ARITMÉTICA ELEMENTAL.

ARITMÉTICA

ELEMENTAL

POR

D. JUAN ARGULLÓS Y SEDANO

CATEDRÁTICO NUMERARIO DE MATEMÁTICAS
EN EL INSTITUTO PROVINCIAL DE SEGUNDA ENSEÑANZA DE JEREZ DE LA FRONTERA.

Juan Argullós y Sedano

JEREZ.
IMPRENTA DE «EL GUADALETE,» Á CARGO DE J. PAREJA,
CALLE COMPÁS, NÚMERO 2.
1894.

ARITMÉTICA ELEMENTAL.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

1. CANTIDAD es toda magnitud que sea medible; como un rebaño de ovejas, la distancia que media entre dos parajes, la extensión de una superficie, etc.

La magnitud ó tamaño de un objeto tiene por carácter distintivo el ser susceptible de aumentar ó disminuir.

Para poderse formar idea exacta de una cantidad determinada, es preciso compararla con otra de su misma especie, viendo las veces que ésta se halle contenida en aquélla. La cantidad arbitraria y conocida que sirve de tipo de comparación para apreciar las de su especie, se llama UNIDAD.

Mas cuando se agrupan unidades iguales para que su conjunto sirva de elemento en la apreciación de cantidades de su misma especie, se tiene lo que se llama *unidad colectiva.* Según esto, si se quisiera tener idea exacta de lo que supone una gran cantidad de papel, uno de los pliegos que entran en su formación pudiera ser unidad demasiado pequeña; mas si se agrupan cinco de éstos, se tendrá el *cuadernillo,* que podrá considerarse como unidad de otro orden, ó sea como unidad colectiva. Del mismo modo la reunión de varios cuadernillos pudiera componer otras nuevas unidades colectivas de orden más elevado que el anterior, como sucede con la *mano* y la *resma.*

2. Al resultado que se obtiene al comparar la cantidad con la unidad se llama *número.* Según esto, la *cantidad* la constituye el objeto que se mide ó aprecia, y el *número* no es más sino el resultado de esta apreciación.

Al comparar la unidad con la cantidad, puede suceder que la unidad adoptada se halle contenida exactamente una ó varias veces en la cantidad que se trata de apreciar, y el número que resulta en tal caso se llama ENTERO; puede ocurrir que la cantidad no llegue á contener ni una sola vez á la unidad, en cuyo caso se apreciaría aquélla dividiendo la unidad en un número tal de partes iguales que una de ellas se encuentre contenida exactamente en la cantidad que se desea medir; entonces el número que se obtiene se llama QUEBRADO ó FRACCIÓNARIO; y, finalmente, cuando ni la unidad, ni ninguna de las partes iguales en que puede estar dividida, se halle exactamente contenida en la cantidad que se quiere medir, entonces no hay posibilidad de apreciar esta con aquella unidad sino de una manera aproximada, y con tal motivo aparece como resultado de la última comparación hecha el número llamado INCONMENSURABLE.

El número se divide además en *abstracto* y *concreto.* El primero es aquel en que no se menciona la especie de la unidad que intervino en su apreciación; como por ejemplo: treinta y cuatro; cinco sextos, etc. El número concreto es el que determina la especie de la unidad á que se refiere; como cuando se dice : siete hombres; un cuarto de hora, etc. (*)

Las Matemáticas son el conjunto de ciencias que no sólo determinan las leyes y relaciones de la cantidad, sino que además se ocupan de las variadas aplicaciones á que estas mismas leyes y relaciones se prestan. El objeto esencial de este orden de conocimientos es el número y la extensión; mas como quiera que el uno y la otra se hallan sometidos á leyes generales independientes de su esencia numérica ó extensiva, de aquí que el estudio de aquellas ciencias aparezca dividido, en primer término, en tres ramas principales que respectivamente se denominan Aritmética, Geometría y Álgebra.

La Aritmética, ó sea la ciencia de que se ocupa este tratado, tiene por objeto formar y expresar los números, investigar las propiedades de éstos, y resolver las cuestiones que dependen de su composición y descomposición.

(*) Según esto, el número abstracto se limita á manifestar la relación cuantitativa que existe entre dos cantidades de la misma especie; al paso que el concreto puede considerarse como el resultado de la comparación de éstas bajo el doble punto de vista cuantitativo y cualitativo; por cuya circunstancia se explica que el número concreto sea la expresión propia de la cantidad medida.

PRIMERA PARTE.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ABSTRACTOS.

LIBRO I.

NÚMEROS ENTEROS.

CAPÍTULO II.

Numeración décupla.

ARTÍCULO I.

Generalidades.

3. NUMERACIÓN es el medio convencional de expresar los números de una manera exacta, breve y sencilla; mas como quiera que á éstos hay que distinguirlos con palabras y signos distintos, de aquí la necesidad de dividir la numeración en *hablada* y *escrita*.

La reunión de voces y cifras diferentes con que se expresan los números, constituye lo que se llama *sistema de numeración.*

Los números se forman por la agregación sucesiva de unidades; de donde se deduce que la serie de números es ilimitada, supuesto que por crecido que sea el número que se considere, siempre podrá aumentársele una unidad, dando lugar con tal incremento á la formación de otro nuevo número.

ARTÍCULO II.

Numeración hablada.

