviéndose de una manera continua, conserva constantemente la misma dirección en su movimiento. Según esto, en una recta pueden considerarse dos circunstancias distintas, que son su magnitud y su dirección. Cuando únicamente se tiene en cuenta la primera de estas circunstancias, hay necesidad de suponer que la recta está limitada por dos puntos que se llaman *extremos* de la recta, y cuando sólo se atiende á su dirección, se considera prolongada indefinidamente en ambos sentidos.

La línea recta tiene la propiedad de determinar *el camino más corto que media entre dos cualesquiera de sus puntos*. De donde se deduce, que *dos puntos determinan la* *posición de una recta,* ó en otros términos, *por dos puntos no puede pasar sino una sola recta,* supuesto que otra cualquiera que también pasara por los expresados puntos, se confundiría con la anterior, en atención á que una y otra señalarían el trayecto más corto que entre aquéllos media.

De aquí se desprende, que *todas las rectas son superponibles,* lo cual significa, que al aplicar dos puntos de una de éstas sobre dos de otra, ambas rectas coincidirían en toda su extensión indefinida.

El punto geométrico se ha convenido en representarlo gráficamente, bien sea por medio del punto ortográfico, ó, lo que es más frecuente, sirviéndose de dos acentos ó pequeños trazos que se cortan. Se le distingue y nombra por medio de una letra que se escribe próxima.

Después de lo dicho, se explica que las rectas, siendo limitadas, se diferencien por medio de dos letras colocadas en sus extremos, y en dos cualesquiera de sus puntos, si fuesen indefinidas en ambos sentidos.

Así, en la figura 1, la recta limitada se lee AB, y la recta CD en que se consideran dos puntos cualesquiera, se supone indefinida.

8. De las proposiciones anteriores, también se infiere que *dos rectas diferentes no pueden tener más que un solo punto que sea común á ambas;* supuesto que si tuvieran dos, las rectas coincidirían en toda extensión, y por lo tanto, pasarían á ser una sola línea.

La *medida* de una recta limitada se llama su *longitud.*

La *distancia* que media entre dos puntos se estima por la longitud de la recta que los une.

9. Sirviéndose de procedimientos gráficos, las rectas se suman, restan, multiplican y dividen. Así para determinar la suma de las rectas AB, CD y EF, se coloca-

rán una á continuación de otra sobre una recta indefinida MN, y á partir de un punto cualquiera tal como el A′ las magnitudes A′B′, B′D′ D′F′ respectivamente iguales á cada una de las propuestas, y es evidente que la recta A′F′ igual al conjunto de todas ellas, será el valor de su suma. Cuando haya necesidad de restar dos rectas tales como la AB y la CD, se tomará sobre la recta indefinida PQ y á partir del punto A′ una longitud A′B′ igual á la AB, y desde el mismo punto de partida y en el mismo sentido se lleva la otra recta CD, y en este caso resulta que la distancia B′D′ que media entre los extremos de las dos porciones tomadas á partir del punto A′ sobre la PQ, será evidentemente el exceso de la mayor sobre la menor de las rectas propuestas ó sea su diferencia. Fig. 4. Fig. 5.

Si ahora se quisiera multiplicar una recta por un número abstracto, ó sea formar un *múltiplo* cualquiera de ella, no habría sino trazar una recta indefinida, y sobre ésta tomar unas á continuación de otras tantas porciones iguales á la propuesta, como unidades tuviese el multiplicador.

Para dividir una recta por otra de menor magnitud, se aplicaría ésta sobre aquélla las veces que fuera posible, y el mayor número de éstas determinaría el valor del cociente; en cuanto al *residuo*, si lo hubiere, estaría expresado por el exceso de la primera recta sobre el mayor múltiplo de la segunda contenido en ella (*).

10. Después de lo que se acaba de manifestar, fácilmente se explican, entre otras, las proposiciones siguientes: *Si una recta divide á otras varias, dividirá también á la suma de éstas*, y por lo tanto, se tendrá, que *si una recta*

(*) En otro capítulo de este Tratado se deducirá gráficamente la equivalencia del producto de dos rectas, así como el procedimiento para dividir una recta por un número entero cualquiera.

divide á otra, dividirá á todas aquellas que sean múltiplos de ésta, así como también se infiere que *si una recta divide á otras dos, dividirá á su diferencia,* de donde se deduce que *toda recta que divida á la suma de dos rectas y á una de éstas, dividirá á la otra.*

ARTÍCULO 2.°

Medida de la longitud de una recta cualquiera.

11. *Medir* una recta es determinar su relación con otra que se considera como unidad.

Medida común de dos rectas se llama á otra recta que se halle contenida en ambas un número exacto de veces.

12. La relación que existe entre dos rectas se determina apoyándose en la siguiente proposición: *La razón de dos rectas es la misma que la de los números que expresan las veces que cada una de ellas contiene á su medida común.*

En efecto, si se representan con a y b las longitudes de dos rectas, que respectivamente contienen m y n veces á su medida común U, se tendrá como consecuencia, que $a=mU$ y $b=nU$, de donde, dividiéndolas ordenadamente, se deduce que $\frac{a}{b}=\frac{mU}{nU}$, y por tanto, $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, supuesto que $nU\times\frac{m}{n}=\left(n\times\frac{m}{n}\right)U=mU.$

Nota.—Siendo esta demostración general, se comprende que será también aplicable al caso en que se trate de comparar dos cantidades conmensurables cualesquiera, en el supuesto de que estén referidas á la misma unidad.

13. Como no siempre se verifica que la recta consi-

derada como unidad, se encuentra contenida un número exacto de veces en aquella cuyo tamaño se desea medir, hay necesidad de investigar qué longitud está contenida exactamente en ambas, á fin de deducir la razón en que las rectas se hallan. Mas como quiera que existen diversos tamaños en la medida común de dos rectas, siempre se podrá obtener como expresión de ésta, varias fracciones equivalentes, pero cuyos términos serán tanto menores cuanto mayor sea la magnitud de la medida común que se considere; de aquí se desprende que, para que la mencionada razón sea lo más sencilla posible, habrá que dar la preferencia á la máxima medida común de las dos longitudes que se tratan de comparar.

El procedimiento que se sigue para determinar la mencionada máxima medida común, consiste *en colocar la menor de las dos rectas sobre la mayor todas las veces que sea posible; si no resultase residuo es evidente que entonces la menor sería la recta buscada; pero si sucediere lo contrario, se aplicará el residuo obtenido cuantas veces se pueda sobre la menor, y el nuevo residuo si lo hubiere, se colocaría sobre el anterior, y así se continuaría procediendo en esta forma, hasta llegar á uno que estuviera contenido exactamente en el que le antecede. El último residuo que se obtenga, será la longitud que corresponde á la máxima medida común que se deseaba encontrar.*

En efecto, con el fin de fijar las ideas, supóngase que AB y CD sean las rectas propuestas, y que al llevar la menor CD sobre la AB, á partir de uno de sus extremos, resultare contenida 3 veces y además el residuo BE, en el caso de que éste estuviere contenido 4 veces en CD quedando un sobrante DF, el cual á su vez se hallare 5 veces contenido en BE con un exceso igual á BG, se tendría en este último residuo la máxima Fig. 6.

medida común que se busca, si, como ahora sucede, se hallase contenido exactamente en DF.

Esto mismo, para mayor claridad, conviene escribirlo en la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
AB &= 3CD + BE \ldots\ldots \text{(a)}\\
CD &= 4BE + DF\\
BE &= 5DF + BG\\
DF &= 2BG;
\end{aligned}
$$

la última de estas igualdades manifiesta que BG se halla contenida exactamente en AB y CD, pues si se escriben éstas en orden inverso, comenzando por la penúltima y haciendo en ellas las procedentes sustituciones y reducciones, se tendrá:

$$
\begin{aligned}
BE &= 5 \times 2BG + BG = 11BG\\
CD &= 4 \times 11BG + 2BG = 46BG\\
AB &= 3 \times 46BG + 11BG = 149BG;
\end{aligned}
$$

pero obsérvese que BG no solamente es una medida común de las rectas dadas, sino que no puede existir ninguna que sea mayor, pues si tal sucediera con una magnitud M, resultaría que, por encontrarse ésta contenida en AB y CD, tendría que estarlo en BE, según lo manifiesta la igualdad (a) y lo dicho en el número (10); aplicando análogas consideraciones en las igualdades siguientes, se verificaría que por ser M divisor exacto de CD y de BE, debería serlo también de DF, y, finalmente, por ser divisor de este residuo y de BE, tendría M que estar contenida exactamente en BG; lo cual prueba que las rectas AB y CD, no tienen medida común alguna que sea mayor que BG.

14. Según lo demostrado (12), la razón que existe entre las rectas AB y CD es igual á $\frac{149}{46}$, y por lo dicho (11), se tendrá que esta misma fracción expresará la medida de la recta AB siempre que la CD sea la unidad.

Obsérvese que la relación obtenida con tal motivo, será siempre un quebrado irreducible; pues si los números 149 y 46 tuvieran un factor común q, sucedería que la mayor medida de las rectas dadas 149BG y 46BG, ya no sería sencillamente BG, sino el producto BG$\times q$.

15. En el caso de que AB y CD fueran inconmensurables, se aplicaría el mismo procedimiento que se acaba de exponer, y claro está, que aun cuando nunca se llegaría á encontrar un resto que estuviera contenido un número exacto de veces en el anterior, sucedería que éstos irían disminuyendo á medida que la operación se fuera prolongando, y por lo tanto, siempre se conseguiría obtener un resto que fuera tan pequeño como se deseara; si en tal caso se prescindiera de él, equivaldría á considerar al resto que le antecediese, como la mayor medida común de las dos rectas propuestas, dándose con tal motivo lugar á un número fraccionario, que, aun cuando no fuera exactamente igual á la razón que se buscaba, se diferenciaría de ella en tan poco como se quisiera.

CAPÍTULO II.

Posiciones relativas de dos rectas.

16. Para formarse idea de las diversas posiciones que puede tener una recta respecto de otra fija á quien corta,
FIG. 7. concíbase á la recta indefinida AB coincidiendo con la CD; si ahora se hace girar á esta última alrededor del punto C, en el supuesto de que este movimiento se efectúa sin salir del plano en el cual se supone que ambas rectas se hallan colocadas, y en el sentido señalado por la flecha, se tendrá que la CD tomará las infinitas posiciones CD′, CD″, CD‴, ... hasta la terminación de su movimiento, que, se supone sucederá cuando llegue á confundirse con la porción AC de la AB. Según esto, no podrá señalarse en la parte superior del plano, que se considera, recta alguna que pasando por el punto C no haya pertenecido á una de las posiciones diferentes, que la CD tiene tomadas en su movimiento. Estas variadas posiciones adquiridas por esta recta, se diferencian más de otras en la mayor ó menor inclinación que posee la CD con respecto de la recta AB.

ÁNGULOS.

17. Á la separación ó abertura que forman dos rectas, que se cortan y terminan en el punto de encuentro, se llama ÁNGULO. El expresado punto se denomina VÉRTICE, y las rectas que determinan al ángulo constituyen los LADOS de éste.

Comúnmente todo ángulo se designa con tres letras, leyendo una en cada lado y en medio la del vértice, ó bien con ésta solamente, cuando no puede confundirse con algún otro. Así el formado por las rectas CD′ y BC, se leerá BCD′ ó D′CB ó simplemente C (*), si estuviese solo, y por lo tanto, no pudiera confundirse con otro.

Según lo dicho, se explica fácilmente, que la magnitud de un ángulo, no depende de la longitud de sus lados, (pues éstos, para la apreciación de aquélla siempre se consideran ilimitados) sino de su mayor ó menor separación ó abertura.

También se infiere de lo dicho, que dos ángulos son iguales, cuando sus lados, puestos los del uno sobre los del otro, pueden disponerse de manera que coincidan. Si al colocar un lado del uno sobre un lado del otro ángulo, de modo que los respectivos vértices coincidan, se vea que no pueden confundirse formando uno solo los otros dos lados, entonces los ángulos que se consideran son desiguales.

Bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en otros dos que sean iguales.

18. Los ángulos se suman, restan, multiplican y dividen, análogamente á como se hacía con las rectas. Así, por ejemplo, la suma de los ángulos BCD′, D′CD″ y D″CD‴ es igual á BCD‴; la diferencia que existe entre BCD″ y D′CD″ es BCD′. En el caso de que se supongan iguales los ángulos BCD′, D′CD″ y D″CD‴, acontecerá que el producto de uno cualquiera de éstos por 3 será BCD‴, y 3 será también el cociente que resulte de divi-

(*) En realidad, al decir BCD‴ se nombran dos ángulos desiguales, el menor de ellos, que es al que siempre se hace referencia en Geometría, contiene en la figura 7 á las rectas CD″ y CD′, y el otro ó sea el mayor, comprende dentro de sí á la AC.

dir este último ángulo por cualquiera de los iguales, que se acaban de mencionar.

En cada una de las diferentes posiciones que toma la CD con respecto de la AB, forma *dos ángulos que tienen un lado común y los otros dos lados son el uno prolongación del otro;* estos ángulos reciben el nombre de ADYACENTES. Así, al considerar los ángulos ACD′ y BCD′, se diría que eran adyacentes.

19. Obsérvese que cuando la CD se mueve en el sentido marcado por la flecha, el ángulo que forma con la BC va haciéndose cada vez mayor; y, por el contrario, irá disminuyendo el formado por aquella recta móvil con la porción AC; en su consecuencia sucederá, que disminuyendo éste, que era el mayor, hasta llegar á hacerse nulo, llegará la recta móvil á tomar una posición tal como la CD″, que será la única que forme con la AB los ángulos adyacentes ACD″ y BCD″ iguales; cuando esto sucede, se dice que la primera recta es PERPENDICULAR á la segunda. Así, en el presente caso, la CD″ será perpendicular á la AB. Las demás posiciones que en su movimiento adquiere la CD, se llaman OBLICUAS respecto de AB.

De cuanto acaba de exponerse se infiere, que *por un punto de una recta, siempre se puede trazar una perpendicular á ella y nada más que una.*

Los ángulos adyacentes iguales que forme una recta con otra á la cual es perpendicular, se llaman RECTOS. Todo ángulo menor que un recto, se dice que es AGUDO; y OBTUSO se llama á todo ángulo que sea mayor que un recto. Así, el ángulo BCD′ será agudo y el ACD′ obtuso.

20. *Todos los ángulos rectos son iguales aun cuando no sean adyacentes.*

En efecto, sean los ángulos rectos ABC y A′B′C′, si se colocan (*) el uno sobre el otro de modo que el vértice A′ coincida con el A, y la recta A′B′ con la AB, sucederá que la A′C′ se confundirá con la AC, supuesto que, según se acaba de ver, por el punto A no puede trazarse más que una perpendicular á la recta AB. Habiéndose confundido los lados y por lo tanto los vértices de los dos ángulos propuestos, éstos serán iguales. FIG. 8.

Dos ángulos son *suplementarios* ó el uno será *suplemento* del otro, cuando la suma de ambos sea igual á dos rectos: se llaman *complementarios* ó el uno *complemento* del otro, cuando su suma equivale á un ángulo recto.

Es evidente que si dos ángulos tienen el mismo complemento ó el mismo suplemento, serán necesariamente iguales, supuesto que á uno y á otro les falta un mismo ángulo para valer uno ó dos ángulos rectos.

21. *La suma de dos ángulos adyacentes equivale á dos ángulos rectos.*

Sean ACD y BCD dos ángulos adyacentes; trazando la CE (**) perpendicular á la AB, resulta:

$$ACD = ACE + DCE$$
$$BCD = BCE - DCE;$$

sumando ordenadamente ambas igualdades y reduciendo, se tendrá: $ACD + BCD = ACE + BCE = 2R$; en donde R representa al ángulo recto.

RECÍPROCO.—*Dos ángulos que tienen un lado y el vértice*

(*) Este método de demostración peculiar de la Geometría y muy usado en las cuestiones que son propias de esta ciencia, sirve para probar la igualdad ó desigualdad de dos figuras, ó de dos posiciones que forman parte de una misma figura.

(**) Para la debida representación de las figuras geométricas se señalan completas ó sea sin interrupciones, las líneas que se mencionan en los enunciados de los teoremas y problemas, y con pequeños trazos, igualmente separados unos de otros, tanto las *auxiliares* de que se hace uso para la demostración de los primeros, como las de *construcción* que se emplean en la resolución de los segundos.

común y cuya suma equivale á dos rectos, son adyacentes.
Fig. 9. Es decir, que si la suma de los ángulos ACD y BCD es igual á dos rectos, las dos porciones AC y BC formarán una sola recta.

En efecto, si el lado CB no fuera la continuación del AC, al prolongar éste, tomaría una dirección diferente, tal como la CF, y entonces, en virtud del teorema directo, se tendría, $ACD + DCF = 2R$; mas como por suposición se verifica que $ACD + BCD = 2R$, resulta de aquí $DCF = BCD$, lo cual no puede acontecer sino cuando CB y CF coinciden.

Corolario 1.º—*La suma de todos los ángulos formados en un punto de una recta y hacia un mismo lado de ella, valen dos rectos.*

Fig. 7. Puesto que entre los ángulos BCD', $D'CD''$ y $D''CD'''$ componen el BCD''', y éste con su adyacente ACD''' equivalen á dos ángulos rectos.

Corolario 2.º—*Todos los ángulos que se forman alrededor de un punto, componen cuatro ángulos rectos;* puesto que trazando por este punto una recta cualquiera, se tendría que los ángulos formados á cada lado de ella compondrían dos rectos; luego todos ellos reunidos equivaldrán á cuatro rectos.

Se llaman ángulos *opuestos por el vértice,* dos ángulos tales, que los *lados del uno sean prolongaciones de los lados del otro:* los ángulos ABC y DBE son opuestos por el
Fig. 10. vértice.

22. *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

En efecto, los ángulos ABC y CBD son adyacentes y por lo tanto suplementarios; por la misma razón son también suplementarios DBE y CBD: luego los ángulos ABC y DBE que tienen el mismo suplemento CBD serán iguales.

Corolario.—*Los cuatro ángulos que forma una recta* *con otra á la cual es perpendicular, son rectos;* lo que manifiesta que *si una recta es perpendicular á otra, ésta lo será á la primera.*

23. *Por un punto de un plano siempre se puede trazar una perpendicular á una recta situada en dicho plano y nada más que una.*

Este teorema fué demostrado (19) cuando el punto dado pertenecía á la recta; por lo tanto, ahora sólo falta hacer patente, que se verifica también en el caso de que el mencionado punto esté situado fuera de aquélla.

Sea AB la recta y C el punto; al doblar la figura por la AB, hasta tanto que el punto C se aplique sobre la porción de plano situado al otro lado de la precitada recta, habrá tomado una posición tal como la C′; si ahora se unen estos dos puntos por la recta CC′ y se vuelve á doblar la figura por AB, hasta que el mencionado punto ocupe su posición primitiva; entonces la C′D se confundirá con la CD, y los ángulos ADC y ADC′, cuyos lados coinciden, serán iguales: luego la recta AB será perpendicular á la CC′ y en su consecuencia ésta á su vez lo será también á la AB (22, Corolario). Fig. 11.

Para demostrar que cualquiera otra recta, tal como la CE, diferente de la CD que parte del punto C, es necesariamente oblicua con respecto de la AB, obsérvese que al prolongar la CE nunca acontecerá que la EF pueda tener con la CC′ más punto de intersección que el C, supuesto que dos rectas distintas no pueden poseer dos puntos comunes (8). El ángulo CED es igual al C′ED, pues al doblar la figura por AB coincidirían sus lados; pero el ángulo FED es mayor que C′ED y por lo tanto mayor que su igual CED: luego este ángulo no es recto por ser desigual con su adyacente, y en su consecuencia, la CE será oblicua con respecto á la AB.

COROLARIO.—*La posición de una recta queda determinada por un punto y la circunstancia de ser perpendicular á otra recta.*

24. Pudiera ocurrir que en vez de cortarse las dos rectas que se consideren, no se encontraran aun cuando hallándose en un mismo plano se prolongasen indefinidamente; en tal caso se dice que las rectas son PARALELAS. Éstas á pesar de poseer idéntica dirección no se confunden, y tienen existencia real, según se hace patente al demostrar el teorema que sigue.

CAPÍTULO III.

Cuestiones en que intervienen tres rectas.

ARTÍCULO 1.°

Paralelas.

FIG. 12. 25. *Dos rectas AC y BD perpendiculares á una tercera AB son paralelas.* Puesto que si llegaran á encontrarse podrían ser trazadas, desde el punto de intersección de ambas, dos rectas perpendiculares á la AB, lo cual se acaba de demostrar que es imposible.

Se llama *secante* ó *transversal* toda recta que corte á otras. Siempre que una secante AB encuentra á dos rec-
FIG. 13. tas cualesquiera CD y EF, forma con ellas ocho ángulos que reciben las siguientes denominaciones: Los ángulos *a*, *b*, *g* y *h* (*) situados fuera de las rectas CD y EF se

(*) Se expresa cada ángulo con una letra colocada en su abertura, con el fin de abreviar y dar más claridad á la explicación.

llaman *externos*, y los *c*, *d*, *e* y *f*, que se hallan dentro de las mencionadas rectas, se denominan *internos*.

Ángulos correspondientes son aquellos no adyacentes que se hallan situados al mismo lado de la secante, y el uno es interno y el otro externo; según puede verse con los *a* y *e*; *c* y *g*; *b* y *f* y *d* y *h*.

Ángulos alternos son aquellos dos ángulos que estando situados á diferente lado de la secante, y no siendo adyacentes, tienen el mismo nombre, esto es, los dos son internos ó los dos externos. Así los *c* y *f* y *d* y *e* serán alternos internos, y los *a* y *h* y *b* y *g* alternos externos.

26. *Cuando una secante corta á dos paralelas, se verifica:* 1.º *Que los ángulos correspondientes son iguales.* 2.º *Que son también iguales los ángulos alternos.* 3.º *Que son suplementarios los ángulos internos de un mismo lado de la secante.*

Sean CD y EF las rectas paralelas y AB la secante. Fig. 14.

1.º Como quiera que por ser aquéllas paralelas, tienen la misma inclinación con respecto de la secante, resulta de aquí, que es idéntica la separación que existe entre las rectas que forman los ángulos correspondientes *a* y *e*, y por lo tanto, éstos serán iguales, así como en esta misma atención también lo serán *c* y *g*, *b* y *f* y *d* y *h*.

2.º Los ángulos alternos *c* y *f* son iguales, puesto que cada uno de ellos es igual al *b*; el primero por opuesto por el vértice, y el segundo atendiendo á que es su correspondiente; de una manera análoga se demostraría, que también serían iguales los *d* y *e*; *a* y *h*; y *b* y *g*.

3.º Los ángulos *d* y *f*, internos de un mismo lado de la secante, son suplementarios, supuesto que el ángulo *c*, suplemento del *d*, es idéntico, por alterno interno, al *f*.

27. *Por un punto situado fuera de una recta, se puede trazar una paralela á ella y nada más que una.* Fig. 15.

En efecto, por *g* siempre es posible trazar una perpendicular á CD, y otra GB á GL; luego AB y CD perpendiculares á la GL, serán paralelas (25).

Para demostrar la segunda parte de esta proposición, ó sea para hacer ver que por un punto tal como el G no se puede trazar sino la AB, paralela á la CD, basta considerar que si hubiere otra recta GI, diferente de la AB que, pasando por el punto G, también fuese paralela á la CD, se tendrían los ángulos BGL y LGI iguales por tener el mismo suplemento DLG; mas como quiera que ambos poseen el lado GL y el mismo vértice G, los otros dos lados, ó sean las rectas GI y GB, se confundirían en una sola.

Nota.—En virtud del teorema que acaba de demostrarse, y de lo que anteriormente se tiene dicho (7-23), se desprende, que para fijar la posición de una recta es necesario conocer dos puntos, ó un punto y la dirección que ha de tener aquélla, y por lo tanto, puede decirse que *la posición de una recta queda determinada, conocidas que sean dos condiciones.*

Corolario 1.º—*Dos rectas paralelas á una tercera, son paralelas entre sí.* Supuesto que si se llegaran á encontrar, podrían trazarse desde el punto de encuentro dos paralelas á una misma recta, lo cual se ha visto (27) que es imposible.

Corolario 2.º—*Si una recta AB corta á CD, que es*
Fig. 14. *una de dos paralelas, también cortará á la otra EF.*

Puesto que si así no fuera, se tendría que por el punto G, intersección de las dos primeras rectas, se podrían trazar dos paralelas á la EF.

Recíproco.—*Si la recta GL es perpendicular á una de*
Fig. 15. *dos paralelas CD, lo será también á la otra AB.*

En efecto, en el mero hecho de cortar la GL á la CD, tiene, según se acaba de ver, que encontrar á toda paralela de ésta. y por lo tanto, á la AB; siendo los ángulos GLD y GLC rectos, deberán serlo también los suplementarios á éstos BGL y AGL, resultando en su consecuencia, que la recta GL será perpendicular á la AB.

La proposición contraria de este recíproco, conocida con el nombre de *postulado de Euclides* (*), dice como sigue: *Una perpendicular y una oblicua á una misma recta, no son paralelas.* En efecto, si las dos primeras rectas fueran paralelas, resultaría, que por ser una de éstas perpendicular á la tercera recta, la otra, según el recíproco que antecede, también tendría que serlo, lo cual es contrario á la hipótesis.

RECÍPROCO (26).—*Cuando una secante AB corta á dos rectas CD y EF, éstas serán paralelas: 1.º Si los ángulos correspondientes son iguales. 2.º Si los ángulos alternos son también iguales. 3.º Si los ángulos internos de un mismo lado de la secante, son suplementarios.* FIG. 14.

1.º Sean los ángulos correspondientes iguales BGD y BHF. En el supuesto de que las rectas CD y EF no fueran paralelas, se podría trazar por el punto G la paralela GL á la EF, y resultaría entonces que los ángulos BGL y BHF serían iguales por correspondientes (26), lo cual es absurdo, á menos que la paralela GL no coincida con la CD.

2.º Por ser iguales los ángulos CGH y BHF, tienen que serlo también BGD y BHF, en atención á que CGH es igual, por opuesto por el vértice, con el BGD. Luego siendo los ángulos correspondientes BGD y BHF iguales, las rectas CD y EF serán paralelas, según se acaba de demostrar.

(*) Se llama *postulado*, una proposición en la que se enuncia una verdad de carácter práctico, y aun cuando no tiene el grado de evidencia que el axioma, se admite sin demostración.

Euclides, geómetra griego que se dió á conocer unos 300 años antes de J. C.

3.° Siendo DGH suplementario del GHF, éste último será igual á su correspondiente BGD que, por ser adyacente con DGH, tiene también á éste por suplemento.

28. Dada la íntima dependencia que existe entre una proposición y la contraria de su recíproca, la verdad de la primera supone indefectiblemente la de la segunda; por lo tanto, esta última puede admitirse desde luego como cierta, y prescindir de su demostración, una vez que se haya hecho patente el teorema directo. Así, por ejemplo, el enunciado de la proposición contraria del recíproco, que se acaba de probar, dice: *Si se tienen dcs rectas cortadas por una tercera, y se verifica que los ángulos internos de un mismo lado de la secante no son suplementarios, aquellas dos rectas no serán paralelas.* Lo cual es evidente, en atención á que si estas dos rectas fueran paralelas, sucedería que, según el teorema directo, los ángulos internos del mismo lado de la secante serían suplementarios, lo cual es contrario á la hipótesis.

29. Al considerar tres rectas contenidas en un plano, puede ocurrir, según se acaba de ver, que las tres sean paralelas entre sí, que dos sean paralelas y estén cortadas por una tercera, y, finalmente, que se tengan dos rectas que sin ser paralelas se hallen también cortadas por otra. Este último caso puede subdividirse en otros dos, según que las dos primeras rectas se corten ó nó en la figura propuesta: falta, según ésto, tratar del caso en que las rectas se corten dos á dos, dando origen á una superficie limitada.

ARTÍCULO 2.º

Triángulos.

30. Se llama TRIÁNGULO la porción de superficie plana cerrada por tres rectas. Atendiendo á que una superficie no puede estar limitada por menos de tres rectas, se deduce, que el triángulo es la figura más sencilla entre todas las líneas poligonales cerradas, que pueden considerarse.

En un triángulo, y en general en toda línea quebrada, las diversas porciones rectilíneas de que se compone, se llaman *lados*. La figura 16 representa un triángulo cuyos lados son AB, AC y BC, el cual se lee ABC, ó sea con las tres letras que se hallan en sus vértices. De aquí se desprende, que los elementos esenciales de un triángulo son los tres lados de que se compone, y los tres ángulos que forman al cortarse aquéllos.

Un triángulo es *equilátero* cuando tiene los tres lados iguales; *isóscele* si tiene dos lados iguales, y *escaleno* en el caso de que sus tres lados sean desiguales.

Se entiende por *altura* en un triángulo, la perpendicular trazada desde un vértice cualquiera al lado opuesto, con cuyo motivo éste recibe entonces el nombre de *base* del triángulo. Cuando éste es isósceles, la base se entiende que es el lado desigual, y en tal caso, el vértice opuesto á ésta se llama sencillamente *vértice* del triángulo isósceles.

31. *En todo triángulo, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*

En efecto, el lado AC, por ejemplo, es necesariamente menor que AB + BC, en atención á que aquél por ser FIG. 16.

una recta, tiene que señalar la distancia más corta que media entre los puntos A y C.

Obsérvese que cuando se tengan tres cantidades cada una de las cuales sea menor que la suma de las otras dos, se verificará también, que una cualquiera de éstas será mayor que la diferencia de las dos restantes. De modo, que siendo ciertas las desigualdades $AC < AB + BC$; $AB < AC + BC$; $BC < AC + AB$, se tendrá también, que $AC - AB < BC$; $AB - BC < AC$; $BC - AC < AB$; luego según esto, se verificará, que *todo lado de un triángulo, es siempre mayor que la diferencia de los otros dos.*

32. *La suma de los tres ángulos de un triángulo, equivale á dos ángulos rectos.*

En efecto, trazando por el vértice B del triángulo FIG. 17. ABC, una paralela BE al lado AC, resultará que $A + ABE = 2R$; pero siendo $ABE = ABC + CBE$, se tendrá, $A + ABC + CBE = 2R$; mas como según lo dicho (26), el ángulo CBE es igual á C, se verificará, que $A + C + ABC = 2R$.

Corolario 1.º—*Un ángulo de todo triángulo, es suplemento de la suma de los otros dos.*

Corolario 2.º—*Un triángulo no puede tener más que un ángulo recto ó un ángulo obtuso,* pues de lo contrario, sucedería que la suma de sus tres ángulos valdría más que dos rectos.

De aquí la división de los triángulos en *acutángulos* si tienen los tres ángulos agudos, *rectángulos* los que cuentan con un ángulo recto, y *obtusángulos* aquellos que poseen un ángulo obtuso. Éstos últimos y los primeros, se designan con la denominación general de triángulos *oblicuángulos.*

En un triángulo rectángulo reciben el nombre de *cate-*

tos, los dos lados que forman el ángulo recto, é *hipotenusa* se llama el tercer lado. Fig. 13.

Corolario 3.º—*Si la suma de los ángulos internos* c *y* e, *de un mismo lado de la secante, es menor que dos rectos, las rectas CD y EF se contarán precisamente hacia ese lado.* En efecto, ya se demostró (28) que en tal caso estas dos rectas tenían que encontrarse, mas como quiera que el punto de su intersección no puede estar situado hacia la parte en donde se hallan los ángulos *d* y *f*, que valen más de dos rectos, por ser respectivamente adyacentes á los *c* y *e*; de aquí que el punto de encuentro de las rectas CD y EF, deberá hallarse, prolongando hacia la izquierda las dos mencionadas rectas.

Corolario 4.º—*Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, los terceros también lo serán.*

Corolario 5.º—*En todo triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos son suplementarios.*

33. Se llama ángulo externo de un triángulo, al formado por un lado de éste y la prolongación de uno cualquiera de los otros dos. Así, el ángulo BCD que se compone del lado BC y la prolongación CD del lado AC, será un ángulo externo del triángulo ABC. Fig. 18.

Corolario 6.º—*Todo ángulo externo de un triángulo, es igual á la suma de los otros dos internos no adyacentes.* Porque siendo así que la suma de A y B tiene por suplemento al ACB, y como quiera que también BCD tiene por suplemento el ACB, se tendrá, según lo dicho (20), que $BCD = A + B$.

34. *Si desde un punto situado en uno de los lados de un ángulo agudo, se traza una perpendicular al otro lado, esta perpendicular tendrá que encontrarse dentro del expresado ángulo.* Porque si se hallase fuera, tendría que estar dentro del ángulo obtuso, y por lo tanto, resultaría for-

mado un triángulo con un ángulo recto y otro obtuso, lo cual es imposible (32 COROLARIO 2.º).

35. *Si un triángulo ABC tiene dos ángulos A y C iguales, los lados opuestos también serán iguales.*

FIG. 19. En efecto, sea ABC un triángulo cuyos ángulos A y B son iguales; si se considera otro triángulo A′B′C′ que sea igual al anterior, resultará, A′ = A y B′ = B; mas como por hipótesis se tiene que A = B, sucederá que A′ = B y B′ = A; por lo tanto, al superponer el triángulo A′B′C′ invertido sobre el ABC, de manera que el vértice B′ caiga sobre el A y el A′ sobre el B, resultará que el lado B′C′ se aplicará sobre el AC, por la igualdad de los ángulos B′ y A, y también coincidirá entonces el lado A′C′ con el BC, por ser A′ = B; de aquí se infiere, que como el punto C′ tiene que pertenecer á la vez á las dos rectas AC y BC, necesariamente habrá de coincidir con el C, único punto que es común á éstas. Luego las dos rectas A′C′ y BC, cuyos extremos coinciden, tienen que ser iguales; mas como A′C′ y AC se supuso que también eran iguales, se verificará que AC = BC.

FIG. 20. 36. *Si un triángulo ABC tiene dos ángulos desiguales, al ángulo mayor ACB se opone al lado mayor AB.*

En efecto, dirigiendo por el vértice C del ángulo mayor una recta CD que forme con AC un ángulo igual al A, se tendrá que los lados AD y DC del triángulo ADC serán iguales; mas como en el triángulo BCD se verifica que BD+DC>BC, resultará por lo tanto, que BD+AD>BC ó AB>BC.

37. Obsérvese que este último teorema es el contrario del anterior, y si se tiene en cuenta que una proposición recíproca y la contraria de la directa poseen una relación tan estrecha, que la verdad de la una envuelve implícitamente la certeza de la otra, es innecesario demostrar la

recíproca de una proposición, siempre que se haya hecho ver que se verifica el contrario del teorema directo. Así, por ejemplo, el recíproco de la proposición directa que se acaba de demostrar, dice: *Si un triángulo tiene dos lados iguales, los ángulos opuestos serán también iguales;* el cual es evidentemente cierto, puesto que si los expresados ángulos fueran desiguales, resultaría que, en virtud de lo demostrado en el teorema contrario, los lados opuestos á aquéllos serían también desiguales, y esto no es posible que suceda dada la hipótesis establecida.

Siendo así, que demostrada la proposición directa y su recíproca, ha de ser verdadera la contraria de la recíproca (28-37), ya se puede afirmar que: *Si un triángulo posee dos lados desiguales, al mayor lado se opondrá mayor ángulo.*

COROLARIO.—*Todo triángulo equiángulo será equilátero y recíprocamente.*

38. *La perpendicular CD trazada á una recta AB desde un punto C, situado fuera de ésta, es menor que cualquiera oblicua BC, tirada desde el mencionado punto á la recta.* FIG. 21.

En efecto, en el triángulo rectángulo BCD, el ángulo CBD tiene que ser agudo (32 COROLARIO 2.º), y por lo tanto, será menor que el recto D; luego se verificará, que CD < BC.

Recíprocamente, *la recta más corta que se puede trazar desde un punto á otra recta, será perpendicular á ésta;* pues si esto no sucediese sería oblicua, y por lo tanto, se podría trazar desde dicho punto una perpendicular á la mencionada recta, la cual sería menor que la citada oblicua, y esto por la hipótesis no es posible.

39. Se ha convenido en llamar DISTANCIA de un punto á una recta, *á la perpendicular trazada desde dicho punto*

á la recta que, como se acaba de ver, es la menor línea que puede trazarse entre aquellos dos elementos geométricos y la única que posee esta condición.

CAPÍTULO IV.

Igualdad de triángulos.

40. Dos triángulos son iguales, cuando todos sus elementos son respectivamente idénticos y se encuentran dispuestos del mismo modo. De aquí se infiere, que si se superponen dos triángulos que sean iguales, siempre podrán colocarse de manera que coincidan sus respectivos lados y ángulos.

Sin embargo, es suficiente para la igualdad de dos triángulos, que existan tres condiciones comunes á ambos; por lo tanto, cuando sólo tengan los tres ángulos iguales no puede decirse que los triángulos lo serán también, pues en tal caso, estos triángulos no poseen realmente sino dos condiciones, en atención á que el valor de un ángulo de todo triángulo es una consecuencia de la suma de los valores que tienen los otros dos (**32**). De aquí se infiere, que para que dos triángulos sean iguales, *no sólo se requiere que tengan tres elementos idénticos, sino que además entre éstos haya por lo menos un lado.*

Las diversas combinaciones que pueden hacerse, con los tres elementos, que se suponen idénticos en la figura de que se trata, para que necesariamente tengan que serlo los restantes, constituyen lo que se llama CASOS DE IGUALDAD de dos triángulos, los cuales son tres:

1.º *Cuando tienen respectivamente iguales un lado y dos ángulos.*

2.° *Si poseen iguales respectivamente dos lados y el ángulo comprendido.*

3.° *Al estar formados por tres lados respectivamente iguales.*

41. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual y los dos ángulos adyacentes respectivamente iguales.*

En efecto, si los triángulos ABC y A'B'C' tuvieran el lado AB = A'B', el ángulo A igual al A' y los ángulos B y B' también iguales, al colocar el primer triángulo sobre el segundo, de modo que coincida el vértice A con el A' y el lado AB con el A'B', el punto B se aplicará sobre el B', por ser estos dos lados iguales; el lado AC se confundirá en dirección con el A'C', por ser A = A', así como el lado BC seguirá la misma dirección que el B'C', supuesto que B = B'; luego el punto C, intersección de las rectas AC y BC, que han coincidido respectivamente con las A'C' y B'C', se colocará sobre el C', punto de intersección de éstas, y por lo tanto los dos triángulos propuestos habrán coincidido. FIG. 22.

42. Si los dos triángulos que se consideran, tuviesen iguales un lado y dos ángulos, uno de éstos adyacente y el otro opuesto al expresado lado, sucedería que los terceros ángulos de uno y otro triángulo también serían iguales (32, COROLARIO 4.°), y por lo tanto la cuestión quedaba reducida al caso anterior; de modo que generalizando podrá decirse, que *dos triángulos son iguales cuando tengan iguales un lado y dos ángulos.*

43. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido.*

Sean los triángulos ABC y A'B'C' que tienen AB=A'B', AC = A'C' y el ángulo A igual al A'. Si se coloca el A'B'C' sobre el ABC, de manera que el vértice A' se aplique sobre el A y el A'B' sobre el AB, sucederá que, por la igualdad de estos lados, el vértice B′ se confundirá con el B y el lado A′C′ con el AC, por la igualdad de los ángulos A y A′; luego el punto C′ caerá sobre el C por ser A′C′ = AC, y por consiguiente los lados B′C′ y BC se confundirán por tener sus extremos comunes, de modo que todos los elementos de ambos triángulos habrán coincidido.

44. De aquí se infiere, que *siempre que dos triángulos tengan dos lados respectivamente idénticos é igual el ángulo comprendido, se verificará que los terceros lados también serán iguales.*

45. La proposición contraria dice así: *si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales á dos del otro, pero el ángulo comprendido por los dos lados del primero es mayor que el comprendido por los dos lados del segundo,*
Fig. 23. *se verificará que el tercer lado del primero será mayor que el tercer lado del segundo.*

Sean los dos triángulos ABC y A′B′C′ en donde se tiene AB = A′B′, BC = B′C y ABC > A′B′C; se trata de probar que AC es mayor que A′C′. En efecto, obsérvese que al colocar A′B′C′ sobre el ABC, de modo que coincida BC con su igual B′C′ y que los dos triángulos se hallen á un mismo lado de la recta BC, el lado A′B′ caerá dentro del ABC, por ser éste mayor que el B′. En
Fig. 23 1.ª cuanto al tercer lado A′C′ podrá coincidir ó nó con el lado AC. En el primer caso es evidente que AC será mayor que FC ó su igual A′C′.

Si al efectuar la superposición en la forma indicada, el lado A′C′ no se aplicara sobre el AC, tomaría una posición tal como la CD (*); de donde resulta que al trazar la

(*) En la figura 25 (2.ª y 3.ª) aparecen separadamente las dos posiciones que puede tomar el lado A′C′ respecto del AC en el caso de no coincidir con él.

bisectriz BE del ángulo ABD y unir el punto E con el D, se verificaría que los triángulos ABE y BDE serían iguales (40), y por lo tanto, AE = ED. Mas como DC < EC + ED, se tendrá que A′C′ < AC.

46. Según lo dicho (28-37), se puede prescindir de demostrar los recíprocos de las proposiciones contraria y directa que anteceden, y por lo tanto admitir como ciertas las siguientes: *Si dos triángulos poseen dos lados respectivamente iguales y el tercer lado es mayor en uno de ellos, se verificará que el ángulo opuesto en éste será mayor que en el otro;* asimismo sucederá que *si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, sus ángulos opuestos deberán ser también iguales* (*), y en su consecuencia, siendo en tal caso los elementos de ambos triángulos idénticos y hallándose en uno y otro dispuestos de la misma manera, habrá que convenir en que *dos triángulos serán iguales cuando tengan sus tres lados respectivamente iguales.*

Apoyándose en la definición (40) ó en los últimos teoremas directos y recíprocos, siempre resulta que *en triángulos iguales, á ángulos iguales se oponen lados iguales y viceversa.*

47. En los triángulos rectángulos, como caso particular de los rectilíneos generales, además de verificarse los mismos tres casos de igualdad que se acaban de exponer, conviene al presente agregar, que *dos triángulos rectángulos son iguales cuando la hipotenusa y un cateto del uno son respectivamente iguales á la hipotenusa y un cateto del otro.*

En efecto, sean los triángulos ABC y A′B′C′ en los cuales se supone que AC y A′C′ son iguales, así como FIG. 24.

(*) Conviene que los alumnos se ejerciten en demostrar estos y otros recíprocos, sirviéndose del método de reducción al absurdo.

también BC = B′C′. Si se colocan en la disposición que se ve en la figura, de manera que coincidan los catetos iguales, resultará que los lados AB y A′B′ estarán formando una sola línea recta (21, Recíproco) y por lo tanto se tendrá un triángulo isósceles ACA′, luego según lo dicho (37), se verificará que A = A′ y por consiguiente (43) los triángulos propuestos serán iguales. (*)

CAPÍTULO V.

Proposiciones referentes á cuatro rectas.

ARTÍCULO 1.°

Posiciones relativas de cuatro rectas.

48. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios;* sean los ángulos
Fig. 25 1.ª ABC y A′B′C′, que tienen sus lados AB y A′B′ paralelos, lo mismo que los BC y B′C′, y además dirigidos en el mismo sentido. Si se prolonga A′B′, encontrará á BC (27, Corolario 2.°) y se tendrá que A′B′C′ = A′EC = = ABC (26-1.°).

Fig. 25 2.ª En el supuesto de que los ángulos fuesen ABC y A′B′C, que tienen los lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario, también serían iguales, pues prolongando los lados A′B′ y B′C′, resultará su ángulo

(*) Este caso de igualdad de triángulos rectángulos tiene también su correspondiente en los triángulos oblicuángulos, pues, como ya se verá, *dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo opuesto al mayor de ellos.*

A″B′C″ opuesto por el vértice, el cual se acaba de probar que es igual al ABC.

Si los ángulos fuesen el ABC y el A′B′C′, que tienen los lados paralelos, uno A′B′ en el mismo sentido que el AB y otro B′C′ en sentido contrario del BC, se tendría que al prolongar el lado B′C′ resultaría el ángulo A′B′C″ adyacente, el cual sería suplementario del A′B′C′ y además igual al ABC; luego éste también será suplementario del A′B′C′. FIG. 25 3.ª

49. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios.* FIG. 26.

Sean los ángulos ABC y A′B′C′ que tienen los lados A′B′ y B′C′ respectivamente perpendiculares á los AB y BC. Si por el punto B se traza BD perpendicular á BC y BE á BA, la primera será paralela á B′C′ y la segunda á A′B′ (25); luego el ángulo EBD será igual ó suplementario del A′B′C′ (48); mas como quiera que DBE y ABC son iguales, por tener el mismo complemento ABD, lo que se ha dicho del DBE, podrá decirse de su igual ABC, y por lo tanto ABC será igual ó suplementario del A′B′C′.

50. *Si dos rectas AB y DC son perpendiculares á otras dos AE y EC que se cortan, las dos primeras se encontrarán dentro del ángulo formado por las segundas.* FIG. 27.

En efecto, trazando la recta AC, los ángulos internos BAC y ACD son agudos, y por lo tanto, su suma será mayor que dos rectos; luego las rectas AB y CD se cortarán en un punto tal como el G (32, COROLARIO 3.º), que se hallará situado dentro del ángulo AEC.

51. En la figura 27 se ven las cuatro rectas AE, CE, CG y AG, que limitando una superficie plana, forman lo que se llama un CUADRILÁTERO. Tanto en esta figura, como en toda línea quebrada, se da el nombre de *diago-*

nal á la recta que une dos vértices no correspondientes á un mismo lado.

52. La variedad que puede existir en las posiciones relativas de cuatro rectas, que limitan un plano, da lugar á que los cuadriláteros se clasifiquen con sujeción á los siguientes casos: 1.º Cuando los cuatro lados son paralelos dos á dos, el cuadrilátero que se forma, se denomina PARALELOGRAMO. 2.º Cuando dos lados son paralelos y los otros dos tienen entre sí distinta dirección, el cuadrilátero que resulta se llama TRAPECIO. 3.º Cuando los cuatro lados tienen distinta dirección, el cuadrilátero que se obtiene recibe el nombre de TRAPEZOIDE.

Se denomina BASE de un paralelogramo á uno cualquiera de sus lados, y ALTURA la perpendicular á la base comprendida entre ésta y el lado opuesto. La base y altura de un paralelogramo constituyen sus DIMENSIONES. Los lados paralelos de un trapecio se llaman BASES, y ALTURA á la parte de perpendicular á éstas que se encuentra comprendida entre ellas.

ARTÍCULO 2.º

Paralelogramos.

53. *Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.*

FIG. 28. En efecto, trazando la diagonal BD, se tendrá que los dos triángulos ABD y BCD serán iguales (42) y por lo tanto AB = CD y AD = BC.

COROLARIO 1.º—*La diagonal de un paralelogramo divide á éste en dos triángulos iguales.*

COROLARIO 2.º—*Las porciones de rectas paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.*

Recíproco.—*Si un cuadrilátero tiene los lados opuestos iguales dos á dos, será un paralelogramo.*

En efecto, como por hipótesis se tiene que AB = CD y AD = BC, si se traza la diagonal, los triángulos ABD y BCD serán iguales; luego el ángulo ABD será igual al BDC (46), y por tanto, AB y CD serán paralelas. (27, Recíproco 2.º). Por ser también los ángulos CBD y ADB iguales, los lados AD y BC tendrán que ser paralelos y en su consecuencia el cuadrilátero ABCD será un paralelogramo.

54. Según lo dicho (28-37), siempre que se demuestren separadamente la directa y la recíproca, es indudable que también serán ciertas las respectivas contrarias; así como una vez que se haya hecho patente un teorema directo y su contrario, tienen que ser verdaderos los respectivos recíprocos; por lo tanto, los teoremas contrarios de estas dos últimas proposiciones tienen que ser ciertos. En la práctica es preferible demostrar el teorema directo y su recíproco, en atención á que, al proceder así, no suele necesitarse para la demostración de este último de una nueva figura, al paso que no siempre sucede lo mismo, cuando se quieren hacer patentes la proposición directa y su contraria.

55. Según acaba de verse, *en todo paralelogramo, además de tener cada dos lados opuestos paralelos, éstos tienen que ser iguales.*

Recíproco.—*Si un cuadrilátero tiene dos lados paralelos é iguales, será un paralelogramo.*

En efecto, siendo los lados AB y CD iguales por hipótesis, los triángulos ABC y BCD también lo serán, por tener el lado BD común, AB = CD, y los ángulos ABD y BCD iguales por alternos (43); luego AD = BC por lados opuestos á ángulos iguales en triángulos idénticos

(46), y por lo tanto (53), el cuadrilátero propuesto será un paralelogramo (*).

En todo paralelogramo se verifica que los ángulos opuestos son iguales, y los adyacentes á un mismo lado suplementarios (**).

Los ángulos A y C, así como los ABC y ADC son iguales, por tener sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario. En cuanto los ángulos A y ABC, que son adyacentes al lado AB, tienen que ser suplementarios, por internos entre las paralelas BC y AD, y situados á un mismo lado de la secante AB.

COROLARIO.—*Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, los otros tres también serán rectos.*

El paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos y por lo tanto iguales, se llama RECTÁNGULO.

56. La DISTANCIA que media entre dos rectas paralelas, se halla determinada por la perpendicular á una de éstas, desde un punto cualquiera de la otra. De aquí se infiere, que *todos los puntos de una recta equidistan de los de su paralela,* supuesto que dos cualesquiera de estas distancias pueden considerarse como lados opuestos de un paralelogramo y por lo tanto iguales.

57. Cuando en un paralelogramo los cuatro lados son iguales entre sí, se llama ROMBO; mas en el caso particular de que no sólo los lados sean iguales sino también los cuatro ángulos, entonces recibe el nombre de CUADRADO.

(*) Como ejercicio, pudieran los alumnos probar directamente que el recíproco de esta proposición es cierto, y, por lo tanto, que también serán ciertos los teoremas contrarios.

(**) Las contrarias de estas dos últimas proposiciones tienen que ser ciertas (54).

ARTÍCULO 3.°

Lugares geométricos.

58. *Si desde un punto A, situado fuera de una recta BE, se trazan á ésta la perpendicular AD y diferentes oblicuas, se verificará:* 1.° *Que las oblicuas AB y AC, que tienen sus pies* (*) *equidistantes del de la perpendicular, serán iguales.* 2.° *Que de dos oblicuas AB y AE, cuyos pies no equidisten del de la perpendicular, tendrá mayor longitud aquella cuyo pie diste más.* FIG. 29.

1.° Los dos triángulos ABD y ACD son iguales por tener BD = CD, el lado AD común á ambos y los ángulos en D iguales por rectos (43), luego será AB = AC.

2.° Si se toma una parte CD = BD y se traza la AC resultará, en virtud de la primera parte que se acaba de demostrar, que esta última recta y la AB serán iguales; por lo tanto, siendo el ángulo ADC recto, acontecerá que en el triángulo ACE el ángulo en E será agudo, el ACE obtuso, y en su consecuencia, AE > AC (36) y AE > AB. FIG. 30.

RECÍPROCO.—*Si desde un punto situado fuera de una recta se traza una perpendicular y varias oblicuas, se verificará:* 1.° *Que las oblicuas iguales tendrán sus pies equidistantes de la perpendicular.* 2.° *Que los pies de dos oblicuas desiguales no equidistan del de la perpendicular; el de la mayor distará más.*

COROLARIO.—*Desde un punto A situado fuera de una recta BE, no pueden trazarse á ésta tres oblicuas iguales.*

Se acaba de ver que pueden existir de dos en dos todas las oblicuas iguales que se deseen, pero si al fijarse en

(*) Se llama *pie* de una perpendicular ú oblicua, con respecto á una recta, al punto de intersección de ésta con cualquiera de aquéllas.

un par cualquiera de éstas, por ejemplo en las AB y AC, se admitiera que hubiere otra igual á ellas, ésta ó sería perpendicular ú oblicua, con respecto de la BE; si lo primero, tendría que ser menor que las oblicuas AB y AC (38), y si lo segundo, se apartaría de la perpendicular AD más ó menos que éstas, y, por lo tanto, sería mayor ó menor que las mismas.

Lugar geométrico es la línea ó figura cuyos puntos tienen una propiedad común.

59. *Todo punto que se halle en la perpendicular AD á una recta BC en su punto medio D, equidista de los extremos B y C de la recta.*

En efecto, por tener las oblicuas AB y AC sus pies equidistantes del de la perpendicular, serán iguales.

Recíproco.—*Todo punto A que equidiste de los extremos B y C de una recta, pertenecerá á la perpendicular AD á dicha recta, en su punto medio D.*

En efecto, trazando desde el punto A la perpendicular AD á la BC, se tendrá que, por ser las oblicuas AB y AC iguales, las distancias BD y DC también serán iguales (58, Recíproco 1.º); luego el punto D estará situado en medio de la BC.

Contrario del directo.—*Todo punto que no se halle en la perpendicular á una recta en su punto medio, no equidista de los extremos de ésta.*

Contrario del recíproco.—*Todo punto que no equidiste de los extremos de una recta, no pertenecerá á la perpendicular trazada á dicha recta en su punto medio.*

Corolario 1.º—*La perpendicular á una recta en su punto medio, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos.*

Corolario 2.º—*Si una recta tiene dos puntos equidis-*

tantes de los extremos de otra, será perpendicular á ella y la dividirá en dos partes iguales.

60. *Todo punto D de la bisectriz BD de un ángulo ABC, equidista de sus lados AB y BC.* FIG. 31.

Si se trazan las distancias AD y CD del punto D á los lados del ángulo ABC, sucederá que los dos triángulos rectángulos ABD y BCD serán iguales, por tener común la hipotenusa BD, los ángulos ABD y DBC iguales, por hipótesis, y los en A y en C iguales por rectos (42), y como en triángulos iguales á ángulos iguales se oponen lados iguales (46), se verificará que AD = CD.

RECÍPROCO.—*Todo punto D que equidista de los lados AB y BC de un ángulo ABC, se halla en su bisectriz.*

En efecto, uniendo el punto D con el vértice del ángulo ABC por medio de la recta BD, se tendrá que los triángulos rectángulos ABD y BCD, serán iguales por tener AD = CD por hipótesis y la BD común á ambos (47); pero como quiera que en triángulos idénticos, á lados iguales se oponen ángulos iguales, sucederá que los ángulos ABD CBD serán iguales; y por lo tanto, BD será bisectriz del ABC.

CONTRARIO DEL DIRECTO.—*Todo punto que no se halle en la bisectriz de un ángulo, no equidista de los lados de éste.*

CONTRARIO DEL RECÍPROCO.—*Todo punto que no equidista de los lados de un ángulo, no se halla en su bisectriz.*

COROLARIO 1.º—*La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados de aquél.*

COROLARIO 2.º—*Toda recta que tenga dos puntos equidistantes de los lados de un ángulo, se confunde con la bisectriz de éste.* Por lo tanto podrá decirse: *La recta que pasa por el vértice de un ángulo y tiene además un punto equidistante de sus lados, es la bisectriz de dicho ángulo.*

CAPÍTULO VI.

Polígonos.

ARTÍCULO 1.°

Líneas poligonales.

61. Cuando una línea quebrada ó curva, contenida en un plano, divide á éste en dos partes ó *regiones* indefinidas, se dice que es ABIERTA; mas en el caso en que una de estas dos regiones fuera limitada y la otra ilimitada, entonces la línea que las separa se dice que es CERRADA.

Toda línea se califica de CONVEXA, cuando no puede ser cortada por una recta en más de dos puntos.

62. La porción de plano limitada por líneas rectas recibe el nombre de POLÍGONO. El conjunto de los lados de un polígono se denomina CONTORNO y la medida de éste PERÍMETRO.

Como que únicamente se hace referencia en este tratado á los polígonos convexos, conviene conocer cuáles son sus caracteres distintivos: 1.° *Todos los ángulos deberán ser salientes.* 2.° *Las diagonales serán todas interiores.* 3.° *Prolongando uno cualquiera de sus lados, todo el polígono quedará situado en una sola región del plano.*

FIG. 32. 1.° Si hubiera algún ángulo entrante ABC, en el polígono que se considera, se podría trazar por el vértice B una recta interior MN, la cual tendría que cortar al contorno del polígono á lo menos en otros dos puntos, los cuales estarían situados en la recta MN y á diferente lado del punto B, por ser aquél una línea cerrada; luego teniendo la mencionada recta por lo menos tres puntos comunes con el contorno del polígono, éste no podría ser convexo.

2.° Si la diagonal que une dos vértices del polígono fuere exterior á éste, entonces el ángulo opuesto á ella tendría que ser entrante y, por lo tanto, el polígono ya no podría ser convexo.

3.º Cuando al prolongar alguno de los lados del polígono propuesto, éste quedara dividido en dos regiones, se verificaría que el expresado lado formaría parte de un ángulo entrante, y en su consecuencia el polígono tampoco sería convexo.

63. Los ángulos que tienen un lado común y el mismo vértice, se llaman *consecutivos*.

Los polígonos se clasifican según sea el número de sus lados, ó el de sus ángulos, pues ambos números son idénticos. Además del triángulo y del cuadrilátero, que ya se conocen, pueden formarse polígonos del número de lados que se desee: el de cinco lados se llama PENTÁGONO; el de seis, EXÁGONO; el de siete, EPTÁGONO; el de ocho, OCTÓGONO; el de nueve, ENEÁGONO; el de diez, DECÁGONO; el de once, ENDECÁGONO; el de doce, DODECÁGONO; el de quince, PENTADECÁGONO; los demás se distinguen unos de otros, sin más que mencionar el número de sus lados; así se dice: polígono de diez y seis lados, diez y siete, etc. lados.

Los elementos esenciales de todo polígono son sus lados y sus ángulos.

ARTÍCULO 2.º

Generalidades acerca de los polígonos.

64. Dos polígonos son iguales cuando tienen respectivamente idénticos y dispuestos del mismo modo todos sus elementos. De aquí se desprende que *dos polígonos compuestos del mismo número de triángulos respectivamente iguales y dispuestos de idéntica manera, son iguales,* supuesto que al superponerlos, tendrían que coincidir sus elementos.

Entre los casos particulares de igualdad de polígonos, conviene fijarse en el siguiente:

65. *Dos paralelogramos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son igua-*

les, cuando tienen dos lados AB y AD respectivamente iguales á los A′B′ y C′D′, é igual también el ángulo com-
FIG. 33. *prendido, ó sea $A = A'$.*

En efecto, colóquese el paralelogramo A′B′C′D′ sobre el ABCD, de modo que los ángulos en A y A′ coincidan y el lado A′B′ se aplique sobre su igual AB, en cuyo caso el lado A′D′ coincidirá con el AD. Las rectas C′D′ y CD, por ser paralelas á AB y pasar ambas por un mismo punto D, coincidirán, y lo mismo sucederá á las B′C′ y BC paralelas á AD y que contienen al punto B; de donde se infiere que el punto C′ caerá sobre el C.

COROLARIO.—*Dos paralelogramos rectángulos que tengan respectivamente iguales sus bases y alturas, tienen que ser iguales.*

66. *La suma de todos los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos ángulos rectos, como lados tiene el*
FIG. 34. *polígono menos dos.*

En efecto, trazando desde un vértice A del polígono, las diagonales posibles AE, AC y AD, quedará éste descompuesto en triángulos, que tendrán cada uno por lados dos diagonales consecutivas y el tercer lado será uno de los del polígono, exceptuando los dos triángulos extremos AEF y ABC, que se hallan formados por una sola diagonal y dos lados del polígono; por lo tanto, éste quedará descompuesto en tantos triángulos como lados tiene menos dos, y como quiera que el conjunto de los ángulos de estos triángulos equivale al de todos los ángulos del polígono, claro está que valiendo la suma de los tres ángulos de cada triángulo dos rectos (32), la de todos los ángulos del polígono equivaldrá á tantas veces dos rectos, como lados tenga menos dos.

COROLARIO.—*La suma de los ángulos de un cuadrilátero equivale á cuatro rectos.*

La suma de todos los ángulos exteriores, que resultan prolongando en un mismo sentido los lados de un polígono, es igual á cuatro ángulos rectos.

En efecto, al prolongar los lados del polígono ABCDEF, como queda dicho, se ve que los ángulos formados en cada vértice equivalen á dos rectos, y como quiera que existen n vértices, la suma de todos los ángulos, tanto interiores como exteriores, será $2rn$, y si de esta suma se resta el valor de los ángulos del polígono ó sea $2rn - 4r$ se verificará, que el valor de los exteriores equivaldrá á $2rn - (2rn - 4r)$ ó sea $4r$.

ARTÍCULO 3.°

Polígonos regulares.

67. Se llama POLÍGONO REGULAR aquél que tiene todos sus lados y ángulos iguales.

El triángulo equilátero y el cuadrado, son figuras que hacen patente la existencia de polígonos regulares.

En el polígono regular de n lados, y por lo tanto, de n ángulos iguales, el valor de uno de éstos será igual al total de ellos dividido por n, ó sea, $\frac{2rn - 4r}{n} = 2r - \frac{4r}{n}$.

Esta última expresión pone de manifiesto, que el valor de cada ángulo en un polígono regular, aumenta á medida que crece el número de sus lados.

Dos polígonos regulares del mismo número de lados, basta que tengan un lado igual para que sean iguales.

Según la hipótesis, sus lados tienen que ser todos iguales, y los ángulos también, en atención á que el valor de cada uno de éstos depende exclusivamente del número de lados del polígono regular que se considera; luego ambos polígonos poseen sus elementos iguales.

68. *Todo polígono regular tiene un punto interior equidistante de sus vértices y lados.* FIG. 35.

En efecto, si se trazan en el polígono regular ABCDEF, las bisectrices de los ángulos ABC y BCD, se formará el triángulo BOC, que será isósceles, en atención á que siendo aquellos ángulos iguales, sus mitades ó sean los OBC y BCO también lo serán. La bisectriz OD del ángulo CDE formará con la OC otro triángulo isósceles que será igual al anterior (42) y tendrá con él un lado OC común, y por lo tanto, el vértice O pertenecerá á las tres bisectrices. Del mismo modo se haría patente que las demás bisectrices tendrían que pasar también por el mismo punto O, de donde se infiere que, formando este punto parte de todas las bisectrices de los ángulos del polígono, tendrá que equidistar de la totalidad de los lados que posee (60).

Corolario.—*Todo polígono regular se puede descomponer en tantos triángulos iguales como lados tiene.*

69. El punto O donde concurren las bisectrices de los ángulos del polígono regular que se considere, se llama centro; y apotemas las perpendiculares GO, HO, IO ....., trazadas desde el centro á cada uno de los lados del polígono.

Las rectas AO, BO, CO ....., que van desde el centro á los vértices del polígono, se denominan radios, y el ángulo formado por dos radios que corresponden á los extremos de un mismo lado, se llama ángulo en el centro. Siendo estos ángulos iguales en todo polígono regular, el valor de uno de ellos estará dado por $\frac{4r}{n}$, en el supuesto de que n represente el número de lados del polígono á que se haga referencia.

SECCIÓN SEGUNDA.

FIGURAS SEMEJANTES.

CAPÍTULO I.

Rectas proporcionales.

70. Se dice que dos rectas son proporcionales á otras dos, *cuando la razón de los valores de las dos primeras, es igual á la razón de los valores de las dos segundas, en el supuesto de que estén referidas á una misma unidad.*

Según esto, al representar por a, b, a' y b' los valores respectivos de las rectas AB, CD, A′B′ y C′D′, se admite FIG. 36.
como cierta la igualdad fraccionaria $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \ldots\ldots (1)$, siempre que se verifique $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Aun cuando en realidad aparece violento formar una proporción con las mismas magnitudes que se comparan, supuesto que de admitir su existencia, habría que reconocer la posibilidad de poder multiplicar los medios ó los extremos de la proporción (1), lo cual carece de sentido, por ser dos líneas los factores de que se compone el producto; téngase en cuenta que esta dificultad desaparece si se admite que cada término de la antedicha proporción representa no sólo la recta á que se hace referencia, sino también su respectivo valor numérico. Tal convenio tiene la ventaja de dar á conocer el orden en que aparecen en una igualdad fraccionaria las diversas magnitudes comparadas, permitiendo indicar con éstas los cálculos que han de efectuarse con sus valores implícitos y facilitando el medio de abreviar y exponer con la debida claridad los razonamientos en que intervienen proporciones.

El tecnicismo de éstas en Geometría, es el mismo que se dió á conocer en la Aritmética (116); así en la proporción (1) cualquiera de las cuatro rectas que la forman, será una *cuarta proporcional* con relación á las otras tres. Si en la misma igualdad fraccionaria se supone CD = = A′B′, se tendría en $\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{C'D'}$ una *proporción continua,* en la que CD sería *media proporcional* entre AB y C′D′: siendo en esta misma proporción la C′D′, una *tercera proporcional* entre AB y CD.

Si ahora se supone que A′B′ corresponde á AB, y C′D′ á CD, se tendría, lo mismo que en Aritmética (161), una proporción *directa;* pero si se tuviera AB : CD : : C′D′ : A′B′, entonces ésta sería *inversa;* y finalmente, si se verificaba que los valores de las dos primeras rectas eran extremos de la proporción y los de las segundas medios, ó sea cuando se tuviera AB : A′B′ : : C′D′ : CD, entonces se diría que las magnitudes que se consideraban eran *recíprocamente proporcionales.*

71. Siendo generales las proposiciones demostradas en Aritmética sobre proporcionalidad de las cantidades, podrán aplicarse también á las magnitudes geométricas, cualquiera que sea su naturaleza. Así, por ejemplo, *si multiplicando el valor de una magnitud por un número cualquiera, se verifica que el de su correspondiente queda multiplicado por el mismo número, dichas magnitudes serán directamente proporcionales.*

Puede considerarse como fundamento de esta teoría, el siguiente teorema:

72. *Si en un lado AB del ángulo ABC se toman, desde su vértice, partes iguales, y por los puntos* m, n, p, q, *etc. de división, se trazan paralelas entre sí, que corten al otro lado BC las partes de éste, interceptadas por las mencionadas paralelas, serán también iguales.* Fig. 37.

Trazando por los puntos m, n, p y q las paralelas mr, ns y pt, resultan los triángulos Bmm', mnr, nps, etc., que deberán ser iguales, por tener B$m = mn = np = ...$ según la hipótesis, los ángulos mBm', nmr, pns ..... por correspondientes (26), y los Bmm', mnr, nps, etc., también iguales por la misma razón; en su consecuencia, se verificará, que B$m' = mr = ns = ...$ pero como que $mr = m'n'$ (53), $ns = n'p'$ ....., resultará que, B$m' = m'n' = = n'p' = ...$

73. Dedúcese de este teorema, que al duplicar la porción Bm se tiene la magnitud mp en la recta AB, al paso que si se duplica la porción Bm', correspondiente á la Bm, resulta la $m'p'$ que en la recta BC corresponde á la mp, y por lo tanto (71), *cuando varias rectas paralelas corten á los lados de un ángulo, dividirán á éstos en partes proporcionales* (*).

Corolario.—*Si en el interior de un triángulo se traza una recta, que sea paralela á uno de sus lados, dividirá á los otros dos en partes proporcionales.*

Recíproco.—*Si una recta DE trazada en el interior de un triángulo ABC, divide á dos de sus lados AB y BC en partes proporcionales, será paralela al tercer lado AC.* Fig. 38.

Si la recta DE no fuera paralela á la AC, por el punto D podría trazarse la DF que lo fuera y entonces se ten-

(*) Cuando sencillamente se dice *proporcionales*, debe entenderse que lo son directamente.

dría, según se acaba de ver, que $\frac{AD}{BD}=\frac{CF}{BF}$; pero por hipótesis se verifica, que $\frac{AD}{BD}=\frac{CE}{BE}$; de donde resulta, que $\frac{CF}{BF}=\frac{CE}{BE}$, proporción absurda, por ser en ella el producto de los términos medios mayor que el de los extremos.

Si las dos rectas que se suponen cortadas por varias paralelas, no se encontrasen en la figura, se demostraría, sirviéndose de consideraciones idénticas á las expuestas, el teorema siguiente:

74. *Si en una recta se toman partes iguales y por los puntos de división se trazan paralelas entre sí, que corten á otra recta, las partes de ésta comprendidas entre las mencionadas paralelas, tienen que ser también iguales.*

75. Como quiera que duplicando una de las partes iguales de cualquiera de las dos rectas, el valor de su correspondiente en la otra se duplica, se tendrá, que *cuando varias rectas paralelas corten á otras dos rectas cualesquiera, dividirán á éstas en partes directamente proporcionales.*

COROLARIO.—*Si en el interior de un trapecio se traza una recta paralela á sus bases, ésta dividirá á los otros dos lados en partes proporcionales.*

RECÍPROCO.—*Toda recta que divida en partes proporcionales á los lados no paralelos de un trapecio, será paralela á las bases de éste.*

NOTA.—Este recíproco se demostraría, siguiendo, como se hizo en el anterior, el *método de reducción al absurdo, esto es, negando que sea cierta la conclusión de aquél, se ejecutaría el trazado en que se verifique la hipótesis del teorema directo y entonces aparece patente el absurdo.*

76. *Si en el interior de un triángulo ABC se traza la recta EF paralela á uno de sus lados, el triángulo BEF que se forme, tiene sus tres lados directamente proporcionales con los del propuesto.* Fig. 39.

En efecto, se ha demostrado (73, Corolario), que $\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{BF}$, de donde se deduce (Aritm.ª 123), que $\frac{AE+BE}{BE}=\frac{CF+BF}{BF}$, ó sea, que $\frac{AB}{BE}=\frac{BC}{BF}$; trazando por el punto F la paralela FG al lado AB, resulta, que $\frac{CF}{BF}=\frac{CG}{AG}$, de donde $\frac{BC}{BF}=\frac{AC}{AG}$, pero como $AG=EF$ por ser lados opuestos de un paralelogramo, se tendrá, que $\frac{AB}{BE}=\frac{BC}{BF}=\frac{AC}{EF}$.

77. *Las rectas OQ, OR y OS, que parten de un vértice O del triángulo POT, tendrán que dividir al lado opuesto y á su paralela interior P'T' en partes proporcionales, y ellas á su vez, quedan también divididas por dichas paralelas en partes proporcionales.*

Se sabe (76) que los triángulos parciales POQ y P'OQ', QOR y Q'OR', ROS y R'OS', y SOT y S'OT', tienen sus lados directamente proporcionales; luego se verificará, que

$$\frac{OP}{OP'}=\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{OQ}{OQ'};\quad \frac{OQ}{OQ'}=\frac{QR}{Q'R'}=\frac{OR}{OR'};$$

$$\frac{OR}{OR'}=\frac{RS}{R'S'}=\frac{OS}{OS'};\quad \frac{OS}{OS'}=\frac{ST}{S'T'}=\frac{OT}{OT'};$$

y como estas razones son iguales porque la última de cada agrupación es la primera de la siguiente, se tendrá en su consecuencia, que

$$\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{OQ}{OQ'}=\frac{QR}{Q'R'}=\frac{OR}{OR'}=\frac{RS}{R'S'}=\frac{OS}{OS'}=\frac{ST}{S'T'},$$

de conformidad con lo que se quería demostrar.

Recíproco.—*Si varias rectas QQ′, RR′ y SS′ dividen en partes proporcionales á un lado de un triángulo y á su paralela interior, las mencionadas rectas concurrirán en un punto, que será el vértice del triángulo opuesto á dicho lado.*

Pues si al prolongar una de las rectas, por ejemplo, la QQ′, no pasara por el vértice O, uniendo este punto con el Q, cortaría á la recta P″T′ en un punto diferente del Q′, tal como el Q″; y entonces, según el teorema anterior, se tendría la proporción $\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{QR}{Q''R'}$; pero por hipótesis se tiene que $\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{QR}{Q'R'}$; luego Q′R′ sería igual á Q″R′, lo cual es absurdo. Procediendo análogamente, se haría ver que las RR′ y SS′ tendrían también que pasar por el vértice O.

78. *La recta EF que une los puntos medios de los lados AB y CD no paralelos de un trapecio, es paralela á las*
Fig. 41. *bases AD y BC é igual á la semisuma de éstas.*

En efecto, siendo AE = BE y DF = CF, se verificará, que $\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF}$; luego la recta EF será paralela á las bases (75, Recíproco).

Siendo BE mitad de AB, y EG paralela á AD, se tendrá (76) en el triángulo ABD, que

$$\frac{EG}{AD}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}.$$

En el triángulo BCD, por análoga consideración, se verificaría $\frac{GF}{BC}=\frac{DF}{CD}=\frac{1}{2}$; por lo tanto, $EG=\frac{AD}{2}$ y

$GF = \frac{BC}{2}$, cuyas igualdades sumadas ordenadamente dan como resultado, que $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

La recta EF, que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, recibe el nombre de *paralela media*.

CAPÍTULO II.

Semejanza de triángulos.

79. Se llaman POLÍGONOS SEMEJANTES, aquellos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, idénticamente dispuestos, y los lados homólogos directamente proporcionales.

Tanto en polígonos iguales como en los que sean semejantes, entiéndese por VÉRTICES HOMÓLOGOS los que pertenecen á ángulos iguales, y se llaman LADOS HOMÓLOGOS aquellos que unen vértices homólogos.

La relación constante que existe entre dos lados homólogos de polígonos semejantes, se denomina RAZÓN DE SEMEJANZA.

Cuando en dos polígonos semejantes se verifica, que la razón de semejanza es igual á la unidad, los polígonos tendrán que ser iguales, en atención á que no sólo contarán con ángulos homólogos iguales y dispuestos del mismo modo, sino que también lo serán sus respectivos lados, lo cual manifiesta, que la igualdad de polígonos es un caso particular de semejanza.

80. El teorema que prueba la existencia de los triángulos semejantes, dice como sigue: *Si en el interior de* *un triángulo se traza una recta paralela á uno de sus lados, el triángulo parcial que resulta será semejante al propuesto.*

Se ha demostrado que estos dos triángulos tienen sus lados proporcionales (76), y como además poseen un ángulo común y los otros dos son respectivamente iguales en uno y otro triángulo, por correspondientes entre paralelas, de aquí resulta, que estos triángulos por tener los lados homólogos proporcionales y los ángulos respectivamente iguales, serán semejantes.

Se ha visto (40) que las condiciones de igualdad de triángulos eran tres; en cambio las de semejanza son dos únicamente, y esto se explica, si se tiene en cuenta que en figuras semejantes, aun cuando existe identidad en la forma con que se presentan, no es precisa la igualdad en su magnitud. Esta consideración da lugar á los siguientes casos de semejanza de dos triángulos:

1.º *Cuando posean dos ángulos iguales.* 2.º *Si tienen un ángulo igual y proporcionales los dos lados que le forman.* 3.º *Que sean directamente proporcionales los tres lados.*

Fig. 42. 81. *Dos triángulos ABC y* abc *que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.*

En efecto, si se supone $A = a$ y $B = b$, se tendrá, que tomando $BD = ab$ y trazando la paralela DE al lado AC, resultaría el triángulo DBE semejante al ABC; siendo por otra parte $BDE = A$ por correspondiente entre rectas paralelas, y $A = a$ por hipótesis, se tendrá, que los dos triángulos BDE y *abc* serán iguales (41), y por lo tanto *abc* tendrá también que ser semejante con ABC.

82. *Dos triángulos ABC y* abc, *que tienen dos lados AB y BC del uno proporcionales á los* ab *y* bc *del otro, é iguales los ángulos A y* a *comprendidos por dichos lados, serán semejantes.*

Tomando BD $= ab$ y trazando, como en el caso anterior, la paralela DE á AC, se tendrá $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$; pero por hipótesis se verifica que $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, luego BE $= bc$, pues teniendo estas dos proporciones tres términos iguales, los cuartos BE y bc también lo serán. Como quiera que los triángulos BDE y abc son iguales (43), y el ABC es semejante al BDE, también lo será á su igual abc.

83. *Dos triángulos ABC y* abc, *que tienen los tres lados del uno proporcionales á los tres del otro, son semejantes* (*).

Tómese BD $= ab$ y trácese la paralela DE al lado AC; con tal motivo resultará el triángulo BDE semejante al ABC y por consiguiente se tendrá $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$; como por suposición se verifica que $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, resultará BE $= bc$; también se tiene $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$, y por hipótesis sucede que $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$ de donde DE $= ac$, luego los triángulos BDE y abc serán iguales (46), y por lo tanto, semejantes ABC y abc.

Observación.—Si en cualquiera de los tres casos de semejanza de triángulos, se agrega la condición de que la razón de un lado del uno con su homólogo del otro vale la unidad, se habrá pasado al correspondiente caso de igualdad.

(*) Las tres igualdades $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$ y $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$ que aparecen en la hipótesis de este teorema, no suponen en realidad sino dos condiciones, en atención á que una cualquiera de ellas es consecuencia de las otras dos.

84. *Dos triángulos rectángulos ABC y* abc *son semejantes, si la hipotenusa y el cateto BD del uno son proporcionales á la hipotenusa y al cateto* ab *del otro.* FIG. 43.

Tómese BD $= ab$, y trazando la paralela DE al lado AC, resultará el triángulo BDE semejante al ABC. Además por ser DE paralela á AC, se tendrá $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$, y como por suposición se verifica que $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, resulta que BE $= bc$, por lo tanto los triángulos rectángulos BDE y *abc* serán iguales (47) y en su consecuencia el *abc* será semejante al ABC.

Obsérvese que el teorema del número 80, además de probar la existencia de los triángulos semejantes en número ilimitado, acaba de servir de fundamento para demostrar los casos de semejanza que anteceden.

85. *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos serán semejantes.*

Se sabe (48) que los ángulos cuyos lados son paralelos, deberán ser iguales ó suplementarios, pero como los tres ángulos de un triángulo no pueden ser suplementarios de los tres del otro, pues si tal sucediese los seis ángulos valdrían seis rectos; tampoco puede verificarse que dos del uno sean suplementarios de dos del otro y el tercero igual en ambos triángulos, pues entonces su suma valdría más que cuatro rectos; de donde resulta que necesariamente ha de haber dos ángulos del uno iguales á dos del otro, y por lo tanto los triángulos serían semejantes (81).

86. *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son semejantes.*

Apoyándose en lo dicho (49), se demostraría este teorema lo mismo que el anterior.

Nota.—Conviene fijarse que en dos triángulos cuyos lados sean respectivamente paralelos ó perpendiculares, se verifica que un lado cualquiera de los mencionados triángulos tiene su homólogo en el paralelo ó en el perpendicular del otro.

CAPÍTULO III.

Consecuencias de la semejanza de dos triángulos.

ARTÍCULO 1.°

Triángulos rectángulos.

87. Se llama proyección de un punto sobre una recta, *el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto á la recta.*

Así la proyección del punto A sobre CD, es el punto E. Fig. 44.

Se entiende por proyección de una recta limitada sobre otra, *la parte de ésta comprendida entre los pies de las perpendiculares trazadas á la segunda, desde los extremos de la primera.* Según esto, la proyección de la AB sobre CD será EF, y la proyección de AG estará dada por EG.

88. *Si desde el vértice A del ángulo recto de un triángulo se traza la perpendicular á la hipotenusa, se verificará:* Fig. 45.

1.° *Que el triángulo rectángulo propuesto quedará dividido en otros dos semejantes entre sí y semejantes con el total.*

2.° *Que cada cateto será medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección del mencionado cateto sobre ella.*

3.° *Que la citada perpendicular AD, será una media* *proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.*

1.º El triángulo parcial ABD tiene sus tres lados respectivamente perpendiculares á los del ACD, luego (86) ambos serán semejantes. Á su vez cada uno de estos triángulos es semejante con el total, en atención á que además de ser rectángulos tienen común un ángulo agudo (81).

2.º Por ser los triángulos ABC y ABD semejantes, se tendrá $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD}$ (1), y de la comparación de los triángulos ABC y ACD resultará $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}$ (2).

3.º Siendo los triángulos ABD y ACD semejantes, se verificará $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$.

Corolario 1.º—*El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de aquél sobre ésta.*

De las igualdades fraccionarias (1) y (2) se desprende que $\overline{AB}^2 = BC \times BD$ ..... (3) (*) y $\overline{AC}^2 = BC \times CD$ ..... (4)

Corolario 2.º—*Los cuadrados de los catetos son proporcionales á sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

En efecto, dividiendo ordenadamente las igualdades (3) y (4) resulta $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{BD}{CD}$.

89. *En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* (**).

(*) La pequeña línea colocada sobre AB significa que el valor numérico de la recta, cuyos extremos son A y B, se halla elevado al cuadrado.

(**) Esta proposición es conocida con el nombre de *teorema de Pitágoras.* Filósofo y matemático griego que nació cerca de seis siglos antes de J. C.

En efecto, sumando ordenadamente las igualdades (3) y (4) se tendrá que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times BD + BC \times CD =$$
$$= (BD + CD) \times BC = \overline{BC}^2;$$

luego $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Corolario.—*El cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa, menos el cuadrado del otro cateto,* supuesto que de la última igualdad se desprende que $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

ARTÍCULO 2.°

Triángulos oblicuángulos.

90. *Si en un triángulo el ángulo opuesto á un lado es obtuso, se verificará que el cuadrado de este lado será igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, más el doble del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.* Fig. 46.

Siendo el lado BC el opuesto al ángulo obtuso BAC, si se traza la BD perpendicular á la AB, se tendrá, $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$ ..... (a); pero $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$, y como $BD = AB + AD$, se verificará que

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + 2AB \times AD + \overline{AD}^2;$$

sustituyendo en la igualdad (a) en vez de CD^2 y BD^2, sus equivalentes, resultará:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \times AD + \overline{AD}^2 =$$
$$= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AD.$$

91. *Si en un triángulo el ángulo opuesto á un lado es agudo, el cuadrado de este lado será igual á la suma de los*

cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de uno de ellos, por la proyección del otro sobre él.

Procediendo análogamente á como se hizo en la demostración del teorema anterior y fijándose en que el lado AC se opone á un ángulo agudo, resultaría $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$ ..... (b); pero como $\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$ y $AD = BD - AB$, se tendría elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad, que

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 - 2AB \times BD + \overline{AB}^2,$$

y sustituyendo en la equivalencia (b) en vez de $\overline{CD}^2$ y $\overline{AD}^2$ sus valores, se verificará que

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times BD + \overline{AB}^2 =$$
$$= \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times CD.$$

92. Recíproco.—*Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto á este lado será recto; si es mayor, será obtuso, y si es menor, deberá ser agudo.* Aun cuando pudiera demostrarse fácilmente este recíproco, siguiendo el método de reducción al absurdo, no hay necesidad de hacerlo, en atención á que después de lo visto (35-36-44-45-58), resulta que *si en una ó varias proposiciones, se han hecho todas las hipótesis posibles sobre un mismo asunto, y por cada hipótesis diferente se llega á una conclusión esencialmente distinta,* según sucede en los tres teoremas últimamente demostrados, *se verificará que los recíprocos de las respectivas proposiciones establecidas serán siempre ciertos.*

Fig. 47. 93. *En triángulos ABC y* abc *semejantes, las bases AC y* ac *son proporcionales á las alturas BD y* bd.

En efecto, se tiene $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$, mas como los triángulos

BCD y *bcd* son también semejantes (81), sucederá que $\frac{BD}{bd} = \frac{BC}{bc}$, y por lo tanto, se tendrá $\frac{AC}{ac} = \frac{BD}{bd}$.

En todo triángulo ABC, la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes. FIG. 48.

En efecto, la bisectriz BD del ángulo B corta el lado opuesto AC en el punto F, y si se trazan desde los otros dos vértices A y C las perpendiculares á ella, se tendrán los triángulos rectángulos ADF y CEF, que serán semejantes (81), por tener iguales los ángulos agudos en F, y en su consecuencia se verificará $\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CE}$; pero como quiera que los triángulos rectángulos ABD y BCE también son semejantes por tener iguales los ángulos en B, resultará que $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CE}$; de esta y de la anterior proporción se deduce $\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC}$.

CAPÍTULO IV.

Polígonos semejantes.

94. Se ha visto (81), que siempre que dos triángulos tengan los ángulos respectivamente iguales, sus lados homólogos son necesariamente proporcionales; y que si dos triángulos poseen sus lados homólogos proporcionales, deberán forzosamente tener sus ángulos iguales (83); no sucede lo mismo cuando se trata de polígonos cualesquiera, pues éstos pueden poseer los ángulos respectivamente iguales, y sin embargo, no tener los lados homólogos proporcionales: tal ocurre cuando se compara un paralelogramo rectángulo cualquiera con todo cuadrado; á la inversa, no porque en dos polígonos se verifique que los lados homólogos sean proporcionales, es de rigor que hayan de contar con ángulos iguales, según puede verse al considerar un rombo cualquiera y un cuadrado.

Esta consideración manifiesta, que para tener dos polígonos semejantes, se requiere que imprescindiblemente concurran en ellos los dos extremos que abraza la definición general (79).

El teorema que prueba la existencia de los polígonos semejantes, dice así:

95. *Dos polígonos compuestos de triángulos respectivamente semejantes y dispuestos de la misma manera, son*
FIG. 49. *semejantes.*

En efecto, siendo los triángulos semejantes, se tendrá la serie de razones iguales

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}=\frac{AD}{ad}=\frac{DE}{de}=$$
$$=\frac{AE}{ae}=\frac{EF}{ef}=\frac{AF}{af};$$

y por lo tanto, se verificará, que

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EF}{ef}=\frac{AF}{af}.$$

Respecto de los ángulos, los hay como el B y el b que son iguales por pertenecer á triángulos semejantes, y otros como el C y el c por hallarse formados de ángulos iguales: luego los polígonos propuestos son semejantes, en atención á que se componen de ángulos respectivamente iguales y de lados homólogos proporcionales.

RECÍPROCO.—*Dos polígonos semejantes se pueden des-*

componer en triángulos respectivamente semejantes y dispuestos de una manera análoga.

En efecto, si desde los vértices homólogos A y a se trazan diagonales á todos los demás, resultarán ambos polígonos descompuestos en igual número de triángulos. Los ABC y abc son semejantes, por contar con los lados AB y BC, proporcionales á los ab y bc y el ángulo B igual al b (82). De la semejanza de estos dos triángulos, se desprende, que el ángulo ACB es igual á acb, así como $\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}$: restando de los ángulos BCD y bcd los ACB y acb, se tendrá $ACD = acd$: mas como por suposición $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$, resultará, al comparar esta igualdad fraccionaria con la anterior, que $\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}$, y por lo tanto los triángulos ACD y acd serán semejantes. De la misma manera se demostraría la semejanza de los demás triángulos, de que se componen uno y otro polígono.

96. En dos polígonos semejantes se llaman PUNTOS HOMÓLOGOS, aquéllos que unidos por medio de rectas con los extremos de dos lados homólogos, forman triángulos semejantes.

RECTAS HOMÓLOGAS son las que unen puntos homólogos.

97. *En dos polígonos semejantes, la razón de dos rectas homólogas es igual á la razón de semejanza.* FIG. 50.

Sean ABCDEF y A′B′C′D′E′F′ dos polígonos semejantes, Q y R puntos homólogos respectivamente de los Q′ y R′, y por lo tanto QR y Q′R′ dos rectas homólogas. Se tendrá, según la definición que antecede, $\frac{AQ}{A'Q'}=\frac{AF}{A'F'}$ y $\frac{AR}{A'R'}=\frac{AF}{A'F'}$, luego $\frac{AQ}{A'Q'}=\frac{AR}{A'R'}$; mas como quiera que los ángulos QAR y Q'A'R' tienen que ser iguales por diferencias de ángulos iguales, se verificará que los triángulos AQR y A'Q'R' serán semejantes (82), y por lo tanto $\frac{QR}{Q'R'} = \frac{AQ}{A'Q'} = \frac{AF}{A'F'}$.

98. *En dos polígonos semejantes, la razón de los perímetros es igual á la razón de semejanza.*

En efecto, por ser los polígonos semejantes, se tendrá $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} =$ etc., y como (Aritmética 125, Corolario) $\frac{AB + BC + CD + \ldots..}{A'B' + B'C' + C'D' + \ldots..} = \frac{AB}{A'B'}$, de modo que si P y P' representan los perímetros de ambos polígonos, se verificará que $\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}$.

Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes, pues es evidente que al comparar los elementos de ambos polígonos, los ángulos serán todos iguales (67) y los lados directamente proporcionales.

99. *Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados, son proporcionales á sus lados, á sus radios y á sus apotemas.*

Siendo semejantes estos polígonos, la razón de sus perímetros será la misma que la razón de semejanza, mas como ésta es igual á la razón que existe entre dos rectas homólogas é indudablemente lo son los lados, los radios y las apotemas (96) de ambos polígonos, se verificará que $\frac{P}{P'} = \frac{L}{L'} = \frac{R}{R'} = \frac{A}{A'}$ en donde P y P' representan los perímetros, L y L' los lados, R y R' los radios y A y A' las apotemas.

SECCIÓN TERCERA.

ÁREAS.

CAPÍTULO I.

Proposiciones fundamentales.

100. Se llama ÁREA la medida de una superficie limitada.

La unidad de medida más generalmente adoptada para apreciar una extensión superficial, es el cuadrado cuyo lado sea la unidad lineal.

Se dice que dos figuras limitadas son EQUIVALENTES, cuando teniendo la misma área no pueden coincidir, por no existir identidad en su forma.

101. *Dos paralelogramos rectángulos de igual base, son entre sí como sus alturas.*

En efecto, se sabe (65, COROLARIO) que dos rectángulos de igual base y altura son iguales, luego si se construye un rectángulo de igual base y de doble altura que otro paralelogramo rectángulo cualquiera, éste se hallará contenido exactamente dos veces en el anterior; de donde resulta, que duplicando en un rectángulo su altura, se duplica también su área, y por lo tanto hay proporcionalidad directa entre estos dos elementos geométricos (71).

COROLARIO 1.º—*Las áreas de dos paralelogramos rectángulos de alturas iguales, son proporcionales á sus bases;* supuesto que en los rectángulos se pueden considerar las alturas como bases y éstas como alturas.

Corolario 2.º—*Las áreas de dos paralelogramos rectángulos cualesquiera, serán proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas,* en virtud del teorema de las razones compuestas (Aritm.ª 171).

CAPÍTULO II.

Áreas de los polígonos.

102. *El área de un paralelogramo rectángulo, equivale al producto de sus dos dimensiones.*

En efecto, si se designa por R un rectángulo cuyas dimensiones son a y b, y se representa por l el lado del cuadrado C que se toma por unidad de superficie, se tendrá (por ser el cuadrado un rectángulo cuya base es igual á su altura) en virtud del último corolario, que $\frac{R}{C}=\frac{a\times b}{l^2}$, de donde $\frac{R}{1}=\frac{a\times b}{1}$ ó bien $R=a\times b$; lo cual manifiesta, que *el área de un paralelogramo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Corolario.—*El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado* (*).

103. *El área de un paralelogramo cualquiera es el producto de su base por su altura.*

En efecto, sea el paralelogramo ABCD; si se trazan las
Fig. 51. perpendiculares AE y DF al lado BC y á su prolongación, se tendrán los triángulos ABE y CDF iguales, por tener la hipotenusa y un cateto iguales (47). Si del trapecio AECD se quita el triángulo ABE, quedará el paralelogramo

(*) En esta consideración se explica que se llame cuadrado de un número á su segunda potencia.

propuesto; y si del citado trapecio se resta el triángulo CDF, se tendrá el paralelogramo rectángulo AEFD; luego éste y el paralelogramo ABCD serán equivalentes. Siendo el área del rectángulo igual á $AD \times DF$, este producto expresará también el valor del área del paralelogramo propuesto.

104. *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

El triángulo ABC es mitad del paralelogramo ABDC (53, Corolario 1.º) que tiene igual base y la misma altura que el triángulo propuesto; y como quiera que el área del paralelogramo está dada por el producto de su base por su altura, la del triángulo será igual á la mitad de este producto. Fig. 52.

105. *El área de un trapecio equivale al producto de su altura por la semisuma de las bases.*

En efecto, el trapecio ABCD se compone de los dos triángulos ABD y BCD; el área del primero es igual á Fig. 53.
$\frac{1}{2}AD \times BE$, y la del segundo

$$\frac{1}{2}BC \times DF = \frac{1}{2}BC \times BE;$$

sumando ambas áreas se tendrá la del trapecio, y por lo tanto el área de éste será igual á

$$\frac{1}{2}AD \times BE + \frac{1}{2}BC \times BE = BE \times \frac{AD + BC}{2}.$$

Como la recta EH por ser la paralela media, es igual á la semisuma de las bases del trapecio (78), también pudiera decirse que *el área de un trapecio equivale al producto de su altura por la paralela media.*

106. *El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por la apotema.*

Fig. 35. Sea ABCDEF el polígono regular que se considera: es evidente que el área de este polígono se compone de la suma de las áreas de los triángulos AOB, BOC, COD .....: todos estos triángulos son iguales (68, Corolario) y como el área del triángulo AOB es igual á $\frac{1}{2}AB \times OG$, la que proviene de la reunión de todos ellos, en el supuesto de que su número fuera n, será igual á $\frac{1}{2}nAB \times OG$, en cuya expresión $n \times AB$ representa el perímetro del polígono regular.

Fig. 54. *Área de un polígono irregular.*

Ésta se determina descomponiendo al polígono dado en triángulos, ó en otras figuras cuyas áreas puedan fácilmente conocerse, en cuyo caso, sumando los valores de éstas, se tendrá la del polígono propuesto. En la práctica se suele proceder con tal fin de la siguiente manera: se traza una recta que una los vértices más lejanos del polígono, y desde los restantes se tiran perpendiculares á ella, quedando entonces descompuesto aquél en trapecios y en triángulos rectángulos, cuyas áreas se saben apreciar.

CAPÍTULO III.

Comparación de áreas.

107. *Dos triángulos de bases y alturas respectivamente iguales, serán equivalentes,* supuesto que los tres factores que determinan sus áreas son idénticos.

Las áreas de dos triángulos cualesquiera son entre sí, como los productos de sus bases por sus alturas.

En efecto, si se representan por A y A′ las áreas de ambos triángulos, a y b y a' y b' sus respectivas alturas y bases, se tendrá $A = \frac{1}{2}ab$ y $A' = \frac{1}{2}a'b'$: dividiendo ordenadamente estas igualdades y simplificando, resultará $\frac{A}{A'} = \frac{ab}{a'b'}$.

Corolario.—*Si dos triángulos tienen bases iguales sus áreas serán proporcionales á sus alturas, y si tuvieran las alturas iguales, serían directamente proporcionales á sus respectivas bases.*

108. *Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.* Fig. 47.

Por ser semejantes los triángulos ABC y abc se verificará (93) $\frac{AC}{ac} = \frac{BD}{bd}$, pero como evidentemente se tiene que $\frac{AC}{ac} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}ac}$, resultará, al multiplicar ordenadamente ambas igualdades, la igualdad $\frac{\overline{AC}^2}{ac^2} = \frac{\frac{1}{2}AC \times AD}{\frac{1}{2}ac \times ad}$.

Corolario.—*Las áreas de dos triángulos semejantes son directamente proporcionales á los cuadrados de dos rectas homólogas cualesquiera,* supuesto que en polígonos semejantes se sabe (97) que la razón de dos rectas homólogas es la misma que la de sus lados homólogos.

109. *Dos paralelogramos de igual base é igual altura son equivalentes,* en atención á que los dos factores que determinan sus respectivas áreas son idénticos.

Las áreas de dos paralelogramos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas. En la demostración de este teorema se seguiría un orden de consideraciones enteramente análogo al expuesto, cuando se hizo patente la proposición del número 107.

Corolario.—*Si dos paralelogramos tienen bases iguales, sus áreas son proporcionales á sus alturas; y si tuvieren las alturas iguales, serán directamente proporcionales á sus bases.*

110. *Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

En efecto, dividiendo ambos polígonos en triángulos, por medio de diagonales trazadas desde dos vértices homólogos, representando por T, T′, T″ ..... las áreas de los triángulos que componen uno de los polígonos que se consideran, y por t, t', t'' ..... las áreas de los triángulos que forman el otro polígono, llamando L, L′, L″ ..... los lados del primer polígono, y l, l', l'' ..... los lados del segundo, respectivamente homólogos á los anteriores, se tendrá:

$$\frac{T}{t}=\frac{L^2}{l^2},\ \frac{T'}{t'}=\frac{L'^2}{l'^2},\ \frac{T''}{t''}=\frac{L''^2}{l''^2},\ .....$$

como quiera que por ser los polígonos semejantes, las segundas razones son todas iguales, se verificará que las primeras también lo serán, y por lo tanto

$$\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}=.....$$

de donde (Aritm.ª 125, Corolario) resultará

$$\frac{T+T'+T''+.....}{t+t'+t''+.....}=\frac{T}{t}=\frac{L^2}{l^2};$$

en su consecuencia, llamando A y a las áreas de los polígonos semejantes propuestos, se tendrá que $\frac{A}{a}=\frac{L^2}{l^2}$.

Corolario.—*Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.*

111. *Las áreas de dos polígonos regulares semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios, á los cuadrados de sus apotemas, y, en general, á los cuadrados de dos líneas homólogas cualesquiera.*

En virtud del teorema anterior, las áreas son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, y como éstos, según se ha visto (99) son proporcionales á los radios, á las apotemas, y, en general, á dos rectas homólogas cualesquiera, se infiere de aquí, que las áreas de polígonos semejantes, tendrán que ser directamente proporcionales á los cuadrados de las mencionadas rectas.

112. *Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se construyen tres polígonos semejantes, el área del formado sobre la hipotenusa, equivale á la suma de las áreas de los polígonos construidos sobre los catetos.*

En efecto, llamando A al área del polígono construido sobre la hipotenusa, y B y C á las de los polígonos semejantes construidos sobre los catetos b y c; se tendrá (110), que $\frac{B}{A} = \frac{b^2}{a^2}$ y $\frac{C}{A} = \frac{c^2}{a^2}$: sumando ordenadamente ambas igualdades, resultará $\frac{B + C}{A} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$, pero según se dijo (89), se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$; luego $A = B + C$.

LIBRO II.

FIGURAS CIRCULARES.

CAPÍTULO I.

Posiciones de una recta en la circunferencia.

113. Cuando una recta gira, sin salir del plano en que se considera colocada, alrededor de cualquiera de sus dos extremos, hasta completar una vuelta, se observará que el otro extremo y en general cada uno de sus diferentes puntos determina una línea, que tendrá todos los puntos igualmente distantes del que se había supuesto fijo, la cual recibe el nombre de CIRCUNFERENCIA; por lo tanto, esta *es una línea curva plana y cerrada, cuyos puntos distan igualmente de uno interior que se llama* CENTRO.

ARCO es una parte cualquiera de una circunferencia.

RADIO es la recta limitada que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. De la definición de esta curva se desprende que *todos los radios de una misma circunferencia son iguales.*

CÍRCULO es la porción de superficie plana limitada por la circunferencia.

114. *Una recta no puede tener sino uno ó dos puntos comunes con la circunferencia.*

En el primer caso ó sea cuando la recta y la circunferencia, estando en un mismo plano, no tienen sino un punto común, la recta recibe el nombre de TANGENTE á la circunferencia; en el segundo caso, ó sea cuando la recta y la circunferencia tienen dos puntos comunes, se llama SECANTE, si la recta es indefinida, y CUERDA cuando su longitud está limitada por los puntos de intersección.

Es evidente que señalando dos puntos en una circunferencia, la recta determinada por ellos cortaría á la curva en los dos puntos que se hubieren fijado, y claro está que *una recta no puede tener con una circunferencia más de dos puntos comunes,* pues si tuviera tres ó más, se podrían tirar los correspondientes radios á dichos puntos, y entonces sucedería que desde un punto situado fuera de una recta podrían trazarse á ésta más de dos rectas iguales, lo cual es inadmisible (58, COROLARIO).

COROLARIO.—*La circunferencia es una curva convexa.*

La existencia de la recta indefinida, que sólo tiene un punto común con la circunferencia, se demuestra por medio del teorema siguiente:

115. *La recta AB perpendicular al radio en el punto C,*
FIG. 55. *en que éste encuentra á la circunferencia, es tangente á ésta.*

En efecto, si no fuese C el único punto común que tiene la AB con la circunferencia, habría además otro común á estas dos líneas, tal como el D; mas como por hipótesis la OC es perpendicular á la AB, será menor que la OD (38) y por lo tanto el punto D se hallará fuera del círculo. Por análogas consideraciones se haría ver que cualquier otro punto de la AB, á excepción del C, no podría estar situado en la circunferencia propuesta.

El punto que es común á una circunferencia y á su tangente, se llama *punto de contacto.*

RECÍPROCO.—*Toda tangente AB á una circunferencia, tiene que ser perpendicular al radio OC, que corresponde al punto C de contacto.*

En efecto, si desde el centro O se traza otra cualquier recta, que corte á la AB, tal como la OD, tendrá mayor longitud que el radio, por estar el punto D fuera del círculo, según la hipótesis; luego la recta OC será la más corta que se puede trazar desde el punto O á la recta AB, y por consiguiente será perpendicular á ésta (38, Recíproco).

Corolario 1.º—En un punto de una circunferencia sólo se puede trazar una tangente, supuesto que en el extremo del respectivo radio no es posible tirar sino una perpendicular (19).

Corolario 2.º—*Si dos rectas son perpendiculares, una cualquiera de ellas es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias, que siendo tangentes á la otra recta, tienen por punto de contacto el de intersección de aquéllas.*

116. La porción de círculo limitada por un arco y su correspondiente cuerda se conoce con el nombre de segmento.

Cuando una cuerda pasa por el centro recibe el nombre de diámetro. *Todos los diámetros de un mismo círculo son iguales,* por componerse cada uno de dos radios.

117. *Todo diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos porciones iguales.*

Doblando el círculo por el diámetro, tendrán que coincidir todos los puntos de las dos partes, en que queda dividida la circunferencia, en atención á que, si esto no sucediese, resultaría que unos puntos de la mencionada curva distarían más del centro que otros y por lo tanto los radios no serían iguales. Coincidiendo pues las dos porciones en que estaba dividida la circunferencia, tendrían que coincidir también las dos partes en las que había quedado dividido el círculo.

FIG. 56. CONTRARIO.—*Si una cuerda no es un diámetro, no podrá dividir á la circunferencia en dos partes iguales.*

En efecto, trazando el diámetro AC, éste dividirá á la circunferencia en dos partes iguales; pero como ADB es menor que una de éstas y ACB es mayor, sucederá que ADB y ACB serán desiguales.

Cuando un arco es igual á media circunferencia, se llama SEMICIRCUNFERENCIA, y la porción de superficie limitada por ésta y el correspondiente diámetro, se conoce con el nombre de SEMICÍRCULO. Si el arco es igual á la cuarta parte de la circunferencia, se denomina CUADRANTE.

CAPÍTULO II.

Proposiciones en que intervienen dos rectas y una circunferencia.

ARTÍCULO 1.°

Posiciones relativas de dos cuerdas.

118. Si en una circunferencia se consideran dos cuerdas, éstas pueden ó nó cortarse, y si no se encontraran dentro de la figura que se trace, claro es que aquéllas podrán ser paralelas ó dejarán de serlo.

PRIMER CASO.—Cuando se suponen dos cuerdas en cualquiera dirección, se verifican las siguientes proposiciones:

FIG. 56. *En toda circunferencia* (*), *la longitud del diámetro es mayor que la de cualquier cuerda.*

(*) En estas proposiciones es indiferente referirse á la circunferencia ó al círculo.

En efecto, la longitud del diámetro AC es igual á la suma de los radios AO y OB, y sabiendo ya (31) que esta suma es mayor que AB, se tendrá que AC será también mayor que la cuerda AB.

119. *En toda circunferencia ó en circunferencias iguales, si dos arcos son iguales lo serán también sus cuerdas, y á mayor arco corresponde mayor cuerda* (*).

1.º Sean AB y CD dos arcos iguales: trazando el diámetro que corresponde al punto medio del arco AC, y doblando la figura por aquél ó sea por EF, sucederá que en atención á ser los arcos AE y CE iguales, el punto A caerá sobre C, y por ser también iguales los arcos AB y CD, el punto B se confundirá con el D; luego habiendo coincidido los extremos de las dos cuerdas AB y CD, éstas serán iguales. Fig. 57.

2.º Sean los arcos desiguales ABG y CD: haciendo la misma construcción que en el caso anterior, el punto G caerá sobre H, y por lo tanto la cuerda AG tomará la posición CH. Falta ahora demostrar que la longitud CH es mayor que la CD: con tal fin trácense los radios OC, OD y OH y se tendrán los triángulos CHO y CDO que poseen dos lados iguales y el ángulo comprendido COH mayor que el COD; luego (45) resultará que CH será mayor que CD, y por consiguiente, AG > CD. Fig. 58.

Recíprocos.—En una circunferencia ó en circunferencias iguales, se verifica:

1.º *Que cuando las cuerdas sean iguales los correspondientes arcos también serán iguales.*

2.º *Si dos cuerdas son desiguales, á cuerda mayor corresponderá arco mayor.*

(*) Al manifestar que una cuerda corresponde ó subtiende á un arco, se hace alusión al menor de los dos arcos, que tienen los extremos comunes con los de la cuerda.

120. En una circunferencia ó en circunferencias iguales, se tiene:

1.º *Que las cuerdas iguales equidistan del centro.*

2.º *De dos cuerdas desiguales, la mayor se halla más cerca del centro.*

1.º Sean las cuerdas iguales AB y CD: si se trazan
FIG. 59. los radios OB y OD y las distancias EO y FO, sucederá que al doblar la figura, de modo que la CD coincida con la AB, el radio DO se confundirá con el BO, por tener los extremos comunes, de modo que los dos triángulos DFO y BEO serán iguales, en atención á que poseen la hipotenusa y un ángulo agudo iguales (41), luego FO = EO.

FIG. 60. 2.º Sean las circunferencias O y O′ iguales y la cuerda AB mayor que la CD: colocando la circunferencia O sobre la O′ de modo que coincida el punto A con el C, resulta que el punto B tomará una posición tal como la E, por ser el arco AFB mayor que el CGD. La perpendicular O′I á la CD evidentemente será mayor que la O′J, y como ésta es mayor que O′H, se tendrá O′I > O′H ó bien O′I > OL.

RECÍPROCOS.—En un mismo círculo ó en círculos iguales, se verificará:

1.º *Que las cuerdas equidistantes del centro son iguales.*

2.º *De dos cuerdas no equidistantes del centro, la mayor será la que diste menos del citado punto.*

SEGUNDO CASO.—*Proposiciones en que se supone que dos cuerdas se cortan.*

121. *Todo diámetro perpendicular á una cuerda divide á ésta y á sus dos arcos correspondientes en dos partes iguales.*

Sea CD el diámetro perpendicular á la cuerda AB: por ser radios AO y BO tendrán igual longitud y por lo tanto se apartarán igualmente del pie de la perpendicular (58, Recíproco 1.º); luego AE y BE serán iguales. Siendo CD perpendicular á la AB en su punto medio, cada uno de los puntos C y D equidistarán de los A y B, y por consiguiente las cuerdas AC y BC serán iguales: luego los arcos AC y BC también lo serán. Lo mismo pudiera decirse respecto de los arcos AD y BD. Fig. 61.

Observación.—El diámetro CD cumple con cinco condiciones: pasa por el centro, por los puntos medios de la cuerda y de sus dos arcos correspondientes, y además, es perpendicular á la cuerda. Ahora bien, como ya se dijo (27, Nota) que una recta quedaba determinada por dos condiciones, resulta de aquí, que cuando una recta tal como la CD cumpla con dos de aquéllas, deberá satisfacer necesariamente á las tres restantes, así pudiera decirse que *la perpendicular á una cuerda en su punto medio pasa por el centro, y divide á cada uno de los arcos correspondientes en dos partes iguales.*

122. *Los extremos de dos cuerdas que se cortan, siendo uno de ellos común á ambas, determinan una circunferencia.* Este teorema se acostumbra enunciar del siguiente modo: *Tres puntos no situados en línea recta determinan una circunferencia.* Fig. 62.

En efecto, siendo AB y BC las dos cuerdas que se consideran, habrá necesidad de demostrar que por los tres puntos A, B y C, se puede hacer pasar una circunferencia y nada más que una. Trazando en los puntos medios de las mencionadas cuerdas las perpendiculares DO y EO, éstas se cortarán (50), y como una y otra recta tienen que pasar por el centro (121, Observación), éste será el punto en donde ambas se encuentran.

Como quiera que las perpendiculares DO y EO son únicas y sólo existe un punto común á ambas, se infiere que por tres puntos dados no es posible trazar sino una sola circunferencia.

Nota.—*Por tres puntos que están en línea recta, no se puede hacer pasar una circunferencia,* pues si tal sucediese, resultaría que esta curva podría ser cortada por la antedicha recta en más de dos puntos (**114**).

Tercer caso. – Cuando se consideran dos cuerdas ó rectas paralelas cualesquiera.

123. *En una misma circunferencia los arcos comprendidos entre cuerdas paralelas son iguales.* Fig. 63.

Sean las cuerdas paralelas AB y CD: trazando el diámetro EF perpendicular á una de ellas, también lo será á la otra, y en su consecuencia se tendrá CE = DE y AE = BE; restando ordenadamente ambas igualdades, se obtiene CE — AE = DE — BE ó AC = BD.

Obsérvese que para ser cierto el recíproco de este teorema, se requiere que las dos cuerdas no se encuentren en un punto situado en el interior del círculo.

Nota.—El teorema que antecede puede hacerse extensivo lo mismo al caso en que se consideren una cuerda y una tangente, que cuando se tengan dos tangentes, pues siempre acontece que *los arcos comprendidos entre estas rectas paralelas, son iguales.*

En efecto; siendo la cuerda AB paralela á la tangente GH, el diámetro EF, correspondiente al punto de contacto E, será perpendicular á la GH, y por lo tanto á su paralela AB: luego (**121**) se tendrá AE = BE.

Si ahora se suponen que son paralelas las dos tangentes GH y JI, resultará que el radio EO, que corresponde al punto de contacto, tiene que ser perpendicular á la GH y por consiguiente á su paralela JI: pero dado que ésta también es perpendicular al radio OF, sucederá que el EO y el OF formarán una sola recta

(23) ó sea un diámetro, y por lo tanto se verificará que EBDF = EACI.

ARTÍCULO 2.º

Medida de los ángulos en el centro.

124. Se llama ARCO CORRESPONDIENTE Á UN ÁNGULO, al arco interceptado entre sus lados y descrito desde el vértice, como centro con un radio cualquiera.

ÁNGULO CENTRAL Ó ÁNGULO EN EL CENTRO, es aquél que tiene su vértice en el centro del arco correspondiente.

Cuando el vértice se halla en otro punto cualquiera diferente del centro, se dice que el ángulo es EXCÉNTRICO.

125. *Si dos ángulos son iguales, los arcos correspondientes trazados con el mismo radio también lo serán.* FIG. 64.

En efecto, al superponer los ángulos AOB y A′O′B′, sucederá que por ser ambos iguales, coincidirán sus lados y como los radios OA y O′A′ también son iguales, los puntos A y B se aplicarán respectivamente sobre A′ y B′: luego AB se confundirá con A′B′ y por lo tanto serán iguales.

RECÍPROCO.—*Si dos arcos trazados con el mismo radio son iguales, también serán iguales los ángulos correspondientes.*

Haciendo coincidir los lados OB y O′B′, los arcos AB y A′B′ se confundirán por ser iguales, y en su consecuencia el punto A se aplicará sobre A′: luego el lado OA coincidirá con el O′A′, y por lo tanto los ángulos serán iguales.

Los teoremas contrarios del directo y del recíproco deberán ser ciertos (54) y por consiguiente se verificará: 1.º *Que si dos ángulos son desiguales, los arcos correspon-*

dientes trazados con el mismo radio lo serán también, perteneciendo al mayor arco el ángulo mayor. 2.º *Que si dos arcos trazados con el mismo radio, son desiguales, al arco mayor corresponderá mayor ángulo.*

126. Como quiera que, duplicando un ángulo central, su arco correspondiente se duplica, resultará de aquí (71), que *la relación de dos ángulos será igual á la que existe entre los arcos correspondientes, trazados con el mismo radio.*

FIG. 65. Así, al comparar los ángulos AOB y A′O′B′ con sus arcos correspondientes, descritos con el mismo radio, se tendrá la proporción $\frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{AB}{A'B'}$.

Suponiendo ahora que el A′O′B′ se considera como unidad para medir ángulos, y que su arco correspondiente A′B′ sea la unidad para apreciar arcos, se deduce de la igualdad anterior, que *la medida de un ángulo es la misma que la de su arco correspondiente,* y por este motivo se dice también que *la medida de un ángulo es su arco correspondiente.*

127. *Todo ángulo recto tiene por medida un cuadrante.* En efecto, dos diámetros perpendiculares forman, como se sabe (22, COROLARIO), cuatro ángulos rectos que, por ser iguales, dividen al círculo y á la circunferencia en cuatro porciones también iguales.

128. Siendo así que el ángulo recto, por ser de un valor constante, conocido y de fácil determinación, es la unidad indicada para apreciar las cantidades angulares, habrá que considerar como unidad de arcos al cuadrante (126); mas como quiera que es frecuente tener que medir arcos menores que el cuadrante, hay que reconocer la conveniencia de divisores en aquella unidad de medida. Con tal fin, se divide el cuadrante en 90 partes iguales

llamadas *grados,* cada uno de éstos se subdivide en 60 *minutos,* y cada minuto en 60 *segundos.* Esta es la división llamada *sexagesimal.*

Algunos geómetras, en su deseo de aplicar á la medida de arcos y por lo tanto de ángulos, el sistema decimal, consideran dividido el cuadrante en 100 grados, el grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

Según esto, cuando se quiera reducir los grados de la división sexagesimal á la *centesimal,* se formará la siguiente igualdad: $\frac{90}{100} = \frac{S}{C}$: de donde $C = \frac{10}{9} \times S$; en cuya expresión S representa el número de grados sexagesimales y C los centesimales. Si ahora se pretendiera reducir estos últimos grados á los anteriores, se tendría, $S = \frac{9}{10} \times C$.

Todos los arcos correspondientes á un mismo ángulo poseen igual graduación.

Sea ABC un ángulo cualquiera, y ac, $a'c'$, $a''c''$ ..... sus arcos correspondientes descritos con diversos radios: trazando la perpendicular BD al lado BC en el vértice B, resultará, $\frac{ABC}{CBD} = \frac{ac}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'} = \frac{a''c''}{b''c''} = \ldots\ldots$ Fig. 66.

Ahora bien, por ser el ángulo CBD recto, sus arcos correspondientes bc, $b'c'$, $b''c''$ ..... serán cuadrantes y por lo tanto poseerán la misma graduación; de modo, que en la serie de razones equivalentes que antecede, todos los denominadores son iguales; luego deberán tener también igual valor los numeradores.

129. Si se pretendiera determinar la razón que existe entre dos arcos descritos con el mismo radio, ó la que media entre sus ángulos correspondientes, se procedería con aquéllos análogamente á como se hizo cuando se trataba de hallar la razón que existía entre dos rectas cualesquiera (13).

ARTÍCULO 3.°

Medida de los ángulos excéntricos.

130. Como los ángulos que se consideran en una circunferencia, no siempre tienen su vértice en el centro de esta curva, de aquí la conveniencia de determinar el valor de los arcos correspondientes á los ángulos, en las diversas posiciones que sus respectivos vértices puedan tener, y sin que para conseguir este objeto, haya necesidad de efectuar el trazado material del arco correspondiente.

No teniendo un ángulo su vértice en el centro de la circunferencia, ha de tenerlo en la misma circunferencia, entre ésta y el centro, ó fuera. Cuando tiene el vértice en la circunferencia, puede estar formado por dos cuerdas, en cuyo caso se llama INSCRITO, por una cuerda y una tangente, y por una cuerda y la prolongación de otra: si el vértice se halla entre el centro y la circunferencia, el ángulo se llama INTERIOR, y se denomina EXTERIOR si el vértice se halla fuera de la circunferencia.

131. *La medida de un ángulo inscrito es la mitad del arco que abrazan sus lados.*

Para demostrar este teorema, conviene que se consideren los tres casos siguientes:

1.° Que uno de los lados del ángulo pase por el centro. 2.° Que el centro se halle comprendido entre los lados del ángulo. 3.° Que el centro quede fuera del ángulo que forman los lados.

FIG. 67. 1.° Sea el ángulo ABC: si se traza el diámetro DE

paralelo á BC, resultará que el ángulo ABC será igual al AOE por correspondiente (26-1.º), y por lo tanto ambos tendrán la misma medida; luego la del ángulo inscrito propuesto, también será el arco AE; pero como quiera que éste es igual al arco BD (125), el que á su vez es idéntico al CE, por arcos comprendidos entre cuerdas paralelas, se verificará que AE = CE, ó lo que es lo mismo, el arco AE será la mitad del AEC; de donde se deduce que la medida del ángulo ABC es igual á la mitad del arco AEC que abrazan sus lados.

2.º El ángulo CBF se compone de los dos ángulos ABF y ABC, cuyas respectivas medidas son mitad del arco AF y la mitad del AC, de donde se desprende que el ángulo propuesto CBF tendrá por medida

$$\frac{1}{2}AF + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AF + AC) = \frac{1}{2}CAF.$$

3.º El ángulo FBG equivale al ABG menos el ABF, cuyas respectivas medidas son, $\frac{1}{2}AFG$ y $\frac{1}{2}AF$: luego el ángulo propuesto FBG tendrá por medida

$$\frac{1}{2}AFG - \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}(AFG - AF) = \frac{1}{2}FG.$$

COROLARIO 1.º—*Todos los ángulos inscritos que abrazan el mismo arco son iguales.*

COROLARIO 2.º—*Los ángulos inscritos cuyos lados terminan en los extremos de un mismo diámetro son rectos,* puesto que abrazan entre sus lados media circunferencia.

132. *La medida de un ángulo formado por una cuerda y una tangente* (*), *es la mitad del arco que abrazan sus lados.*

(*) Todo ángulo cuyos lados son una tangente y una cuerda, se llama *ángulo del segmento.*

Para la demostración de esta proposición, procede que se consideren los mismos casos que en la anterior.

1.º Si uno de los lados del ángulo ABH pasa por el
Fig. 68. centro, dicho ángulo será recto (115, Recíproco); luego tendrá por medida un cuadrante, y en atención á que sus lados comprenden una semicircunferencia, se verificará por lo tanto, que la medida del ángulo ABH será la mitad del arco, que abrazan sus lados.

2.º El ángulo FBH equivale al ABF más el ABH: luego su medida será igual á la suma de las medidas de los ángulos que le componen; esta medida es

$$\frac{1}{2}\text{AF} + \frac{1}{2}\text{ACB} = \frac{1}{2}(\text{AF} + \text{ACB}) = \frac{1}{2}\text{BCAF}.$$

3.º El ángulo CBH equivale al ABH menos el ABC, y las medidas de estos ángulos son respectivamente $\frac{1}{2}$ACB y $\frac{1}{2}$AEC: luego la del propuesto BCH será

$$\frac{1}{2}\text{ACB} - \frac{1}{2}\text{AEC} = \frac{1}{2}(\text{ACB} - \text{AEC}) = \frac{1}{2}\text{BC}.$$

La medida de un ángulo interior equivale á la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de éstos.

Fig. 69. Sea el ángulo ABC: prolongando los lados de éste y trazando por el punto E una paralela EF á la CD, el ángulo AEF que resulta, será igual al ABC por correspondientes; pero la medida del ángulo AEF equivale á

$$\frac{1}{2}\text{ACG} = \frac{1}{2}\text{AC} + \frac{1}{2}\text{CG} = \frac{1}{2}(\text{AC} + \text{DE}),$$

puesto que CG y DE son iguales por arcos comprendidos entre rectas paralelas: luego la medida del ángulo ABC será también igual á $\frac{1}{2}$(AC + DE).

133. *La medida de un ángulo exterior es igual á la semidiferencia de los arcos que abrazan sus lados.*

El ángulo exterior propuesto puede estar formado por dos secantes, por una secante y una tangente ó por dos tangentes.

1.º Sea el ángulo ABC, cuyos lados son dos secantes; si se traza la recta EF paralela al lado AB, resultará, que como el ángulo inscrito CEF tiene por medida la mitad del arco CF, su igual, el ángulo propuesto también, tendrá por medida $\frac{1}{2}$CF, ó sea $\frac{1}{2}$AC — $\frac{1}{2}$AF; pero como AF y DE son iguales, se verificará, que la medida del ángulo ABC será $\frac{1}{2}$(AC — DE). FIG. 70.

2.º Sea ABC el ángulo propuesto: si se traza la recta DE paralela al lado BC tangente, se tendrá que aquel ángulo será igual al ADE, por correspondiente, y el arco CE igual al CD, por hallarse comprendidos entre rectas paralelas; mas como quiera que este último ángulo tiene por medida $\frac{1}{2}$AE, resulta de aquí, que la medida del ángulo ABC también será igual á $\frac{1}{2}$AE, ó sea, FIG. 71.

$$\frac{1}{2}(AEC - CD).$$

3.º El ángulo ABC (*), por componerse de los ángulos ABD y CBD, tendrá por medida la suma de las medidas de éstos, que, según lo dicho en el caso anterior, será igual á FIG. 72.

$$\frac{1}{2}(AD - AE) + \frac{1}{2}(CD - CE) = \frac{1}{2}(ADC - AEC).$$

(*) Todo ángulo formado por dos tangentes á una misma circunferencia, se denomina *ángulo circunscrito.*

Observación.—*Las porciones AB y BC de las tangentes trazadas desde un punto B exterior á una circunferencia, son iguales,* porque la recta que une los puntos de contacto de ambas tangentes, forma con éstas un triángulo ABC, que será isósceles, en atención á que los ángulos BAC y ACB tienen la misma medida; luego se verificará que AB = BC.

CAPÍTULO III.

Proposiciones referentes á tres ó más rectas situadas en el plano de la circunferencia.

134. Se dice que un polígono está *inscrito* en un círculo, si sus lados son cuerdas de éste, y entonces se dice también que el círculo se halla *circunscrito* al polígono que se considera.

Un polígono se encuentra *circunscrito* á un círculo, cuando sus lados son tangentes al círculo, y en tal caso se dice que el círculo está inscrito en el polígono.

Fig. 73. *Á todo triángulo se le puede circunscribir una circunferencia é inscribir otra.*

En efecto, los vértices del triángulo son tres puntos que no están en línea recta, luego determinarán una circunferencia circunscrita al triángulo propuesto. Para demostrar la segunda parte del teorema, obsérvese que si se trazan las bisectrices AD y CE de los ángulos BAC y ACB, éstas se encontrarán, por ser la suma de los ángulos mencionados menor que dos rectos (**32**, Corolario 3.º). Este punto O de intersección equidistará de los tres lados del triángulo (**60**): luego la circunferencia cuyo centro es el mencionado punto y cuyo radio es la perpendicular OF á uno cualquiera de aquéllos, será tangente á los tres y por lo tanto estará inscrita en el triángulo que se considera.

Si un cuadrilátero es inscribible en una circunferencia, tendrá sus ángulos opuestos suplementarios. FIG. 74.

En efecto, la medida del ángulo inscrito A es la mitad del arco CBD y la del B es la mitad del CAD, luego entre ambos tienen por medida la mitad de toda la circunferencia, y por lo tanto, serán suplementarios. Análogamente se probaría que también los ángulos C y D son suplementarios.

TEOREMA CONTRARIO.—*Si un cuadrilátero no es inscribible en una circunferencia, no tiene los ángulos opuestos suplementarios.* FIG. 75.

En efecto, si se hace pasar una circunferencia por los vértices A, B y C, ésta, según la hipótesis, no podrá pasar por el cuarto vértice D. Ahora bien, el ángulo inscrito B tiene por medida la mitad del arco AEC, y el ángulo D tiene por medida más ó menos de la mitad del arco ABC, según que su vértice se halle dentro ó fuera del círculo; luego la medida de aquél, más la de uno cualquiera de estos dos últimos ángulos, no puede componer la mitad de la circunferencia, y por lo tanto, no serán suplementarios.

COROLARIO.—*Los paralelogramos son siempre inscribibles en una circunferencia.*

Si un cuadrilátero es circunscribible á un círculo, se verificará que la suma de dos lados opuestos será igual á la suma de los otros dos lados. FIG. 76.

En efecto, por ser el cuadrilátero ABCD circunscribible, se tendrá (133, OBSERVACIÓN), que AF = AE, así como BF = BG, CH = CG y DH = DE; sumadas ordenadamente estas cuatro igualdades y reduciendo, dan por resultado :

$$AB + CD = BC + AD.$$

TEOREMA CONTRARIO.—*Si un cuadrilátero no es circunscribible, no puede tener la suma de dos lados opuestos igual á la de los otros dos.* FIG. 77.

En efecto, como quiera que el cuadrilátero ABCD se supone que no es circunscribible, la circunferencia tangente á los tres lados AB, BC y CD no lo será al lado AD. Trazando el radio perpendicular á este último lado, se determinará la tangente en el punto G, con cuyo motivo aparecerá formado el cuadrilátero BCFE circunscrito á la circunferencia que se considera, en el cual se verificará $BE + CF = BC + EF$; pero como en el cuadrilátero ADFE se tiene también $AE + AD + DF > EF$, si se resta ordenadamente esta desigualdad de la equivalencia que le antecede, resultará, $AB + CD - AD < BC$, y por lo tanto, $AB + CD < BC + AD$.

Corolario.—*El rombo es siempre circunscribible á un círculo.*

Fig. 35. **135.** *Todo polígono regular* se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro.

En efecto, trazando las bisectrices AO y BO de los ángulos A y B del polígono regular que se considera ABCDEF, se sabe (**68**) que su punto de encuentro O equidista tanto de todos los vértices, como de todos los lados del mencionado polígono, y por lo tanto será el centro común á los dos círculos, el uno inscrito y el otro circunscrito al polígono propuesto.

Obsérvese que el radio del círculo circunscrito á un polígono regular es el mismo radio del polígono, al paso que el radio del círculo inscrito en el polígono, que se considera, es igual á la apotema de éste.

136. *Si una circunferencia se divide en partes iguales, se verificará:* 1.º *Que las cuerdas de estos arcos iguales formarán un polígono regular inscrito* (*). 2.º *Que las tangentes á la circunferencia en los puntos de división determina-*
Fig. 78. *rán un polígono regular circunscrito.*

1.º Los lados AB, BC, CD, DE ..... del polígono inscrito son iguales, por cuerdas de arcos iguales; y los ángulos ABC, BCD, CDE ..... son también idénticos, por ser todos ellos ángulos inscritos, que abrazan arcos iguales (**131**); luego el polígono es regular (**67**).

(*) Obsérvese que esta proposición pone de manifiesto la existencia de los polígonos regulares de cualquier número de lados.

2.º Los triángulos ABI, BCJ, CDL ..... son iguales, en vista de que tienen los lados AB, BC, CD ..... iguales, así como también los ángulos adyacentes á estos lados, por tener todos ellos como medida la mitad de cada uno de los arcos iguales en que la circunferencia propuesta se considera dividida. Estos triángulos isósceles por ser iguales, tendrán los ángulos I, J, L, M ..... iguales, así como BI = BJ = CJ = CL = ... y en esta atención serán de igual magnitud sus duplos IJ, JL ....., lo cual manifiesta que el polígono circunscrito HIJLMNOP es regular.

Corolario.—*Si se dividen en dos partes iguales cada uno de los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscrito, y se trazan las cuerdas que corresponden á los nuevos arcos, se formará otro polígono regular que tendrá duplo número de lados que el propuesto.*

137. *El perímetro de todo polígono regular inscrito es menor que la circunferencia, y se puede aproximar indefinidamente á ésta, si aumenta suficientemente el número de sus lados.*

En el polígono regular inscrito ABCDEFG se tiene que la cuerda AB, por ser una recta, será menor que el arco AB; por igual razón las cuerdas BC, CD, DE ..... serán también menores que los arcos BC, CD, DE ....., que aquéllas respectivamente subtienden; por lo tanto

$$AB + BC + CD + DE + \ldots,$$

que componen el perímetro del polígono inscrito, será menor que la suma de todos los arcos mencionados, cuyo conjunto forma la circunferencia.

Si se duplica el número de lados de este polígono, se tendrá $AB < Aa + aB$, $BC < Bb + bc$, $CD < Cc + cD$, $DE < Dd + dE$ .....; sumando ordenadamente estas desigualdades, resulta

$$AB + BC + CD + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots < Aa + aB + Bb + bc + Cc + cD + \ldots\ldots,$$

lo cual pone de manifiesto, que el perímetro del segundo polígono es mayor que el del primero; por lo tanto siendo así que los perímetros de los polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia, van aumentando á medida que crece el número de sus lados, sin que jamás alcancen á igualar su valor con el invariable que aquella curva posee, habrá que admitir que la diferencia entre el perímetro de un polígono regular inscrito en una circunferencia y el valor constante de ésta, puede ser tan pequeña como se desee, haciendo que el número de lados de aquél sea suficientemente crecido.

COROLARIO.—*La circunferencia es el límite superior de los polígonos regulares inscritos, y por lo tanto la mencionada curva puede considerarse como un polígono regular de infinito número de lados.*

CAPÍTULO IV.

Rectas proporcionales en el círculo.

138. *Si desde un punto E situado en el plano de un círculo, se trazan dos rectas que lo corten, los productos de las distancias que median entre aquel punto y los dos de intersección de cada una de las mencionadas rectas con la circunferencia, son iguales.*

Puede suceder que las rectas que se consideran sean dos secantes ó dos cuerdas.

Trazando tanto en la figura 79 como en la 80 las cuerdas AD y BC, resultarán los triángulos ADE y BCE, que serán semejantes por tener iguales los ángulos AED y BEC, así como también los ABC y ADC, y por lo tanto se verificará, $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, ó bien, $AE \times BE = CE \times DE$.

Nota.—Cuando acontece que una recta, tal como la AD situada en el interior del ángulo E, determina con uno de los lados de éste un ángulo BAD, que sea precisamente igual al BCD, formado por otra recta BC con el otro lado, entonces se dice que las dos rectas AD y BC son ANTIPARALELAS con relación al ángulo E.

Si desde un punto exterior á una circunferencia se trazan á ésta una tangente, que termine en su punto de contacto, y una secante limitada en su segundo punto de intersección, se verifica que la tangente es media proporcional entre la secante y su porción externa. Fig. 81.

En efecto, si se trazan las cuerdas AC y CD, resultará que los triángulos ABC y BCD serán semejantes, por tener el ángulo B común á ambos é iguales los BCD y BAC (81); por lo tanto, sucederá, que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$.

Obsérvese que las cuerdas AC y DC son antiparalelas con relación al ángulo B, las cuales tienen en uno de los lados de éste un punto común, así como esta proposición es un corolario del teorema que le precede, si se considera á la tangente, á manera de secante, cuyos dos puntos de intersección con la circunferencia estuvieran confundidos en uno.

139. *Si desde un punto de una circunferencia se trazan la perpendicular á un diámetro y las dos cuerdas que terminen en los extremos de éste, se verificará:*

1.º *Que la perpendicular es media proporcional entre las proyecciones de las cuerdas.* 2.º *Que cada una de las cuerdas será media proporcional entre el diámetro y su proyección sobre éste.*

En efecto, como quiera que las dos cuerdas y el diámetro que se consideran forman un triángulo rectángulo, podrán aplicarse á éste las proposiciones demostradas (88-2.º-3.º).

140. *Dos circunferencias son proporcionales á sus respectivos radios.*

En efecto, sean dos circunferencias C y C′, y R y R′ sus radios. Al inscribir en ellas dos polígonos regulares P y P′ del mismo número de lados y por lo tanto semejantes (98), se tendrá $\frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}$ en cuya igualdad aparecen dos cantidades variables que, teniendo límites, son constantemente iguales en las diversas alteraciones que simultáneamente experimentan en su magnitud; luego sus límites serán iguales (ARITM.ª 187, COROLARIO 1.º) y por consiguiente se tendrá $\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$.

COROLARIO.—*La relación de la circunferencia al diámetro es un número constante.* En efecto, siendo $\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$, también se verificará que $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$ (*).

Esta relación, cuyo valor aproximado es 3,14159 ...., se ha convenido en expresarlo con brevedad por medio de la letra griega π, que se nombra *pi*. Así se tiene $\frac{C}{2R} = \pi$, de donde $C = 2\pi R$, lo que manifiesta que la longitud de la circunferencia es igual *al duplo de la relación que existe entre la circunferencia y el diámetro, multiplicado por el radio.*

NOTA.—Arquímedes (**) encontró que el valor aproxi-

(*) Esta relación es un número inconmensurable, cuyo valor aproximado se puede determinar sin salirse de procedimientos propios de la Geometría elemental, pero son éstos tan sumamente laboriosos que no se utilizan en la práctica. En cambio sirviéndose de las *series*, se tiene el medio expedito de apreciar aquel valor con toda la aproximación que se desee.

(**) Célebre matemático siciliano que murió unos dos siglos antes de comenzar nuestra Era.

mado de la relación que existe entre la circunferencia y el diámetro era $\frac{22}{7}$ (*), y Mecio (**) halla para la precitada razón el número $\frac{355}{113}$.

141. Es evidente que en una misma circunferencia ó en circunferencias iguales, las longitudes de dos de sus arcos son proporcionales á los números que expresan los grados que los miden; por lo tanto, como la longitud del arco de 180° es la semicircunferencia, ó sea πR, se podrá determinar el valor de la longitud l de un arco, siempre que se conozca el número n de grados que contiene, por medio de la proporción $\frac{l}{\pi R} = \frac{n}{180}$, de donde $l = \frac{\pi R n}{180}$.

142. Dos arcos se dice que son *semejantes* cuando estando descritos con radios diferentes, corresponden á ángulos en el centro iguales.

Dos arcos semejantes son proporcionales á sus respectivos radios.

Llamando L y L′ las longitudes de los arcos que se consideran, n el número de grados que uno y otro poseen y R y R′ los respectivos radios, se tendrá $L = \frac{\pi R n}{180}$,

(*) En escritos procedentes de los antiguos Bramanes de la India, consta que esta casta sacerdotal admitía como relación de la circunferencia al diámetro, el quebrado $\frac{3927}{1250}$, el cual, á la vez que se aproxima más al verdadero valor de π que el deducido por Arquímedes, ofrece la particularidad de que, por ser equivalente á 3,1416 es el número que más se usa al presente en los cálculos en que interviene π.

(**) Adriano Mecio, geómetra holandés que se dió á conocer durante los primeros años del siglo XVII.

$L' = \frac{\pi R' n}{180}$; dividiendo ordenadamente ambas igualdades resulta que $\frac{L}{L'} = \frac{R}{R'}$.

CAPÍTULO V.

Áreas.

143. *El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

En efecto, si se supone inscrito en el círculo que se considere, un polígono regular cuya área sea S, su perímetro p y la apotema a, se tendrá (106) que $S = \frac{1}{2}pa$.

Admitiendo que el número de lados de este polígono crece indefinidamente, resulta que como S, p y a tienen por límites respectivos al área del círculo, á la circunferencia y al radio de ésta, ó sea á A, C y R (137, Corolario), y siendo la igualdad anterior verdadera, cualquiera que sea el número de lados del polígono regular que se considere, se verificará (Aritmética 187), que $A = \frac{1}{2}CR$.

Corolario.—*El área de un círculo equivale al producto de π por el cuadrado del radio,* pues si se sustituye en la última igualdad, en vez de C su valor (140, Corolario), se tendrá $A = \frac{1}{2} \times 2\pi R \times R = \pi R^2$.

144. *La razón de las áreas de dos círculos es igual á la de los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

En efecto, si se representan por A y A′ las áreas de los círculos y por R y R′ sus respectivos radios, se tendrá que $A = \pi R^2$ y $A' = \pi R'^2$; dividiendo ordenadamente ambas igualdades, se verificará que $\frac{A}{A'} = \frac{R^2}{R'^2}$ y por lo tanto $\frac{A}{A'} = \frac{4R^2}{4R'^2} = \frac{(2R)^2}{(2R')^2}$.

145. La porción de círculo comprendida entre dos radios y uno cualquiera de los dos arcos que unen sus extremos, recibe el nombre de SECTOR.

Como consecuencia de lo dicho (**125**), se desprende que en un mismo círculo ó en círculos iguales á arcos iguales corresponden sectores iguales, y á doble arco corresponderá sector doble, por lo tanto acontecerá que *en un mismo círculo ó en círculos iguales, los arcos deberán ser proporcionales á las áreas de los correspondientes sectores.*

146. *El área de un sector circular es igual á la mitad del producto de su arco por su radio.*

Considerando al círculo como la reunión de dos sectores S y S′, el primero de los cuales se supone que sea el propuesto, llamando a y a' sus respectivos arcos correspondientes y C á la circunferencia, se tendrá $\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$, de donde $\frac{S}{S+S'} = \frac{a}{a+a'}$ ó bien $\frac{S}{\frac{1}{2}CR} = \frac{a}{C}$, despejando S, resulta $S = \frac{\frac{1}{2}CRa}{C} = \frac{1}{2}aR$.

Como quiera que habitualmente se conoce el valor del arco en grados, habrá que referirlo á la misma unidad lineal con que aparezca medido el radio, y por consiguiente, deberá sustituirse en el valor de S, en lugar del número de grados del arco, el de su longitud, ó sea $\frac{\pi Rn}{180}$, y por consiguiente

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{\pi Rn}{180} \times R = \pi R^2 \times \frac{n}{360}.$$

Se dice que dos sectores circulares son *semejantes* cuando sus respectivos arcos poseen el mismo valor gradual.

Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

En efecto, de las igualdades $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$ y $S' = \frac{\pi R'^2 n}{360}$, se desprende, al dividirlas ordenadamente, que $\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}$.

147. El área de un segmento menor que medio círcu-
Fig. 82. lo, tal como el ACB, se determinará restando del área del sector ACBO la del triángulo AOB; y para deducir el área del segmento ABD, mayor que un semicírculo, no habría sino agregar al área del sector ADBO la del triángulo AOB.

Para apreciar la extensión superficial de una faja circular ABFE, se determinaría la diferencia que existe entre las áreas de los segmentos ECF y ACB.

Corona ó anillo es la porción de círculo comprendido entre dos circunferencias que tienen el mismo centro. (*) Según esto, el área de una corona será igual á la diferencia de las áreas de los dos círculos concéntricos.

Trapecio circular se llama á la porción de corona que se halla comprendida entre dos arcos semejantes, y las porciones de radios que son comunes á sus extremos.

(*) En tal caso, se dice que ambas circunferencias son *concéntricas*.

El área del trapecio circular ABDC estará evidentemente determinada, por la diferencia que existe entre los dos sectores BOD y AOC. Fig. 83.

CAPÍTULO VI.

Posiciones relativas de dos círculos.

148. *Si dos circunferencias tienen un punto común fuera de la recta que une los centros, serán secantes.* Fig. 84.

Sean O y O′ los centros de dos circunferencias y A un punto común á ambas, situado fuera de la recta OO′ que une los centros: trazando á ésta la perpendicular AB y tomando en su prolongación una parte BC igual á AB, se verificará que el punto C será también otro punto común á las dos circunferencias que se consideran.

En efecto, las dos rectas AO y CO son iguales en longitud por oblicuas, que se apartan igualmente del pie B de la perpendicular BO á la recta AC; y como AO es un radio de la circunferencia O, también lo será CO, luego el punto C forma parte de la circunferencia cuyo centro es O; por ser AO′ = CO′ el punto C corresponde también á la circunferencia O′; en su consecuencia las dos circunferencias tienen dos puntos comunes y por lo tanto son secantes.

Corolario.—*Si dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto se encuentra en la recta que une los centros.* Supuesto que si el punto de contacto estuviere situado fuera de la expresada línea, las dos circunferencias tendrían, según acaba de verse, otro punto común, y por lo tanto no serían tangentes sino secantes.

149. *Si dos circunferencias son exteriores la una res-*
Fig. 85. *pecto de la otra, sucederá que la distancia de los centros será mayor que la suma de los radios.*

En efecto, es evidente que $OO' = AO + AB + BO$ y por consiguiente $OO' > AO + BO$.

150. *En dos circunferencias tangentes exteriormente, se verifica que la distancia de los centros es igual á la suma*
Fig. 86. *de sus radios.*

Sean O y O′ las dos circunferencias y A el punto de contacto: como que la recta que une los centros ha de pasar necesariamente por aquel punto, se tendrá $OO' = AO + AO'$.

151. *Si dos circunferencias son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que*
Fig. 87. *su diferencia.*

Puesto que si se trazan los radios AO y AO′ resultará el triángulo AOO′, y, según se vió (31), se tendrá que $OO' < AO + AO$ y también $OO' > AO' - AO$.

Cuando dos circunferencias son tangentes interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los
Fig. 88. *radios.*

Sea A el punto de contacto de ambas circunferencias, prolongando la recta OO′, ésta pasará por aquel punto y en su consecuencia sucederá que $OO' = AO' - AO$.

Si una circunferencia es interior respecto de otra, se tendrá que la distancia de los centros será menor que la diferencia de los radios.

En efecto, prolongando la recta OO′ hasta que corte á la circunferencia exterior, resultará $OO' = BO - AO' - AB$, y por consiguiente $OO' < BO - AO'$.

Los recíprocos de estos cinco últimos teoremas es inútil demostrarlos porque tienen que ser ciertos (92).

LIBRO III.

PROBLEMAS.

Generalidades acerca de los problemas geométricos.

152. Apoyándose en las proposiciones que se han dado á conocer, interesa que se resuelvan aquellos problemas geométricos, que son de más frecuente aplicación en la práctica.

La resolución de las cuestiones de esta índole puede ser *gráfica* ó *numérica*. La primera consiste en determinar las incógnitas por medio de una construcción puramente geométrica, y la segunda en traducir en igualdades las relaciones que existen entre las magnitudes conocidas y las desconocidas, con el fin de deducir los valores de estas últimas.

Al proceder á la resolución gráfica de un problema, no se puede prescindir de que los resultados obtenidos carezcan de rigurosa exactitud, supuesto que nunca pueden anularse las imperfecciones que son inherentes á los instrumentos (*) que se manejan, y es muy variable el esmero que el dibujante tiene en los trazados que con aquéllos ejecuta; de aquí los defectos que acusan los resultados obtenidos en las construcciones geométricas, de que se

(*) En los problemas gráficos que se resuelven en este tratado, únicamente se hace uso de la *regla* y del *compás*.

hace uso con frecuencia, tanto en las artes, como en los trabajos topográficos y geodésicos.

Como quiera que los procedimientos gráficos exigen rectas auxiliares, si éstas se presentan dibujadas sobre los mismos datos del problema y se procura además que una vez resuelto éste, la figura aparezca en conjunto clara y sencilla, se tiene entonces lo que se llama una *construcción elegante*.

153. Los métodos generales que pueden seguirse en la resolución de problemas son el *analítico* y el *sintético*. Se dice que se ha aplicado el método analítico, cuando suponiendo resuelto el problema, se hace un croquis de la construcción en que se revele haberse hallado el procedimiento, que conduce á la resolución de aquél, fundándose en proposiciones demostradas. El método sintético resuelve desde luego el problema con sujeción á construcciones conocidas de antemano, habiendo necesidad de demostrar seguidamente que la solución obtenida satisface á las condiciones del enunciado.

Según esto, el análisis deberá ser el método empleado en la investigación de las soluciones de problemas, al paso que el sintético servirá de comprobación de verdades ya conocidas.

Después de resuelto un problema procede, para completar su estudio, que se *discuta* con el fin de generalizar la solución obtenida, extendiéndola á todos los casos posibles, así como también demostrar la posibilidad ó imposibilidad de la cuestión de que se trate, según las modificaciones á que se preste su enunciado.

Los problemas geométricos se dividen también, como en Álgebra (60), en *determinados*, *indeterminados* y *absurdos*.

SECCIÓN PRIMERA.

PROBLEMAS GRÁFICOS.

I.

Figuras rectilíneas.

154. PERPENDICULARES Y PARALELAS.—*Por un punto dado trazar una perpendicular á una recta.* FIG. 90.

PRIMER CASO.—Si el punto A pertenece á la recta BC, se tomarán en ésta á uno y otro lado de dicho punto dos distancias AD y AE iguales, seguidamente con un radio mayor que la mitad de DE y haciendo centro en los puntos D y E, se trazarán dos arcos que deberán cortarse en un punto (151, RECÍPROCO), tal como F, y la recta AF que une este punto con el dado será la perpendicular pedida (59, RECÍPROCO).

SEGUNDO CASO.—Si el punto A estuviera fuera de la BC, se haría centro en A y se trazaría un arco que cortase á la BC en dos puntos D y E; se haría también centro en estos puntos, con un radio mayor que la mitad de DE, y se describirían con él dos arcos, los cuales tendrían que cortarse en un punto tal como F, el cual unido con el dado determinaría la perpendicular AF buscada. FIG. 91.

155. CASOS PARTICULARES. FIG. 92.

1.º Si el punto dado estuviese en el extremo A de la recta AB, que no pudiera prolongarse, sería inaplicable el procedimiento que se acaba de exponer, y con tal motivo, para resolver este problema, habría que trazar una circunferencia, que pasando por el punto A, cortara á la AB en otro cualquiera C; luego se trazaría el diámetro que corresponde á este último punto y la recta que une el otro extremo D del mencionado diámetro con el A, será la perpendicular pedida, en atención á que el ángulo A, que se halla inscrito en media circunferencia, tiene que ser recto (131, COROLARIO 2.º).

FIG. 93. 2.º Si el punto dado A se hallara fuera de la recta BC, no siendo posible la prolongación de ésta en un sentido, entonces sería difícil practicar el procedimiento anterior, y para resolver la cuestión, habría que hacer centro en un punto D de la BC y se describiría con el radio AD un arco, por la parte inferior de la AB: haciendo también centro en otro punto E de la misma recta, se trazaría, con un radio igual á AE, otro arco que cortase al anteriormente trazado, y el punto F, intersección de ambos arcos, determinaría un segundo punto de la perpendicular pedida. Es evidente que ésta será la AF, supuesto que la recta BC tiene los puntos D y E equidistantes de los A y F, y se sabe (22, COROLARIO) que si la recta BC es perpendicular á la AF, ésta á su vez lo será á la BC.

NOTA.—Conviene en la práctica que los puntos D y E se hallen lo más separados el uno del otro que permitan las dimensiones del dibujo, á fin de que las intersecciones de los arcos que se cortan en A y en B determinen estos puntos con la menor vaguedad posible.

156. *Dividir una recta en dos partes iguales por medio*
FIG. 94. *de una perpendicular.*

Desde los extremos A y B de la recta dada y con un radio mayor que la mitad de la AB, se describirán cuatro arcos, que se cortarán dos á dos en los puntos C y D, y la recta CD que los une será la perpendicular pedida (59, COROLARIO 2.º).

Obsérvese que si ahora se dividiera cada mitad de la recta propuesta en dos partes iguales, cada una de éstas en otras dos y así sucesivamente, se podría dividir la recta propuesta en un número cualquiera de partes iguales, siempre que éste fuera una potencia entera de 2.

157. *Por un punto C, dado fuera de una recta AB, trazar á ésta la paralela.* FIG. 95.

Haciendo centro en un punto cualquiera D de la AB, se describiría con un radio igual á CD una semicircunferencia; señalando en ésta, á partir del punto F, un arco igual á CH, quedará de este modo determinado el punto G, el cual unido con C, por medio de una recta se tendrá la paralela CG á la AB. En efecto, estas dos rectas que, sin cortarse dentro de una circunferencia, comprenden arcos iguales, serán paralelas (123, OBSERVACIÓN).

Apoyándose en los teoremas de los números (26-27, RECÍPROCOS), sería fácil deducir otros procedimientos, para resolver este mismo problema.

158. ÁNGULOS.—*Por un punto A, que sea conocido, trazar una recta, que forme con la BC un ángulo igual á otro dado E.* FIG. 96.

1.º Si el punto A está en la recta BC, se trazará con un radio cualquiera un arco correspondiente al ángulo DEF que se conoce, y haciendo centro en el punto A, y con el mismo radio, se describe un arco indefinido JL. La abertura de compás igual á la cuerda HG, aplicada á partir del punto J, determina el punto K que unido con el A, por medio de una recta, dará por resultado el ángulo JAL pedido. En efecto, los ángulos DEF y JAK poseen arcos correspondientes iguales, trazados con el mismo radio y por lo tanto serán iguales (125, RECÍPROCO).

2.º En el caso de que el punto A estuviera fuera de la recta BC, se formará en un punto cualquiera G de ésta, FIG. 97.

un ángulo LGC igual al propuesto DEF y trazando por A la paralela á la recta GL, se habrá formado el ángulo AKC, en el que concurren las condiciones deseadas. En efecto, el ángulo LGC es igual al propuesto DEG por construcción y al AKC por correspondiente entre rectas paralelas, luego estos dos últimos ángulos serán iguales entre sí.

FIG. 98. 159. *Trazar la bisectriz de un ángulo.*

1.º Sea BAC el ángulo cuyo vértice A se conoce. Trácese el arco correspondiente DE, y desde sus extremos se describirán, con un radio mayor que la mitad de la cuerda DE, dos arcos que se cortarán en un punto tal como F; y la recta que une este punto con el vértice A del ángulo, será la bisectriz pedida, en atención á que, siendo perpendicular á la cuerda DE, dividirá á ésta y al arco que subtiende en dos partes iguales (121); por lo tanto esta construcción pone también de manifiesto la manera de *dividir un arco en dos partes iguales.*

2.º Si el ángulo cuyo vértice no se conoce, estuviera
FIG. 99. formado por las dos rectas AB y CD, se trazará una recta cualquiera EF y se determinarán las bisectrices de los cuatro ángulos interiores, que esta recta forma con los dos lados AB y CD, las cuales señalarán al cortarse los puntos G y H que unidos por medio de la recta GH fijan la bisectriz pedida. En efecto, por estar el punto G en las bisectrices EG y FG, equidistará de los lados AB y CD, y por lo tanto, será un punto de la bisectriz que se busca; por consideraciones análogas se tendrá que el punto H pertenecerá á esa misma recta; luego la GH será la bisectriz del ángulo formado por las AB y CD.

160. *Dados dos puntos A y B, fuera de una recta CD, y situados á un mismo lado de ésta, determinar en ella un*
FIG. 100. *punto tal, que las rectas trazadas desde él á los dos puntos dados, formen ángulos iguales con la CD.*

Se traza la perpendicular AE á la CD, la cual deberá prolongarse, hasta que la porción EF sea igual á la AE; uniendo el punto B con el F, por medio de la recta BF, resultará que el punto G, en que esta última recta corta á la CD, será el punto pedido. En efecto, los triángulos rectángulos AEG y EFG son iguales, por tener el cateto EG común á ambos, AE = EF por construcción, é igual el ángulo comprendido entre ambos lados, luego AGE = EGF; pero como EGF = BGC por opuestos por el vértice, se verificará que AGE = BGC.

Obsérvese que el camino más corto para ir desde el punto A al B, llegando á la recta CD, es el AGB (*). En efecto, sea AHB otro camino, se tendrá BH + FH > BF ó sea BH + FH > BG + GF; pero como AG = FG y AH = FH, la última desigualdad podrá escribirse como sigue: BH + AH > BG + AG.

161. Triángulos.—*Dados un lado y dos ángulos construir el triángulo.* Fig. 101.

Primer caso.—Cuando el lado *c* es adyacente á los ángulos dados A y B, se deberá tomar, sobre una recta indefinida, una parte A′B′ igual al lado conocido *c*; en uno de los extremos A′ de éste se construye un ángulo B′A′D igual al dado A, y en el otro extremo B′ otro ángulo A′B′E igual al B, y el triángulo A′B′C′ formado en estas condiciones será el pedido (41).

Segundo caso.—Cuando el lado *c* sea el opuesto á uno de los ángulos que se conocen, se tomará, sobre una recta indefinida, una porción A′B′ igual al lado *c*, y se formará el ángulo B′A′D igual al dado A; en un punto cualquiera E de la A′D se construirá un ángulo A′EF igual al C, y trazando por el punto B′ la paralela Fig. 102.

(*) Este problema justifica en Física las *Leyes de la reflexión.*

B′C′ á la EF, resultará el triángulo A′B′C′ que se buscaba (42).

Nota.—En cualquiera de estos dos casos el problema sería imposible, si la suma de los dos ángulos dados fuera igual ó mayor que dos rectos.

Fig. 103. 162. *Construir un triángulo cuando se conozcan dos lados y un ángulo.*

Primer caso.—Cuando el ángulo dado sea el comprendido en los dos lados que se conocen, se comenzará por construir un ángulo A′ igual al dado A; sobre uno de los lados de este ángulo, deberá tomarse una parte A′B′ igual á *c*, y sobre el otro una porción A′C′ igual á *b*; uniendo por medio de la recta B′C′ los puntos B′ y C′ resultará el triángulo pedido A′B′C′ (43).

Fig. 104. Segundo caso.—Cuando el ángulo dado A no sea el comprendido entre los dos lados que se conocen, se construirá un ángulo A′ igual al A; sobre uno de sus lados tómese una parte A′C′ igual al *b* y haciendo centro en el punto C′, con un radio igual al lado *a*, descríbase un arco: uniendo los puntos B′ y B″ en que dicho arco corta á la recta A′D′, resultarán los dos triángulos A′B′C′ y A′B″C′, que satisfacen las condiciones del enunciado.

Para que este problema sea posible, se requiere que el arco descrito con el radio *a* corte á la recta A′D′. Si el lado opuesto *a* fuera menor que la perpendicular C′D, entonces el antedicho arco no podría cortar á la A′D′, y por lo tanto, no había solución posible. En el supuesto de que *a* fuera igual á la citada perpendicular, entonces la recta A′D′ sería tangente al arco en el punto D, y en su consecuencia, el triángulo rectángulo A′C′D constituiría la única solución del problema. Si *a* fuera mayor que C′D, pero menor que *b*, el precitado arco cortaría á la A′D′ en dos puntos B′ y B″, situados el uno á la derecha y el otro á la izquierda del punto D y á igual distancia de este punto; lo que manifiesta que en tal caso habría dos soluciones, las cuales serían los triángulos A′B′C′ y A′B″C′. Cuando $a = b$ entonces el arco descrito cortaría también en dos puntos á la A′D′, pero no habría sino una solución, por cuanto que uno de estos puntos sería el A′; lo cual dice que solamente se tendría el triángulo isósceles A′B′C′.

Finalmente, en el supuesto de que $a > b$, el arco descrito cortaría también en dos puntos á la A′D′, pero el uno de éstos estaría á la izquierda del A′, de modo que aun cuando resultarían dos triángulos, el que se encontrase situado á la izquierda de la recta A′C′, no cumpliría con las condiciones del enunciado: luego en tal caso no hay más que una solución.

La discusión que se acaba de exponer, ha versado sobre los datos del problema, y como el ángulo A es agudo, debe aplicarse á este caso todo lo dicho anteriormente. Si el ángulo propuesto A fuera obtuso, la discusión que antecede manifiesta, que el arco descrito con el radio a no cortaría al A′D′ á la derecha del A′, que es cuando únicamente puede haber solución, á menos que sea $a > b$. Obsérvese que la construcción de un triángulo rectángulo, conocida la hipotenusa y un cateto, es un caso particular de este problema, el cual será posible y determinado, siempre que el ángulo recto se oponga al lado mayor.

163. *Construir un triángulo conocidos que sean sus tres lados.*

Sean a, b y c los tres lados: tómese sobre una recta indefinida la longitud $AC = b$, y haciendo centro en sus extremos con los radios $AB = c$ y $BC = a$, trácense los respectivos arcos y únase la intersección B que resulta con los puntos A y C. Fig. 105.

Obsérvese que no sería posible resolver este problema, si uno cualquiera de los tres lados que se conocen fuese mayor que la suma de los otros dos.

Fig. 42. **164.** *Sobre una recta dada que se considera como lado homólogo de otro, correspondiente á un triángulo conocido, construir otro triángulo que le sea semejante.*

Sea ABC el triángulo que se conoce y *ac* el lado homólogo al AC, sobre el cual se quiere construir el triángulo semejante al propuesto. Se comenzará por formar un ángulo *a* igual al A, y en *c* otro idéntico al C, con cuyo motivo aparecerá el triángulo *abc*, que será semejante al dado, por tener ambos los tres ángulos respectivamente iguales.

Fig. 106. **165.** Polígonos.—*Construir un paralelogramo, conocidos dos lados y el ángulo comprendido.*

Constrúyase un ángulo A′ igual al dado A, tómense sobre sus lados dos partes A′B′ y A′C′, respectivamente iguales á *b* y *c*, y trazando por los puntos B′ y C′ dos rectas B′D′ y C′D′ respectivamente paralelas á A′C′ y á A′B′, resultará el paralelogramo A′B′D′C′ pedido.

Según esto, para la construcción de un rombo, sólo se necesitará un lado y un ángulo; para la de un rectángulo la base y la altura, y para la de un cuadrado la longitud del lado.

Fig. 107. **166.** *Construir un polígono igual á otro dado.*

Lo natural sería descomponer el polígono propuesto en triángulos, construir otros iguales á éstos y dispuestos en el mismo orden: es evidente que así se tendría otro polígono igual al propuesto (64). Mas como por pequeño que fuera el error cometido, al formar uno cualquiera de los ángulos, esto tendría que influir de un modo sensible en la dirección de los lados, se prefiere trazar por los vértices A, B, C, D ..... del polígono propuesto, rectas paralelas entre sí en una dirección arbitraria, por ejemplo: AA′, BB′, CC′, DD′, ...: tómese sobre éstas, á partir de los vértices A, B, C, D, ..., distancias iguales entre sí, tales como AA′, BB′, CC′, DD′ ....., y los puntos A′, B′, C′, D, ..., serán los vértices del polígono pedido, supuesto que ambos polígonos tienen sus lados y ángulos iguales y dispuestos del mismo modo.

167. *Sobre una recta considerada como lado homólogo de otro, que pertenezca á un polígono dado, construir un polígono que le sea semejante.*

Se descompondrá el polígono propuesto en triángulos, y empezando por el que contenga el lado cuyo homólogo es conocido, se construirán triángulos respectivamente semejantes á aquéllos y que se hallen dispuestos del mismo modo: el polígono obtenido en estas condiciones será semejante al propuesto (95).

168. Líneas proporcionales. — *Dividir una recta dada AB en partes proporcionales á otras varias, cuyas magnitudes son* m, n *y* p. Fig. 108.

Por uno de los extremos de la AB trácese la recta indefinida AC, que forme con ella un ángulo arbitrario, tómese sobre la AC, á partir del punto A, las porciones AD, DE y EF respectivamente iguales á *m*, *n* y *p*, únase por medio de una recta BF, el último punto F de división con el extremo B de la propuesta y, trazando por los E y D paralelas á la BF, resultará dividida la recta AB en partes proporcionales á las *m*, *n* y *p* (75).

El ángulo A, aun cuando arbitrario, conviene que no sea ni muy agudo ni excesivamente obtuso, con el fin de evitar vaguedad en los puntos de división, que hay necesidad de determinar en la recta propuesta.

169. *Dividir en partes iguales una recta dada AB.* Fig. 109.

La resolución de este problema es una consecuencia de la que se acaba de exponer, pues si en la recta indefinida AC se toman, á partir del vértice A, con una magnitud arbitraria, tantas porciones iguales como sea el número de aquellas en que se trata de dividir la AB, y se continúa la construcción anterior, daría por resultado, según puede verse en la figura, que esta recta quedaría dividida en el número de partes iguales que se deseaba (72).

FIG. 110. 170. *Hallar una recta que sea cuarta proporcional á tres rectas dadas.*

Si se quisiera determinar gráficamente el cuarto término de la proporción $m : n :: p : x$, formaríase un ángulo cualquiera BAC, y sobre uno de sus lados AC se tomaría, á partir del vértice A, una magnitud AD igual á la recta m; en el mismo y á partir del mencionado vértice, se llevaría la porción $AE = n$; y en el otro lado se señalaría una magnitud $AF = p$; uniendo el punto D con el F por medio de las rectas DF, y trazando por E la paralela á ésta, resultará que la AG será la cuarta proporcional pedida, en atención á que necesariamente tendría que verificarse (76) que $AD : AE :: AF : AG$.

171. *Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas.*

Este problema es el mismo anterior, en el caso particular de que fuera $n = p$.

FIG. 111. 172. *Hallar una media proporcional á dos rectas dadas.*

Sobre una recta indefinida, se tomará una magnitud AB igual á la mayor m de las rectas conocidas, y considerándola como diámetro, se describe sobre ella una semicircunferencia; señalando en esta recta AB una parte $AC = n$, y trazando una perpendicular en el punto C á la AB, no habría más que unir el punto de intersección, determinado, con el A, y daría por resultado la

AD, que es la media proporcional que se deseaba encontrar. (139-2.º)

Nota.—Para resolver el problema anterior existen diversos procedimientos, pero tanto en ésta como en todas aquellas cuestiones que se encuentran en el mismo caso, que son la mayoría, se da aquí la preferencia al trazado que supone construcciones más sencillas y prácticas.

173. Áreas.—*Transformar un polígono en triángulo equivalente.*

Es indudable que si se pudiera transformar un polígono en otro equivalente, que tuviese un lado menos, el problema estaría resuelto; pues bastaría ir transformando los polígonos resultantes en otros, de un lado menos, hasta llegar á un triángulo: de modo que, según esto, el problema queda reducido en realidad á transformar un polígono en otro equivalente, que tenga un lado menos. Fig. 112.

Trácese en el polígono propuesto ABCDEF una diagonal BD, que corresponda á dos lados consecutivos, y por el vértice C opuesto á ella, se tira la recta CG, que le sea paralela; prolónguese el lado DE, hasta que corte á la citada paralela, y únase el punto H así determinado con el B, y se tendrá el polígono ABHEF, que será el pedido. En efecto, los dos triángulos BCD y BDH poseen la misma base BD é igual altura, supuesto que sus vértices C y H se hallan en una paralela á la base común de ambos, luego son equivalentes: por lo tanto si al pentágono ABDEF se añade el triángulo BCD, resulta el exágono propuesto, mientras que al agregarle el BDH se obtendría el pentágono ABHEF; en cuya atención este polígono y el propuesto tendrán que ser equivalentes.

174. *Transformar un paralelogramo en cuadrado.*

Siendo a y b las magnitudes respectivas que corresponden á la base y altura del paralelogramo, que se considera, se hallaría la media proporcional entre ambas, y ésta sería la longitud del lado del cuadrado que se busca. En efecto, representando esta longitud con x, se tendrá, según lo dicho (102), la igualdad $x^2 = a \times b$, de donde $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

Según esto, habiendo visto (Capítulo II, Sección 3.ª) que las áreas están dadas por el producto de dos factores lineales, se desprenden las siguientes consecuencias:

1.ª Que para transformar un triángulo en cuadrado equivalente, se hallaría el valor de éste, sin más que determinar la media proporcional entre la base y la mitad de la altura de aquél.

2.ª Que si se quisiera hallar el lado del cuadrado equivalente á un trapecio, no habría más que buscar la media proporcional entre las semisuma de las bases y su altura (105).

3.ª Cuando se desee transformar un polígono regular en cuadrado, se hallaría el lado de éste, determinando la media proporcional entre la apotema y la mitad del perímetro de aquél.

4.ª En el caso de que se pretenda transformar un polígono cualquiera en cuadrado, se construirá el triángulo equivalente á aquél y luego éste se deberá convertir en cuadrado.

II.

Circunferencia y Círculo.

175. Circunferencia.—*Hacer pasar una circunferencia por tres puntos dados.* Fig. 113.

Únanse los tres puntos propuestos A, B y C por me dio de las rectas AB y BC, y por los puntos medios de estas rectas trácense las respectivas perpendiculares DG y EF, y donde se corten éstas, se tendrá el centro O de la circunferencia pedida (122).

Este mismo procedimiento se seguirá también cuando se quiera circunscribir una circunferencia á un triángulo dado.

De igual modo pudiera hallarse el centro de una circunferencia ó de un arco, pues entonces no habría más que señalar tres puntos en la curva dada, y trazar las perpendiculares en los puntos medios de las cuerdas que los unen.

176. *Rectificar una circunferencia,* ó sea *hallar una recta cuya longitud sea próximamente la de una circunferencia dada.* FIG. 114.

Se principiará por trazar una secante indefinida AB, que pase por el centro de la circunferencia propuesta, y á partir de uno de los extremos del correspondiente diámetro CD, se tirará la recta CE indefinida, sobre la cual se llevará 22 veces una magnitud arbitraria; luego deberá unirse el punto F, que corresponde á la 7.ª división, con el centro O, y por el punto G, de la división 22, se traza la paralela GH á la FO, y la recta CH que resulta, tendrá próximamente la longitud de la semicircunferencia, en atención á que $\frac{CH}{CO} = \frac{CG}{CF} = \frac{22}{7} = \pi$, y por lo tanto $CH = \pi CO = \frac{c}{2}$.

177. TANGENTES Á LA CIRCUNFERENCIA.—*Por un punto dado en el plano de una circunferencia, trazar una tangente á dicha curva.*

1.º Si el punto dado se halla en la circunferencia, no hay más que trazar el radio que corresponde á dicho punto y por éste una perpendicular al radio, la cual será la tangente pedida (115).

Fig. 115. 2.º Si el punto dado A no se hallare en la circunferencia propuesta, se unirá su centro O con A por medio de la recta AO, y sobre esta línea, considerada como diámetro, se describe una circunferencia; uniendo el precitado punto A con los B y C, en que se cortan las dos circunferencias, se obtendrán las dos rectas AB y AC, que serán las tangentes á la circunferencia propuesta, en atención á que los ángulos ABO y ACO son rectos. (131, Corolario 2.º)

Observación.—Repitiendo la construcción anterior, en el supuesto de que el punto dado estuviera dentro de la circunferencia, se vería que el problema propuesto era imposible.

Fig. 116. *Trazar una tangente que sea común á dos circunferencias.*

Haciendo centro en el mismo centro de la circunferencia mayor, con un radio AO igual á la diferencia de los radios de las dos circunferencias propuestas, se describirá otra auxiliar, y desde el centro O′ de la menor se trazará la tangente AO′ á la auxiliar citada: tírense los dos radios CO y EO′ perpendiculares á esta tangente, los cuales en su intersección con las respectivas circunferencias determinarán los puntos C y E de la tangente pedida. En efecto, siendo AC igual y paralela respecto de la EO′, el cuadrilátero ACEO′ será un paralelogramo, y por lo tanto, la recta CE, que pasa por los extremos de los radios CO y EO′, y es además perpendicular á ellos, tendrá que ser la tangente pedida (115).

Análogamente se deduciría, que la DF es otra tangente común á las circunferencias dadas.

Si en vez de considerar un radio igual á la diferencia de los radios de ambas circunferencias, se tomase otro que fuera igual á su suma, es fácil darse cuenta, por una construcción muy semejante á la anterior y que se pone de manifiesto en la figura, de que se tendrían además las tangentes GI y JH.

El problema, en el caso general que se acaba de exponer, admite cuatro soluciones, ó sean dos tangentes *exteriores* CE y DF, y otras dos *interiores* que son las GI y JH.

Repitiendo las construcciones del caso general, se hace patente:

1.° Que cuando las circunferencias son tangentes exteriormente, se obtienen dos tangentes exteriores y una interior.

2.° Que en el supuesto de que las dos circunferencias sean secantes, resultan únicamente dos tangentes exteriores.

3.° Que si las circunferencias son tangentes interiormente, se tiene como única solución una tangente exterior.

4.° Que siempre que una de las dos circunferencias sea interior á la otra, el problema será imposible.

Describir sobre una recta que se conoce, un arco capaz de un ángulo dado, ó lo que es lo mismo, *un arco tal, que todos los ángulos inscriptos en él y cuyos lados pasen por los extremos de la cuerda, sean iguales á un ángulo conocido.* Fig. 117.

En uno de los extremos A de la recta dada AB, fórmese un ángulo igual al propuesto H; trácese por el punto A una perpendicular AD á la AC, y por el punto medio D de la AB la perpendicular EF á la AB: describiendo una circunferencia, haciendo centro en el punto O en que se cortan estas perpendiculares, con un radio igual á AO, resultará que el arco AGB será el pedido, en atención á que todos los ángulos inscriptos en dicho arco son iguales al BAC, y por lo tanto, al ángulo dado H.

178. División de la circunferencia en partes iguales.—*Inscribir un cuadrado en una circunferencia dada.* Fig. 118.

Trácense dos diámetros AB y CD, que se corten perpendicularmente, los cuales dividirán á la circunferencia propuesta en cuatro arcos AB, BC, CD y AD (**127**), y por lo tanto serán también iguales las cuerdas, que unen los extremos de cada uno de aquéllos.

Nota.—Dividiendo en dos partes iguales cada uno de los arcos subtendidos por los lados del cuadrado inscripto (**136**, Corolario), se tendría el octógono regular, así como continuando este procedimiento, podría inscribirse todo polígono regular, cuyo número de lados fuera igual al producto de 4, por una potencia entera de 2.

FIG. 119. **179.** *Inscribir un exágono regular en una circunferencia dada.*

Se llevaría el radio seis veces sobre la circunferencia propuesta y se unirían cada dos puntos consecutivos por medio de rectas, con cuyo motivo aparecería formado el exágono regular pedido.

En efecto, siendo la cuerda AB igual al radio, el triángulo ABO será equilátero, y por lo tanto, llamando R al ángulo recto, el valor del AOB será $\frac{2}{3}R = 60^o$, luego el arco ADB correspondiente valdrá la sexta parte de la circunferencia. Según esto, *el lado del exágono regular inscripto en una circunferencia, es igual al radio.*

180. *Inscribir un triángulo equilátero en una circunferencia dada.*

Llévese dos veces el radio sobre la circunferencia y trácese la cuerda correspondiente á este arco, la cual deberá ser igual al lado del triángulo pedido, en atención á que es la cuerda del arco de 120°.

Según esto, ya se podrá inscribir en una circunferencia todo polígono regular, en que el número de lados sea el producto de 3 por una potencia entera de 2.

181. *Inscribir un polígono regular, de cualquier número de lados, en una circunferencia conocida.*

Si bien es cierto que existen procedimientos gráficos para que, sin salirse de la parte elemental de las Matemáticas, se construyan polígonos regulares de 10 y de 15 lados, y la Geometría superior proporciona la manera de trazar directamente los de 13 y 17 lados; es preferible en la práctica, fuera de los casos que se acaban de resolver (177-178-179), que la división de la circunferencia en partes iguales se efectúe por medio de tanteos.

Sin embargo, con el fin de disminuir éstos, se suele utilizar el procedimiento de Rinaldi, el cual consiste en trazar un diámetro AB, que se divide en tantas partes iguales como número de lados haya de tener el polígono pedido; sobre este diámetro se construirá un triángulo equilátero, se une luego el vértice C, que se acaba de determinar, con el punto D, correspondiente á la segunda división señalada en el mencionado diámetro: prolongando la CD hasta que encuentre á la circunferencia, se tendrá la recta AE, que será el lado del polígono que se buscaba. En la figura se trata de determinar el lado del eptágono regular. Fig. 120.

182. Cuadratura del círculo. — Para determinar gráficamente el lado del cuadrado, cuya área equivalga á la del círculo que se proponga, habría que hallar una media proporcional entre la semicircunferencia de aquél y el radio, según manifiesta la igualdad $l^2 = \frac{1}{2}CR$, en la que el primer miembro representa el área del cuadrado (102, Corolario), y el segundo la del círculo dado (143). Como que ninguno de los procedimientos conocidos para rectificar la circunferencia, arroja resultados exactos, de aquí que el cuadrado obtenido, aunque muy aproximado al que se pide, no le será en rigor equivalente.

SECCIÓN SEGUNDA.

Problemas numéricos.

183. Los problemas numéricos se dividen en *generales* y *particulares*, según sea que los datos se hallen representados por letras ó por las cifras que expresan sus respectivos valores.

Obsérvese que todo teorema que exprese relaciones entre dos ó más magnitudes, puede dar origen á varios problemas generales numéricos. Así, por ejemplo, el teorema del número 102 pudiera dar lugar á varios problemas: *Hallar el área de un paralelogramo, conociendo su base y altura;* y también podría resolverse el siguiente: *Conociendo el área de un paralelogramo y su base, determinar la altura,* ó dicho esto en otros términos: *Conocidas el área y la altura de un paralelogramo, hallar su base.* Análogas modificaciones pueden hacerse en los enunciados de los teoremas **103**, **104**, **105**, **106**, etc.

184. Recíprocamente, todo problema general numérico se presta á ser enunciado en forma de teorema.

Fig. 118. Ejemplo 1.º *Calcular el lado del cuadrado inscripto en una circunferencia, conocido que sea el radio de ésta.*

Siendo AB el lado del cuadrado cuya magnitud se trata de averiguar, resultará que, en el triángulo rectángulo AOB, se tendrá $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$.

Llamando x al lado AB del cuadrado, y R al radio de la circunferencia circunscrita, la igualdad anterior estaría expresada por $x^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ de donde $x = R\sqrt{2}$.

Cuyo resultado hace patente el teorema que dice: *En todo cuadrado inscripto en una circunferencia, se verifica que el valor de su lado es igual al radio multiplicado por* $\sqrt{2}$.

EJEMPLO 2.º—*Averiguar cuál es el valor del lado del triángulo equilátero inscripto en una circunferencia, cuyo radio sea conocido.* FIG. 121.

Sea AB el lado del triángulo equilátero, cuyo valor se quiere deducir: si se traza desde uno de sus extremos B el diámetro BC y desde el otro la cuerda AC, se tendrá en el triángulo rectángulo ABC, que $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$, pero el arco $AC = BAC - AB = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$, luego $AC = R$ y por lo tanto, representando á AB con la letra x, se tendrá que $x^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$, de donde $x = R\sqrt{3}$, lo cual demuestra que *el lado del triángulo equilátero inscripto en una circunferencia equivale al producto del radio de ésta por* $\sqrt{3}$.

OBSERVACIÓN.—No siempre es fácil darse cuenta en las construcciones gráficas, de si dos longitudes son ó no inconmensurables, en vista de las imperfecciones que son inherentes á los instrumentos matemáticos con que se ejecutan, mas cuando la relación que liga á aquellas longitudes ha sido deducida por medio del cálculo, hay ocasiones en que queda rigurosamente demostrada su inconmensurabilidad: tal sucede en los dos últimos problemas, en los cuales se hace patente, que tanto el lado del cuadrado, como el del triángulo equilátero inscriptos en una circunferencia, son magnitudes inconmensurables con el radio de ésta.

185. Los problemas particulares numéricos se resuelven, despejando la incógnita en la ecuación del problema general, que comprende al propuesto; en la fórmula que con tal motivo resulta, se sustituye en vez de cada una de las letras que aparecen en ella, su valor conocido por el enunciado de la cuestión, luego se efectúan las operaciones numéricas que en la misma están indicadas y se tendrá, como consecuencia de los resultados obtenidos, el valor de la incógnita del problema.

Ejemplo 1.º—*Hallar la longitud de un arco de 41º, en una circunferencia que tiene 39 metros de radio.*

Sustituyendo en la fórmula $l = \frac{\pi R n}{180}$ conocida (**141**) los valores de R y n, se tendrá

$$l = \frac{3{,}1416 \times 39 \times 41}{180} = 27{,}91 \text{ metros.}$$

Ejemplo 2.º—*Averiguar el radio de un sector circular, que tenga por área 816 metros cuadrados y por arco correspondiente 47º.*

Se dedujo (**146**) la fórmula $S = \pi R^2 \frac{n}{360}$, en donde despejando R y sustituyendo los valores que poseen S, π y n, resulta $R = \sqrt{\frac{816 \times 360}{3{,}1416 \times 47}} = 44{,}6$ metros.

Ejemplo 3.º—*Deducir el valor del radio de un círculo equivalente á un cuadrado, que tenga 29 metros cuadrados de extensión.*

Debiendo ser equivalentes las dos áreas á que se hace referencia, se tendrá la igualdad $l^2 = \pi R^2$ ..... (1), en la que l representa el lado del cuadrado que se conoce y R el radio desconocido del círculo equivalente. Despejando R en aquella y sustituyendo en vez de π y de l sus valores particulares, resultará que $R = \sqrt{\frac{29}{3{,}1416}} = 3{,}04$ metros.

Obsérvese que este problema es el inverso del que se resuelve en la cuadratura del círculo, y la igualdad (1) que se emplea en uno y otro caso, manifiesta que aun cuando los resultados que se obtienen por medio del cálculo, no sean rigurosamente exactos, siempre se pueden aproximar á los verdaderos, tanto como se desee, en vista de que se conoce el valor de π (*) hasta con 155 cifras decimales.

Dado el valor numérico l *de un lado de un polígono cualquiera, y la relación* $\frac{m}{n}$ *en que su área se encuentra con la de otro que le sea semejante, averiguar el valor del lado de éste, homólogo con* l.

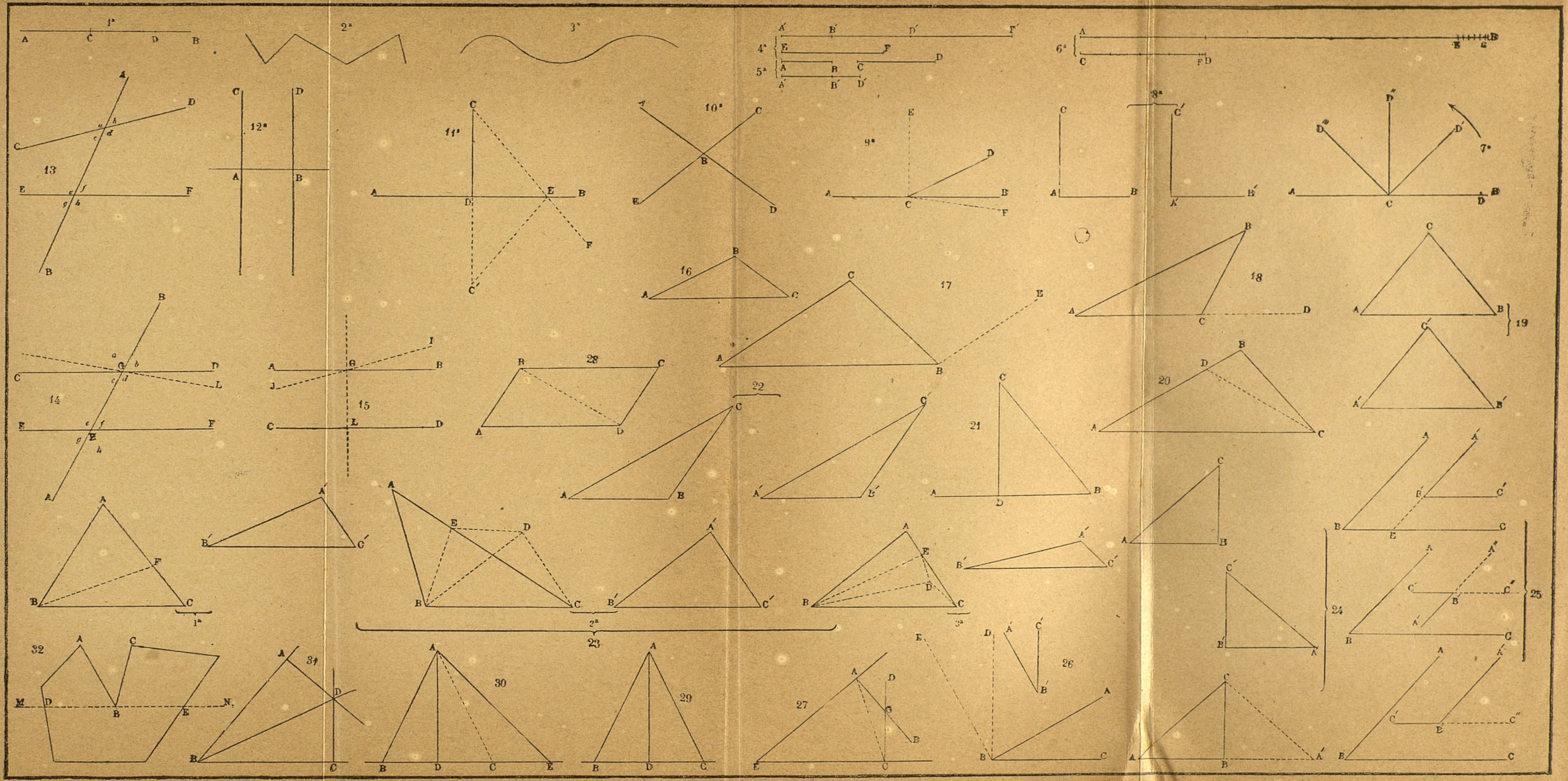
Llamando P y X á las áreas de ambos polígonos semejantes, se verificará, según la hipótesis, que $\frac{P}{X}=\frac{m}{n}$. Si ahora se designa por x el valor numérico del lado que se desconoce, se tendrá $\frac{P}{X}=\frac{l^2}{x^2}$. De la comparación de ambas igualdades, se obtiene $\frac{m}{n}=\frac{l^2}{x^2}$, por lo tanto, $x=l\sqrt{\frac{n}{m}}$.

(*) En la práctica, sólo en muy contados casos, se hace uso de un valor de π, que tenga más de quince cifras decimales.

$\pi=3{,}14159\ 26535\ 89793\ .....$

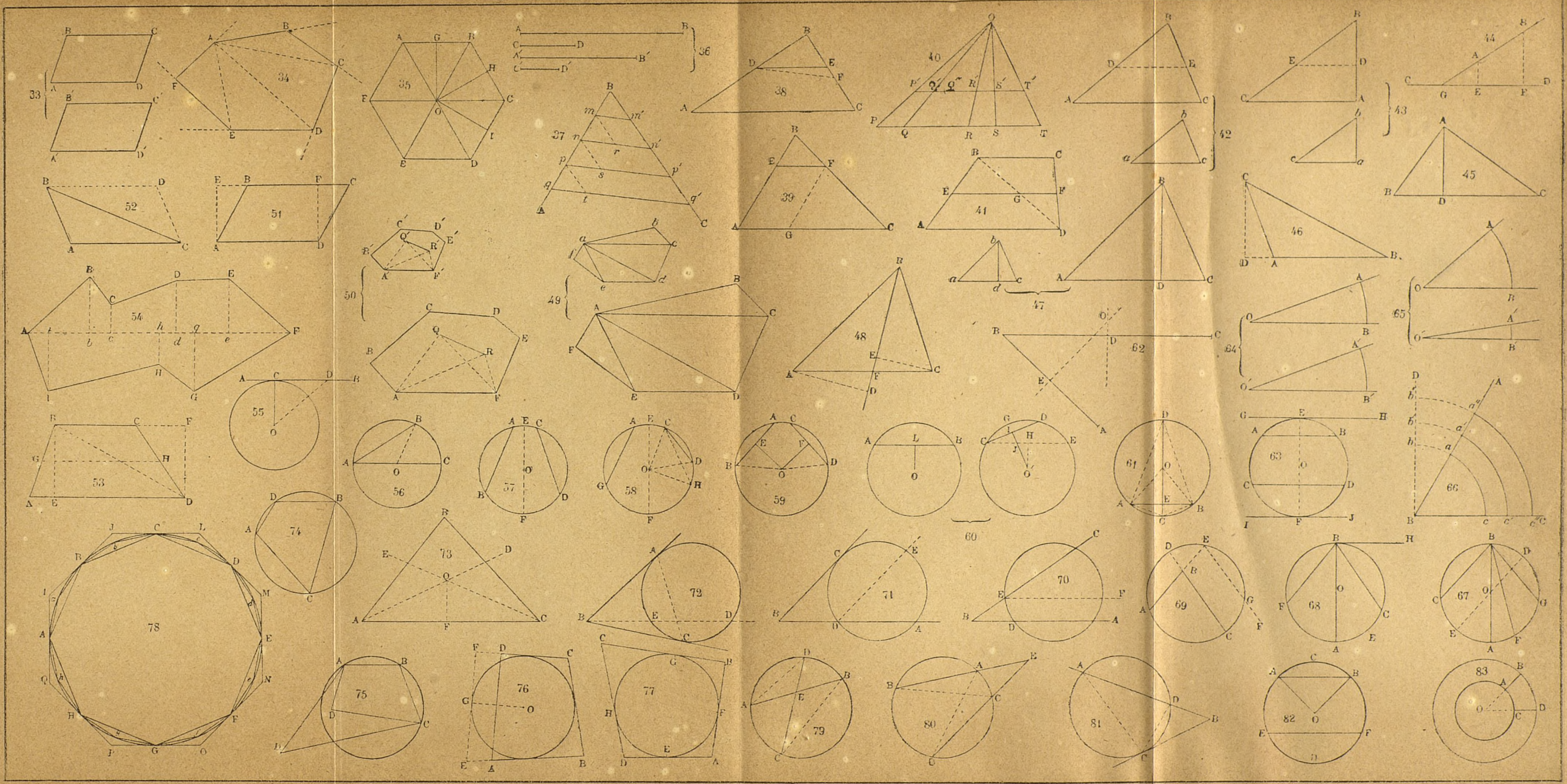
Para efectuar cálculos en que interviene este número, conviene que además se conozcan los siguientes: $\sqrt{\pi}=1{,}7724538\ .....$, $\log\pi=0{,}49714\ 98726\ 94134\ .....$, $\frac{1}{\pi}=0{,}31830\ 98861\ 83791\ .....$

LAMINA 1.ª

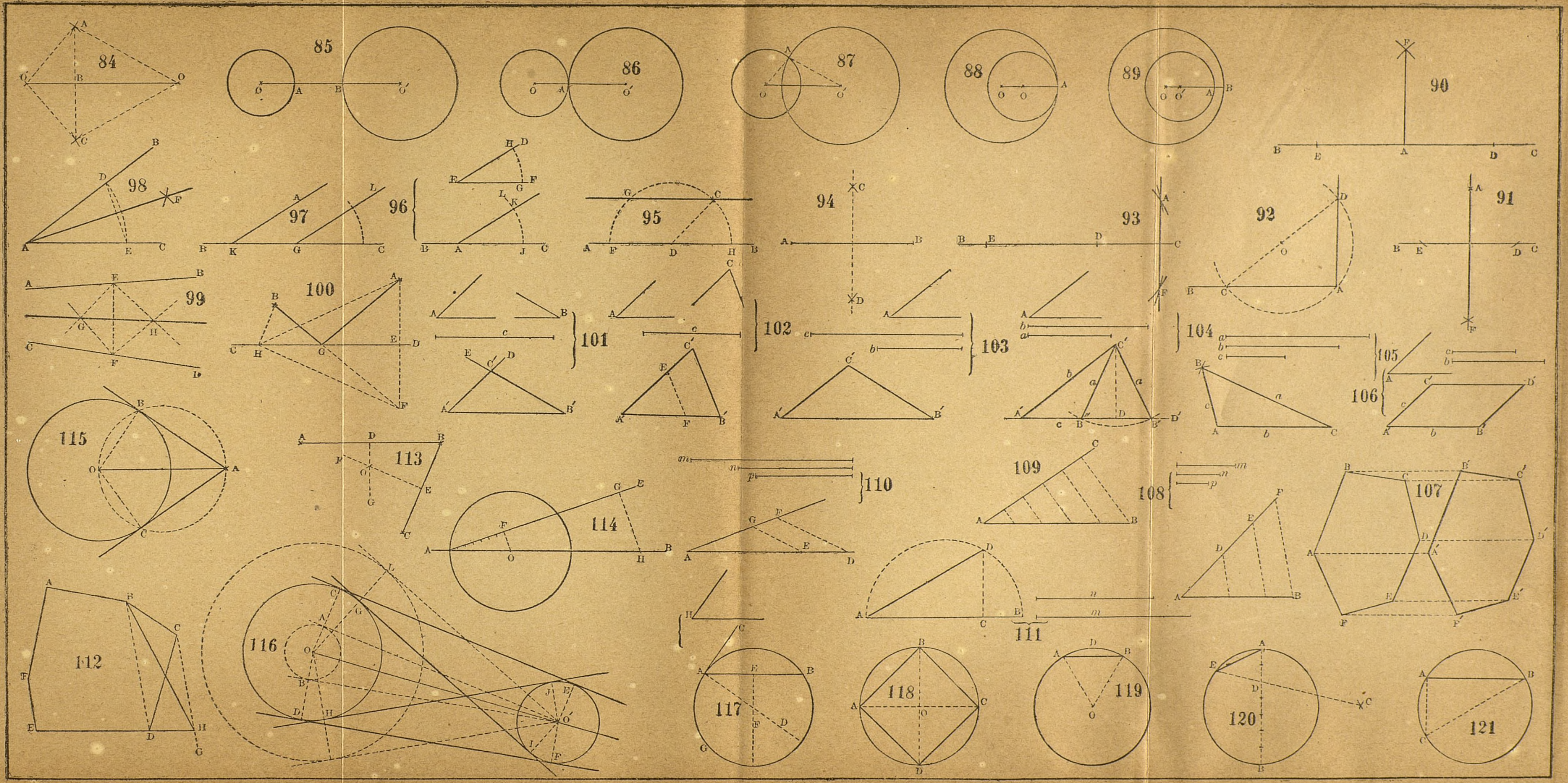


1ª
2ª
3ª
4ª
5ª
6ª
7ª
8ª
9ª
10ª
11ª
12ª
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

FIGURA 2.ª



LAMINA 3.ª


84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121

SEGUNDA PARTE.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO Ó DE TRES DIMENSIONES.

LIBRO I.

RECTAS Y PLANOS.

SECCIÓN PRIMERA.

COMBINACIONES DE RECTAS Y PLANOS.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

186. Esta parte de la Geometría se ocupa del conocimiento de las figuras, que se derivan de las combinaciones formadas por las rectas y los planos, así como de las superficies engendradas por la línea recta y la circunferencia, y finalmente, de aquellos cuerpos que están limitados por las antedichas superficies.

Se vió en la primera parte de este Tratado, que la representación de las figuras planas no ofrecía dificultad alguna, supuesto que todos los elementos geométricos en ellas considerados, se encontraban en un mismo plano; pero cuando esto no sucede, hay necesidad de que, en armonía con lo que se practica en el dibujo natural, las líneas, superficies y cuerpos, se procure hacerlas aparecer en el plano del dibujo, tal cual los presenta la naturaleza ante el observador, y por lo tanto el trazado hecho no permite que se puedan apreciar la verdadera magnitud, ni la forma exacta de las diversas partes de los objetos representados.

Así puede ser tal la inclinación de una recta respecto del plano del dibujo, que la magnitud de ésta aparezca tan pequeña, como se desee; por igual motivo un ángulo recto puede presentarse á los ojos del observador como si fuera agudo, y éste á su vez puede achicarse cuanto se quiera.

187. Los cuerpos y las superficies se suponen, en esta parte de las Matemáticas, como transparentes y penetrables: los primeros se representan por las intersecciones de las diferentes superficies planas ó curvas que los limitan, y también por su *contorno aparente* ó silueta, cuando el cuerpo posee una superficie de forma continua. Con el fin de poner de manifiesto la posición relativa de las líneas que determinan la figura, y dar cabal idea de la forma de ésta, se ha convenido en representar con trazos seguidos las líneas que están á la vista del observador, y por medio de una sucesión de puntos equidistantes, las que se suponen ocultas.

De aquí se infiere, que toda línea que forme parte del contorno aparente de un cuerpo ó conjunto de éstos, será siempre vista, y por lo tanto su representación propia estará formada por un trazo seguido y cerrado.

CAPÍTULO II.

Determinación del plano.

188. El plano en general se considera indefinido, pero cuando se trata de representarlo, hay que suponerle limitado, á fin de que pueda formarse idea de su posición, con respecto de las líneas, superficies y cuerpos que componen la figura que se considera. El paralelogramo es la forma ordinaria adoptada para representar los bordes del plano, y, cuando esto sucede, se suele designar por medio de las letras que corresponden á dos vértices opuestos.

189. *Una recta AB y un punto C, situado fuera de ella, determinan un plano,* lo cual es tanto como decir que *por un punto y una recta no se puede hacer pasar sino un solo plano.* Fig. 122.

En efecto, es evidente que por la recta AB siempre podrá hacerse pasar un plano (5); si éste no contuviese al punto C, se haría que lo contuviera, sin más que hacer girar el plano alrededor de la mencionada recta, hasta que en alguna de las infinitas posiciones que toma, con motivo de este movimiento, toque al antedicho punto C, lo cual hace ver que por la AB y el punto C pasa por lo menos un plano.

Para demostrar ahora que este plano es único, supóngase que pasaran dos planos diferentes por la recta AB y el punto C, y se tendría que en ambos planos estaría situada la recta CD que une el punto C con otro cualquiera D de la AB; de modo, que si se toma el punto P en uno de los dos planos, y desde él se traza la recta PF que corte á las AB y CD, los dos puntos de intersección E y F que con tal motivo resultan, tendrán que pertenecer á los dos planos, y por lo tanto (5) toda la recta PF también estará contenida en ellos. Lo que acaba de probarse con respecto del punto P, pudiera decirse de cualquier otro que se considere en uno de los dos planos, de donde se infiere que éstos tienen todos sus puntos comunes y en su consecuencia no forman sino un solo plano.

Este teorema sirve de fundamento para la demostración de las siguientes proposiciones;

1.ª *Dos rectas paralelas determinan un plano.*

En efecto, se sabe (24) que dos rectas paralelas están siempre contenidas en un plano, y como no existe sino un plano, que pueda contener á una de las dos paralelas que se consideran y un punto de la otra, ambos planos coincidirán.

FIG. 123. 2.ª *Dos rectas AB y CD que se cortan, fijan la posición de un plano.*

En efecto, el plano que contenga á la recta AB y á un punto C de la CD, tendrá que contener también á la CD, en consideración á que ésta posee dos puntos C y E en aquel plano.

3.ª *Tres puntos A, B y C, no situados en línea recta, determinan un plano.*

Uniendo los puntos A y B por medio de una recta, se tendrá que el plano determinado por la recta AB y el punto C, contiene á los puntos que se consideran recíprocamente.

COROLARIO.—*La intersección de dos planos es una recta.* De no ser una recta se podrían considerar en la intersección tres puntos, que no estuvieran en línea recta, y como por ellos tendrían que pasar ambos planos, éstos coincidirían.

La intersección de una recta y un plano es un punto (*). Supuesto que una recta y un plano no pueden tener más que un solo punto común, en consideración á que de tener siquiera dos, toda la recta estaría situada en el plano (5).

FIG. 124. *Un plano se puede suponer engendrado por una recta, que se mueve pasando constantemente por un punto fijo A, y apoyándose en una recta BC de posición invariable.*

(*) El punto de intersección de una recta con un plano recibe el nombre de *pie* ó *traza* de la recta.

En efecto, la recta AB, en cada una de sus diversas posiciones AD, AE, AC, ..., tiene dos puntos contenidos en el plano que se halla determinado por la recta BC y el punto A.

Un plano se puede considerar engendrado por una recta AB, que se mueve paralelamente á sí misma, y que constantemente se apoya en una recta fija MN. FIG. 125.

En efecto, la recta AB, con cada una de las diversas posiciones CD, EF, GH, ..., que toma en su movimiento, determina una sucesión de planos, que coinciden con el que pasa por la recta AB y la MN, supuesto que todos ellos tienen la recta AB común, así como también el punto en donde la MN es cortada por cada una de las posiciones de las CD, EF, GH, ...

CAPÍTULO III.

Posiciones de dos rectas en el espacio.

190. Es evidente que á una recta situada en el espacio se le puede trazar, por lo menos, una perpendicular, una paralela y un número indefinido de oblicuas, en atención á que haciendo pasar un plano por aquella recta, siempre se le podrá trazar, según lo dicho en la Geometría plana, una perpendicular, una paralela y diversas oblicuas.

191. Si ahora se considera un punto en la recta, es evidente que no podrá trazarse á ésta ninguna paralela desde aquel punto, circunstancia que no ocurre respecto de la perpendicular, pues pudiendo pasar por la recta infinitos planos, y siendo factible trazar en cada uno de éstos la perpendicular á la recta, desde el punto que en ella se considera, tendrá que ser también infinito el número de perpendiculares, que se podrán tirar á la recta en un mismo punto. El número de oblicuas será infinito, pues en cada plano se pueden trazar tantas cuantas se quieran.

192. En el caso de que el punto se hallare situado fuera de la recta, como por ésta y aquél no puede pasar más que un plano (189), únicamente podrá trazarse en éste, *una sola paralela* y una sola perpendicular á la recta, pero un número infinito de oblicuas.

FIG. 126. **193.** Si por el punto A, situado fuera de la recta BC, se considera otra, que atraviese el plano determinado por estos dos elementos geométricos, se ve la imposibilidad de que exista plano alguno, que contenga á ambas rectas, pues si tal sucediese, este último plano, por contener también al punto A y á la recta BC, coincidiría con el primero que, se supuso, no contenía á la DE.

Cuando, como aquí sucede, no pueda haber plano alguno que contenga á dos rectas, se dice que éstas se *cruzan*.

Como las rectas BC y DE no pueden encontrarse, ni ser paralelas, siempre que haya necesidad de hacer patente el paralelismo de dos rectas en la Geometría del espacio, además de demóstrar que éstas no se encuentran, aun cuando se las prolongue indefinidamente, es indispensable probar que se hallan contenidas en un mismo plano.

194. De las consideraciones que acaban de exponerse se deduce, que *por un punto exterior á una recta sólo puede pasar en el espacio otra, que sea paralela á ella,* supuesto que toda paralela á la recta propuesta, tiene que hallarse contenida en el plano que determinan la recta y el punto que se consideran.

CAPÍTULO IV.

Posiciones de la recta con relación al plano.

ARTÍCULO 1.º

Rectas paralelas.

195. *Si dos rectas son paralelas, todo plano que corte á una de ellas, cortará también á la otra.* Fig. 127.

Sean las paralelas AB y CD, y MN el plano que encuentra á esta última recta en el punto C. El plano ABDC determinado por las citadas paralelas, tiene de común con el MN el punto C; luego éste será un punto de la intersección de ambos planos; pero como quiera que la intersección de éstos ha de ser una recta (189, Corolario), ésta tendrá que pasar por C; mas como esta recta de intersección AC se halla situada en el plano de las paralelas AB y CD, cortando á la CD encontrará á la AB (27, Corolario 2.º) en un punto tal como A, el cual pertenecerá también al plano MN; luego este plano corta á la AB en el punto A.

196. *Dos rectas paralelas á otra en el espacio, son paralelas entre sí.* Fig. 128.

Sea la recta AB paralela á la MN y ésta á la CD: se trata de probar que la AB y la CD son paralelas entre sí. Desde luego la AB y la CD se hallan en un plano, pues de lo contrario, el plano determinado por la AB y un punto E de la CD, cortando á esta recta en dicho punto, tendrá que cortar también á su paralela MN y esto es absurdo, porque las rectas AB y MN están, por hipótesis, en un plano, luego también tendrán que estarlo las AB y CD. Aun cuando estas rectas están en un plano, no pueden encontrarse; pues si tal sucediera, resultaría que desde el punto de interseccción se tendrían dos paralelas á la MN, lo cual es imposible (**194**). Luego AB y CD serán paralelas.

197. *Dos ángulos que estando situados en planos diferentes, tienen sus lados paralelos, son iguales ó suplementarios.*

FIG. 129.

En efecto, sean ABC y DEF dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Si se toman partes iguales sobre los lados, de modo que se tenga AB = DE y BC = EF, y se trazan las rectas BE, AD, CF, AC y DF, siendo en el cuadrilátero ABED las rectas AB y ED iguales y paralelas, los otros dos lados BE y AD serán también iguales y paralelos (**55**, RECÍPROCO); por la misma razón en el cuadrilátero BCFE, será la BE igual y paralela á la CF, y por lo tanto, AD y CF también serán iguales y paralelas; luego en el cuadrilátero ACFD se verificará, por idéntica consideración, que AC = DF, de donde se deduce, que los triángulos ABC y DEF serán iguales (**46**), y en su consecuencia el ángulo ABC = DEF.

Si los ángulos que se consideran tuviesen sus lados dirigidos en sentido contrario, también serían iguales; y cuando tuvieran dos lados dirigidos en un mismo sentido y los otros dos en sentido contrario, serían suplementarios. Estas proposiciones se demuestran fácilmente, sin más que prolongar los lados AB y BC de uno de los ángulos propuestos y proceder en los razonamientos á la manera que se hizo en la Geometría plana (**48**).

198. Se entiende por *ángulo de dos rectas que se cru-*

zan, el formado en un punto cualquiera del espacio, trazando por él las respectivas paralelas á las dos rectas dadas. En el caso particular de que el mencionado punto esté situado en una de estas rectas, bastará trazar por él una paralela á la otra recta.

De aquí se infiere, que *cuando dos rectas sean perpendiculares entre sí, toda paralela á una de ellas será perpendicular á la otra.*

ARTÍCULO 2.°

Rectas paralelas á un plano.

199. *Una recta* se dice que *es paralela á un plano, cuando por más que aquélla y éste se prolonguen, nunca se encuentran.*

El teorema que prueba la existencia de las rectas paralelas á un plano dice como sigue:

200. *Toda recta AB, situada fuera de un plano MN, que sea paralela á otra CD contenida en él, será paralela al citado plano.* FIG. 130.

En efecto, si la recta AB no fuese paralela al plano MN, lo encontraría, y por cortar este plano á la AB tendría que cortar también á su paralela CD (195), lo cual es absurdo, dado que la CD, por hipótesis, se halla contenida en el plano MN.

COROLARIO 1.º—*Una recta situada en un plano y otra paralela á éste, serán paralelas entre sí, cuando ambas estén en un mismo plano;* supuesto que no pueden encontrarse y se hallan situadas en un mismo plano.

COROLARIO 2.º—*Si dos rectas AB y CD son paralelas, todo plano MN que pase por una de ellas, tal como la CD, ó le sea paralela, tendrá que ser paralela á la otra AB ó* *contenerla.* Pues si el plano MN cortase á la AB, cortaría también á su paralela CD, lo cual es contrario á la hipótesis; por lo tanto, el plano MN no pudiendo cortar á la AB, ó la contendría ó sería paralela á ella.

Corolario 3.º—*Por un punto cualquiera del espacio, pueden pasar infinitos planos paralelos á una recta dada,* supuesto que por un punto situado fuera de una recta, siempre puede trazarse otra, que le sea paralela, y conteniendo á ésta, es factible considerar un número infinito de planos.

Corolario 4.º—*Si una recta AB es paralela á un plano MN, todo plano que pase por aquélla, cortará á éste según una paralela á la AB;* pues siendo CD la intersección del plano MN con el ABDC, resulta que en este plano se hallan las dos rectas AB y CD, las cuales no pueden encontrarse, y por lo tanto tendrán que ser paralelas.

201. *Si una recta AB es paralela á un plano MN, otra cualquier recta CD, que se trace por un punto C de este plano, paralelamente á la AB, se hallará contenida en el plano.*

En efecto, la recta CD no puede ser paralela al plano MN, por ser el punto C común á ambos; tampoco CD puede ser cortada por este plano, pues de ser así resultaría, que el MN tendría que encontrar á la AB (195); luego la recta CD estaría situada en el plano.

Corolario 1.º—*Si dos planos paralelos á una misma recta se cortan, la intersección de ambos planos será paralela á aquella recta.*

Pues si por un punto de la intersección de los dos planos que se consideran, se traza una paralela á la precitada recta, deberá encontrarse situada en ambos planos, y por lo tanto se confundirá con su intersección.

202. *Las porciones AC y BD de paralelas compren-*

didas entre una recta AB y un plano MN, al cual es paralela, son iguales.

En el plano que contiene á la AB y á las AC y BD, se tendría el cuadrilátero que sería un paralelogramo, y por lo tanto, AC = BD.

ARTÍCULO 3.°

Perpendiculares á un plano.

203. Se dice que una recta es *perpendicular á un plano,* ó que un plano es *perpendicular á una recta,* cuando ésta es perpendicular á las infinitas rectas, que se pueden considerar situadas en el plano.

Si una recta atraviesa un plano, sin ser perpendicular á él, se dice que es *oblicua* con respecto del plano.

La existencia de rectas y planos perpendiculares, se pone de manifiesto con la demostración del siguiente teorema.

204. *Por un punto situado fuera de un plano puede trazarse una recta, que sea perpendicular á éste y no puede trazarse más que una.* FIG. 131.

Sea A el punto exterior al plano MN. Las distancias que median entre el punto A y los diferentes puntos del MN son, en general, desiguales; pues si se traza una recta BC cualquiera en ese plano, y desde el A se dirige una perpendicular AD y diferentes oblicuas á ella, resultará que las distancias AD, AE, AF, etc., etc., serán desiguales (58).

De todas las distancias entre el punto A y los infinitos del plano, hay una menor que todas las demás, en atención á que de suponer hubiera varias distancias AG, AH, ..., que siendo iguales, fueran menores que todas las demás, resultaría que al unir los pies G y H de aquellas distancias, la perpendicular AI trazada desde el punto A á la recta GH, sería menor que éstas; lo cual prueba no existe sino una sola recta menor que las demás.

Sea esta recta la AJ: si desde su pie se traza una paralela LK á una recta cualquiera BC del plano, se tendrá que, por ser la AJ la menor distancia del punto A al plano, será también la menor entre A y la recta LK; por consiguiente (38, Recíproco), será perpendicular á esta recta y por tanto (198) á su paralela BC. Siendo así que este razonamiento puede aplicarse igualmente á cualquiera otra recta situada en el plano, queda probado que siempre existe, por lo menos, una recta que sea perpendicular á todas las del plano y en su consecuencia á éste.

Se hace patente que sólo puede trazarse esta perpendicular AJ, sin más que considerar que cualquiera otra recta AO, trazada desde A al plano MN, sería oblicua á éste, en atención á que en el triángulo AOJ como el ángulo en J es recto, el AOJ tendría que ser agudo.

Corolario.—*La recta menor que se puede trazar desde un punto á un plano, es la perpendicular á éste y recíprocamente.*

205. Se ha convenido en llamar *distancia* de un punto á un plano, á la perpendicular trazada desde dicho punto al plano.

206. *Por un punto cualquiera R situado en un plano, siempre puede trazarse una perpendicular á este plano y*
Fig. 132. *solamente una.*

En efecto, si se hace coincidir el plano MN de la figura anterior con el PQ de la figura 132, de modo que el punto J del primero coincida con el R del segundo, la recta AJ perpendicular al MN lo será también al PQ, que se supone confundido con el MN.

Habiendo demostrado que la RS es perpendicular al plano PQ, otra recta cualquiera, tal como la RT, que pase por el punto R, no podrá serlo, pues el plano que determinan RS y ST tendrá que cortar al PQ, según una recta XZ que pasará por el punto R, y siendo RS perpendicular á XZ, la RT será oblicua á ella (19) y por lo tanto al plano PQ.

Corolario.—*La posición de una recta en el espacio queda determinada por uno de sus puntos, y la condición de ser perpendicular á un plano.*

207. *Por un punto A dado en una recta AB, puede pasar un plano MN perpendicular á la recta, y sólo puede pasar uno.* Fig. 133.

En efecto, si por el punto D del plano PQ, se levanta la recta CD que le sea perpendicular, y se hace que coincidan las dos rectas AB y CD de modo que se confundan los puntos A y D en uno solo, resultará que el plano PQ perpendicular á la CD y que pasa por D, será también perpendicular á la AB, y tomaría una posición tal como MN. Si se supusiera otro cualquier plano RS, que pasando por A fuese también perpendicular á la AB, resultaría que al considerar por esta recta un plano cualquiera, éste cortaría á los MN y RS respectivamente, según las rectas AE y AF; mas estando las tres rectas AE, AF y AB en un mismo plano, y habiéndose supuesto que la AB era perpendicular á los planos MN y RS, tendría que serlo también á las rectas AE y AF, lo cual es absurdo (19).

Corolario 1.º—*Todas las perpendiculares levantadas á una recta CD en uno de sus puntos D están en el plano, que pasando por este punto, es perpendicular á la mencionada recta.*

Siendo la recta CD perpendicular al plano PQ, si hubiera una recta DG que, á pesar de ser perpendicular á la CD, no estuviese contenida en el plano PQ, se tendría entonces, que el plano determinado por las rectas CD y DG cortaría el PQ según la HI, y resultaría, con tal motivo, el absurdo de haber en un punto D de una recta CD, y en un mismo plano, dos perpendiculares DG y DI á ella.

Corolario 2.º—*Si una recta es perpendicular á otras dos, que pasan por su pie en un plano, será también perpendicular á este plano.*

Supuesto que el plano que contiene á las infinitas perpendiculares, que pasan por el pie de la recta propuesta, y el plano determinado por las dos rectas que se cortan, son uno mismo, en atención á que uno y otro tienen que pasar por estas dos últimas rectas.

Á esta proposición pudiera dársele mayor alcance, en virtud de lo que se tiene dicho (198), enunciándola en la siguiente forma:

Si una recta es perpendicular á otras dos, que no sean paralelas, será perpendicular á toda recta situada en un plano determinado por dos paralelas á las rectas dadas, trazadas por un mismo punto.

208. Por un punto situado fuera de una recta, no se puede levantar más que un solo plano perpendicular
Fig. 134. á ésta.

Sea la recta AB y C el punto. En el plano determinado por ambos elementos geométricos, se trazará la perpendicular CD á la AB; en otro cualquier plano que pase por esta recta, podrá considerarse otra perpendicular DE á la AB en el punto D, y el plano determinado por estas dos perpendiculares pasará por el punto C, y será perpendicular á la recta AB. (207, Corolario 2.º).

Otro plano PQ cualquiera que pase por C no puede ser perpendicular á la AB, pues si lo fuera, al unir por medio de una recta el punto C con el punto E de intersección de AB con el plano PQ, esta recta CE sería perpendicular á la AB; luego desde el punto C se tendrían dos perpendiculares CD y CE á la AB, lo cual es inadmisible (23). Fig. 135.

Corolario.—*La posición de un plano en el espacio queda determinada, cuando se conozca uno de sus puntos y la condición de que sea perpendicular á una recta dada.*

ARTÍCULO 4.°

Perpendiculares y oblicuas á un plano.

209. *Si una recta AB es perpendicular á un plano MN, toda recta CD, paralela á ella, será también perpendicular á dicho plano.*

En efecto, por ser AB perpendicular al plano MN, lo será á todas las rectas situadas en él, y éstas por lo tanto á la AB, luego lo serán también á su paralela CD (198), y en su consecuencia, ésta á su vez deberá ser perpendicular al plano MN (203). Fig. 136.

Recíproco.—*Dos rectas perpendiculares á un mismo plano son paralelas.*

En efecto, siendo AB y CD perpendiculares al plano MN, si por el pie C de la CD se considera una paralela á la AB, ésta sería perpendicular al plano MN, y por lo tanto coincidiría con la CD (206).

Según esto, si se tiene una recta paralela á un plano, y desde dos ó más puntos de la recta se trazan las respectivas perpendiculares al plano, éstas, por ser paralelas entre sí, tendrán igual magnitud (202). Cualquiera de las perpendiculares trazadas desde un punto de una recta á todo plano paralelo á ella, determina lo que se entiende por *distancia* entre la recta y el plano. Por esto se explica que se diga que *los diferentes puntos de una recta equidistan de todo plano paralelo á ella.*

210. *Si una recta AB es perpendicular á un plano MN, toda paralela CD á este plano, será perpendicular á*
Fig. 137. *la recta AB.*

Supuesto que si por el punto A, traza de la AB, se considera una paralela AE á la CD, dicha paralela estará contenida en el plano MN (201) y por lo tanto, siendo la AB perpendicular á la AE, lo será también á su paralela CD.

Recíproco.—*Si una recta AB es perpendicular á un plano MN, toda perpendicular CD á ella será paralela al plano ó estará situada en él.*

En efecto, si por el punto A del plano MN, se traza una recta paralela AE á la CD, esta paralela siendo perpendicular á la AB, deberá estar contenida en el plano MN, que, según la hipótesis, pasa por el punto A y es perpendicular á la AB (201). Luego siendo la recta CD paralela á la AE del plano MN, será paralela á éste ó estará situada en él (200).

211. Si desde un punto situado fuera de una recta, se consideran una perpendicular y diferentes oblicuas, se verificará:

1.° *Las oblicuas, cuyos pies se aparten lo mismo del de la perpendicular, son iguales.*

2.° *De dos oblicuas cuyas trazas no equidistan del pie de la perpendicular, la que más se aparte de éste, será la oblicua mayor.*

Estas proposiciones y sus recíprocas se demuestran fácilmente, como se hizo en la Geometría plana con sus análogas (58).

Se llama *proyección* de un punto A sobre un plano, al pie de la perpendicular bajada desde el punto al plano. La mencionada perpendicular recibe el nombre de *recta proyectante,* y el plano en que el punto se proyecta, *plano de proyección.*

Proyección de una línea sobre un plano, es la que une las proyecciones de todos sus puntos sobre el plano.

212. *La proyección de una recta sobre un plano, es un punto ó una recta.*

Si la recta es perpendicular al plano, todas las perpendiculares á éste, que pasen por los diferentes puntos de la recta, se confundirán con ella, y por tanto las proyecciones de todos sus puntos sobre el plano quedarán reducidas al punto de intersección de la recta, suficientemente prolongada, con el plano. En el caso de que la recta AB sea oblicua, con respecto al plano de proyección MN, todas las perpendiculares á este plano, que pasan por los diferentes puntos de la recta, serán paralelas (209, Recíproco), y estarán situadas en el plano determinado por una de ellas y la AB (189); luego los pies de las citadas líneas proyectantes estarán en la intersección de ambos planos, que, como se sabe (189, Corolario) es una línea recta. Fig. 138.

La proyección de una recta sobre un plano se determina, uniendo por medio de una recta las proyecciones de los dos puntos extremos de aquélla.

Plano proyectante de una recta, es el que contiene las perpendiculares al plano de proyección, que pasan por los puntos de la recta ó sea por las líneas proyectantes.

213. *El ángulo agudo que una recta AB, forma con su proyección AC sobre un plano MN, es menor que el que forma con cualquier otra recta AD, que, estando situada en el plano, pasa por su pie A.* Fig. 139.

Tomando AD = AC, y uniendo B con D, se ve que los triángulos ABC y ABD tienen dos lados respectivamente iguales, y como es BC < BD (211), resulta de aquí que BAC < BAD.

Debido sin duda á esta singular propiedad, se ha convenido en que el *ángulo de una recta con un plano* se aprecie, por el que esta recta forma con su proyección sobre el plano.

CAPÍTULO V.

Posiciones relativas de dos planos.

ARTÍCULO 1.°

Ángulos diedros.

214. Haciendo las mismas consideraciones respecto de los planos MN, PQ, PQ′, PQ″, ..., que se hicieron (16) sobre las rectas AB, CD, CD′, CD″, ..., se tendrá que las
Fig. 140. posiciones del plano móvil PQ, al compararlas con las del plano MN, se distinguen unas de otras por la mayor ó menor inclinación que aquél posee respecto de éste.

La separación ó abertura que forman dos planos cuando se cortan, se llama *ángulo diedro:* la recta de intersección de estos dos planos se denomina *arista,* y á su vez los planos reciben el nombre de *caras.*

Un ángulo diedro se designa por medio de cuatro letras, leyendo una de cada cara y las dos de la arista en medio; y con las dos de la arista solamente, cuando no puede confundirse con otro alguno. Así el ángulo formado por los dos planos MN y MR, se leerá RMSN ó NMSR ó también MS. Fig. 141.

Según lo dicho, la magnitud de un ángulo no depende de la mayor ó menor extensión de sus caras, sino de su respectiva inclinación.

Dos ángulos diedros son iguales, cuando superpuestos, de modo que coincidan las aristas y una de sus caras, se confunden las otras dos.

En la única posición del plano PQ′ respecto del MN, que forma dos ángulos diedros NPSQ′ y MPSQ′, iguales, se dice que el PQ′ es *perpendicular* al MN, y cada uno de estos dos ángulos se llama *recto*. Las demás posiciones variables de aquel plano se llaman *oblicuas*, y los planos PQ y PQ″ *oblicuos* con respecto del MN. Fig. 140.

215. De lo expuesto se deduce que *por una recta PS, situada en un plano MN, siempre se puede trazar otro plano, que sea perpendicular al primero.*

Ángulos diedros adyacentes, son los que tienen una cara común y las otras dos forman un solo plano.

216. *Todos los ángulos diedros rectos son iguales, aun cuando no sean adyacentes.*

La suma de dos ángulos diedros adyacentes, equivale á dos ángulos diedros rectos y recíprocamente.

La suma de todos los ángulos diedros, formados sobre una recta situada en un plano y hacia un mismo lado de éste, vale dos ángulos diedros rectos; y los formados alrededor de una recta valen cuatro diedros rectos.

Ángulos opuestos por la arista, son dos ángulos diedros de los cuales el uno está formado por las prolongaciones de las caras del otro.

Los ángulos opuestos por la arista son iguales.

De la definición de plano perpendicular á otro y de los teoremas que anteceden, se desprende que *los cuatro án-*

gulos que forma un plano con otro al cual es perpendicular, son rectos, ó en otros términos: *si un plano es perpendicular á otro, éste lo será al primero.*

Todos estos teoremas, recíprocos y corolarios se demuestran como sus análogos de la Geometría plana (20, 21 y 22).

Dos ángulos diedros se llaman *complementarios,* cuando su suma equivale á un diedro recto.

Dos ángulos diedros se dice que son *suplementarios,* cuando su suma es igual á dos diedros rectos.

Es evidente que dos ángulos diedros, que tengan el mismo complemento ó el mismo suplemento, serán iguales.

Ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro, es el ángulo formado por las perpendiculares á la arista en un mismo punto de ésta y una en cada cara.

217. *Todos los ángulos rectilíneos, correspondientes á un mismo diedro, son iguales.*

En efecto, siendo perpendiculares á la arista los lados de los ángulos rectilíneos, y estando en el mismo plano, serán paralelos: luego los ángulos rectilíneos serán iguales.

218. *Si dos ángulos diedros son iguales, los rectilíneos correspondientes también lo serán.* FIG. 142.

En efecto, superponiendo los diedros AB y A′B′, de modo que coincidan los vértices de los ángulos rectilíneos F′E′G′ y FEG correspondientes á los diedros propuestos, así como también las caras B′C′ y BC y las aristas A′B′ y AB, se tendrá que la recta E′F′ coincidirá con la EF, porque una y otra son perpendiculares en un mismo punto E á la arista AB; como la cara B′D′ tendrá que confundirse con la BD, por ser los mencionados ángulos diedros iguales, la recta E′G′ coincidirá con EG, por ser ambas perpendiculares á la AB en el mismo punto, y encontrarse situadas en el mismo plano, por lo tanto habiendo tenido que coincidir los ángulos FEG y F'E'G', éstos serán iguales.

Recíproco.— *Cuando sean iguales los ángulos rectilíneos correspondientes á dos diedros, éstos también serán iguales.*

Haciendo coincidir los rectilíneos FEG y F'E'G', correspondientes á los diedros propuestos, tendrán que confundirse sus aristas AB y A'B' (206), luego las caras de uno de los diedros coincidirán con las del otro, supuesto que cada cara del uno tiene dos rectas que se cortan, contenidas en la respectiva del otro.

Corolario.—*Si se duplica un ángulo diedro, su rectilíneo correspondiente también se duplicará.*

219. De aquí se desprende (71) que *la relación que existe entre dos ángulos diedros, es igual á la que media entre sus rectilíneos correspondientes.* Fig. 143.

Según esto al comparar los diedros CABD y C'A'B'D', con sus respectivos correspondientes *mnp* y *m'n'p'*, se tendrá la igualdad $\frac{\mathrm{CABD}}{\mathrm{C'A'B'D'}} = \frac{mnp}{m'n'p'}$.

Si en ella se supone que el ángulo diedro C'A'B'D' sea la unidad para medir diedros, y su rectilíneo correspondiente *m'n'p'*, la unidad para medir los ángulos rectilíneos, se tendrá como consecuencia, que *la medida de un ángulo diedro es igual á la de su rectilíneo correspondiente,* lo cual está admitido expresar diciendo: *la medida de un diedro es su rectilíneo correspondiente.*

220. *Si un ángulo diedro es recto, su rectilíneo correspondiente también será recto.* Fig. 144.

Siendo el diedro CABD recto, su adyacente DBAH también lo será, luego los rectilíneos correspondientes, por ser iguales, tendrán que ser rectos.

Recíproco.—*Un ángulo diedro será recto, si lo es su rectilíneo correspondiente.*

Supuesto que los rectilíneos GEF y G′E′F′ correspondientes á dos diedros son rectos, y por consiguiente iguales, los diedros DABC y DABH deberán ser también iguales y por lo tanto rectos.

ARTÍCULO 2.º

Planos perpendiculares.

221. *Si dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta situada en uno de ellos, que sea perpendicular á la intersección común, será también perpendicular al otro plano.*

FIG. 145.

Sea AB la recta situada en el plano PQ y perpendicular á BP, intersección de los dos planos MN y PQ, que se suponen perpendiculares entre sí. Trazando por el punto B en el plano MN la perpendicular CD á la BP, los ángulos ABC y ABD serán los rectilíneos correspondientes á los diedros MPBQ y NPBQ, y como éstos son rectos por hipótesis, también lo serán los rectilíneos correspondientes; luego la AB es perpendicular á CD, y como también lo es á PB lo será al plano MN.

222. *Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por esta recta, ó que sea paralelo á ella, será perpendicular al otro plano.*

En efecto, si como se hizo en la demostración anterior, se traza desde el punto B la recta CD perpendicular á la BP, se tendrán los ángulos ABC y ABD que serán los rectilíneos correspondientes á los diedros QPBM y QPBN, mas como estos rectilíneos son rectos, también tendrán que serlo los mencionados diedros, y por lo tanto el plano PQ será perpendicular al MN.

FIG. 146.

Si el plano PQ fuera paralelo á la AB, trazando por un punto C de este plano una recta CD paralela á la AB, tendrá que estar situada en él (201), y será perpendicular al plano MN (209); lo cual manifiesta que el plano PQ contiene á una perpendicular CD al plano MN, luego será perpendicular á éste.

Corolario 1.º—*Por una recta perpendicular á un plano, pueden trazarse infinitos planos perpendiculares á él.*

Corolario 2.º—*La posición de un plano no queda determinada con un punto y la condición de que sea perpendicular á otro plano.*

Corolario 3.º—*Todo plano perpendicular á una recta situada en otro plano, será perpendicular á éste.*

Recíproco.—*Si dos planos MN y PQ son perpendiculares, toda recta AB perpendicular al MN, estará situada en el otro ó le será paralela.*

En efecto, si la recta AB encontrase al plano PQ en un punto C, tirando desde éste una perpendicular á la intersección PB de ambos planos, dicha recta sería también perpendicular al plano MN, y por lo tanto, habría trazadas desde el punto C, dos rectas perpendiculares á este plano, lo cual es absurdo. En su consecuencia, la recta AB no puede cortar al plano PQ, luego tendrá que ser paralela á él ó estar situada en el mismo plano PQ.

223. *Si dos planos son perpendiculares á un tercero, la intersección común de aquéllos será también perpendicular al tercer plano.* Fig. 147.

Sean PQ y RS los dos planos perpendiculares al MN. Si por el punto A, común á los tres planos, se considera una perpendicular AB al MN, esta recta deberá encontrarse á la vez en los dos planos PQ y RS (222, Recíproco), y por lo tanto, coincidirá con la intersección de éstos.

Este teorema suele enunciarse diciendo: *si un plano es* *perpendicular á otros dos que se cortan, será también perpendicular á la intersección de éstos.*

Nota.—Cuando los planos PQ y RS, además de ser perpendiculares al MN, sean perpendiculares entre sí, acontecerá que, por ser dos cualesquiera de estos tres planos perpendiculares al tercero, las tres rectas de intersección serán también perpendiculares entre sí.

224. *Por una recta oblicua ó paralela á un plano,*
Fig. 148. *siempre puede considerarse otro plano perpendicular al primero, y nada más que uno.*

Sea la AB una recta oblicua ó paralela al plano MN: trazando por un punto cualquiera A de la recta AB, otra AC que sea perpendicular al MN, se tendrá que el plano determinado por AB y BC, será perpendicular al MN.

Si por la AB pasara algún otro plano diferente del BAC, que fuera también perpendicular al MN, la intersección de estos dos planos, que sería la AB, tendría que ser perpendicular al MN, lo cual es contrario á la hipótesis.

225. *Si desde un punto interior á un diedro, se trazan las perpendiculares á sus caras, el ángulo formado por ambas rectas será suplemento del rectilíneo correspondiente al diedro.*

Sea DE el ángulo diedro, AB y AC las perpendiculares trazadas á sus caras desde el punto A: el plano determinado por estas dos rectas será perpendicular á las caras DF y DG del diedro (222) y por lo tanto, á la intersección de éstas (223). Uniendo los pies B y C de las perpendiculares AB y AC con el H, se tendrá el rectilíneo correspondiente al diedro DE, y como el cuadrilátero ABHC tiene dos ángulos B y C rectos, los otros dos serán suplementarios (66, Corolario).

ARTÍCULO 3.°

Planos paralelos.

226. Se llaman *planos paralelos* aquellos que no pueden encontrarse, por más que se prolonguen. Se demuestra su existencia por medio del siguiente teorema.

Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.

En efecto, si estos planos se cortasen, desde uno cualquiera de los puntos de la recta de intersección, se tendrían dos planos perpendiculares á una misma recta, lo cual es absurdo (208).

227. *Dos planos paralelos tienen sus perpendiculares comunes.*

Supuesto que todas las rectas situadas en uno de estos dos planos son paralelas al otro y, por lo tanto, perpendiculares á cualquier recta que sea perpendicular á uno de los planos paralelos que se consideran (210).

Corolario 1.º—*Por un punto fuera de un plano, sólo puede considerarse otro plano paralelo al primero.*

Supuesto que si hubiera dos planos que siendo paralelos al plano propuesto, contuvieran al punto dado, ambos serían perpendiculares á la recta, que pasando por el citado punto es perpendicular al plano dado, lo cual es inadmisible.

Corolario 2.º—*La posición de un plano está determinada por un punto, y la condición de que sea paralelo á otro plano dado.*

228. *Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, los planos que contienen á estos ángulos serán también paralelos.* Fig. 150.

En efecto, sean ABC y A′B′C′ los ángulos propuestos: si por el vértice B se considera un plano, que sea paralelo al plano determinado por el ángulo A′B′C′, aquel plano contendrá á las rectas AB y BC (201), y por consiguiente se confundirá con el que determinan los lados del ángulo ABC.

229. *Todo plano que prolongado suficientemente corta á uno de dos planos paralelos, cortará también al otro.*

En efecto, de no cortarlo sería paralelo á él, y por lo tanto existiría un punto, situado en la recta de intersección del plano secante con el primero de los dos planos paralelos que se consideran, desde el cual se tendrían dos planos paralelos al segundo, y esto es inadmisible (227, Corolario 1.º).

Corolario.—*Dos planos paralelos á un tercero, son paralelos entre sí.* Pues si uno de estos dos últimos planos no fuese paralelo al otro, lo cortaría, y por lo tanto tendría que cortar también al tercero, que le es paralelo.

Fig. 151. 230. *Si á dos planos MN y PQ paralelos, corta un tercer plano RS, las intersecciones son paralelas.* En efecto, las rectas de intersección *mn* y *pq* se hallan situadas en el plano secante RS, y no se pueden encontrar, por estar en planos paralelos; luego aquéllas serán paralelas.

231. *Cuando un plano corta á otros dos paralelos, se verifica: 1.º Que los ángulos diedros correspondientes son iguales. 2.º Que también son iguales los diedros alternos. 3.º Que los diedros internos, situados á un mismo lado del plano secante, son suplementarios.*

En efecto, si se considera un plano perpendicular á las intersecciones *mn* y *pq*, las tres rectas que provienen de las intersecciones de este plano auxiliar con los dos paralelos y el secante, formarán los rectilíneos correspondientes á los respectivos diedros, y como que son ciertas las proposiciones, cuando se aplican á estos ángulos rectilíneos (20), lo serán también cuando se haga referencia á los respectivos diedros.

Observación.—Para que los recíprocos de estas tres proposiciones sean ciertos, se requiere que las intersecciones del plano secante con los otros dos planos, sean rectas paralelas.

232. *Las paralelas AB y CD comprendidas entre planos paralelos, son iguales.* Supuesto que si se considera al plano que determinan las paralelas AB y CD, este plano cortará á los MN y PQ según AD y CD, que serán paralelas, y por lo tanto AB y CD tendrán igual magnitud (53). Fig. 152.

La *distancia* entre dos planos paralelos se aprecia por medio de una cualquiera de las perpendiculares comunes, que se hallan comprendidas entre ellos. Ahora bien, como estas perpendiculares son paralelas entre sí (209, Recíproco), de aquí que sean iguales, lo cual manifiesta que *dos planos paralelos equidistan en toda su extensión*

233. *Si tres planos paralelos cortan á dos rectas, dividen á éstas en partes proporcionales.* Fig. 153.

En efecto, sean MN, PQ y RS los tres planos paralelos que cortan á las dos rectas AB y BC. Trazando la CE paralela á AB, se tendrá CF = BG y EF = AG. El plano determinado por las rectas CD y CE cortará á los planos PQ y RS, según las rectas paralelas FH y DE (130); luego se verificará que $\frac{CF}{EF} = \frac{CH}{DH}$, ó bien, $\frac{BG}{AG} = \frac{CH}{DH}$.

CAPÍTULO VI.

Ángulos poliedros.

ARTÍCULO 1.°

Propiedades de los triedros.

234. ÁNGULO POLIEDRO es el espacio indefinido que comprenden tres ó más planos que, pasando por un punto, terminan en sus intersecciones.

El punto en donde concurren los planos se llama VÉRTICE, los planos CARAS, y sus intersecciones ARISTAS.

ÁNGULO PLANO de un ángulo poliedro, es el formado por dos aristas situadas en una misma cara.

Un ángulo poliedro se nombra con la letra del vértice y una de cada arista, pero si estuviese solo, sería suficiente nombrarle con la letra del vértice.

Cuando el ángulo poliedro tiene sólo tres caras, se le denomina ÁNGULO TRIEDRO ó simplemente TRIEDRO.

Un ángulo triedro tiene seis elementos: tres ángulos planos y tres diedros.

235. *Un ángulo AVB, de un triedro V, es menor que*
FIG. 154. *la suma de los otros dos AVC y BVC, y mayor que su diferencia.*

En efecto, si se supone que el ángulo AVB sea el mayor de los tres, y se traza en él, la recta VD que forme el ángulo AVD = AVC; tomando dos partes iguales VD y VE y tirando una recta cualquiera FG, que pase por D y encuentre á las dos aristas AV y BV; al unir el punto E con los F y G resultarán los triángulos EFV y DFV, que serán iguales (43), y por tanto $DF = EF$: mas como $FG < EF + EG$, si se restan de los dos miembros de esta desigualdad respectivamente DF y EF, quedará reducida á $DG < EG$, de donde se desprende (46) que en los triángulos DGV y GEV, el ángulo $DGV < EVG$, de modo que agregando al primer miembro de esta desigualdad el ángulo DVF y al segundo su igual EVF, resultará que $FVG < FVE + EVG$. La segunda parte de este teorema quedaría demostrada, sin más que restar de ambos miembros de esta última desigualdad el ángulo FVE, con cuyo motivo se tendría

$$FVG - FVE < EVG.$$

236. Dos triedros se dice que son SUPLEMENTARIOS, cuando los ángulos planos del uno son suplementos de los rectilíneos, correspondientes á los diedros del otro.

En su consecuencia también se verificará que los ángulos rectilíneos correspondientes á los diedros de uno cualquiera de los dos triedros, que se consideran, serán respectivamente suplementos de los ángulos planos del otro. El teorema, que hace patente la existencia de los triedros suplementarios, dice como sigue:

237. *Si desde un punto T interior á un triedro V, se trazan las perpendiculares TA, TB y TC á sus caras DVF, EVF y DVE, el triedro T, cuyas aristas son las mencionadas perpendiculares, será suplementario del triedro propuesto.* Fig. 155.

En efecto, los ángulos planos ATB, BTC y ATC, son suplementos de los rectilíneos correspondientes á los diedros VF, VE y VD (225). Siendo la cara ATB perpendicular á las DVF y FVE (222), la intersección VF de éstas será perpendicular á dicha cara ATB (223); por análoga consideración VE será perpendicular á la cara BTC y VD á ATC; luego los ángulos planos DVF, FVE y DVE, serán respectivamente suplementos de los rectilíneos correspondientes á los diedros AT, BT y TC, que pertenecen al triedro T; por lo tanto éste y el V son suplementarios.

Triedros simétricos son los que tienen sus ángulos planos y diedros respectivamente iguales, pero que superpuestos no coinciden. La existencia de los triedros simétricos, se pone de manifiesto por medio del teorema siguiente:

238. *Si se prolongan las aristas de un triedro en sentido contrario al que tienen, el nuevo triedro que se forma es, en general, simétrico del propuesto.*

Si en el triedro VABC se prolongan las tres aristas en sentido contrario al suyo, resultará el triedro VA'B'C', el
Fig. 156. cual se va á demostrar que es simétrico del propuesto, en el caso general, ó sea cuando los diedros VA, VB y VC son desiguales.

En efecto, los tres ángulos planos AVB, BVC y AVC, son respectivamente iguales á los A'VB', B'V'C' y A'VC', por opuestos por el vértice, y los tres diedros VA, VB y VC lo son también á los VA', VB' y VC', por opuestos por la arista (**216**).

Al tratar de hacer coincidir estos dos triedros, podrá efectuarse la superposición de las caras iguales AVC y A'VC' de dos modos, ó bien colocando la arista VC' sobre la VA y por lo tanto la VA' sobre la VC, ó bien de manera que la VC' se aplique sobre la VC, y en su consecuencia la VA' sobre la VA.

Si se efectúa la superposición del primer modo, resulta que entonces el plano C'VB' no coincidirá con el AVB, porque el diedro VC' igual al VC tendrá que ser desigual con el VA; tampoco el plano A'VB' se confundirá con el CVB, porque los diedros VA′ y VC también son desiguales; luego la arista VB′, á pesar de hallarse, una vez efectuada la mencionada superposición, delante de la cara AVC, no podrá coincidir con la VB y tomará una posición tal como la VB″.

De seguir el segundo procedimiento para superponer las caras iguales A′VC′ y AVC, habría que hacer girar el triedro VA′B′C′ alrededor del vértice V, de modo que sin salir la cara A′VC′ del plano en que se encuentra colocada, se confunda la VA′ con la VA, y entonces la VC′ coincidirá con la VC, pero la arista VB′ permanecerá detrás del plano que determinan las AA′ y CC′: luego los triedros tampoco podrán coincidir, y como no caben otras formas de efectuar la superposición de los dos triedros de la figura, queda demostrado que éstos no pueden coincidir.

Si ahora se supone que los tres diedros VA, VB y VC no son desiguales, y que dos de ellos, por lo menos, VA y VC sean iguales, al superponer los dos triedros de la primera de las dos maneras que se acaban de exponer, resultará que la cara B′VC′ coincidirá con la AVB, supuesto que VC′ = VC = VA, y el plano A′VB′ también se confundirá con el BVC, pues VA′ = VA = VC, por lo tanto la arista VB′ coincidirá, una vez efectuada la superposición, con la VB: luego queda demostrado que en este caso particular los dos triedros se confunden en uno solo. FIG. 157.

239. *Si un ángulo triedro VABC tiene dos diedros VA y VC iguales, los ángulos planos opuestos BVC y AVB son también iguales.*

Se acaba de ver que el triedro VABC es igual á su simétrico VA′B′C′, luego el ángulo plano B′VC′ será igual al AVB, y como también lo es al BVC por opuesto por el vértice, se tendrá AVB = BVC.

FIG. 158. **240.** *En todo triedro, á mayor ángulo diedro se opone mayor ángulo plano.*

Siendo el diedro VA > VC, se trata de hacer ver que BVC > AVB. En efecto, si se considera el plano auxiliar AVD, que forma con el AVC un diedro DVAC = VC, suponiendo que la VD sea la intersección de aquel plano auxiliar con el BVC, se tendrá BVD + AVD > AVB; pero como AVD = DVC, resultará que

$$BVD + DVC > AVB$$

ó bien BVC > AVB.

RECÍPROCO 1.º—*Si un triedro tiene dos ángulos planos iguales, los diedros opuestos serán también iguales.*

RECÍPROCO 2.º—*Si un triedro tiene dos ángulos planos desiguales, al mayor ángulo plano se opondrá mayor diedro.*

ARTÍCULO 2.º

Igualdad de triedros.

241. Los triedros que tengan tres elementos idénticos y dispuestos del mismo modo, son iguales; por lo tanto, los casos de igualdad de triedros serán cuatro:

1.º *Cuando tienen un ángulo plano igual y los dos diedros adyacentes iguales.*

2.º *Si poseen dos ángulos planos respectivamente iguales, é igual el diedro comprendido.*

3.º *Cuando están formados por tres ángulos planos res pectivamente iguales.*

4.º *Si tienen sus tres diedros respectivamente iguales.*

242. PRIMER CASO. — Sean VABC y V′A′B′C′ los
FIG. 159. triedros propuestos, que tienen el ángulo plano AVC = = A′V′C′ y los diedros VA y VC respectivamente igua-

les á los $V'A'$ y $V'C'$. Colocando el ángulo plano $A'V'C'$ sobre su igual AVC, el plano $A'V'B'$ seguirá la dirección del AVB, y el $B'V'C'$ se aplicará sobre el plano BVC, por ser el diedro $VA = V'A'$ y el $VC = V'C'$; luego la intersección de las dos primeras caras, que es la arista $V'B'$, coincidirá con la intersección de las dos segundas, que es la VB, y, por lo tanto, se habrán confundido los dos triedros que se consideran.

243. Segundo caso. — Suponiendo que el ángulo plano $AVC = A'V'C'$, el $AVB = A'V'B'$ y diedro $VA =$ $= V'A'$, se va á demostrar que los ángulos triedros V y V' son iguales.

Colóquese uno de estos dos triedros sobre el otro, de modo que los ángulos planos $A'V'C'$ y AVC coincidan, y como los diedros $V'A'$ y VA son iguales, el plano $A'V'B'$ caerá sobre el AVB; pero teniendo en cuenta que estos ángulos planos son iguales, la arista $V'B'$ se confundirá con la VB; luego habrán coincidido las tres aristas del $V'A'B'C'$ con las del $VABC$.

244. Tercer caso.—Este caso se reduce al anterior, sin más que demostrar que un diedro de uno de los ángulos triedros propuestos es igual al otro. Fig. 160.

Sobre las tres aristas de los ángulos triedros $VABC$ y $V'A'B'C'$ se toman las porciones iguales

$$VA = VB = VC = V'A' = V'B' = V'C',$$

y se trazan las rectas AB, BC, AC, $A'B'$, $B'C'$ y $A'C'$, con cuyo motivo se tendrá que el triángulo $AVB =$ $= A'V'B'$, el $AVC = A'V'C'$ y el $BVC = B'V'C'$ (**43**); luego siendo $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$, se verificará que los ABC y $A'B'C'$ serán también iguales.

Como que los triángulos AVB, AVC, ..., son isósceles por construcción, los ángulos de las bases (considerando como vértices los puntos V y V′) serán agudos. Ahora bien, si en las aristas VA y V′A′, á partir de los puntos A y A′, se toman las magnitudes iguales AD y A′D′, y se construyen los ángulos rectilíneos EDF y E′D′F′, correspondientes á los diedros VA y V′A′, los lados DE y DF encontrarán respectivamente á los AB y AC (34); por igual razón las D′E′ y D′F′ cortarán á las A′B′ y A′C′: uniendo estos puntos de intersección, que se acaban de determinar, por medio de las rectas EF y E′F′, se tendrá que los triángulos rectángulos ADE y ADF serán respectivamente iguales á los A′D′E′ y A′D′F′, y por lo tanto resultará que

$$AE = A'E',\ AF = A'F',\ DE = D'E',\ DF = D'F',$$

con cuyo motivo se verificará que los triángulos AEF y A′E′F′ serán iguales, y en su consecuencia EF = E′F′, luego los triángulos EDF y E′D′F′ serán también iguales (46), y por lo tanto el ángulo EDF, que es el rectilíneo correspondiente al diedro VA, será igual al correspondiente al diedro V′A′.

245. Cuarto caso.—Se construirán los triedros suplementarios de los propuestos, los cuales deberán tener sus ángulos planos respectivamente iguales, por ser suplementarios de los rectilíneos correspondientes á diedros iguales, y por lo tanto estos triedros suplementarios serán iguales (244), luego también tendrán que serlo sus suplementarios, que son los triedros propuestos, por tener sus ángulos planos iguales como suplementos de diedros iguales.

Nota.—Si los dos triedros que se consideran, tienen iguales los tres elementos á que se ha hecho referencia en cada uno de los casos de igualdad, que se acaban de mencionar, pero no se hallan dispuestos en uno y otro de igual modo, entonces no podrán coincidir en general, y por lo tanto aquellos triedros serían simétricos (238).

ARTÍCULO 3.°

Generalidades acerca de los ángulos poliedros.

246. Los ángulos poliedros se clasifican, atendiendo al número de sus caras, así, además del triedro, se puede considerar el *tetraedro* que tiene cuatro caras, el *pentaedro* que tiene cinco, el *exaedro* que tiene seis, etc.

También se dividen los ángulos poliedros en *convexos* y *no convexos*. Se dice que un ángulo poliedro es convexo, cuando sus caras no pueden ser cortadas por una recta en más de dos puntos; y no convexos, cuando aquéllas pueden ser cortadas por una recta en más de dos puntos.

En este tratado sólo se hace referencia á los ángulos poliedros convexos.

Plano diagonal es el determinado por dos aristas, que no pertenecen á una misma cara.

Los planos diagonales, que pasan por una misma arista, pueden descomponer al ángulo poliedro, en tantos triedros como caras tiene menos dos.

247. *Dos ángulos poliedros son iguales, si tienen sus ángulos planos y diedros respectivamente iguales y del mismo modo dispuestos.*

En efecto, superponiendo el ángulo poliedro sobre el otro, de manera que coincidan dos de los ángulos que son iguales, las demás caras y aristas respectivas coincidirán por la igualdad de los diedros y ángulos planos, supuesto que están unos y otros dispuestos de igual modo, en los dos ángulos poliedros propuestos.

Corolario.—*Dos ángulos poliedros compuestos del mismo número de triedros respectivamente iguales y del mismo modo colocados, serán iguales.* En atención á que uno y otro tendrán sus ángulos planos y diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.

La suma de los ángulos planos de un triedro cualquiera, es
FIG. 161. *menor que cuatro ángulos rectos.*

En efecto, sea VABC el triedro que se considera: al prolongar una de sus aristas tal como la VC, aparecería formado el triedro VABC′, en el que se tendría que $AVB < AVC' + BVC'$; pero como también se tiene $BVC + BVC' = 2R$ (21) y $AVC + AVC' = 2R$, si se suman ordenadamente estas dos igualdades con la desigualdad anterior y se suprimen los términos comunes en ambos miembros, resultará que $AVB + BVC + AVC < 4R$.

248. *En todo ángulo poliedro, la suma de sus ángulos planos*
FIG. 162. *es menor que cuatro ángulos rectos.*

En efecto, si en el poliedro propuesto VABCDEF se prolongan las dos caras BVC y AVF, que comprenden á la AVB, determinarán en su intersección la recta VG, formándose con tal motivo el poliedro VCDEFG, el cual tendrá una cara menos que el propuesto.

En el triedro VABG obtenido, se tiene $AVB < BVG + AVG$; y agregando á ambos miembros de esta desigualdad la suma de los ángulos planos, que son comunes á ambos ángulos poliedros, ó sea, $BVC + CVD + DVE + EVF$, resultaría que la suma de los ángulos planos del poliedro propuesto, era menor que la suma de los ángulos planos del ángulo poliedro deducido, que tiene una cara menos.

Así como del ángulo exaedro VABCDEF se ha obtenido el ángulo pentaedro VCDEFG, pudiera deducirse de éste un ángulo tetraedro y de este último un triedro, de modo que repitiendo la serie de consideraciones expuestas, cuantas veces sea necesario, siempre se vendrá á deducir que la suma de los ángulos planos del ángulo poliedro propuesto será menor que la suma de los ángulos planos de un triedro, la cual se acaba de demostrar que es menor que cuatro rectos.

249. *La suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.*

Sean M, N y P los tres ángulos diedros de un triedro, y m, n y p los respectivos ángulos planos del triedro suplementario: por virtud de la definición (236), se tiene que

$$M = 2R - m$$
$$N = 2R - n$$
$$P = 2R - p$$

Sumando ordenadamente estas tres equivalencias, resulta que

$$M + N + P = 6R - (m + n + p);$$

en donde se ve que $M + N + P < 6R$, y como $m + n + p < 4R$ (248), se verificará que $M + N + P > 2R$.

250. Poliedros simétricos son los que tienen los ángulos planos y diedros respectivamente iguales, pero que superpuestos no coinciden.

Cuando se quiera construir un poliedro simétrico de otro, basta prolongar las aristas de éste en sentido contrario del que tienen, y el poliedro así formado es evidente, que satisfará á las condiciones de la definición.

SECCIÓN SEGUNDA.

CUERPOS POLIÉDRICOS.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

251. Se llama POLIEDRO el cuerpo terminado por superficies planas. Estos planos se llaman CARAS, y los vértices, ángulos y aristas que forman, VÉRTICES, ÁNGULOS y ARISTAS del poliedro.

DIAGONAL de un poliedro es la recta, que une dos vértices que no pertenecen á una misma cara.

Los poliedros serán CONVEXOS, cuando su superficie no puede ser cortada por una recta en más de dos puntos. Los NO CONVEXOS, son los poliedros cuya superficie puede ser cortada por una recta en más de dos puntos. Aquí sólo se tratará de los poliedros convexos.

252. Los poliedros se clasifican, atendiendo al número de sus caras, del modo siguiente: los de cuatro caras, se denominan TETRAEDROS; los de cinco, PENTAEDROS; los de seis, EXAEDROS; los de siete, EPTAEDROS; los de ocho, OCTAEDROS; los de doce, DODECAEDROS; los de veinte, ICOSAEDROS. Los demás se designan indicando el número de sus caras: así se dice un poliedro de veintiuna, veintidos, etc., caras.

253. De todos los poliedros el más sencillo es el tetraedro, en atención á que como para formar ángulo poliedro es necesario servirse por lo menos de tres planos, si ahora se quiere cerrar el espacio correspondiente al mencionado ángulo, es indispensable hacer uso de un cuarto plano, que corte á los otros tres.

Se llama POLIEDRO REGULAR, aquel cuyas caras son polígonos regulares é iguales. En él se verifica que los ángulos diedros son iguales.

POLIEDROS IGUALES son aquellos que superpuestos coinciden.

CAPÍTULO II.

Pirámides.

254. Se llama PIRÁMIDE un poliedro que se compone de un polígono cualquiera llamado BASE, y las demás caras son triángulos, que tienen un vértice común á todos ellos, el cual se denomina VÉRTICE ó CÚSPIDE de la pirámide.

La perpendicular tirada desde el vértice á la base se denomina ALTURA de la pirámide. En la pirámide VABCDE, el polígono ABCDE es la base, el punto V el vértice y VF la altura.

La pirámide se expresa mediante la letra situada en el vértice, seguida de las que designan los vértices de la base; sin embargo, cuando la pirámide que se considere, no puede confundirse con otra, bastará para distinguirla, mencionar la letra del vértice.

Las aristas que pasan por el vértice de la pirámide, se llaman ARISTAS LATERALES, y las caras que contienen á estas aristas, reciben el nombre de CARAS LATERALES.

Según sea el polígono de la base, así la pirámide se dice que es TRIANGULAR, CUADRANGULAR, PENTAGONAL, etc.

255. La pirámide se llama REGULAR, cuando la base

es un polígono regular y las aristas laterales son todas iguales. De donde se desprende, que los triángulos que constituyen las caras laterales de una pirámide regular son isósceles é iguales; así como también tiene que verificarse, que el pie de la altura será el centro del polígono de la base.

En la pirámide regular la altura de uno cualquiera de los triángulos isósceles, que forman sus caras laterales, se llama APOTEMA.

256. TRONCO DE PIRÁMIDE Ó PIRÁMIDE TRUNCADA, es la porción de pirámide comprendida entre su base y un plano que corta á todas las aristas laterales.

Cuando el plano secante es paralelo al de la base, la sección producida recibe también el nombre de BASE, y en tal caso se dice, que el tronco de pirámide es de BASES PARALELAS.

257. *Si una pirámide cualquiera se corta por un plano paralelo á su base, se verificará : 1.º Que la sección producida es un polígono semejante al de la base. 2.º Que*
FIG. 164. *las áreas de la base y de la sección son proporcionales á los cuadrados de sus distancias á los respectivos vértices.*

1.º Los ángulos de las bases y los de la sección son iguales, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; por otra parte estos lados son directamente proporcionales (76), luego

$$\frac{AB}{ab} = \frac{VB}{vb} = \frac{BC}{bc} = \frac{VC}{vc} = \frac{CD}{cd} = \ldots\ldots,$$

por lo tanto, los polígonos ABCDE y *abcde* tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales, y en su consecuencia serán semejantes.

2.º Trazando la altura VH de la pirámide y haciendo pasar por ella y la arista VA un plano, éste cortará á la base y al plano sección, según las rectas AH y *ah* que serán paralelas (230), luego en virtud de lo dicho (110) se tendrá

$$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}=\frac{\overline{VA}^2}{\overline{Va}^2}=\frac{\overline{VH}^2}{\overline{Vh}^2}.$$

258. *Si dos pirámides de igual altura y de bases equivalentes, se cortan por planos paralelos á sus respectivas bases y equidistantes de ellas, las dos secciones que resultan, serán equivalentes.*

Representando por B y S los valores de la base y de la sección de una de las dos pirámides, y por S′ el de la sección en la otra; D y D′ las respectivas distancias de las bases y secciones á los vértices en una y otra pirámide, se tendrá $\frac{B}{S}=\frac{D^2}{D'^2}$, $\frac{B}{S'}=\frac{D^2}{D'^2}$, de donde se deduce que $\frac{B}{S}=\frac{B}{S'}$, y por lo tanto $S=S'$.

En el caso particular de que se considere una pirámide triangular, se tendrá, en virtud de lo dicho (252), un tetraedro.

259. Los casos de igualdad de dos tetraedros son los tres siguientes:

1.° *Cuando tengan una cara igual adyacente á tres diedros respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo.*

2.° *Si tienen dos caras del uno respectivamente iguales á dos del otro, é igual el diedro comprendido, hallándose estos elementos de la misma manera colocados en ambos tetraedros.*

3.° *Siempre que tres caras del uno sean respectivamente iguales á tres del otro, y se encuentren igualmente dispuestas.*

Los dos primeros casos se demuestran fácilmente, superponiendo los elementos que se suponen iguales en ambos tetraedros. El tercer caso se hace patente, sin más que considerar, que siendo respectivamente iguales y estando igualmente dispuestas tres caras en uno y otro tetraedro, los diedros que estas mismas caras forman, tienen que ser también iguales (245), y por lo tanto este caso queda reducido al segundo.

CAPÍTULO III.

Prismas.

260. PRISMA es un poliedro, en el cual dos caras son polígonos paralelos é iguales y las demás son paralelogramos.

Las caras paralelas é iguales se llaman BASES del prisma, y los paralelogramos CARAS LATERALES; ALTURA es la parte de una perpendicular á las bases, que se halla limitada por éstas. Las intersecciones de las caras laterales se llaman ARISTAS LATERALES.

Un prisma se expresa mediante las letras de todos sus vértices, cuando forma parte de otra figura; pero si se halla aislado, se designa por medio de dos letras que correspondan á los extremos de una cualesquiera de las diagonales del prisma.

Los prismas se clasifican atendiendo á sus bases, en *triangulares, cuadrangulares, pentagonales,* etc., según que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

261. Los prismas se dividen también en *rectos* y *oblicuos.* Los primeros son los que tienen sus aristas laterales perpendiculares á las bases, y los segundos son aquellos en los cuales acontece, que aquellas aristas son oblicuas á los planos de las bases.

Los prismas rectos á su vez se subdividen en regulares é irregulares.

Prisma regular es el que además de ser recto, tiene por bases polígonos regulares, é irregular el que no reúne estas dos circunstancias.

262. Sección recta en un prisma es la producida por un plano perpendicular á las aristas laterales. En el prisma recto la sección recta es igual y paralela á las bases.

Todo prisma cuadrangular, cuyas bases son paralelogramos, recibe el nombre de paralelepípedo.

Prisma truncado ó tronco de prisma es la porción de prisma comprendida entre dos planos que, no siendo paralelos, cortan á todas sus aristas laterales.

263. *Si un prisma FD es cortado por un plano paralelo á las bases, la sección producida es un polígono igual á éstas.* Fig. 165.

En efecto, los lados del polígono *abcde*, que forma la sección, son respectivamente paralelos á los de las bases, por ser intersecciones de planos paralelos con cada una de las caras laterales (230). Estos lados deben ser respectivamente iguales, por partes de rectas paralelas comprendidas entre paralelas (53, Corolario 2.º); finalmente, también se verificará que los ángulos de la sección serán respectivamente iguales á los de las bases, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; luego estas bases y la sección serán iguales.

Del mismo modo se demostraría, que *las secciones producidas en un prisma por dos planos paralelos, son dos polígonos iguales.*

Corolario.—*La sección producida en un paralelepípedo por un plano que corta á dos caras opuestas, es un paralelogramo.*

264. *Dos prismas rectos son iguales, si tienen bases y alturas iguales.*

Haciendo coincidir las bases inferiores, que por hipótesis son iguales, las aristas laterales de uno y otro prisma coincidirán también, por ser perpendiculares al plano de la base inferior, en los diferentes vértices de ésta (206), así como se tendrían que confundir los extremos superiores de aquellas aristas, ó sea los vértices de las bases superiores, supuesto que en un prisma recto las aristas laterales tienen igual magnitud que su altura; luego todos los vértices de ambos prismas coinciden, y por lo tanto los prismas serán iguales.

265. *Las caras opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas, y los triedros opuestos serán simétricos.*

Las caras ABFE y DCGH son iguales, supuesto que tienen AB = CD y BF = CG, y los ángulos ABF y DCG iguales, en vista de que sus lados son paralelos y están dirigidos en el mismo sentido.

Las caras ABFE y DCGH son paralelas, en atención á que los ángulos ABF y DCG tienen sus lados paralelos (228).

Los triedros opuestos A y G son simétricos, supuesto que si se prolongan las aristas del ángulo triedro G, resulta otro triedro que le es simétrico, el cual á su vez es igual al A, porque tiene con respecto á éste las caras respectivamente iguales y del mismo modo dispuestas.

Corolario.—*Dos caras opuestas de un paralelepípedo, pueden considerarse como bases de éste.*

266. Paralelepípedo rectángulo es aquel, que además de ser recto, tiene por base un paralelogramo rectángulo.

Las tres aristas de un paralelepípedo rectángulo, que concurren en un mismo vértice, son sus tres dimensiones.

Llámase CUBO al paralelepípedo rectángulo, cuyas caras son cuadrados. De la consideración de que todas las caras de un cubo son cuadrados iguales, se deduce que el cubo es un poliedro regular.

Todos los ángulos diedros del cubo son rectos y por lo tanto iguales.

CAPÍTULO IV.

Poliedros semejantes.

267. Dos poliedros se dice que son SEMEJANTES, cuando tienen sus ángulos poliedros respectivamente iguales y las caras son polígonos semejantes, encontrándose los mencionados elementos colocados del mismo modo en uno y otro poliedro.

Los vértices de ángulos poliedros iguales se llaman VÉRTICES HOMÓLOGOS; las caras semejantes, que se hallan análogamente dispuestas en ambos poliedros, CARAS HOMÓLOGAS; y los lados homólogos de estas mismas caras, ARISTAS HOMÓLOGAS.

El teorema que demuestra la existencia de los poliedros semejantes, dice como sigue:

268. *Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, la pirámide parcial, que resulta, será semejante á la total.* FIG. 164.

En efecto, sea la pirámide VABCDE, y la pirámide parcial ó deficiente V*abcde*. Desde luego la sección *abcde* y la base ABCDE son polígonos semejantes, así como también las caras laterales (80); además el ángulo poliedro V es común á ambas pirámides, y los triedros

ABVE y *abVe*, BAVC y *baVc*, CBVD y *cbVd*, etc., también son iguales, por estar formados de ángulos planos, que son idénticos, en atención á pertenecer á caras semejantes; luego la pirámide total y la deficiente serán semejantes.

269. *Dos tetraedros son semejantes, si tienen una cara semejante y los tres diedros adyacentes á ella respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo.*

Fig. 167. Sean los tetraedros VABC y *vabc*, que tienen las caras AVB y *avb* semejantes y el diedro VABC = *vabc*, el VA = *va*, y el VB = *vb*. Si se toma en la arista VA una distancia V*a'* = *va*, y por el punto *a'* se considera un plano *a'b'c'* paralelo al ABC, se formará un tetraedro parcial V*a'b'c'*, que será semejante con el VABC; pero como el tetraedro V*a'b'c'* es idéntico al *vabc*, por tener una cara igual é iguales los diedros adyacentes, resulta de aquí que los dos tetraedros propuestos también serán semejantes.

Dos tetraedros V y v *son semejantes, cuando tienen dos caras respectivamente semejantes dispuestas del mismo modo é igual el ángulo diedro comprendido.*

Dos tetraedros V y v *son semejantes, cuando tienen tres caras respectivamente semejantes é igualmente dispuestas.*

Estas dos últimas proposiciones se demuestran, siguiendo el mismo procedimiento que en la anterior, ó sea tomando en el tetraedro mayor V una magnitud igual á una arista, tal como la *va* del menor, y por el extremo *a'* se traza un plano *a'b'c'*, que sea paralelo á la base ABC, y como el tetraedro parcial que resulta, es semejante al V (268) é igual al *v*, aparece así demostrada la proposición que se desea.

270. *Dos poliedros compuestos de tetraedros semejantes é igualmente dispuestos serán semejantes.*

En efecto, las caras de dichos poliedros son semejantes, ó por ser caras homólogas de tetraedros semejantes ó bien por componerse del mismo número de triángulos semejantes y análogamente colocados (95). Los ángulos diedros serán iguales, ó por homólogos de tetraedros semejantes, ó bien por ser sumas del mismo número de diedros iguales de tetraedros semejantes; luego los poliedros propuestos tendrán que ser semejantes.

Recíproco.—*Dos poliedros semejantes siempre pueden descomponerse en tetraedros respectivamente semejantes, y colocados del mismo modo.*

Después de demostrado el teorema directo, fácilmente se comprende que este recíproco será cierto, máxime si se recuerda el razonamiento expuesto, al hacer patente su análogo (95, Recíproco).

Nota.—La descomposición de un poliedro en tetraedros puede practicarse de dos maneras, ó bien trazando rectas desde un punto interior del poliedro á todos sus vértices y planos, por cada dos de estas rectas adyacentes, en cuyo caso quedaría el poliedro descompuesto en tantos tetraedros como triángulos pueden formarse en las caras del poliedro que se considera; ó lo que es más frecuente, se puede también descomponer éste, haciendo pasar planos desde uno de los vértices del poliedro á las aristas y diagonales de las caras, que no contuviesen al mencionado vértice, y con tal motivo se formarán tantos tetraedros como triángulos se pueden considerar en las aludidas caras del mencionado poliedro.

271. *Las aristas homólogas de dos poliedros semejantes, son directamente proporcionales.*

Supuesto que las caras homólogas son polígonos semejantes, y las aristas de ambos poliedros no son sino lados de estos mismos polígonos (79).

A la razón constante que existe entre dos aristas homólogas de poliedros semejantes, se denomina *razón de semejanza.*

Observación.—Cuando la razón de semejanza de dos poliedros es igual á la unidad, estos cuerpos pasan á ser iguales, supuesto que entonces todos los elementos de que se componen, tendrán que ser respectivamente iguales, y se hallarán en uno y otro poliedro de la misma manera colocados.

CAPÍTULO V.

Áreas de las superficies poliédricas.

272. Siendo así que el área de un poliedro ha de ser la medida de su superficie (100), ésta se obtendrá sumando las áreas de todas sus caras. El resultado sería trabajoso de conseguir, si se tratase de un poliedro irregular cualquiera, pero si se quisiera determinar el área de un poliedro regular, bastaría entonces multiplicar la de una de sus caras por el número de éstas; asimismo se facilitaría la operación, si se deseara averiguar el área de una pirámide regular, la de un tronco de ésta, cuando sus bases fueran paralelas, ó la de un prisma cualquiera.

273. En estos últimos cuerpos conviene considerar el *área lateral,* que es la medida de la superficie que presentan las caras laterales, y el *área total* que es la que corresponde á todas las caras. Según esto, el área total de los poliedros mencionados será igual á la lateral, más la de la base, cuando se trata de una pirámide, ó más la que corresponde á las dos bases, si se quiere apreciar la de un tronco de pirámide ó la de un prisma.

274. *El área lateral de una pirámide regular, equivale á la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema.*

Llamando a, á la apotema trazada en uno de los triángulos isósceles é iguales, que constituyen las caras laterales de la pirámide regular que se considera, n el número de estos triángulos, y l la longitud de la base de uno de ellos; se tendrá, que el área de cada uno de los citados triángulos será igual á $\frac{1}{2}al$; multiplicando este resultado por el número de lados del polígono de la base, que es precisamente el mismo que el de las caras laterales, resultará para el valor del área buscada $\frac{1}{2}aln$; en cuya expresión reemplazando ln por su igual p, que representa el perímetro de la base de la pirámide, se tendrá que el área lateral de ésta será igual á $\frac{1}{2}ap$.

Nota.—Si se quisiera deducir la expresión del área total de la pirámide regular, no habría sino agregar á su área lateral, la de la base. Así, llamando a' á la apotema del polígono regular, que forma la base de la citada pirámide, se tendría

$$\frac{1}{2}ap+\frac{1}{2}a'p=\frac{1}{2}p(a+a').$$

275. *El área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas, equivale al producto de su apotema por la semisuma de los perímetros de ambas bases.*

En efecto, si se llama a á la apotema ó altura de uno de los trapecios laterales, y b y b' á sus dos bases, el área de uno de estos trapecios estará dada por la expresión

$$a \times \frac{1}{2}(b + b'),$$

y admitiendo que sea n el número de estos trapecios, como que todos ellos son iguales, se tendrá el resultado que se desea, multiplicando por n el valor

$$a \times \frac{1}{2}(b + b'),$$

por lo tanto la expresión final será

$$a \times \frac{1}{2}(bn + b'n).$$

FIG. 168. 276. *El área de la superficie lateral de un prisma cualquiera, equivale al producto de una de sus aristas laterales por el perímetro de la sección recta.*

Sea AI el prisma y *abcde* su sección recta: como el plano de esta sección es perpendicular á las aristas laterales, éstas serán á su vez perpendiculares á los lados de la mencionada sección (203). Si ahora se considera como base, en cada uno de los paralelogramos que forman las caras laterales, la arista lateral, y como altura el lado de la sección recta, que se halla contenido en la respectiva cara, se tendrá, llamando a á la citada arista y l, l', l'', etc., á los lados de la sección recta, que las áreas de los mencionados paralelogramos serán al, al', al'', etc., y por lo tanto la superficie lateral del prisma propuesto estará dada por

$$al + al' + al'' + \ldots\ldots = a(l + l' + l'' + \ldots\ldots) = ap,$$

llamando p al perímetro de la sección recta.

COROLARIO.—*El área lateral de un prisma recto, equivale al producto de su arista por el perímetro de la base,* supuesto que en este caso la base es precisamente la sección recta.

277. *Las áreas de dos poliedros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Sean C, C′, C″..... y c, c', c''..... las caras homólogas de dos poliedros semejantes P y p: A, A′, A″..... y a, a', a''..... sus aristas homólogas; se tendrá, según lo dicho (110), que $\frac{C}{c}=\frac{A^2}{a^2}$; $\frac{C'}{c'}=\frac{A'^2}{a'^2}$; $\frac{C''}{c''}=\frac{A''^2}{a''^2}$; ..... pero también se sabe (271), que $\frac{A}{a}=\frac{A'}{a'}=\frac{A''}{a''}=$..... por lo tanto, $\frac{C}{c}=\frac{C'}{c'}=\frac{C''}{c''}=$....., de donde se deduce (Aritm.ª 125, Corolario), que $\frac{C+C'+C''+\ldots}{c+c'+c''+\ldots}=\frac{C}{c}=\frac{A^2}{a^2}$.

CAPÍTULO VI.

Volúmenes de los poliedros.

ARTÍCULO 1.º

Proposiciones fundamentales.

278. Se entiende por VOLUMEN la medida de un espacio limitado.

La unidad de medida, más generalmente adoptada para apreciar el volumen del espacio ocupado por un cuerpo, es el cubo ó exaedro, cuya arista sea la unidad de longitud.

Se llaman poliedros EQUIVALENTES aquellos que tienen el mismo volumen y diferente figura.

279. *Las magnitudes de dos paralelepípedos rectángulos, que tienen bases iguales, son proporcionales á sus alturas.*

Se sabe (264) que dos paralelcpípedos rectángulos de igual base y altura, son iguales, luego si se considera un paralelepípedo rectángulo de igual base y de doble altura que otro, que sea dado, la magnitud de éste se hallará contenida dos veces en la del anterior, y por lo tanto se hace patente, que duplicando en un paralelepípedo rectángulo su altura, queda también duplicada su magnitud, luego hay proporcionalidad directa entre las magnitudes de dos paralelepípedos rectángulos y sus respectivas alturas, siempre que las bases sean iguales (71).

Como que las *dimensiones* de un paralelepípedo rectángulo, son las tres aristas que forman uno cualquiera de sus triedros (266), si se consideran dos paralelepípedos rectángulos, que tengan respectivamente iguales dos de de aquellas dimensiones, tendrán por consiguiente dos caras idénticas (65, Corolario); de manera que, al considerar estas caras como bases (265), las terceras dimensiones harán las veces de alturas, por lo tanto el teorema anterior podrá también enunciarse diciendo: *las magnitudes de dos paralelepípedos rectángulos, que tengan dos dimensiones respectivamente iguales, serán proporcionales á las terceras dimensiones.*

280. De donde se deduce, que como puede ser altura de un paralelepípedo rectángulo cualquiera de sus tres aristas, bastará apoyarse en el teorema de las razones compuestas (Aritm.ª 171), para poder decir que *las magnitudes de dos paralelepípedos rectángulos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas, ó sea á los productos de sus tres dimensiones.*

281. *Un prisma oblicuo cualquiera es equivalente á otro*

recto, que tenga por base la sección recta del oblicuo, y por altura su arista lateral.

Sea AH el prisma oblicuo que se considera, y LMNOP su sección recta; si se toma

$$LQ = AF = MR = NS = OT = PX,$$

y se unen los puntos Q, R, S, T y X, resultará el prisma recto QN, que ha de ser equivalente al propuesto.

En efecto, los troncos de prisma FS y NA son iguales, pues al superponer las bases QRSTX y LMNOP que son iguales, como que las aristas laterales son perpendiculares á estas bases y además iguales entre sí, coincidirán los vértices FGHIJ respectivamente con los AEDCB: restando, pues, del tronco de prisma total DQ el FS, queda el prisma oblicuo propuesto AH y quitando del mismo tronco de prisma total el AN queda el prisma recto QN que se construyó, luego éste y el propuesto son equivalentes. Fig. 169

282. *Todo prisma triangular, es la mitad de un paralelepípedo de la misma altura y doble base.* Fig. 170

Sea el prisma triangular recto ABCDEF : construyendo el paralelepípedo AG, se tendrá el prisma triangular BCHEFG, que por tener igual base é igual altura que el propuesto, será igual á éste (264).

Si se tuviera al prisma oblicuo ABCDEF, construyendo el paralelepípedo AG, y formando el prisma recto NJ, el cual tiene por base la sección recta MIJL, y por altura MN = AD, se tendrá que el prisma triangular propuesto será equivalente al MILQNO, y el BCHGEF lo será al IJLQOP; pero como los dos prismas triangulares, que componen el paralelepípedo recto NJ, son iguales, se verificará que los ABCEDF y BCHGEF, que les son equivalentes, serán á su vez equivalentes, y por lo tanto resulta que el prisma triangular propuesto, es mitad de un paralelepípedo de la misma altura y de doble base.

ARTÍCULO 2.°

Volumen del prisma.

283. *El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones, en el supuesto de que se considere como unidad de medida el cubo, cuyo lado sea la unidad lineal.*

En efecto, sea P el paralelepípedo rectángulo propuesto; a, b, c, sus dimensiones; C el cubo que se toma por unidad de capacidad, y l la longitud de su arista; según lo dicho (279), se tendrá $\frac{P}{C}=\frac{abc}{l^3}$; pero como por hipótesis, $C=1$ y $l=1$ la expresión anterior se transformará en $\frac{P}{1}=\frac{abc}{1}$; lo que manifiesta que el volumen de $P=abc$.

Como el producto de dos de las dimensiones del paralelepípedo que se considera, representa el área de su base, en cuyo caso la tercera dimensión será la altura, podrá enunciarse la regla anterior diciendo, que *el volumen de un paralelepípedo rectángulo, equivale al producto del área de su base por la altura.*

Corolario.—*El volumen de un cubo equivale á la tercera potencia de su arista ó lado* (*).

Fig. 172. **284.** *El volumen de un paralelepípedo recto, equivale al producto de su base por su altura.*

Sea CF el paralelepípedo recto, cuya base EFGH no

(*) Esta es la razón de por qué se llama cubo de un número á su tercera potencia.

es por lo tanto un paralelogramo rectángulo. Considerando á la cara lateral BCHG como base del paralelepípedo propuesto, las aristas AB, CD, EH y FG serán oblicuas á esta base, pues de lo contrario el paralelepípedo CF tendría que ser rectángulo, lo cual es contrario á la hipótesis. Si ahora se traza la sección recta en este paralelepípedo, se tendría el paralelogramo HIJL, el cual será rectángulo, en atención á que siendo las rectas IJ y JL perpendiculares á la FG medirán el diedro BFGH, que es recto; luego el paralelepípedo propuesto equivale á un paralelepípedo rectángulo, cuya base es HIJL y su altura igual á FG (281). Como que el volumen de éste es el producto FG $\times$ LJ $\times$ IJ, éste será también el del paralelepípedo propuesto; pero FG $\times$ LJ es el valor del área de la base, en cuyo caso IJ será la altura, supuesto que como recta perpendicular á FG, que se halla situada en el plano ABGF, tiene que ser también perpendicular al plano FGHE (221), y por lo tanto á su paralelo ABCD (227).

285. *El volumen de un paralelepípedo oblicuo, es igual al producto del área de la base por la altura.* Fig. 173

En efecto, considerando la cara BCGF como base del paralelepípedo propuesto, las aristas laterales serán AB, CD, HG y EF. Si se traza la sección recta LJIM, que, en general, será un paralelogramo no rectángulo, esta sección deberá ser perpendicular al plano ABCD (222), así como las rectas JL y LM serán también perpendiculares á la arista AB (203). El paralelepípedo propuesto es equivalente á otro recto, cuya base sea la sección LJIM y AB la altura (281); el volumen de este paralelepípedo auxiliar es igual, según el teorema anterior, al producto LM $\times$ AB $\times$ NQ, siendo la NQ una perpendicular trazada á la LM, en el plano de la sección recta, luego el volumen del paralelepípedo propuesto será también igual á LM $\times$ AB $\times$ NQ; pero siendo LM perpendicular á la AB, el producto LM $\times$ AB expresará el área de la base ABCD, y siendo NQ perpendicular á la intersección LM de dos planos perpendiculares entre sí, ABCD y LMIQ, y estando contenido en éste último, deberá ser también perpendicular al ABCD, que hace las veces de base, y por lo tanto será la altura del paralelepípedo que se considera; con cuyo motivo queda hecho patente, que el volumen de un paralelepípedo cualquiera, equivale al producto de la base por su altura ó sea á LM $\times$ AB $\times$ NQ.

286. *El volumen de un prisma triangular, es igual al producto del área de su base por su altura.*

Supuesto que se tiene demostrado (282), que un prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de doble base y de la misma altura.

287. *El volumen de un prisma cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.*

En efecto, descomponiendo en triángulos el polígono que forma una de las bases del prisma propuesto, y considerando á este compuesto de un conjunto de prismas triangulares, cuyas bases sean los mencionados triángulos, y sus alturas la misma del prisma; resulta de aquí que el volumen de la totalidad de los prismas triangulares formados, será igual al producto que se obtiene, al multiplicar la suma de todas las áreas de las citadas bases por la altura común, ó sea al producto del área de la base del prisma, que se considera, por su altura.

Corolario.—*Dos prismas cualesquiera de igual altura y de bases equivalentes, son equivalentes.*

ARTÍCULO 3.°

Volumen de la pirámide.

288. *Dos tetraedros de igual altura y de bases equivalentes, son equivalentes.* Fig. 174.

Sean los tetraedros VABC y V'A'B'C, en los que se supone, que tienen las alturas iguales y las bases equivalentes.

Si se dividen las alturas de uno y otro tetraedro en igual número de partes iguales, los planos paralelos á las bases, que pasen por los puntos de división, determinarán en ambos tetraedros secciones, que serán respectivamente equivalentes (258); si se admite que estas diferentes secciones hacen las veces de bases, y se considera como altura la magnitud que corresponde á una de las partes iguales, en que se ha dividido la de los tetraedros, se tendrá que al construir los procedentes prismas triangulares interiores, cada uno de los del tetraedro V corresponderá á otro equivalente del V', y por lo tanto la suma de los del primero tendrá igual valor que los del segundo; pero como ambos resultados son variables, y crecen á medida que aumenta el número de partes iguales, en que se halle dividida la altura de los tetraedros, de aquí que se tengan, en el presente caso, dos cantidades variables, que son constantemente iguales, por todos los estados de magnitud que pasan, luego según lo dicho (Aritm.ª 187, Corolario 1.°), los límites de ambas cantidades, que ahora son los volúmenes de los tetraedros que se consideran, tendrán igual valor, y por lo tanto, los tetraedros serán equivalentes.

289. *Todo prisma triangular truncado, es equivalente á*
Fig. 175. *tres tetraedros que tengan por base una de las del prisma, y cuyos vértices opuestos sean los de la otra base.*

Sea AF un tronco de prisma triangular cualquiera, el cual se corta por el plano determinado por las rectas BD y BF, con cuyo motivo se tiene el tetraedro BDEF y la pirámide cuadrangular BACFD. Si en esta pirámide se considera el plano ABF, quedará á su vez descompuesta en los tetraedros BADF y BACF; pero los tetraedros BADF y EADF son equivalentes, en atención á que tienen la misma base ADF y la misma altura, que es la perpendicular trazada desde un punto de la EB al plano ACFD, al cual es paralela (200). Por otra parte, el tetraedro BACF es equivalente al EDCF, por ser las bases ACF y CDF equivalentes, y la misma altura, que es la distancia que media entre BE y el plano ACFD.

De modo que los dos tetraedros, en que queda descompuesta la pirámide cuadrangular, son respectivamente equivalentes á los ADEF y CDEF, los cuales, así como el BDEF, tienen por base común el triángulo DEF, y por alturas las perpendiculares trazadas á la citada base, desde los vértices de la otra base.

Corolario 1.º—*Un tetraedro es la tercera parte de un prisma triangular, de la misma base y altura.* En efecto, si el prisma triangular, que se considera, no fuese truncado, los tres tetraedros á que equivale, tendrían la misma base é iguales alturas, luego serían equivalentes, y por lo tanto uno cualquiera de ellos sería la tercera parte del prisma triangular propuesto.

Corolario 2.º—*El volumen de un tetraedro equivale al tercio del producto del área de su base por su altura.* En atención á que, como el volumen de un prisma triangular es igual al producto del área de su base por su altura, el del tetraedro, que es la tercera parte, equivaldrá al tercio de aquel producto.

Corolario 3.º—*El volumen de un prisma triangular truncado, es igual al tercio del producto de una de sus bases, por la suma de las tres alturas correspondientes á los vértices de la otra base.*

El volumen de una pirámide cualquiera, es igual al tercio del producto del área de su base por su altura.

En efecto, descomponiendo en triángulos el polígono de la base de la pirámide, que se considera, cada uno de ellos podrá servir de base á otros tantos tetraedros, que tienen por vértice común el de la pirámide, y se tendrá que el volumen de todos ellos, estará dado por el tercio del producto de la suma de las áreas de sus bases por la altura común, ó bien por el tercio del producto del área de la base de la pirámide por su altura.

290. *Un tronco de tetraedro de bases paralelas, equivale á tres tetraedros, cuya altura sea la del tronco, y cuyas bases respectivas sean la mayor y menor del mismo y una media proporcional entre ellas.* Fig. 176.

En efecto, sea ABCDEF el tronco de tetraedro. Si se consideran los planos AEC y AEF, éstos dividirán al tronco en los tetraedros EABC, ADEF y EACF.

El primero tiene por base ABC, que es la mayor del tronco, y la misma altura que éste, pues su vértice E se halla en la base opuesta: el segundo EADF ó sea el ADEF, tiene por base DEF, que es la menor del tronco, y la misma altura que éste, pues su vértice A se halla en la base opuesta: trazando ahora la paralela EG á CF y las rectas FG y AG, se tendrá que el tercer tetraedro EACF será equivalente al GACF, por tener la misma base ACF y los vértices E y G en la paralela á CF, que lo será á la base (200). El tetraedro GACF puede nombrarse FACG, y en tal caso tendrá la misma altura que el tronco, faltando sólo demostrar que la base ACG es media proporcional entre la mayor y la menor del tronco, que se considera.

Para conseguirlo trácese la paralela GH á la AB, que lo será también á la DE (196), y en virtud de lo dicho (107, Corolario), al comparar los triángulos ABC y ACG, se tendrá

$$\frac{ABC}{ACG}=\frac{BC}{CG};$$

y si se aplica análoga consideración á los ACG y CGH, resultará que $\frac{ACG}{CGH}=\frac{AC}{CH}$; pero como (76) se tiene $\frac{BC}{CG}=\frac{AC}{CH}$, los primeros miembros de las dos igualdades fraccionarias que anteceden, tendrán que ser iguales, y por consiguiente se verificará, que $\frac{ABC}{ACG}=\frac{ACG}{CGH}$, ó bien $\frac{ABC}{ACG}=\frac{ACG}{DEF}$, en atención á que los triángulos CGH y DEF son iguales, por tener el lado $GC=EF$ é iguales los ángulos adyacentes (197).

Corolario 1.º—*El volumen de un tetraedro truncado de bases paralelas, equivale al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor y menor, y la media proporcional entre ellas.*

Corolario 2.º—*El volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas, es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor y menor, y una media proporcional entre ellas.* Supuesto que el volumen del tronco de pirámide será igual al de la pirámide total, menos el de la deficiente; pero como estos volúmenes son equivalentes á los de los tetraedros, uno total y otro deficiente de las mismas alturas y de bases equivalentes, los troncos tendrán que ser equivalentes, y siendo así que el del tetraedro es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor y menor, y una media proporcional entre ellas, el volumen del tronco de pirámide, que se considera, también tendrá idéntica expresión.

291. *Los volúmenes de dos pirámides semejantes, son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Llamando B y b á las bases y A y a á las alturas, se tendrá (110), que $B : b :: A^2 : a^2$, evidentemente también se verificará que

$$\frac{1}{3}A : \frac{1}{3}a :: A : a;$$

multiplicando ordenadamente ambas proporciones, resulta :

$$\frac{1}{3}\,\mathrm{BA} : \frac{1}{3}\,ba :: \mathrm{A}^3 : a^3.$$

292. *Los volúmenes de dos poliedros semejantes, son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Llamando T, T', T'', T''', ..., los tetraedros de que se compone uno de dos poliedros semejantes, y t, t', t'', t''', ..., sus homólogos del otro poliedro, se tendrá, representando A y a dos aristas homólogas, que

$$\frac{\mathrm{T}}{t}=\frac{\mathrm{T}'}{t'}=\frac{\mathrm{T}''}{t''}=\frac{\mathrm{T}'''}{t'''}=\,.....\,=\frac{\mathrm{A}^3}{a^3};$$

de donde se deduce que

$$\frac{\mathrm{T}+\mathrm{T}'+\mathrm{T}''+\mathrm{T}'''+\,.....}{t+t'+t''+t'''+\,.....}=\frac{\mathrm{A}^3}{a^3}.$$

LIBRO II.

CUERPOS REDONDOS.

SECCIÓN PRIMERA.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

293. Se denominan CUERPOS REDONDOS aquellos que están limitados, total ó parcialmente, por una superficie curva.

Se entiende por SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN, aquella que puede suponerse engendrada por una línea cualquiera, que gira alrededor de una recta fija. La línea móvil se llama en tal caso *generatriz*, y la recta fija *eje*.

Un CUERPO DE REVOLUCIÓN está limitado por una superficie de revolución.

294. El movimiento á que está sometida la generatriz en las superficies de esta índole, se halla determinado por la condición de que cada uno de sus puntos describa, en un giro, ó sea en una vuelta completa alrededor del eje, una circunferencia cuyo plano le sea perpendicular, y cuyo centro se encuentre en la intersección de aquella recta con el mencionado plano.

Estos círculos perpendiculares al eje, se llaman *paralelos*.

Las intersecciones de la superficie curva, de un cuerpo de revolución con todo plano que pasa por el eje, se denominan *meridianas,* y el plano que contiene á cada una de estas líneas se llama *meridiano.*

Fig. 177. **295.** *Todas las meridianas de una misma superficie de revolución son iguales.*

En efecto, si se consideran dos meridianas ABC y A′B′C′, así como el paralelo correspondiente al punto A, resultará que el ángulo AOA′, formado por las intersecciones de este plano con los meridianos que corresponden á aquellas curvas, será la medida del diedro determinado por estos planos, y por lo tanto será igual á los rectilíneos BO′B′, CO″C′ ..... (**217**), situados en los paralelos correspondientes á los puntos B, C, ..., pero como AO = A′O, BO′ = B′O′, CO″ = C′O″, ..., al girar la meridiana ABC alrededor del eje sucederá que, al aplicarse el punto A sobre el A′, el B coincidirá con el B′, el C con el C′, y en general todos los puntos de la meridiana ABC se confundirán con los de la A′B′C′.

Corolario.—*Una superficie de revolución se puede considerar engendrada por una meridiana, que gira alrededor de su eje.*

En este tratado, los únicos cuerpos de revolución que se estudian son el cono, el cilindro, la esfera y algunos otros que se derivan de éstos.

296. Aquellas superficies en las cuales la generatriz es una recta, reciben el nombre de *regladas;* y cuando dos posiciones consecutivas de la generatriz rectilínea se hallan en un mismo plano, entonces se dice que las superficies regladas son *desarrollables,* en atención á que, abiertas según la dirección de una de las generatrices, son susceptibles de ser extendidas sobre un plano, sin que se rompan ni formen dobleces.

Cuando las superficies regladas no son desarrollables, se dice que son *alabeadas*.

CAPÍTULO II.

Cono de revolución.

297. Se llama CONO DE REVOLUCIÓN, al cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo, que gira alrededor de uno de sus catetos. FIG. 178.

En el triángulo rectángulo generador ABC, el cateto fijo AB hace veces de eje, y la hipotenusa AC de generatriz, en cuya atención describe en su movimiento la superficie lateral del cono. El cateto móvil BC, por permanecer constantemente perpendicular al eje, describirá, mientras se efectúa el movimiento giratorio, un círculo cuyo plano será perpendicular al antedicho eje (207, COROLARIO 1.º). Este círculo se denomina *base* del cono, el eje AB recibe el nombre de *altura*, y la generatriz AC, en cualquiera de sus diversas posiciones, se suele también llamar *lado* del cono.

298. TRONCO DE CONO Ó CONO TRUNCADO, es la parte de cono comprendida entre la base y un plano, que corta á todas las generatrices. En el supuesto de que el plano secante fuera paralelo á la base, se dice que el tronco es de *bases paralelas*. Á la perpendicular común á estas bases se llama *altura*, y á la parte del lado del cono comprendida entre las circunferencias de ambas bases, se denomina *lado* del tronco de cono.

299. *La sección producida en un cono de revolución por un plano paralelo á su base, es un círculo;* supuesto

que siendo el plano de la base perpendicular al eje AB, también el plano FG, que se considera paralelo al anterior, tendrá que ser perpendicular al eje (227), y por lo tanto, la mencionada sección será uno de los círculos paralelos del cono de revolución propuesto.

Todo plano que pasa por el vértice A de un cono de revolución, y por dos puntos H é I de la circunferencia de la base, cortará á la superficie lateral del cono, según dos generatrices AH y AI.

En efecto, el plano que pasa por los tres puntos A, H é I, contiene á las generatrices ó lados AH y AI, en atención á que cada una de estas rectas, posee dos puntos en el plano HAI, que se considera.

La superficie lateral de un cono es desarrollable, supuesto que cada dos posiciones consecutivas de la generatriz son rectas que se cortan, y por consiguiente, contenidas en un plano (296).

300. *La superficie lateral de un cono de revolución desarrollada sobre un plano, determina un sector circular, cuyo radio es igual á la generatriz, y cuyo arco tiene la misma longitud que la circunferencia de la base del cono.*

En efecto, colocando el cono sobre un plano, de modo que coincida con éste una de sus generatrices, al hacerle girar alrededor del vértice, sin que resbale, sucederá que al dar una vuelta completa, toda la superficie lateral del cono se habrá aplicado sobre el plano; mas como quiera que durante este movimiento giratorio, los diferentes puntos de la circunferencia de la base del cono, se conservan constantemente á igual distancia del vértice, tendrán que señalar un arco de circunferencia, cuya longitud será la misma que la de la base del cono propuesto.

301. Se dice que una pirámide se encuentra *inscripta* en un cono, ó un cono está *circunscrito* á una pirámide,

cuando la base de la pirámide es un polígono inscripto en la base del cono, y además poseen ambos cuerpos un mismo vértice.

302. *Conos semejantes* son aquellos cuyas alturas, lados y radios de las bases son directamente proporcionales. La existencia de los conos semejantes se manifiesta, sin más que considerar dos conos engendrados por triángulos rectángulos semejantes.

CAPÍTULO III.

Cilindro de revolución.

303. Se llama CILINDRO DE REVOLUCIÓN, al cuerpo engendrado por un paralelogramo rectángulo, que gira alrededor de uno de sus lados. FIG. 179.

Si se hace girar al rectángulo ABCD alrededor del lado AB, que sirve de eje, los lados AD y BC permanecerán siendo perpendiculares á la AB durante el movimiento, y como su longitud no varía, tendrán que engendrar dos círculos iguales (53) y paralelos (226), denominados *bases* del cilindro. El lado DC opuesto al eje, describe durante el giro la superficie lateral del cilindro.

Á la distancia que media entre las dos bases, se llama *altura*, y á la recta CD en cualquiera de las posiciones que toma durante el giro, se denomina *lado* del cilindro.

304. *La sección producida en un cilindro de revolución por un plano paralelo á las bases, es un círculo cuyo centro se halla en el eje.*

En efecto, siendo los planos de las bases perpendiculares al eje, todo plano paralelo á éstos, que corte al cilindro, será perpendicular al citado eje, y por lo tanto determinará un paralelo; luego tendrá que ser un círculo, cuyo centro se hallará situado en el antedicho eje.

305. *Todo plano paralelo al eje de un cilindro, que pase por dos puntos E y F, situados en una cualquiera de las circunferencias de las bases, cortará á la superficie lateral del cilindro según dos generatrices.*

En efecto, la generatriz EG es paralela al eje AB, y tiene un punto E en el plano que se considera, luego se hallará contenida en éste (201); análoga consideración pudiera hacerse respecto de la FH, por lo tanto ambas rectas serán las intersecciones del plano sección, con la superficie lateral del cilindro propuesto.

306. *La superficie lateral de un cilindro, es desarrollable,* en atención á que dos posiciones consecutivas de la generatriz, serán paralelas entre sí, en vista de que una y otra son paralelas al eje, y por consiguiente ambas estarán contenidas en un plano.

307. *La superficie lateral de un cilindro de revolución, al desarrollarse sobre un plano, determina un paralelogramo rectángulo, en el cual una de sus dimensiones tiene la misma longitud que la altura del cilindro, y la otra es igual á la circunferencia rectificada de una de las bases.*

En efecto, si haciendo coincidir una de las generatrices del cilindro propuesto con un plano, se le obliga á rodar sobre éste, sin que resbale, acontecerá que todas las generatrices de aquél, se irán aplicando sucesivamente sobre el mencionado plano. Á la vez las dos circunferencias de las bases irán señalando rectas iguales á ellas en longitud y paralelas; pero como la generatriz, en cualquiera de las diferentes posiciones que toma en el plano, es constantemente perpendicular á las bases, tendrá que ser también perpendicular á las dos paralelas mencionadas, supuesto que cada una de éstas se hallará situada en el plano de la respectiva base; lo cual manifiesta, que la figura formada en tales condiciones será un paralelogramo rectángulo, que poseerá las precitadas dimensiones.

308. Se dice que un prisma está INSCRIPTO en un cilindro, ó que un cilindro se halla CIRCUNSCRITO á un prisma, cuando las bases de éste son polígonos inscriptos en las bases del cilindro.

309. Se llaman CILINDROS SEMEJANTES, aquellos en que se verifica, que los ejes son proporcionales á los radios de las bases. La existencia de los cilindros semejantes se demuestra, sin más que suponer dos cilindros engendrados por paralelogramos rectángulos semejantes.

NOTA.—Fácilmente se explican las analogías que existen en las cuestiones, referentes al cono y al cilindro, fijándose en que este último puede ser considerado como si fuera un cono, cuyo vértice estuviera en el infinito.

CAPÍTULO IV.

Esfera.

ARTÍCULO 1.°

Propiedades de la superficie esférica.

310. Se llama ESFERA el cuerpo engendrado por un semicírculo, que gira alrededor de su diámetro.

Como todos los puntos de la semicircunferencia equidistan del centro, esta distancia se conservará la misma para todas las posiciones que toma la mencionada generatriz, y por lo tanto, todos los puntos de la superficie esférica equidistarán del centro de la generatriz, que es también el centro del cuerpo redondo que se considera.

Á la distancia del centro de la esfera á un punto cualquiera de su superficie se llama *radio:* á la recta que pasando por el centro termina por sus dos extremos en la superficie esférica, se llama *diámetro.*

De aquí se desprende, que todos los radios de una esfera son iguales, y que lo mismo se verificará con los diámetros.

ZONA ESFÉRICA es la parte de superficie esférica engendrada por una parte de la semicircunferencia generatriz, ó bien la porción de superficie de esfera comprendida entre dos planos paralelos. HUSO ESFÉRICO es la parte de superficie esférica comprendida entre dos posiciones de la semicircunferencia generatriz. REBANADA ESFÉRICA es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos. SECTOR ESFÉRICO es la parte de esfera engendrada por un sector del semicírculo generador. CUÑA ESFÉRICA es una porción de esfera comprendida entre dos posiciones del semicírculo generador.

311. *La sección producida en una esfera por un plano que pasa por su centro, es un círculo.* Supuesto que esta sección plana, que pasa por el centro, está limitada por una línea cerrada, que tiene todos sus puntos equidistantes del mencionado centro.

COROLARIO.—*Un diámetro cualquiera de la esfera puede servir de eje, así como de meridianos los diferentes círculos correspondientes á aquel diámetro.*

La sección producida en una esfera por un plano que no pase por su centro, es también un círculo, supuesto que si se considera el diámetro perpendicular al plano sección, se tendrá un eje de la esfera, con respecto del cual, la mencionada sección será un círculo paralelo (294).

312. Círculo *máximo* de la esfera, es el círculo determinado por la sección de un plano, que pasa por el centro de aquélla.

Se llama círculo *menor* á la sección producida por un plano, que no pasa por el centro de la esfera.

Se sabe que en el triángulo rectángulo AOO′, se verificará que $\overline{OA}^2 = \overline{O'A}^2 + \overline{OO'}^2$; como que OA es constante en una misma esfera, la suma de los cuadrados $\overline{O'A}^2 + \overline{OO'}^2$ también lo será, luego si O′A aumenta, OO′ disminuirá; esto manifiesta que *los círculos de una esfera son tanto menores, cuanto más se alejan del centro.*

Fig. 180.

Si ahora se supone en la misma esfera, otro círculo igual al anterior, se tendrá también $\overline{OA'}^2 = \overline{O''A'}^2 + \overline{OO''}^2$; pero como OA = OA′, resultará que

$$\overline{O'A}^2 + \overline{OO'}^2 = \overline{O''A'}^2 + \overline{OO''}^2 \ldots\ldots (1),$$

mas atendiendo á que O′A = O″A′ se verificará, que OO′ = OO″, lo cual dice que *en una misma esfera, los círculos iguales equidistan del centro.*

Si en la igualdad (1) se supone OO′ = OO″, se tendrá O′A = O″A′; esto hace patente, que es también cierto el recíproco del teorema anterior, ó sea, que *en esferas iguales, los círculos equidistantes del centro son iguales.*

Un círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales llamadas HEMISFERIOS, supuesto que superponiendo estas dos porciones de esfera, todos los puntos de las correspondientes superficies tendrían que coincidir, pues si alguno de ellos no coincidiese, el radio correspondiente á este punto sería mayor ó menor que los demás.

313. *Dos puntos de la superficie esférica, que no sean los extremos de un diámetro, determinan una circunferencia máxima;* en atención á que no estando en línea recta los dos puntos que se consideran y el centro, determinarán

un plano, que cortará á la superficie de la esfera, según una circunferencia máxima.

314. *Dos círculos máximos se cortan mutuamente en dos partes iguales,* supuesto que la intersección de ambos, será una recta que pasará por el centro de la esfera, terminará en la superficie esférica, y por lo tanto, será un diámetro común á los círculos máximos, que se consideran.

La superficie esférica es convexa, supuesto que si hubiera una recta que la cortase en tres ó más puntos, todo plano que pasara por dicha recta, cortaría á la superficie de la esfera, según una circunferencia, que tendría tres ó más puntos en línea recta, lo cual es inadmisible (114).

Se llama *plano tangente* á una esfera, el que tiene con ella un solo punto común.

El teorema que prueba la existencia del plano tangente á la superficie esférica, dice así: *Todo plano perpendicular*
Fig. 181. *al radio en su extremo, es tangente á la esfera.* En efecto, siendo por suposición OA la recta menor, que se puede trazar desde O al plano PQ, cualquier otro punto de este plano se hallará más distante del O, y por consiguiente encontrándose el punto A en la superficie esférica, todos los demás puntos del plano estarán fuera de ella; luego el plano PQ será tangente, en vista de que no tiene más que un solo punto común A con la esfera.

Recíproco.—*Todo plano tangente á la superficie esférica, es perpendicular al radio, que corresponde al punto de contacto.*

En efecto, hallándose todos los puntos de este plano fuera de la superficie esférica, excepto el punto de contacto A, cualquier otra recta OB, que se considere desde el centro á este plano, saldrá de la esfera, y será por consiguiente mayor que OA; luego esta última recta será la más corta que se puede tirar desde el centro al plano

PQ, y en su consecuencia será perpendicular á este plano (204, COROLARIO).

COROLARIO.—*Por un punto de la superficie esférica, no puede considerarse sino un solo plano tangente á ella;* supuesto que no es posible admitir más que un solo plano, que pasando por un punto de una recta, sea perpendicular á ésta.

Cuatro puntos que no están en un mismo plano, determinan una esfera. FIG. 182.

En efecto, sean A, B, C y D cuatro puntos, que no se hallan en un plano; considerando el plano determinado por A, B y C, así como también el que pasa por B, C y D, se tendrá, para intersección de ambos, la recta BC.

Si se hallan ahora los centros E y F de los círculos circunscritos á los triángulos ABC y BCD, se tendrá que, al levantar las perpendiculares EO y FO á los planos de estos triángulos, ambas perpendiculares estarán en el plano EGFO, perpendicular á la intersección BC, y no pudiendo ser paralelas, por cortarse los planos ABC y BCD, se encontrarán en un punto tal como el O; pero este punto equidistante de A, B y C, por ser punto de la perpendicular EO, como que equidista también de B, C y D, por ser un punto de la perpendicular OF, tendrá que estar á igual distancia de los cuatro puntos A, B, C y D, y por lo tanto, si se considera una esfera cuyo centro fuera el punto O, y cuyo radio tuviera por longitud OA, su superficie pasaría indefectiblemente por los cuatro mencionados puntos.

Otra esfera que pasara por éstos, tendría el mismo centro, supuesto que éste habría de encontrarse á la vez en las rectas EO y FO (211), y por lo tanto se hallaría en su punto de intersección O; luego ambas esferas poseerían el centro común é igual radio, y en su consecuencia, se confundirían en una sola.

315. Los extremos de un eje de la esfera, son POLOS de todo círculo paralelo.

Cualquiera de los polos de un paralelo de la esfera, equidista de todos los puntos de la circunferencia de aquél; supuesto que como el eje es un diámetro perpendicular á todo círculo paralelo, por cuyo centro pasa, de aquí que las distancias que median entre cada uno de los polos y los diferentes puntos de la circunferencia, correspondiente al paralelo que se considera, serán iguales, por oblicuas que se separan igualmente del pie del eje (211).

ARTÍCULO 2.°

Ángulos y polígonos esféricos.

316. Ángulo esférico es el ángulo que forma la abertura de dos arcos de circunferencia máxima, que se cortan. Estos arcos se llaman *lados* del ángulo, y el punto de encuentro *vértice*.

Fig. 183. 317. Un ángulo esférico se aprecia por el formado con las tangentes á sus lados en su vértice.

Las tangentes AB y BC á los lados BD y BE se hallan respectivamente situadas en los planos DBO y EBO, y son perpendiculares al diámetro OF (115, Recíproco); con tal motivo forman el ángulo rectilíneo correspondiente al diedro DBFE y por lo tanto, se tendrá que *el ángulo determinado por dos arcos de circunferencia máxima, será igual al diedro que forman los planos, que las contienen.*

Un ángulo esférico y un diedro se dice que son *correspondientes,* cuando los lados del ángulo esférico están contenidos en las caras del diedro.

Las proposiciones comprendidas entre los números 17 y 24, que se refieren á los ángulos rectilíneos, tienen sus análogas, y se demuestran de una manera idéntica al tratar de los ángulos esféricos.

Si dos ángulos esféricos son iguales, sus diedros correspondientes serán también iguales.

Recíproco.—*Si dos ángulos diedros correspondientes á* *dos ángulos esféricos de una misma esfera son iguales, dichos ángulos esféricos serán también iguales.*

Ambas proposiciones se hacen patentes, sin más que superponer los elementos que forman parte de las respectivas hipótesis.

Se llama TRIÁNGULO ESFÉRICO, la porción de superficie de esfera comprendida entre tres arcos de círculo máximo. Estos arcos se denominan *lados* del triángulo.

Se entiende por TRIEDRO CORRESPONDIENTE á un triángulo esférico, el formado por los planos que pasan por sus lados y el centro de la esfera; según esto sus aristas serán los radios trazados á los vértices. Así OABC será el triedro correspondiente al triángulo esférico ABC. FIG. 184.

318. *En todo triángulo esférico, los lados son medida de los ángulos planos del triedro correspondiente; y los ángulos son medida de los diedros del citado triedro.*

En efecto, los lados AB, AC y BC del triángulo esférico que se considera, son arcos de circunferencia máxima, trazados desde el vértice común O de los ángulos planos AOB, AOC y BOC del triedro correspondiente, y por lo tanto son sus medidas.

Los ángulos diedros cuyas aristas son OA, OB y OC, tienen por medida los rectilíneos correspondientes, que, como se tiene dicho (317), son iguales á los ángulos, que forman las tangentes á los lados de los ángulos en sus respectivos vértices; pero como estas tangentes miden los ángulos esféricos, claro es que también medirán los diedros correspondientes.

Según esto, las propiedades de los triángulos esféricos se enuncian y demuestran, considerando los triedros correspondientes á ellos, y sustituyendo las denominaciones de *ángulo plano* y *diedro* con las de *lado* y *ángulo esférico.*

Así en el teorema correspondiente al del número 235, se tendrá:

319. *Un lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.*

En efecto, en el triedro correspondiente al triángulo esférico, se tiene, según lo dicho (318), que siendo

$$AOB < AOC + BOC,$$

y también $AOB > AOC - BOC$; al reemplazar en estas desigualdades los ángulos planos por sus medidas, resultará que $AB < AC + BC$ y $AB > AC - BC$.

La suma de los lados de un triángulo esférico, es menor que una circunferencia máxima.

Supuesto que se sabe (248), que $AOB + BOC + AOC < 4R$; reemplazando en vez de los ángulos planos del triedro correspondiente sus medidas ó sean los lados del triángulo esférico, se tendrá $AB + BC + AC < 2\pi r$.

Corolario.—*Cada lado de un triángulo esférico es menor que media circunferencia máxima,* pues si fuera mayor, la suma de los otros dos lados, valdría más que media circunferencia máxima, y por lo tanto, el valor del conjunto de los tres lados excedería de una circunferencia, lo que se acaba de ver que es inadmisible.

La suma de los ángulos de un triángulo esférico, es mayor que dos rectos y menor que seis; pues en su triedro correspondiente, la suma de los diedros es mayor que dos rectos y menor que seis.

De aquí resulta, que un triángulo esférico puede tener uno, dos ó tres ángulos rectos, llamándose en estos dos últimos casos *birectángulo* y *trirectángulo.*

Al exceso de la suma de los ángulos de un triángulo esférico sobre dos rectos, se llama *exceso esférico.*

En todo triángulo esférico, á ángulos iguales se oponen lados iguales, y á mayor ángulo se opone mayor lado; supuesto que en su triedro correspondiente, se verifica que á diedros iguales, se oponen ángulos planos iguales, y á mayor diedro, se opone mayor ángulo plano (239-240).

320. Se llaman *triángulos esféricos suplementarios,* aquellos

que corresponden á triedros suplementarios, y por lo tanto, los lados del uno son suplementos de los ángulos del otro.

Se dice que dos triángulos esféricos, considerados en una misma esfera, son *simétricos,* cuando lo son sus triedros correspondientes, de donde se infiere, que estos triángulos esféricos tienen todos sus elementos respectivamente iguales, pero que, como no se hallan dispuestos del mismo modo, no pueden coincidir al superponerlos.

Análogamente á lo que sucede al tratar de los casos de igualdad de dos triedros, se verificará en los triángulos esféricos que se consideren en una misma esfera ó en esferas idénticas, que serán iguales, cuando tengan respectivamente iguales y del mismo modo dispuestos: 1.° *Un lado y los dos ángulos contiguos á él:* 2.° *Dos lados y el ángulo comprendido:* 3.° *Los tres lados:* 4.° *Los tres ángulos.* Supuesto que en cualquiera de estos casos serán iguales los triedros correspondientes.

En todo triángulo esférico birectángulo, el ángulo desigual tiene por medida el lado opuesto, y su vértice es polo de este mismo lado. FIG. 185.

En efecto; el triedro V correspondiente al triángulo esférico ABC, tiene los triedros VB y VC rectos, y por lo tanto la intersección VA de los planos AVB y AVC será perpendicular al BVC (223); luego el vértice A será polo de la circunferencia, que contiene al arco BC, y como el ángulo BVC es el rectilíneo correspondiente al diedro VA, el arco BC será su medida, y por tanto también será medida del ángulo esférico, cuyo vértice es A.

COROLARIO.—*Cada uno de los lados de un triángulo esférico trirectángulo, es un cuadrante;* en atención á que en este caso, según el teorema que antecede, cada ángulo esférico tiene por medida á su lado opuesto, y como aquéllos son rectos, sus lados opuestos serán cuadrantes.

321. Se llama POLÍGONO ESFÉRICO, la porción de superficie esférica limitada por tres ó más arcos de circunferencia máxima.

Los polígonos esféricos pueden ser *convexos* y *no convexos.* Los primeros se distinguen de los segundos, en que prolongando en ellos uno cualquiera de sus lados, queda todo el polígono en un mismo hemisferio.

Los polígonos convexos, son los únicos de que se ocupa la Geometría elemental.

Fig. 186. *En todo polígono esférico convexo se verifica, que un lado cualquiera es menor que una semicircunferencia máxima.*

En efecto, si en el polígono *abcdef*, el lado *ab* fuera mayor que media circunferencia máxima, se podría tomar en ese lado una porción *ag* igual á media circunferencia, de modo que al prolongar el lado contiguo *af*, tendría que pasar por el punto *g* (314), y por lo tanto no podría quedar todo el polígono en un mismo hemisferio.

322. *En todo polígono esférico, cada lado es menor que la suma de todos los demás.*

En efecto, descomponiendo el polígono *abcdef*, por medio de arcos de circunferencia máxima, en tantos triángulos esféricos como lados tiene el polígono menos dos, se tendrá (319)

$$ab < bc + ac;\ ac < cd + ad;\ ad < ed + ae;\ ae < af + fe;$$

sumando ordenadamente estas desigualdades, y suprimiendo los términos iguales, que aparecen en uno y otro miembro del resultado, se tendría que

$$ab < bc + cd + de + ef + af.$$

Fig. 187. 323. *La línea más corta que puede trazarse entre dos puntos de la superficie esférica, es el arco menor de circunferencia máxima que pasa por ellos.*

En efecto, de suponer que hubiera otra línea *acdefgb*, diferente de la porción *amb* de circunferencia máxima, que fuera más corta que este arco, resultaría que, si al considerar á aquella línea dividida en un número cualquiera de partes, se hace pasar por cada dos puntos de división consecutivos un arco de circunferencia máxima, el conjunto de éstos formará un polígono esférico, cuyo contorno puede llegar á confundirse sensiblemente con la línea *acdefgb*, al hacer tan pequeñas como se desee, las porciones en que esta línea se dividió. Como el arco de círculo máximo *amb*, es menor que la suma de todos los demás lados del polígono esférico así formado, tendrá también que ser menor que la línea *acdefgb* supuesto que ésta se diferenciará de la expresada suma en una cantidad tan pequeña, como se desee.

Llámase *distancia esférica* entre dos puntos de la superficie de una esfera, al arco menor de circunferencia máxima, que por ellos pasa.

Cuando uno de los dos puntos corresponda á una circunferencia, y el otro es el polo de ésta, la distancia esférica se denomina en tal caso *radio esférico*, y la cuerda que subtiende al radio esférico, se dice que es la *distancia polar*.

SECCIÓN SEGUNDA.

ÁREAS Y VOLÚMENES.

CAPÍTULO I.

Áreas de los cuerpos redondos.

ARTÍCULO 1.°

Áreas del cono y cilindro de revolución.

324. *El área de la superficie lateral de un cono de revolución, es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de la base.*

En efecto, si se considera una pirámide regular inscripta en el cono propuesto, y se llama A al área de su superficie lateral, se tendrá (274) que $A = \frac{1}{2}ap$ ..... (1), pero siendo esta expresión independiente del número de caras de la pirámide, si aumenta el número de ellas indefinidamente, aumentará también el número de lados del polígono, que constituye la base de la antedicha pirámide, y claro está que el perímetro de esta base se irá aproximando cada vez más á la circunferencia de la base del cono, que sería su límite; así como el área lateral de la mencionada pirámide tenderá también á igualarse con su límite, que será la del cono dado; en su consecuencia, llamando S al valor del área de la superficie lateral de éste, l á su lado y c á la circunferencia de la base, se tendrá, reemplazando las cantidades que intervienen en la igualdad (1) por sus respectivos límites (187, COROLARIO 1.º), que $S = \frac{1}{2} lc$. Si ahora se sustituye en esta expresión, en lugar de c su igual $2\pi r$, resultará $S = \pi rl$, que es la fórmula abreviada de que se hace uso, para calcular el área de la superficie lateral de un cono de revolución.

El área de la superficie total, es evidente que estará dada por la expresión $\pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

325. *El área de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución, cuyas bases sean paralelas, equivale al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de sus bases.*

Si en cada uno de los dos conos de revolución, que determinan por diferencia el tronco propuesto, se inscribe una pirámide regular, se tendrá, en el supuesto de que una y otra sean semejantes, que la diferencia de sus superficies, equivaldrá á la de un tronco de pirámide inscripto en el tronco de cono dado; pero atendiendo á que cuando crece indefinidamente el número de caras de ambas pirámides, sus respectivos límites son las áreas de los conos circunscritos á ellas, resultará de aquí, que el límite de la diferencia de aquellas superficies, ó sea el de la superficie lateral del tronco de pirámide inscripta, tendrá que ser precisamente la del tronco de cono, que se considera.

Llamando A al área del tronco de pirámide, se tendrá, según lo dicho (275), que $A = a \times \frac{1}{2}(bn + b'n)$ ..... (2).

Si se representa con S al área lateral del tronco de cono, con l á su lado, y con R y r los radios de las circunferencias de las bases, al sustituir en la igualdad (2), en vez de las cantidades variables sus límites respectivos, se verificará que $S = l \times \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r) = \pi l\,(R + r)$ ..... (3).

Fig. 188. Ahora bien, si se unen los puntos medios O'' y T de la altura y del lado del tronco de cono, se tendrá la recta $O''T$, que será paralela á las $O'Q$ y ON é igual á

$$\frac{O'Q + ON}{2} = \frac{R + r}{2}$$

(78), de modo que considerando á $O''T$ como radio de la circunferencia media resultará, que $R' = \frac{R + r}{2}$, de donde $R + r = 2R'$, y por lo tanto al sustituir este resultado en la expresión (3), se verificará que $S = 2\pi R'l$, lo que manifiesta, que *el área de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución de bases paralelas, es igual al producto de su lado por la* CIRCUNFERENCIA MEDIA.

326. *El área de la superficie lateral de un cilindro de revolución, es equivalente al producto de su lado por la circunferencia de su base.*

En efecto, considerando un prisma regular inscripto en el cilindro propuesto, y repitiendo análogas consideraciones á las que se tienen hechas, para deducir el área de la superficie lateral de un cono, se verificaría, en vista de que el área de la superficie lateral de un prisma recto está dada (**276**, Corolario) por $A = ap$, que la del cilindro propuesto tendría que ser $S = 2\pi ra$.

Las áreas de las superficies laterales ó totales de dos conos de revolución semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.

Sean R y r los radios, A y a las alturas, L y l los lados de los conos que se consideran; evidentemente se verificará, que

$$\frac{\pi RL}{\pi rl} = \frac{R}{r} \times \frac{L}{l};$$

pero por ser semejantes ambos conos, se tendrá, $\frac{R}{r}=\frac{L}{l}=\frac{A}{a}$; luego sustituyendo, en la igualdad anterior, en vez de $\frac{L}{l}$ su igual $\frac{R}{r}$, resultará, que $\frac{\pi RL}{\pi rl}=\frac{R^2}{r^2}$; mas como que $\frac{R^2}{r^2}=\frac{L^2}{l^2}=\frac{A^2}{a^2}$, se tendrá $\frac{\pi RL}{\pi rl}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{L^2}{l^2}=\frac{A^2}{a^2}$; con cuyo motivo queda demostrado el teorema, en el caso de que se comparen las áreas de las superficies laterales de los conos que se consideran; para hacer extensiva la demostración al caso de que aquéllas fueran totales, no habría más que, según lo dicho (**324**), tener en cuenta que $\frac{\pi R(L+R)}{\pi r(l+r)}=\frac{R(L+R)}{r(l+r)}$; y como por ser $\frac{L}{l}=\frac{R}{r}=\frac{A}{a}$ se vericará $\frac{L+R}{l+r}=\frac{R}{r}$, y por lo tanto,

$$\frac{\pi R(L+R)}{\pi r(l+r)}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{L^2}{l^2}=\frac{A^2}{a^2}.$$

Las áreas de las superficies laterales ó totales de dos cilindros de revolución semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.

Este teorema se demuestra de un modo análogo al empleado en la proposición anterior.

ARTÍCULO 2.°

Área de la esfera.

327. La proposición que sirve de fundamento para deducir el área de la superficie esférica, dice como sigue: *Si un semipolígono regular gira alrededor de su diámetro, el área de la superficie engendrada por el correspondiente semicontorno es igual al producto del eje, por la circunferencia, cuyo radio es la apotema.* Fig. 189.

Con el fin de que el semicontorno del polígono, que se considera, tenga uno de sus lados paralelos al eje, se supondrá que sea impar el número de los lados de aquél. Claro es que los demás lados serán oblicuos con respecto del eje, y dos de ellos tendrán en éste uno de sus extremos.

El lado AB del semicontorno ABCDEF, engendra, al girar alrededor del eje AF, la superficie lateral de un cono cuya área estará dada (**324**) por la expresión $\pi BG \times AB$; pero como $AB = 2AH$, se tendrá que

$$\pi BG \times AB = 2\pi BG \times AH.$$

Mas en vista de que los triángulos rectángulos AOH y ABG son semejantes (**81**), resultará $\frac{OH}{BG} = \frac{AH}{AG}$, de donde $BG \times AH = OH \times AG$, y por lo tanto el área engendrada por el lado AB equivaldrá á $2\pi \times OH \times AG$.

El lado inmediato BC engendrará á su vez la superficie lateral de un tronco de cono de bases paralelas, cuyo valor estará expresado por $2\pi \times IJ \times BC$ (**325**); pero como son semejantes los triángulos rectángulos OIJ y CLB (**86**), se verificará que $\frac{IJ}{BL} = \frac{OI}{BC}$; luego $IJ \times BC = BL \times OI$, por lo tanto, el área de la superficie engendrada por el lado BC, equivaldrá á $2\pi \times OI \times BL$; pero como $BL = GK$, resultará que el valor de la precitada área será $2\pi \times OI \times GK$.

El lado CD, paralelo al eje, engendrará la superficie lateral de un cilindro, cuya área (**326**) será igual á $2\pi \times DN \times DC$; mas como $DN \times DC = MO \times KN$, la expresión anterior se transformará en $2\pi \times MO \times KN$.

Podría continuarse demostrando que el área de la superficie engendrada por los demás lados del semiperímetro, era también igual al producto de su proyección sobre el eje, por la circunferencia cuyo radio es la apotema; y siempre se llegaría á tener que, llamando a á la apotema y S al área de la superficie engendrada por el semicontorno ABCDEF, al sumar las áreas parciales, cuyos valores se conocen, resultaría

$$S = 2\pi a\,(AG + GK + KN + NP + PF) = 2\pi a \times AF.$$

328. *El área de la superficie esférica, equivale al producto de su diámetro por la circunferencia de círculo máximo.*

Por lo que se tiene dicho (**137**, Corolario), se infiere que la semicircunferencia es el límite de la porción de contorno correspondiente á los polígonos regulares, que en aquélla están inscriptos, y por lo tanto las superficies que estas líneas quebradas engendran, al girar alrededor del diámetro, tendrán por límite superior la superficie esférica; luego llamando r al radio de la esfera, resultará, que el área de su superficie, según el teorema anterior, estará dada por la expresión $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. Este resultado manifiesta que el área de la esfera *equivale al cuádruplo del área de su círculo máximo.*

Corolario.—*Las áreas de dos superficies esféricas, son proporcionales á los cuadrados de sus respectivos radios.*

Siendo R y r los radios de las esferas que se consideran, es evidente, que se tendrá $\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2}$, lo cual demuestra el teorema.

329. En una zona esférica, las circunferencias descritas por los extremos del arco generador se llaman *bases,* y la proyección del arco generador sobre el eje recibe el nombre de *altura* de la zona.

Es evidente, que cuando uno de los extremos del arco generador se halla en el eje, entonces la zona, que también suele llamarse *casquete esférico,* no tendrá sino una sola base, que será la circunferencia descrita por el otro extremo.

330. *El área de una zona esférica cualquiera, es igual al producto de su altura por la circunferencia de círculo máximo.*

Si se considera dividido en partes iguales el arco que engendra la zona, y se trazan las cuerdas de estos arcos parciales, el área de la superficie que engendra esta porción de contorno de polígono regular, estará dada con el producto de su proyección sobre el eje, por la circunferencia cuyo radio será la apotema, y por lo tanto el límite de aquella área, ó sea el de la superficie engendrada por el antedicho arco, tendrá que ser igual al límite del mencionado producto, que será el resultado de multiplicar la altura de la zona por la circunferencia máxima.

331. *El área de un huso esférico, es igual al producto de su círculo máximo por la medida del ángulo del huso.*

Siguiendo el procedimiento empleado (125-126), para demos-
FIG. 183. trar que la relación de dos ángulos rectilíneos es igual á la de sus arcos correspondientes descritos con el mismo radio, se haría patente, que la relación que existe entre dos husos correspondientes á una misma esfera, es la misma que la de sus ángulos respectivos esféricos, y en esta atención, llamando H al área del huso ABCD, a la medida del ángulo esférico correspondiente BAD, y tomando por unidad al ángulo recto R, se tendría que $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{ADCE}}=\frac{\mathrm{BAD}}{\mathrm{DAE}}$; de donde se desprende, que

$$\frac{\mathrm{H}+\mathrm{ADCE}}{\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{BAD}+\mathrm{DAE}}{\mathrm{BAD}};$$

ó en otros términos, $\frac{2\pi r^2}{\mathrm{H}}=\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{BAD}}$, y por lo tanto,

$$\mathrm{H}=\frac{2\pi r^2\mathrm{BAD}}{2\mathrm{R}}=\pi r^2 a.$$

CAPÍTULO II.

Volúmenes.

ARTÍCULO 1.º

Volúmenes del cono y cilindro de revolución.

332. *El volumen de un cono, es igual al tercio del producto del área de la base por su altura.*

En efecto, se tiene visto (324) que el cono puede considerarse como una pirámide regular de infinito número de caras, por lo tanto su volumen será igual al tercio del producto de su altura por el área de la base. Llamando a á la altura del cono y r al radio de su base, se tendrá que el volumen del cono que se considera, estará dado por la expresión $\frac{1}{3}\pi r^2 a$.

333. *El volumen de un cono truncado de bases paralelas, es igual al tercio de su altura, multiplicado por la suma de las bases, más una media proporcional entre ellas.*

En efecto, el volumen de un tronco de cono de bases paralelas puede considerarse, según lo dicho (325), como el límite de los troncos de pirámide inscriptos en él, y por lo tanto será igual al tercio del producto de su altura por la suma de las áreas de sus bases, y de una media proporcional entre ellas (290, Corolario 2.º). De modo que, si se designa por a la altura del tronco y por r y r' los radios de las bases, el volumen del tronco de cono estará dado por la expresión

$$\frac{1}{3}a\left(\pi r^2+\pi r'^2+\sqrt{\pi^2 r^2 r'^2}\right)=\frac{1}{3}\pi a\left(r^2+r'^2+rr'\right).$$

334. *El volumen de un cilindro equivale al producto del área de su base por su altura.* Supuesto que si se considera al cilindro propuesto, como un prisma de infinito número de caras (287), llamando r al radio de los círculos de las bases y a á la altura del cilindro, se tendrá para expresión del volumen V de éste, que $V=\pi r^2 a$.

Los volúmenes de dos conos semejantes, son proporcionales á los cubos de los radios de las bases, á los cubos de sus lados y á los cubos de sus alturas.

Llamando R, L y A respectivamente al radio, lado y altura de uno de los dos conos, y r, l y a al radio lado y altura del otro, se verificará, que $\dfrac{\frac{1}{3}\pi R^2 A}{\frac{1}{3}\pi r^2 a}=\dfrac{R^2}{r^2}\times\dfrac{A}{a}$; pero como $\dfrac{A}{a}=\dfrac{R}{r}$, al sustituir esta relación en el segundo miembro de la igualdad anterior, resultará que $\dfrac{\frac{1}{3}\pi R^2 A}{\frac{1}{3}\pi r^2 a}=\dfrac{R^3}{r^3}=\dfrac{L^3}{l^3}=\dfrac{A^3}{a^3}$.

Análogamente pudiera también demostrarse, que *la relación que existe entre los volúmenes de dos troncos de cono ó de dos cilindros de revolución semejantes, es la misma que la de los cubos de sus rectas homólogas.*

ARTÍCULO 2.°

Proposiciones que sirven de fundamento para determinar el volumen de la esfera.

335. *El volumen engendrado por un triángulo, que gira alrededor de una recta exterior á él, que pasa por uno de sus vértices, y se halla contenida en su plano, equivale al área*
FIG. 190. *de la superficie descrita por la base del triángulo, multiplicada por el tercio de la altura.*

Pueden ocurrir tres casos: 1.º Que uno de los lados del triángulo propuesto coincida con la recta que sirve de eje. 1.ª

Sea el triángulo ABC, que gira alrededor del eje FG. Trácese la altura AD, una vez que se considere á la BC como base, y tírese la perpendicular CE al lado AB, y se tendrá que, al girar el triángulo ABC, engendrará un cuerpo compuesto de los conos formados por los triángulos ACE y BCE; determinando ahora, los volúmenes de ambos conos y sumándolos, se tendrá el volumen total.

Así, el engendrado por el triángulo

$$ACE = \frac{1}{3} AE \times \pi \overline{CE}^2,$$

y el que corresponde al $BCE = \frac{1}{3} BE \times \pi \overline{CE}^2$; componen el volumen V engendrado por ABC, y por lo tanto se tendrá que $V = \frac{1}{3}(AE + BE)\pi \overline{CE}^2 = \frac{1}{3} AB \times \pi \overline{CE}^2$; pero como $AB \times CE = BC \times AD$, supuesto que cada uno de estos productos expresa el doble del área del triángulo propuesto; al hacer la correspondiente sustitución en la igualdad anterior, resultará

$$V = \frac{1}{3} AD \times \pi CE \times BC,$$

en donde $\pi CE \times BC$, expresa el área de la superficie descrita por la base BC del triángulo propuesto, y AD su altura.

2.º Que la base del triángulo, siendo oblicua con respecto del eje FG, no corte á éste. Sea el triángulo ABC: prolongando la base BC hasta que encuentre al eje, resultará que el volumen engendrado por el triángulo pro- 2.ª puesto, equivaldrá á la diferencia de los volúmenes engendrados por los triángulos ACH y ABH en su movimiento giratorio, y como la expresión de estos volúmenes puede desde luego apreciarse, por estar comprendidos en el caso anterior, si se llaman S, S′ y S″ las áreas respectivas de las superficies engendradas por las bases CH, BH y BC, se tendrá que

$$V = \frac{1}{3}AD \times S - \frac{1}{3}AD \times S' = \frac{1}{3}AD \times S''.$$

3.ª 3.° Que la base del triángulo ABC sea paralela al eje. El volumen engendrado por este triángulo, evidentemente equivale á la diferencia que resulta al quitar del cilindro engendrado por el paralelogramo rectángulo BCEH, los volúmenes de los conos descritos por los triángulos rectángulos ACE y ABH. El volumen del mencionado cilindro es igual á $BC \times \pi\overline{AD}^2$, y los volúmenes de los citados conos están dados por las expresiones $\frac{1}{3}AE \times \pi\overline{AD}^2$ y $\frac{1}{3}AH \times \pi\overline{AD}^2$; de donde se deduce que

$$V = BC \times \pi\overline{AD}^2 - \frac{1}{3}\pi\overline{AD}^2\,(AE + AH) =$$

$$= BC \times \pi\overline{AD}^2 - \frac{1}{3}BC \times \pi\overline{AD}^2 = \frac{2}{3}\pi\overline{AD}^2 \times BC =$$

$$= \frac{1}{3}AD \times 2\pi AD \times BC,$$

cuyo resultado está conforme con lo que se deseaba demostrar.

336. *El volumen del cuerpo engendrado por un sector de polígono regular ABCDEFO, que gira alrededor de una recta IG exterior á él, que pasa por su centro y se halla en su plano, equivale al producto del área de la superficie des-*

crita por la línea quebrada ABCDEF, multiplicada por el tercio de la apotema OH. FIG. 191.

En efecto, si se descompone el sector poligonal propuesto en triángulos y se representan por V, V′, V″, ..., los volúmenes que éstos engendran en una revolución completa, y por S, S′, S″, ..., las áreas descritas por las bases AB, BC, CD, ..., el volumen que se desea deducir estará expresado por

$$V + V' + V'' + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{1}{3}OH \times S + \frac{1}{3}OH \times S' + \frac{1}{3}OH \times OS'' + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{1}{3}OH\,(S + S' + S''\ldots\ldots)$$

337. *El volumen de un sector esférico, es igual al tercio del producto de su radio por el área de la correspondiente zona.*

En efecto, el sector esférico, es límite del cuerpo engendrado por un sector poligonal, cuyo número de lados va aumentando indefinidamente; de modo que si se representan por X, Z y r el volumen del sector esférico, el área de la zona y el radio de la esfera, y se hace aplicación del teorema de los límites (ARITM.ª 187, COROLARIO 1.º), al resultado anterior, se tendrá que $X = \frac{1}{3}rZ$

ARTÍCULO 3.º

Volumen de la esfera.

338. *El volumen de la esfera es igual al tercio del producto de su área por su radio.* FIG. 192.

En efecto, toda esfera puede considerarse como la suma

FIG. 192. de dos sectores esféricos OABC y OABE cuyas respectivas zonas componen la superficie esférica, así es que si se designa por r el radio de ésta, el volumen de la esfera será igual á $\frac{1}{3}r \times 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus radios.

En efecto, si r y r' son los radios y V y V′ los volúmenes respectivos de dos esferas, es evidente que

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r'^3} = \frac{r^3}{r'^3} \text{ ó sea } \frac{V}{V'} = \frac{r^3}{r'^3}.$$

El volumen de una cuña esférica DACB, equivale al producto del área del correspondiente huso, por el tercio del radio.

En efecto, designando por V el volumen de la cuña esférica, por a á la medida del ángulo del huso, siempre que se tome como unidad al ángulo recto, y por r al radio de la esfera, atendiendo á que la relación entre el volumen de la cuña y el de la esfera, es evidentemente igual á la que existe entre el área del huso y la de la esfera, se tendrá, $\frac{V}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\pi r^2 a}{4\pi r^2}$; de donde

$$\frac{V}{\frac{1}{3}r} = \pi r^2 a, \text{ y por lo tanto, } V = \frac{1}{3}r \times \pi r^2 a.$$

Sirviéndose de un procedimiento análogo al empleado (328, COROLARIO), sería fácil demostrar que los volúmenes de dos sectores y de dos cuñas semejantes, eran también proporcionales á los cubos de los radios.

339. SEGMENTO ESFÉRICO es la porción de esfera limitada por un casquete esférico y el círculo que corresponde á su base. Así, en ABDC se tendrá un segmento esférico menor que un hemisferio, y en ABDE otro segmento que, en este caso, será mayor que media esfera. Para deter-

minar el volumen del primero de estos dos segmentos citados, no habría sino restar del volumen del sector esférico OACB, el del cono de revolución OABD; y para conseguir el del segundo, se tendría que agregar al volumen del sector OAEB el del cono OABD.

El volumen de una rebanada esférica, se hallaría restando los volúmenes de los dos segmentos que la determinan. Así, para deducir el volumen de la rebanada AA′C′C, se restaría del volumen del segmento esférico A′BC′, el del segmento ABC. FIG. 180.

ARTÍCULO 4.°

Problemas numéricos.

340. El lugar propio para resolver, por medio de la regla y del compás, los problemas que se refieren á cuestiones de la Geometría de tres dimensiones, es la Geometría descriptiva; la cual suministra procedimientos sencillos y verdaderamente prácticos, para obtener soluciones que poseen aproximación suficiente, en las aplicaciones que de aquéllos se hacen. Por tal consideración sólo se tratará en esta parte de los problemas numéricos, teniendo en cuenta al resolver éstos, lo dicho en los números 183 y 185.

PROBLEMAS GENERALES.—*Ejemplo 1.° Conociendo los radios R y* r *de las bases de un tronco de cono y su altura* a, *determinar los volúmenes V y V′ de los conos total y deficiente, que á aquél corresponden.*

Llamando A y A′ las alturas desconocidas del cono total y del deficiente, se tendrá $\frac{R}{r} = \frac{A}{A'}$ de donde $\frac{R}{R-r} = \frac{A}{A-A'}$ y por lo tanto $A = \frac{Ra}{R-r}$, supuesto que $a = A - A'$; luego

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{Ra}{R-r} \times \pi R^2 = \frac{\pi a R^3}{3(R-r)}.$$

También se verificará, que $\frac{r}{R-r} = \frac{A'}{A-A'}$, y por consiguiente, $A' = \frac{ra}{R-r}$, luego $V' = \frac{1}{3} \times \frac{ra}{R-r} \times \pi r^2 = \frac{\pi a r^3}{3(R-r)}$.

Si se quisiera comprobar ambos resultados, no habría sino quitar del volumen del cono total el del deficiente, y la diferencia debería expresar el volumen del tronco de cono que se considera. En efecto,

$$\frac{\pi a R^3}{3(R-r)} - \frac{\pi a r^3}{3(R-r)} = \frac{1}{3}\pi a\left(\frac{R^3-r^3}{R-r}\right) = \frac{1}{3}\pi a(R^2+Rr+r^2).$$

Obsérvese, con tal motivo, que se ha conseguido por este medio deducir también la expresión del volumen de un tronco de cono de bases paralelas (**333**).

FIG. 188. Si en las expresiones que corresponden á los valores de V y V', se hace $R = r$, ambas se reducen al infinito, y fácilmente se explica que así sea, por cuanto en tal caso las generatrices QN, PM, ..., serán paralelas al eje OO', y por lo tanto sólo se encontrarán en el infinito; luego los dos conos se habrán transformado en cilindros, cuyas respectivas alturas serán mayores que cualquiera magnitud finita.

En el supuesto de que $R - r = a$, los valores de V y V' equivaldrán á la cuarta parte del volumen de una esfera, cuyo radio sea igual al de la base del respectivo cono.

EJEMPLO 2.°—*En el supuesto de que un paralelogramo rectángulo gira sucesivamente alrededor de cada uno de sus lados desiguales, se desea saber cuál de los cilindros, con tal motivo engendrado, tiene mayor volumen.*

Llamando L y l á los lados mayor y menor del paralelogramo rectángulo propuesto, se tendrá, que cuando el lado menor l haga veces de eje, el volumen engendrado por el mencionado rectángulo estará expresado por $\pi L^2 \times l$, y cuando el eje de giro sea L, el volumen del correspondiente cilindro, será $\pi l^2 \times L$. Comparando los factores de que se componen ambos resultados, se deduce, que el volumen del cuerpo que resulta, al hacer girar el rectángulo alrededor del lado menor, será mayor que el del otro.

De la comparación de ambas expresiones, se desprende también, que $\frac{\pi L^2 l}{\pi l^2 L} = \frac{L}{l}$; lo cual manifiesta que los volúmenes de los cilindros, que en las mencionadas condiciones puede engendrar un mismo rectángulo, están en razón inversa de las longitudes de sus respectivos ejes.

Ejemplo 3.º—*Dada la cuerda de un segmento de círculo y su proyección sobre un diámetro exterior al mencionado segmento, determinar la expresión del volumen engendrado por éste, al girar alrededor del citado diámetro.* Fig. 192.

Sea el segmento IMLH, que se supone gira alrededor del diámetro CE; c la cuerda IL y p su proyeción sobre el citado diámetro. Como que el volumen V descrito por el segmento, que se considera, es igual á la diferencia entre los volúmenes descritos por el sector circular OIML y el triángulo OIL, se verificará que

$$V = 2\pi OL \times p \times \frac{1}{3} OL - 2\pi OH \times p \times \frac{1}{3} OH =$$

$$= \frac{2}{3}\pi p(\overline{OL}^2 - \overline{OH}^2);$$

pero como $\overline{OL}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{HL}^2$ y $HL = \frac{c}{2}$; resultará que

$$V = \frac{2}{3}\pi p \times \frac{c^2}{4} = \frac{1}{6}\pi c^2 p,$$

cuya fórmula puede estar representada por la sexta parte del volumen de un cilindro, que tenga por radio la cuerda c, y por altura su proyección sobre el diámetro EC, que sirve de eje.

Si la cuerda CC′ fuera paralela al eje BB′, se tendría $CC' = O'O''$, y por lo tanto $c = p$; luego en tal caso $V = \frac{1}{6}\pi c^3$, cuya expresión representa el volumen de una esfera, que tenga la cuerda c por diámetro. Fig. 180.

Si la cuerda CC′ paralela al eje fuera igual al radio, se tendría que $V = \frac{1}{6}\pi r^3$; y en el caso de ser c el diámetro, aparecería necesariamente la expresión del volumen de la esfera; en efecto, entonces $V = \frac{1}{6}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

341. Problemas particulares.—Ejemplo 1.º—*Determinar la altura de un tronco de cono de bases paralelas, cuya capacidad sea de 100 hectolitros, el diámetro de una de las bases 2m,40 y el de la otra 2 metros.*

De la expresión del volumen de un tronco de cono de bases paralelas (**333**), se deduce que

$$a = \frac{3V}{\pi(r^2 + r'^2 + rr')} = \frac{3 \times 10}{3,1416(1,44 + 1 + 1,2)},$$

efectuando las operaciones indicadas, se tiene $a = 2^m,63$.

EJEMPLO 2.º—*¿Qué diámetro debe tener una vasija cilíndrica de 2 metros de altura, para que su capacidad sea de 5 metros cúbicos?*

Según se dijo (**334**), $V = \pi r^2 a$, de donde

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi a}} = \sqrt{\frac{5}{3,1416 \times 2}},$$

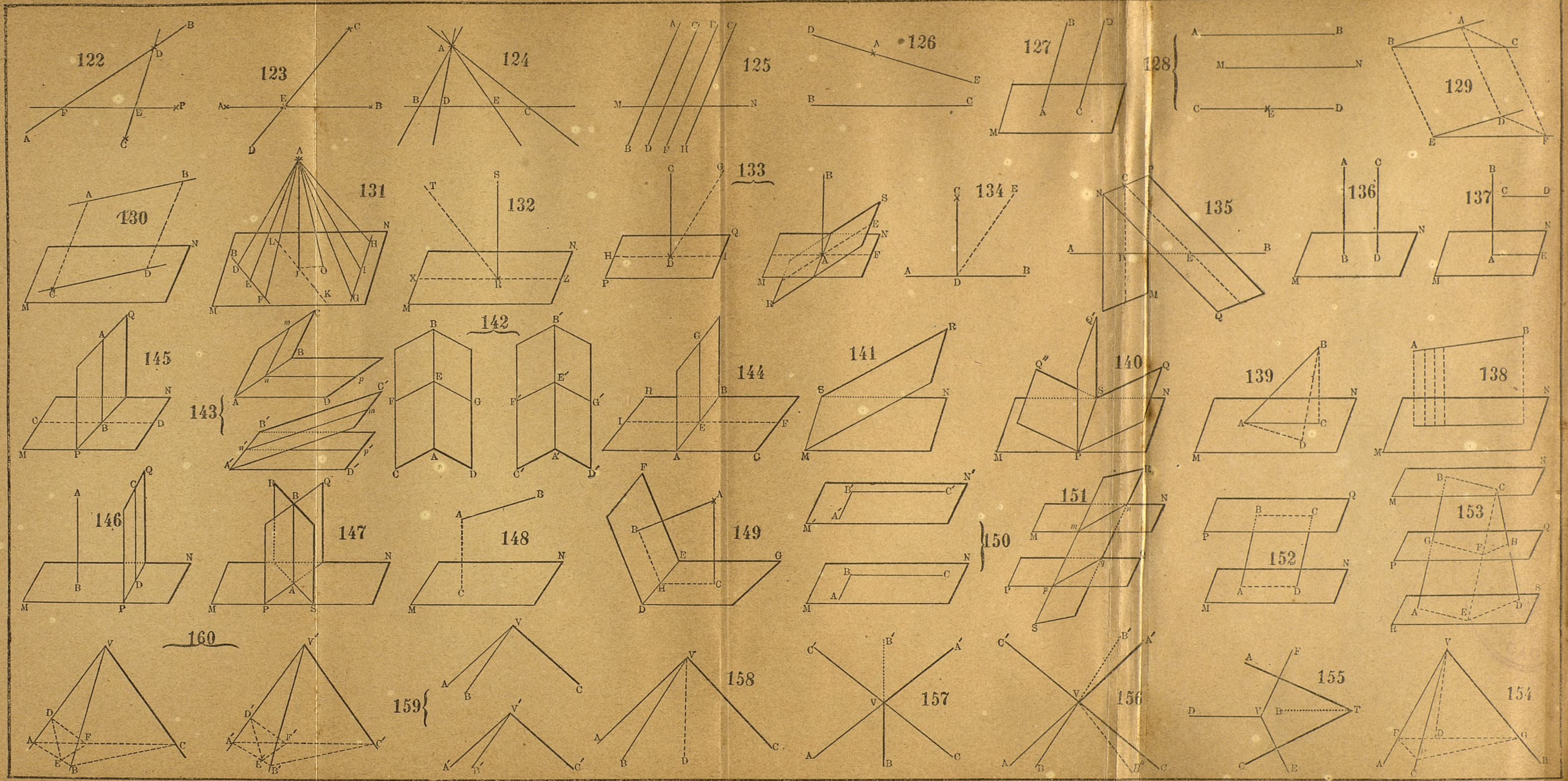
de aquí se tiene, que $r = 0^m,89$, y por lo tanto el diámetro deberá ser igual á $1^m,78$.

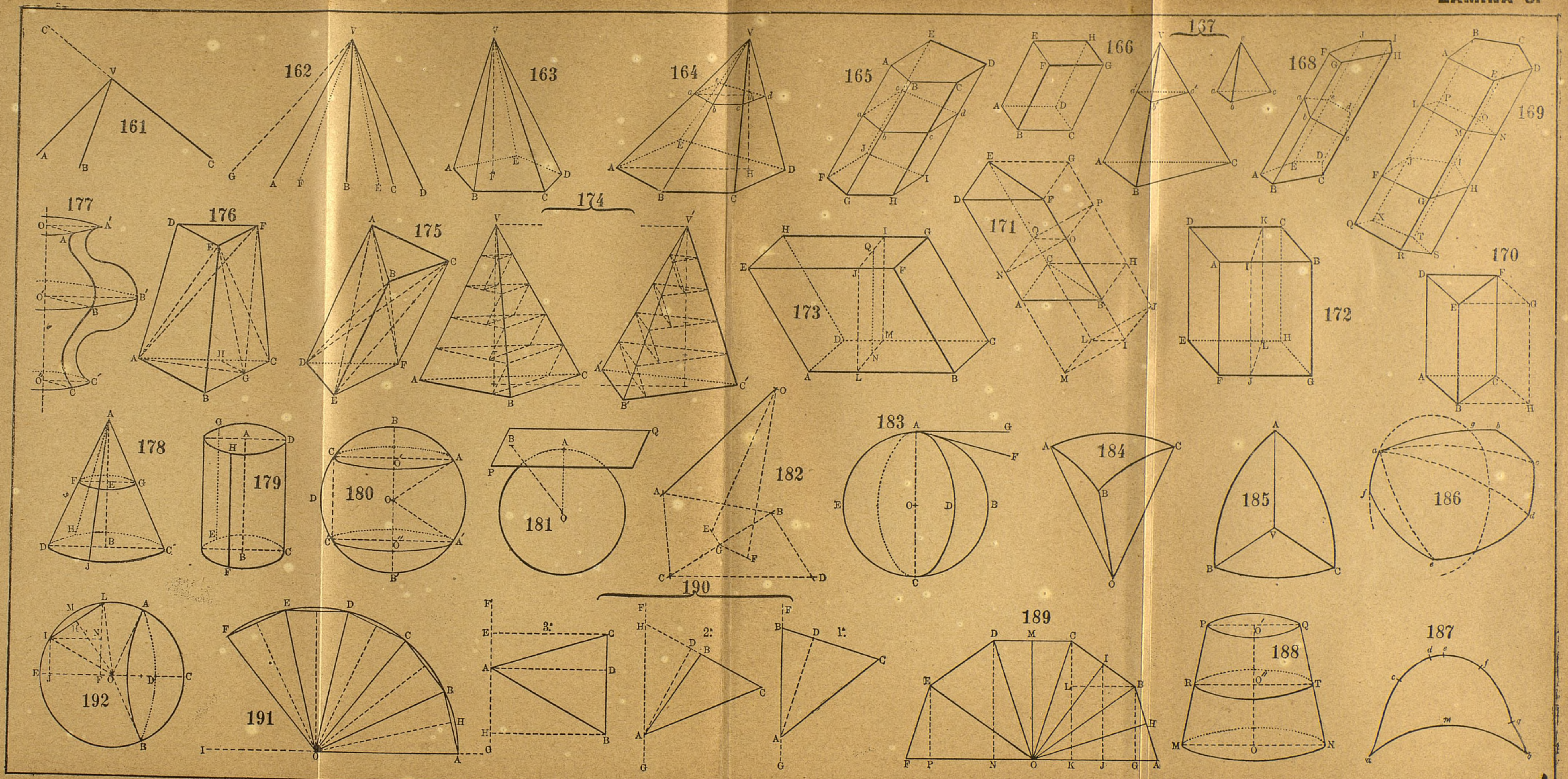
EJEMPLO 3.º—*Suponiendo que el globo terráqueo fuera esférico, determinar su volumen.*

Siendo el metro la diez millonésima parte del cuadrante de un meridiano (ARITM.ª **129**), el valor de la circunferencia máxima será igual á 40 millones de metros, y por lo tanto el radio de la esfera será igual á $\frac{40000 \text{ Km.}}{2 \times 3,14159}$ (**140**) ó sea 6366 kilómetros, pero como el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, se tendrá que el de nuestro planeta equivaldrá á $\frac{4}{3} \times 3,14159 \times 6366^3 = 1080657682678$ kilómetros cúbicos.

Si se tienen presentes las fórmulas deducidas, al tratar de las áreas y volúmenes de los poliedros, así como las expresiones que se refieren á las áreas del cono y cilindro de revolución y á la esfera, podría enunciarse un crecido número de problemas numéricos, cuyas soluciones después de las que se acaban de obtener, pueden conseguirse sin dificultad alguna.

LAMINA 4.


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
145
143
142
144
141
140
139
138
146
147
148
149
150
151
152
153
160
159
158
157
156
155
154


161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192

APÉNDICE.

Recta dividida en media y extrema razón.

342. Se dice que una recta se halla dividida en media y extrema razón, *cuando lo está en dos partes tales, que la mayor de ellas es media proporcional entre la menor y toda la recta.* FIG. 193.

Para conseguir este resultado con la recta AB, se trazará en su extremo B, una perpendicular $BO = \frac{1}{2}AB$; uniendo los puntos A y O, y llevando la porción exterior AC sobre AB, quedará determinado el punto E, que divide á la recta propuesta en media y extrema razón.

En efecto, se tiene (138) que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, y por lo tanto (ARITMÉTICA 123), $\frac{AD - AB}{AB} = \frac{AB - AC}{AC}$; pero como $CD = AB$ y $AC = AE$, resultará $\frac{AE}{AB} = \frac{BE}{AE}$, que invertida será $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{BE}$.

343. *En toda circunferencia se verifica, que la parte mayor del radio dividido en media y extrema razón, es igual al lado del decágono regular inscripto en ella.* FIG. 194.

En efecto, si fuera AB el lado del mencionado decágono, trazando los radios OA y OB y representando R al ángulo recto, se tendrá (69) que el ángulo $AOB = \frac{4R}{10} = \frac{2}{5}R$, y como hasta completar 2R, falta $\frac{8}{5}R$, se verificará que cada uno de los ángulos ABO y BAO, iguales, valdrá $\frac{4}{5}R$.

Si ahora se traza la bisectriz AC del ángulo BAO, resultará que $BAC = CAO = \frac{2}{5}R$; luego el triángulo ACO será isósceles y por consiguiente $OC = AC$, así como el ABC también será isósceles, por tener con el triángulo ABO el ángulo B común y $CAB = AOB$, y por tanto $AB = AC$.

Pero, con ser la AC bisectriz del ángulo OAB, se tiene (93) que $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{BC}$ ó bien $\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{BC}$. Esta última igualdad fraccionaria manifiesta, que OC ó su igual AB, tiene la misma longitud que la parte mayor del radio OB, dividido en media y extrema razón.

Dividida la circunferencia por este medio en diez partes iguales, no presenta dificultad alguna el inscribir en ella un decágono y un pentágono regulares, así como trazando las tangentes en los mismos puntos de división, se obtendrán también un decágono y un pentágono regulares circunscritos (136).

De aquí se desprende, que si se quisiera dividir una circunferencia en quince partes iguales, aplicando el radio como cuerda en aquélla, y llevando también desde uno de los extremos de esta cuerda la parte mayor del radio dividido en media y extrema razón, la diferencia de ambos arcos sería la décima quinta parte de la circunferencia, supuesto que $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, y por lo tanto tomando la cuerda de este arco y aplicándola sobre la circunferencia, quedará ésta dividida en quince partes iguales, y en su consecuencia se podrá tener el pentadecágono regular.

Como complemento de lo dicho, se podrían además inscribir y circunscribir en una circunferencia sin necesidad de recurrir á tanteos, todo polígono regular, cuyo número de lados se halle comprendido en cualquiera de las expresiones 5×2^n y 15×2^n.

Generalidades acerca de las curvas.

344. Llámase *curva plana* aquella que tiene todos sus puntos en un plano.

Las porciones infinitamente pequeñas de la curva, que están formadas por cada dos posiciones consecutivas del punto generador de aquélla (3), constituyen los *elementos* rectilíneos de la curva que se considera.

La prolongación de uno de estos elementos, determina la tangente á la curva, en el punto en que aquél comienza. Como la dirección de cada elemento es única, se infiere, que en un mismo punto de la curva, que se considere, no puede trazarse sino una sola tangente.

Hallándose los dos puntos que constituyen el elemento rectilíneo infinitamente próximos, queda indeterminada la verdadera dirección de la recta que los une; para fijar ésta, ó sea para el trazado gráfico de la tangente en un punto de la curva, hace falta que, además del punto de contacto se conozca otro punto que se halle algún tanto distante del anterior, lo cual se consigue por procedimientos en los cuales se considera la tangente á una curva, como *el límite de las posiciones de una secante cuando, moviéndose según una ley cualquiera, dos de sus puntos de intersección con la curva toman una posición infinitamente próxima.*

De las consideraciones expuestas se deduce, que la tangente en un punto de algunas curvas no convexas puede ser á la vez secante de esta misma curva; circunstancia que no puede acontecer en las curvas convexas.

345. *Normal* á una curva, es la perpendicular trazada en su plano á la tangente, en el punto de contacto. Según esto, todos los radios de una circunferencia son normales á la curva, en el punto donde la cortan.

346. *Centro* de una curva es el punto que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas que pasan por él.

347. Cuando en una curva plana se trazan diversas cuerdas paralelas entre sí, y por los puntos medios se

hace pasar una línea, ésta recibe el nombre de *línea diametral*. En el caso particular de que las líneas diametrales sean rectas, se denominan *diámetros*. De aquí se desprende, que todos los diámetros de una curva pasan por el centro de ésta.

348. Cuando el diámetro es una perpendicular á un sistema de cuerdas paralelas, recibe la denominación de *eje*.

349. *Vértice* es todo punto común á la curva que se considera y á uno de sus ejes.

Si á uno y otro lado del punto A de la curva, se
FIG. 195. suponen los dos elementos contiguos AB y AC (exagerando su tamaño para mayor claridad), se tendrá el *elemento curvilíneo* BAC, admitiendo que los tres puntos B, A y C no se hallen en línea recta.

Si ahora se quisiera obtener el *radio* y el *centro de curvatura* que corresponden al precitado punto A, se considerarán trazadas las dos normales consecutivas que corresponden á los mencionados elementos rectilíneos, las cuales al cortarse, determinarán en O el *centro de curvatura*. Á la parte de recta AO, comprendida entre el punto A de la curva propuesta, y el mencionado centro, es á lo que se llama *radio de curvatura*.

De lo dicho se deduce, que la curvatura de una línea es tanto mayor, cuanto menor sea su radio y viceversa.

Un arco se dice que es *cóncavo*, cuando se le considera desde la región del plano en donde se halle su centro de curvatura, y *convexo* en el caso de que se le suponga en la región opuesta.

350. *Ordenadas* son las perpendiculares trazadas desde los diversos puntos de una curva á una recta arbitraria, con respecto á la cual se desea fijar la posición de

aquella línea. La distancia desde un punto fijo en la mencionada recta arbitraria (que recibe el nombre de *punto de origen),* hasta el pie de cada ordenada, se llama *abscisa.* La ordenada y la abscisa de un punto cualquiera, constituyen las *coordenadas* de este punto. FIG. 196.

Tanto la precitada recta arbitraria, como su perpendicular en el origen, se denominan *ejes de coordenadas.* Así OX y OY son los ejes coordenados, O el origen, AB la ordenada del punto A, y OB su abscisa.

351. *Puntos singulares* de una curva son aquellos que presentan alguna particularidad que los distinguen de los demás: tal sucede con los puntos llamados de *inflexión,* de *retroceso* y *múltiplos.*

Punto de inflexión es aquel en donde la curva pasa de cóncava á convexa ó viceversa, lo cual es debido á que existen en ella dos elementos consecutivos que quedan á diferente lado de la tangente; por lo tanto esta recta es á la vez secante. FIG. 197.

Si el punto generador de la curva, después de marchar en determinado sentido, vuelve hacia atrás, tomando distinto camino, el elemento lineal que corresponde á esta brusca variación de trayectoría, recibe el nombre de *punto de retroceso.* Este punto se halla caracterizado, porque la tangente en él, es común á las dos ramas ó porciones de la curva que se considera. FIG. 198.

Si una curva pasa cierto número de veces por un mismo punto, éste se designa con el nombre de *punto múltiplo.* En este punto puede suceder que existan diversas tangentes. FIG. 199.

Se llaman *curvas semejantes,* aquellas en que, al inscribirse un polígono cualquiera en una de ellas, también se puede inscribir en la otra un polígono semejante al anterior. Según esto, aun cuando varíen los radios con que se describan dos circunferencias, éstas serán siempre dos curvas semejantes.

Supuesto que las curvas están formadas por un número infinito de elementos rectilíneos, toda propiedad general, demostrada con independencia del número, longitud ó inclinación mutua de lados en una línea poligonal, será también aplicable á la curva que se considere como límite de aquella línea. Así, por ejemplo, (97 y 98) pudiera decirse, que *los perímetros de dos curvas semejantes, son proporcionales á las dimensiones homólogas, que en ambas líneas se determinen.*

Área de las superficies planas limitadas por líneas curvas.

352. Si se tratara de apreciar la medida de la superficie limitada por una curva ABCDE, una recta y las perpendiculares
FIG. 200. á ésta, desde sus extremos hasta que encuentren á aquélla; admitiendo, para fijar las ideas, que la curva presente su concavidad hacia la recta FG, se tendría un valor aproximado del área que se desea determinar, dividiendo el intervalo FG en tres partes iguales, levantando las perpendiculares en los puntos H é I de división, y sumando las áreas de los tres trapecios rectilíneos ABHF, BDIH y DEGI, lo cual, llamando S al área de este conjunto, daría por resultado la igualdad

$$S = \frac{1}{2}FH\,(AF + 2BH + 2DI + EG)\ .....\ (1)$$

Al dividir la distancia FG en dos partes iguales, se verificará que, por ser $3FH = 2FJ$, $\frac{1}{2}FH$ será igual á $\frac{1}{3}FJ$. Por otra parte, al trazar la ordenada del punto O, cuyo pie se halla en J, se tiene $JO = \frac{1}{2}(BH = DI)$, de donde se deduce que $4.JO =$

$= 2(BH + DI)$, de modo que la igualdad (1) se transformará en $S = \frac{1}{3}FJ(AF + 4JO + EG)$; pero esta superficie es menor que la mixtilínea propuesta, así, al sustituir en lugar de JO la ordenada CJ, que además de poseer alguna mayor longitud, tiene la ventaja de que puede determinarse más fácilmente su valor, se establece una cierta compensación, lo cual permite obtener el área que se desea, suficientemente aproximada á la verdadera, en los casos corrientes que en la práctica pudieran presentarse. Así se tendrá $S = \frac{1}{3}FJ(AF + 4CJ + EG)$.

Aplicando lo dicho á la determinación de la superficie limitada por un contorno curvilíneo ó compuesto de líneas rectas y curvas, no habría sino cruzar la superficie limitada que se proponga por una recta MN, y dividir la distancia que media entre sus dos puntos de intersección con el contorno de la línea cerrada que se considera, en un número par de partes iguales. Hecho esto, se trazarán en los diferentes puntos de división 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 las ordenadas $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$, $4'4''$, $5'5''$, $6'6''$ y $7'7''$, haciendo aplicación de lo dicho en el caso de que no hubiese sino tres ordenadas, y llamando D á la distancia que media entre cada dos de éstas, se tendría que FIG. 201.

$$S = \frac{1}{3}D(1'1'' + 4.2'2'' + 3'3'') + \frac{1}{3}D(3'3'' + 4.4'4'' + 5'5'') +$$
$$+ \frac{1}{3}D(5'5'' + 4.6'6'' + 7'7'').$$

Reduciendo los términos iguales resultará

$$S = \frac{1}{3}D(1'1'' + 7'7'' + 2\,(3'3'' + 5'5'') + 4\,(2'2'' + 4'4'' + 6'6''))\ldots (2)$$

de donde se desprende, que la medida del área de una superficie plana, limitada por una línea cualquiera, equivale *al tercio del intervalo que existe entre dos ordenadas consecutivas, multiplicado por la suma de las que corresponden á los extremos, más dos veces la suma de las ordenadas de situación impar, y cuatro veces el conjunto de las ordenadas colocadas en lugar par* (*).

(*) Esta fórmula es debida á Simpson, matemático inglés que se dió á conocer á mediados del próximo pasado siglo.

Es evidente, después de lo dicho, que deberán aumentarse tanto más las divisiones de la recta MN, cuanto más sinuosa sea la curva cerrada que se proponga, y mayor el grado de aproximación con que se desee obtener el área pedida.

En el caso de que algunas ordenadas fueran nulas, no por eso dejaría de poderse aplicar la fórmula (2).

Elipse.

353. Se llama ELIPSE una curva plana y cerrada, en la cual se verifica, que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á otros dos fijos, es una cantidad constante.

Los dos puntos fijos F y F′ se llaman *focos*. Las dis-
FIG. 202. tancias MF y MF′ que median entre cada punto de la elipse y los focos, se denominan *radios vectores*.

La recta AB, que pasando por los focos termina por ambos extremos en la curva, es el *eje mayor*, y la perpendicular CD á la AB en su punto medio, determina el *eje menor*. El punto O común á los dos ejes, es el centro de la elipse (346).

Excentricidad es la distancia que media entre uno cualquiera de los focos y el centro, y se llama *distancia focal* la porción FF′ del eje mayor, comprendida entre ambos focos.

La longitud constante á que equivale la suma de los radios vectores, que corresponden á un punto cualquiera de la elipse, ha de ser precisamente igual al eje mayor.

354. *Las distancias que median entre cualquiera de los vértices de la curva, que corresponden á los extremos del eje menor y uno cualquiera de los focos, son iguales al semieje mayor.*

En efecto, siendo C punto de la elipse, se verificará que

$CF+CF'=AB$; pero como CF y CF′ son iguales (58-1.º) resultará $2\,CF=AB$, y por lo tanto $CF=\frac{1}{2}AB$.

Esto manifiesta, que conociendo el eje mayor y los focos se puede determinar el eje menor, y por consiguiente, sabiendo cuál es la longitud de ambos ejes, será fácil fijar la posición de los dos focos.

De la última proposición demostrada se deduce, que *de dos elipses que tengan los ejes mayores iguales, superará en excentricidad, la que posea un eje menor más pequeño.*

Obsérvese también, que si en una misma elipse, los dos ejes fueran iguales, la excentricidad sería nula, supuesto que, entonces los dos focos se confundirían con el centro de la curva, y por consiguiente los radios vectores de cada uno de sus puntos serían todos iguales: luego, en este caso particular, la elipse pasaría á ser una circunferencia.

355. De la definición de la elipse, y en el supuesto de que se conozcan tanto su eje mayor como la excentricidad, se deducen los siguientes procedimientos para su trazado.

Primera construcción.—Sean F y F′ la posición de los focos, y AB el eje mayor. Se toma en esta recta un punto P, y con los radios AP y BP, haciendo centro en F y después en F′, se trazarán cuatro arcos que se cortarán dos á dos, toda vez que la distancia FF′ de los centros es menor que la suma AB de los radios (151). Los cuatro puntos de intersección M, M′, M″ y M‴ así obtenidos, serán puntos de la elipse, supuesto que fijándose en el M, se tendría $MF+MF'=AP+BP=AB$. Análogamente se haría patente, que los puntos M′, M″ y M‴ son también puntos de la curva. Fig. 203.

Señalando otro punto P′ en la recta AB, y repitiendo la construcción, se hallarán otros cuatro puntos Q, Q′,

Q'' y Q''' de la elipse pedida, y así se continuará determinando puntos, hasta que hallándose éstos suficientemente próximos, puedan unirse sin error sensible por medio de una línea.

Segunda construcción.—Para el trazado gráfico de la elipse por un movimiento continuo, se fijarán en los focos los extremos de un hilo igual en longitud al eje mayor, y colocando un lápiz, de modo que recorra todos los puntos del citado hilo, el cual deberá conservarse siempre tirante, aparecerá dibujada la curva pedida, pues es indudable que, en cada posición del lápiz, se verificará constantemente, que la suma de las distancias que median entre cada señal que deja aquél y los focos, será igual á la longitud del hilo, y por lo tanto á la del eje mayor.

Dada la longitud de los ejes se podría también construir la elipse, siguiendo cualquiera de los procedimientos expuestos, en atención á la facilidad con que, sirviéndose de aquellos datos, puede fijarse la posición de ambos focos (354).

356. El teorema fundamental para trazar la tangente en un punto de la elipse, dice como sigue: *La bisectriz HI del ángulo F'ME, que forma un radio vector del punto M de la elipse, con la prolongación ME del otro radio vector, es tangente á la mencionada curva.*

Fig. 204. En efecto, tomando en la prolongación del radio vector FM, una longitud ME igual á MF', y uniendo E y F' en un punto cualquiera de la bisectriz HI, se tendrá que los triángulos HF'M y HEM serán iguales (43), y por lo tanto HE = HF'; pero como

$$HF + HE > FE \text{ ó } FH + HF' > AB;$$

esto manifiesta, que el punto H no puede pertenecer á la elipse, y como lo mismo pudiera decirse de cualquier otro de la HI, que fuere diferente del M, quedará probado que la recta HI no tiene de común con la elipse, sino el elemento lineal correspondiente al precitado punto M.

Recíproco.—*La tangente HI en un punto M de la elipse, es bisectriz del ángulo F'ME formado por uno de los radios vectores, correspondientes al expresado punto y la prolongación del otro radio vector;* supuesto que de no ser tal bisectriz del ángulo F'ME, podría trazarse desde el punto M una recta diferente de la HI, que fuera bisectriz de aquel ángulo, de donde resultaría que, en un mismo punto de la curva, existirían dos tangentes á ella (344).

Corolario 1.º—*Los radios vectores que corresponden á un punto M de la elipse, forman ángulos iguales con la tangente que pasa por el expresado punto;* supuesto que tanto el ángulo HMF como el F'MI son iguales al EMI.

Corolario 2.º—*La normal en un punto cualquiera M de la elipse, es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores, que corresponden al mencionado punto,* en atención á que siendo los ángulos HMF y FMI iguales, sus complementos FMJ y JMF', también lo serán.

357. Se llama *elipsoide prolongado de revolución,* el cuerpo que se puede suponer engendrado por una semielipse, que gira alrededor de su eje mayor.

Nota.—Como quiera que al reflejarse los rayos luminosos, caloríficos ó sonoros, forman, según se demuestra en Física, el ángulo de incidencia igual al de reflexión, acontecerá que si en uno de los focos del elipsoide que se considera, existiese un manantial de luz, de calor ó de producción de sonidos (*),

(*) En el inmediato castillo de Gigonza, existe un salón cuyo techo, es una bóveda en forma de semielipsoide prolongado de revolución, á lo cual es debido, que los sonidos que se producen en uno cualquiera de los focos, se perciban casi en toda su integridad en el otro.

sus efectos se dejarían sentir en su mayor intensidad en el otro foco.

Cuando la semielipse gira alrededor de su eje menor, el cuerpo engendrado se denomina *elipsoide aplanado.* Los extremos del eje fijo se llaman *polos* del elipsoide, y *ecuador* al círculo perpendicular al mencionado eje y equidistante de los polos.

Parábola.

358. Parábola es la curva plana y abierta, cuyos puntos se hallan equidistantes de un punto fijo y de una recta fija.

El punto fijo F se llama *foco,* y la recta fija BC *directriz.*

Fig. 205. *Radio vector* es la recta FM, que une al foco con un punto cualquiera de la curva. *Eje* es la recta indefinida FD, que siendo perpendicular á la directriz, pasa por el foco (347).

359. De la definición de la parábola se desprende que, conociendo el foco y la directriz, se puede proceder al trazado de la curva.

Primera construcción.—Se tira por el foco la perpendicular ED á la directriz, y se tendrá que el punto medio A de la distancia FD, pertenecerá á la curva, en atención á que AD = AF. Si por otra parte, se considera en esta perpendicular ED un punto cualquiera E, y desde él se traza la perpendicular NN′, se tendrá, que haciendo centro en F con un radio igual á ED, se describirá un arco, el cual deberá cortar á la perpendicular NN′ en los puntos N y N′, que corresponderán á la parábola, en vista de que ED = NG = NF y ED = N′G′ = FN′. Repitiendo la construcción, se obtendrían puntos suficientemente próximos, para que unidos por medio de una línea seguida, apareciese la curva.

SEGUNDA CONSTRUCCIÓN.—Para efectuar el trazado de la parábola por un movimiento continuo, se fijarán en el foco y en el vértice C de una *escuadra* (*), los extremos de un hilo, cuya longitud sea igual al cateto mayor de aquélla; una vez conseguido esto, se aplicará este cateto al eje, y el menor á la directriz, poniendo tirante el hilo por medio de un lápiz que se apoyase en el cateto mayor quedaría determinado el vértice A de la curva, y al hacer resbalar hacia arriba el cateto menor, á lo largo de la directriz, conservando siempre tirante el hilo con el lápiz, el cual deberá continuar apoyándose en el cateto mayor, quedará trazada la parte superior de la curva. La inferior se construiría del mismo modo, sin otra diferencia que invertir la posición de la escuadra. FIG. 206.

Cualquier punto G, que se señale en la línea trazada, pertenecerá á la parábola, en atención á que siendo la longitud del hilo por una parte igual á CG + GB, y por otra á CG + GF, deberá verificarse que GB = GF.

360. La proposición que sirve de fundamento al trazado de la tangente y de la normal en un punto de la parábola, dice así:

La bisectriz EG del ángulo FMC, formado por el radio vector de un punto M de la parábola y la perpendicular MC trazada desde él á la directriz, es tangente á la mencionada curva en aquel punto. FIG. 207.

En efecto, perteneciendo el punto M á la parábola, se

(*) En el dibujo geométrico se da el nombre de *escuadra*, á un triángulo rectángulo BCE, generalmente de madera de poco espesor.

tendrá MC = MF; si ahora se unen C y F en un punto cualquiera G de la recta EG, resultarán dos triángulos CGM y FGM iguales (43), y por lo tanto CG = FG; pero si desde el punto G se traza la perpendicular GH á la directriz, se tendrá GH < CG, luego se verificará que GH < GF, y por consiguiente, el punto G no puede pertenecer á la parábola; y, como quiera que la misma conclusión pudiera deducirse de cualquier otro punto de la EG, que fuese diferente del M, habrá que convenir, en que esta última recta deberá ser tangente en M á la curva, que se considera.

Recíproco.—*La tangente á la parábola, es bisectriz del ángulo formado por el radio vector del punto de contacto, y la paralela trazada desde este punto al eje.*

Corolario.—*La normal en un punto cualquiera M de la parábola es bisectriz del ángulo LMF, formado por el radio vector que corresponde á aquél, y la paralela ML, trazada desde el expresado punto M al eje,* supuesto que los ángulos NMF y NML serán iguales, por ser complementos de los ángulos FME y LMG, que, según el recíproco anterior son iguales.

Nota.—La superficie que se supone engendrada por una semiparábola AM, que gira alrededor de su eje BN, es un *paraboloide de revolución,* en el cual, si estuviera convenientemente pulimentada su superficie interior, se verificaría, que los rayos que partiesen de su foco, se reflejarían paralelamente al eje del paraboloide, que es el mismo de la parábola generatriz.

Poliedros regulares.

Fig. 208. **361.** *No existen sino cinco poliedros regulares.*

Con tres ángulos de triángulo equilátero se puede formar ángulo poliedro, porque valiendo cada uno de éstos $\frac{2}{3}$ de recto, los tres compondrían 2 rectos, cantidad inferior á 4 rectos (248). El poliedro correspondiente se construiría haciendo centro en A, vértice del triángulo equilátero ABC, con un radio igual al lado AC; así se determinaría el punto D en la perpendicular trazada al plano de aquel triángulo desde su centro O. Uniendo el expresado punto D, con los tres vértices del precitado triángulo, se habrá formado un TETRAEDRO REGULAR, en consideración á que tiene cuatro caras que serán triángulos equiláteros iguales (253).

También se podría formar ángulo poliedro con cuatro ángulos de triángulo equilátero, supuesto que su suma sólo valdría $\frac{8}{3}$ de recto. Se probaría la existencia del poliedro regular correspondiente, formando un cuadrado ABCD, cuyo lado fuera igual al del triángulo dado para cara del poliedro que se trate de construir; haciendo centro en A con un radio igual al antedicho lado AB, se determinarían los puntos E y F en la perpendicular trazada al plano del cuadrado ABCD, desde el centro O de éste, y uniendo estos puntos EF, con los A, B, C y D se tendría un OCTAEDRO REGULAR, supuesto que se compondría de ocho caras iguales. FIG. 209.

Sería posible también construir ángulo poliedro con cinco ángulos de triángulo equilátero, en atención á que la suma de ellos valdría solamente $\frac{10}{3}$ de ángulo recto. Para hacer patente la existencia del poliedro regular, que con tal motivo pudiera formarse, se comenzaría por trazar un pentágono regular ABCDE, cuyo lado AB fuera igual al del triángulo dado para cara del poliedro, que se trata de formar; haciendo centro en A con un radio igual al antedicho lado se determinará el punto F en la perpendicular trazada desde el centro de aquel polígono á su plano y uniendo el expresado punto F con los A, B, C, D y E, se tendrá una pirámide pentagonal regular, cuyas caras laterales serán triángulos equiláteros iguales y F su vértice. Al unir los triángulos necesarios para obtener las otras dos pirámides pentagonales iguales á la anterior, cuyos vértices respectivos sean los A y B del triángulo ABF, se tendrá un poliedro abierto, cuyas diez caras son todas vistas en la figura, y que termina en unos ángulos como el E, donde concurren tres triángulos y en otros como el H en que solamente se reúnen dos. Si se cons- FIG. 210.

truye otro poliedro abierto idéntico al anterior, y se adapta el uno al otro, de modo que cada ángulo DEH, compuesto de tres ángulos, se una á otro formado de dos, lo cual puede efectuarse á la manera que acontece en el ángulo EAL, donde de una parte abraza á tres ángulos de otros tantos triángulos y de otra solamente á dos, resultará un poliedro de veinte caras iguales, cada una de las cuales será un triángulo equilátero; por lo tanto se tendrá construido el ICOSAEDRO REGULAR.

Con seis ángulos de triángulo equilátero, ya no sería posible construir ángulo poliedro, supuesto que su suma valdría $\frac{12}{3}R = 4$ rectos; lo cual manifiesta, que con triángulos equiláteros sólo se pueden formar tres poliedros regulares, que, como se ha visto, son: el tetraedro, el octaedro y el icosaedro.

Si se unen tres ángulos de cuadrado, cuya suma vale 3 rectos, podrá formarse ángulo poliedro. Para hacer patente la posibi-
FIG. 211. lidad de construir el cuerpo poliédrico, cuyas caras sean cuadrados, se considerará uno de éstos, tal como el ABCD, y se trazan las perpendiculares á su plano desde sus cuatro vértices; al tomar en éstas las porciones AE, BF, CG y DH, iguales todas á AB, y unir por medio de rectas los extremos E, F, G y H, aparecerá como resultado el EXAEDRO REGULAR, supuesto que las seis caras que posee son polígonos regulares é iguales.

El exaedro ó cubo, es el único poliedro regular cuyas caras
FIG. 212. son cuadrados, pues si se quisiera formar otros, cuyos ángulos poliedros se compusieran de cuatro ángulos de cuadrado, su suma valdría 4 rectos, y en tales condiciones, no podría existir poliedro alguno (248).

Con tres ángulos de pentágono regular, se puede formar ángulo poliedro, porque la suma de los cinco ángulos de un pentágono, es igual á $2R(5-2) = 6$ rectos (66), luego un ángulo de pentágono regular valdrá $\frac{6}{5}$ de recto, y por consiguiente, tres ángulos compondrán $\frac{18}{5}$ de recto. Para construir el poliedro correspondiente, supóngase que se hayan trazado doce pentágonos regulares é iguales; tómese uno de éstos y únanse á él cinco, de modo que en cada vértice del primero se forme un triedro: claro está que los cinco triedros así construidos serán iguales, por estar compuestos de ángulos planos respectivamente iguales (244). De esta manera se tendrá un poliedro abierto, que terminará en un decágono, no plano, cuyos ángulos, unos como el C, se hallarán formados por dos de pentágono, y otros como el F, solamente poseerán uno. Si ahora se construyese otro poliedro abierto, igual al anterior y se adaptasen el uno al otro, de modo que cada ángulo tal como el FGH, compuesto de dos ángulos en el primero, se uniese á otro formado de un solo ángulo en el segundo, lo cual puede efectuarse á la manera que acontece en el ADI, se verificaría también que cada ángulo como el F, formado de un solo ángulo de pentágono en la primera superficie poliédrica abierta, se adaptaría á otro compuesto de dos ángulos en la segunda, y, por lo tanto, resultaría construido un DODECAEDRO REGULAR, en el cual sus doce caras serán pentágonos iguales.

Como quiera que con cuatro ángulos de pentágono regular, cuya suma vale $\frac{24}{5}$ de recto, no se puede formar ángulo poliedro, queda hecho patente, que el único poliedro regular, que puede formarse con pentágonos, es el dodecaedro.

Con tres ángulos de exágono regular, no se puede formar ángulo poliedro, supuesto que un solo ángulo vale $\frac{2R(6-2)}{6} = \frac{8}{6}$ de recto, luego los tres valdrían 4 rectos; pero como se sabe (67), que á medida que crece el número de lados de un polígono regular, es mayor el valor de sus ángulos, de aquí que no siendo posible construir ángulo triedro, con tres ángulos de exágono regular, tampoco podrá formarse con ángulos de polígonos regulares de mayor número de lados, y por lo tanto queda probado, que no hay más poliedros regulares que el tetraedro, el exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Ligera idea de la simetría en el espacio.

362. De la simetría en la *forma* de algunas figuras geométricas, se trató en otra ocasión (238, 250 y 320), y se vió que era independiente de la posición que aquéllas ocupaban en el espacio; falta ahora considerar la simetría bajo este segundo aspecto.

La simetría de *posición* puede existir de tres maneras: bien sea con relación á un punto, en cuyo caso éste recibe el nombre de *centro de simetría,* bien con respecto á una recta, que entonces se llama *eje de simetría,* ó, finalmente, con referencia á un plano, el cual se denomina *plano de simetría.*

Los puntos simétricos de dos figuras se dice que son *homólogos,* y las rectas que unen á éstos, se llaman también líneas *homólogas.*

363. Dos puntos son simétricos con respecto á un centro de simetría, cuando éste divide en dos partes iguales la distancia que entre aquéllos media.

Dos líneas ó superficies se llaman *simétricas*, con relación á un centro de simetría, cuando las expresadas líneas ó superficies, que se consideran, poseen todos sus puntos respectivamente simétricos con respecto á aquel centro.

Dos cuerpos cualesquiera se dice que son *simétricos,* con relación á su centro de simetría, cuando sus superficies son simétricas con respecto al expresado centro.

Según esto, el centro de figura será á la vez centro de simetría, tanto en los polígonos regulares que tengan un número, par de lados, como también en la circunferencia esfera, elipsoides de revolución, etc., etc.

364. Dos puntos son *simétricos* con respecto á un eje de simetría, cuando la recta que los une es perpendicular al expresado eje y queda dividida por éste en dos partes iguales.

Dos figuras son *simétricas* con relación á un eje, cuando éste á la vez que divide en dos partes iguales á las diversas rectas, que unen sus vértices homólogos, es perpendicular á cada una de ellas.

De aquí se infiere, que *dos figuras que sean simétricas con relación á un eje, deberán ser iguales;* supuesto que al hacer girar á una de ellas alrededor de su eje, según una media revolución, cada uno de los puntos de aquélla describirá una semicircunferencia, y por lo tanto se aplicarán sobre sus homólogos de la otra figura. De donde se desprende, que la simetría con respecto á un eje, es únicamente de posición, y por consiguiente no supone alteración alguna en la forma.

Como ejemplos, pudieran citarse el paralelepípedo rectángulo, en el cual los ejes de simetría serán las tres rectas que unen los centros de las caras opuestas. Si la base del paralelepípedo fuera un cuadrado, habría además otros dos ejes, los cuales serían las rectas que unen los puntos medios de las aristas laterales opuestas. En el caso de que la base del prisma recto propuesto fuera un rombo, habría tres ejes de simetría: uno que estaría determinado por la recta que une los centros de las dos bases, y los otros dos serían las rectas que unen los puntos medios de las aristas laterales.

Cuando una pirámide regular tiene un número par de caras laterales, su altura será el eje de simetría.

365. Dos puntos se dice que son *simétricos* con respecto á un plano, cuando encontrándose en una recta perpendicular al citado plano, equidistan de éste.

366. Dos líneas ó superficies cualesquiera se llaman *simétricas* con relación á un plano, cuando todos los puntos de ambas líneas ó superficies son simétricos uno á uno, con referencia á aquel plano.

367. Dos cuerpos cualesquiera son simétricos con respecto á un plano, en el caso de que sus superficies sean simétricas, referidas á aquel plano.

368. *Dos rectas AB y A'B', que tienen dos puntos simétricos con respecto á un plano, son simétricas.* FIG. 213.

En efecto, cualquier punto C tomado en la recta AB, tiene su homólogo en la A′B′, supuesto que al doblar la figura ABB′A′ por *ab*, los puntos A y B coincidirán con sus homólogos A′ y B′, y por lo tanto AB coincidirá con A′B′, luego el punto C de la AB se aplicará sobre otro C′ de la A′B′, y en su consecuencia estos dos puntos serán también simétricos.

COROLARIO.—*Dos puntos A y B distan entre sí, tanto como sus simétricos.*

FIG. 214. 369. *Dos ángulos que tengan sus lados simétricos serán iguales.*

En efecto, señalando en AB y BC los puntos *m* y *n*, respectivamente simétricos de los *m′* y *n′*, situados en las rectas A′B′ y B′C′ homólogas de las anteriores, y trazando las rectas *mn* y *m′n′*, se verificará, que los triángulos B*mn* y B′*m′n′* serán simétricos é iguales, y por lo tanto también serán iguales los ángulos ABC y A′B′C′ (46).

COROLARIO 1.°—*Dos triángulos, que tengan sus respectivos vértices simétricos, serán iguales.*

COROLARIO 2.°—*Dos polígonos, que tengan sus respectivos vértices simétricos, serán iguales.*

Dos planos, que tengan dos rectas simétricas, serán simétricos.

Sean dos rectas AB y BC respectivamente simétricas á las A′B′ y B′C′, y *p* un punto cualquiera tomado en el plano de las dos primeras líneas citadas; si se traza la recta *mn*, que pasa por el punto *p* y corta á las AB y BC, se tendrá que la *m′n′* será la recta homóloga de la *mn*, y el punto *p′* de ésta, á la vez que se halla situado en el plano A′B′C′, es simétrico del *p*; luego ambos planos tienen sus puntos respectivamente simétricos (366).

370. *Si dos planos que se cortan son respectivamente simétricos á otros dos, el ángulo diedro formado por los primeros, será igual al formado por los segundos.*

Supuesto que al trazar el ángulo rectilíneo correspondiente al primer diedro y su simétrico, éste será el rectilíneo que mide al segundo diedro; y siendo ambos rectilíneos iguales (369), lo serán los diedros propuestos (218, RECÍPROCO).

371. Después de lo dicho (369-370) se deduce, que *dos poliedros simétricos tienen iguales sus caras simétricas y también los ángulos diedros, cuyas aristas son homólogas.*

En general estos poliedros simétricos no podrán coincidir, pues los triedros formados por tres aristas cualesquiera de un ángulo poliedro y por tres aristas homólogas del otro, no pueden coincidir, según se vió (238); y claro está que no pudiendo coincidir los ángulos poliedros, tampoco coincidirán aquellos cuerpos.

Según esto, en la simetría de dos cuerpos, con respecto á un plano, no sólo hay que tener en cuenta la posición, que ambos ocupan, sino también su forma.

En Física se demuestra que un objeto y su imagen en un espejo plano, son dos figuras simétricas con respecto á la superficie de éste.

En los mamíferos, aves y peces, siempre se observa que el cuerpo de cada uno de ellos puede considerarse dividido exteriormente en dos porciones sensiblemente simétricas, con respecto á un plano longitudinal, que pasa por la *línea media* de aquél.

Hélice.

372. Se llama *línea vertical* la dirección que señala el hilo de una *plomada* (*) cuando ésta se halla en reposo, una vez suspendida por el extremo, que se supone fijo.

Se dice que un plano es *vertical*, cuando se adapta con el hilo de la plomada libremente suspendida.

Línea horizontal es la perpendicular á toda recta vertical.

Se da el nombre de *plano horizontal* al plano que sea perpendicular á una recta vertical. Según esto, todo plano que contenga á dos rectas horizontales, que se corten, ó puedan cortarse al ser prolongadas suficientemente, será horizontal (207, Corolario 2.º).

Toda recta ó superficie plana, que no sea horizontal ni vertical, se dice que es *inclinada*.

La inclinación ó *pendiente* de una recta, se aprecia por Fig. 215.

(*) La *plomada* es un pequeño cono metálico, sostenido por un hilo, que se halla sujeto en el centro de su base.

la relación que existe entre el cateto vertical y el horizontal de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa sea una porción cualquiera de la antedicha recta. Así la pendiente de la recta BC estará dada por $\frac{AC}{AB}$.

373. La *pendiente* en un punto de una curva, se aprecia por la que corresponde á la tangente de la curva en dicho punto.

Entre las curvas *alabeadas* (*), merece particular atención la HÉLICE, la cual se halla determinada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuando éste se arrolla en la superficie lateral de un cilindro de revolución.

En el supuesto de que la base AB del triángulo rectángulo propuesto, sea igual en longitud á la circunferencia de la base del cilindro de revolución, que se considera, resultará que, al adaptarse el mencionado triángulo á la superficie cilíndrica, los extremos A y B de la base del triángulo se confundirán, y el extremo C de la hipotenusa se aplicará sobre el punto D, situado en la misma generatriz del cilindro, que corresponde al punto B.

Análoga consideración pudiera hacerse con el triángulo rectángulo CDE igual al anterior, si también se aplicara sobre el mismo cilindro, lo cual permitiría prolongar la hélice hasta el punto F, y repitiendo cuantas veces se quisiera esta manera de proceder, podría hacerse que la curva tuviese la longitud que se quisiera.

Á cada una de las partes iguales BD, DF, etc., etc., en que la hélice divide á las generatrices del cilindro, se llama *paso,* y las diferentes porciones iguales de la curva, que terminan en los extremos de un mismo paso, se denominan *espiras.*

(*) Se dice que una curva es *alabeada,* cuando todos sus puntos no están contenidos en un mismo plano.

Según esto, la longitud de la circunferencia de la base del cilindro que se considera, la de una espira de la hélice trazada en la superficie lateral de aquél y el paso de esta curva, son los tres lados del triángulo rectángulo, adaptado á la superficie cilíndrica que se proponga.

374. *Las distancias desde cada punto de la hélice á la base del cilindro, son proporcionales á las proyecciones de esta curva sobre la citada base.*

En efecto, en los triángulos rectángulos semejantes ABC, nBm, $n'Bm'$, ..., se verifica, que

$$\frac{AC}{AB}=\frac{mn}{Bn}=\frac{m'n'}{Bn'}=.....;$$

pero como al arrollar este triángulo en la superficie del cilindro de revolución propuesto, acontece que $AC = BD$, $AB = BNN'B$, $mn = MN$, $Bn = BN'N$, $m'n' = M'N'$, $Bn' = BN'$ al efectuar las correspondientes sustituciones en las anteriores razones, quedará demostrado, que

$$\frac{BD}{BNN'B}=\frac{MN}{BN'N}=\frac{M'N'}{BN'}=.....$$

Teniendo en cuenta este teorema, pudiera definirse la hélice diciendo que es *la curva indefinida, en donde se verifica que las ordenadas contadas según las generatrices del cilindro, en cuya superficie lateral se encuentra situada aquella línea, son proporcionales á las abscisas curvilíneas, apreciadas en la circunferencia de la base del citado cilindro, y á partir del punto fijo B, considerado como origen de coordenadas.*

375. En esta definición se funda la manera de fijar sobre la superficie cilíndrica, los puntos que se deseen de una hélice, cuyo paso sea conocido.

En efecto, sea ABCD el cilindro dado: señalando un

punto A en la circunferencia de su base inferior, y dividiendo esta línea en un número cualquiera de partes
Fig. 216. iguales $AE = EF = FG$, etc., si por los puntos de división A, E, F, G, etc., se levantan las perpendiculares AC, EE′, FF′, GG′, etc., al plano de la antedicha base, se tendrán otras tantas posiciones de la generatriz. Al dividir el paso AA′ en tantas partes iguales como quedó dividida la mencionada circunferencia, y tomar las distancias $Ff = 2Ee$, $Gg = 3Ee$, $Hh = 4Ee$, etc., se tendrán determinados los puntos A, e, f, g, h, etc., de la curva, que, unidos por una línea continua, darán por resultado una hélice, tanto mejor trazada, cuanto más pequeñas sean las partes iguales en que se hayan dividido la circunferencia de la base del cilindro y el paso de la hélice.

Fig. 217. 376. *La tangente á la hélice forma en cada punto C de esta curva, un ángulo constante con la generatriz PQ, que pasa por el citado punto.*

En efecto, si se desarrolla la superficie del cilindro, que se considera, sobre el plano determinado por la generatriz PQ y la tangente QR′ á la circunferencia de su base; en el expresado desarrollo, sucederá que esta circunferencia se confundirá en dirección con la A′QS′, al paso que la generatriz PQ permanecerá inmóvil y las demás generatrices se aplicarán sobre el mencionado plano, conservando sus longitudes y paralelismo. Según esto, si se lleva sobre la línea transformada A′QS′ de la circunferencia de la base del cilindro, las distancias $QA' = QA$, $QR' = QR$, $QB' = QB$ ....., y se levantan las perpendiculares $R'r' = Rr$, $B'b' = Bb$, $S's' = Ss$ ..... los puntos A′, C, b', r', s' ..... determinarán la transformada de la hélice, una vez desarrollada en el mencionado plano la superficie lateral del cilindro. Para probar que la recta A′S′, que con tal motivo resulta, es tangente á la curva en el punto C, obsérvese, que como el antedicho plano determinado por las dos rectas PQ y A′S′, sólo tiene de común con el cilindro propuesto, el elemento superficial que corresponde á la generatriz PQ, pues si tuviera además algún otro, sucedería que la recta A′S′ sería una secante de la circunferencia de la base (305), de donde resulta que el elemento lineal correspondiente al punto C, es común á la hélice y á la recta A's', luego estas dos líneas son tangentes la una á la otra.

Al considerar otro punto r de la curva, y proceder al desarrollo de la superficie cilíndrica, sobre el plano determinado por la generatriz Rr y la tangente RR″ á la base, se ve también, que tomando RR″ = AQBR, y uniendo R″ con el punto r, se tendrá que la recta R″r, en virtud de lo expuesto, sería necesariamente tangente á la hélice en el punto r. Ahora bien, como los triángulos CA′Q y rR″R son semejantes, en atención á que A′Q= = AQ y RR″ = AQR, se verificará que $\frac{CQ}{A'Q} = \frac{rR}{RR''}$ (374), y por lo tanto, tendrán los ángulos A′CQ y R″rR iguales.

De aquí se deduce, que si las bases del cilindro propuesto fueran horizontales, tendrían que ser sus generatrices verticales, y los diferentes elementos lineales de la curva poseerían todos la misma pendiente, la cual estaría expresada por cualquiera de las relaciones que se acaban de mencionar, ó sea por la expresión $\frac{h}{C}$, en donde h representa el paso y C la circunferencia rectificada de la antedicha base del cilindro.

La hélice se aplica á la construcción del tornillo, rosca de Arquímedes, hélices de los buques de vapor, escaleras llamadas de caracol, etc., etc.

FIN DE LA GEOMETRÍA.

ÍNDICE.

SEGUNDA PARTE.

Geometría del espacio ó de tres dimensiones.

APÉNDICE.

ERRATAS.

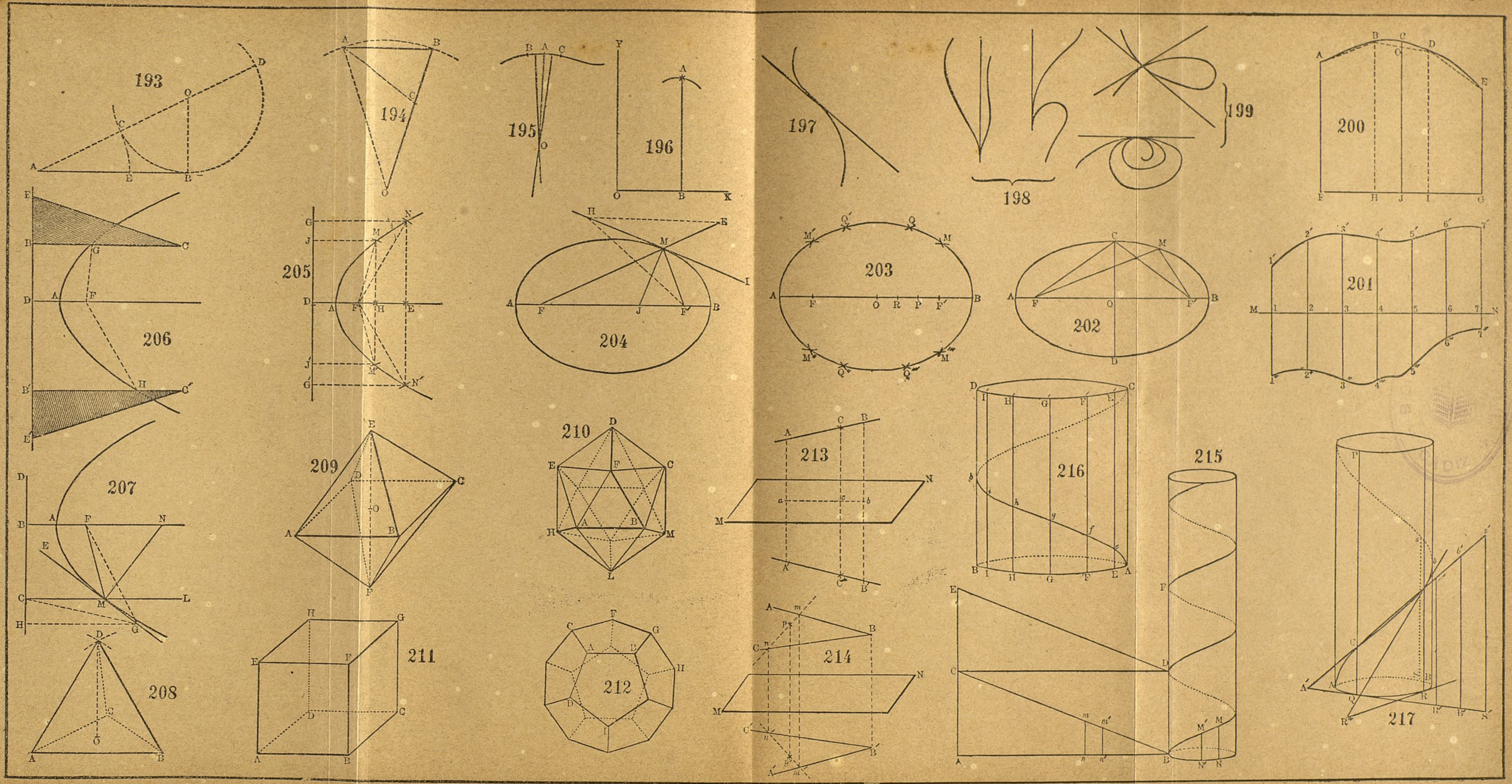
Pág.	Lin.	Dice.	Debe decir.
19	18	. . . . .	Fig. 9
	29	posiciones	porciones
24	1	*g*	G
29	17	suplementarios	complementarios
58	2	BD	BA
109	29	B'A'D	B'A'C'
	30	A'D	A'C'
132	17	recíprocamente	y recíprocamente
143	24	pie C	pie D
167	17	. . . . .	Fig. 163
172	13	. . . . .	Fig. 166
181	24	. . . . .	Fig. 171
183	7-11	HIJL	KIJL
202	14	AB	AG
		BC	AF
		BD	AD
		BE	BA
	15	DBO	DAO
		EBO	ABO
	16	OF	AC
	18	DBFE	DACB
234	28	en	con
238	1		

En la figura 88, la letra O, que se halla más distante del punto A, debiera ser O'.

» » 114, corresponde la letra C, al punto de intersección de la EF prolongada con la AB, y el otro extremo del diámetro debería tener la letra D.

» » 132, las letras M y N deben reemplazarse respectivamente con las P y Q.

» » 190, falta la perpendicular CE, trazada desde el punto C al eje FG.


193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217