4. Se concibe que si para nombrar cada número se hiciera uso de una palabra completamente distinta y sin conexión alguna con las empleadas para mencionar los demás, resultaría que, como aquéllos son en número infinito, no habría las palabras necesarias, ni tampoco sería hacedero retener en la memoria un crecidísimo número de éstas; de aquí la imprescindible necesidad de combinar entre sí, de un modo sistemático, el corto número de voces diferentes que se adopten, á fin de conseguir la fácil expresión de todos los números.

Cuando la unidad y la cantidad que se trata de medir son iguales, resulta el número menor de veces que la primera esté contenida en la segunda : este número se llama *uno;* si al número uno se le agrega una unidad, se tiene el número *dos;* si á éste se le añade otra unidad, se formará el número *tres,* y así sucesivamente por la agregación de unidades se obtendrían otros nuevos números, cuyos nombres son *cuatro, cinco.....* hasta *diez.* A la reunión de diez unidades se considera como una unidad colectiva llamada *decena;* y se cuenta por decenas del mismo modo que por unidades, diciendo una decena ó diez, dos decenas ó veinte, tres decenas ó treinta, y así sucesivamente hasta llegar á diez decenas ó *ciento.*

Para expresar los números comprendidos entre dos decenas consecutivas, se añaden, al menor número de decenas, los nombres de los nueve primeros números : así se dice veinte y uno, veinte y dos, veinte y tres..... El número ciento se considera como una nueva unidad colectiva llamada *centena,* y se cuenta por centenas lo mismo que por unidades sencillas y decenas: así se dice una centena ó ciento, dos centenas ó doscientos, tres centenas ó trescientos..... Para nombrar los números comprendidos entre dos centenas consecutivas, se añaden al más pequeño de centenas los noventa y nueve primeros números: así se diría setecientos uno, setecientos dos, setecientos tres..... setecientos diez, setecientos once..... setecientos veinte..... setecientos treinta..... setecientos noventa y nueve.

A la reunión de diez centenas se le considera como otra nueva unidad llamada *millar;* debiendo contarse por millares ó miles, lo mismo que por unidades sencillas hasta mil; es decir, que hay necesidad de contar por unidades de millar, decenas de millar y centenas de millar, hasta mil millares. Para nombrar los números comprendidos entre dos millares consecutivos, se agrega al número menor de millares los novecientos noventa y nueve primeros números.

Al conjunto de mil millares se le considera como otra nueva unidad llamada *millón,* y se cuenta por millones del mismo modo que por unidades simples hasta un millón de millones; es decir, que habrá que contar por unidades de millón, decenas de millón..... decenas de millar de millón y centenas de millar de millón.

A la reunión de un millón de millones se le considera como si fuera otra unidad colectiva llamada *billón,* y se cuenta por billones lo mismo que por millones hasta llegar al millón de billones, ó sea el *trillón;* el número formado por el millón de trillones se llama *cuatrillón;* y se contaría por billones, trillones, cuatrillones, etc., lo mismo que por millones.

Las diversas unidades colectivas que se acaban de formar, se clasifican por órdenes; y así se denominan *unidades sencillas* ó *de primer orden* á las primitivas, *unidades de segundo orden* á las *decenas,* de *tercer orden* á las *centenas,* y correlativamente las demás. De aquí se deduce que todo número entero es un conjunto de unidades de diversos órdenes, siendo menor que diez el número de las que contiene cada orden. Según esto, la expresión de un número por medio de palabras se consigue *enunciando aquellas que indican cuantas unidades contiene de cada orden según su valor correlativo descendente.*

De lo dicho se deduce que las palabras diferentes é indispensables que se emplean en la expresión de los números enteros, son únicamente las que corresponden á los nombres de los diez primeros números y las voces *ciento, mil, millón, billón.....*

Con el fin de abreviar, ha hecho el uso admitir otras palabras que no son indispensables, supuesto que en vez de *once, doce, trece, catorce* y *quince,* pudiera decirse *diez y uno, diez y dos.....* así como las voces *veinte, treinta, cuarenta.....* pudieran ser sustituidas respectivamente por *dosenta, tresenta, cuatrosenta.....* y, finalmente, en lugar de *quinientos, setecientos* y *novecientos,* pudiera muy bien decirse *cincocientos, sietecientos* y *nuevecientos.*

ARTÍCULO III.

Numeración escrita.

5. Como quiera que los números expresados por medio de palabras no se prestan bien á operar con ellos, ni en tales condiciones sería fácil venir en conocimiento de sus propiedades, ni de las leyes de sus diversas combinaciones; de aquí la necesidad de adoptar signos que los

representen de una manera breve, á fin de que el entendimiento, con independencia de la palabra, pueda dedicarse con provecho á aquel género de investigaciones.

En las voces que sirven para nombrar los números, existen unas como *uno, diez, ciento, mil, millón, billón....* que significan órdenes de unidades, al paso que las otras, ó sea las que se pronuncian para expresar los nueve primeros números, manifiestan las veces que está contenido en el que se trata de expresar, cada una de aquellas unidades.

Luego según esto, si se tiene en cuenta que el número de unidades de cada orden no puede exceder de nueve, y se conviene en que *toda cifra escrita á la izquierda de otra representa unidades de un orden inmediato superior á las de aquella otra cifra,* habremos conseguido poder escribir todos los números sin más que hacer uso de nueve signos diferentes. Mas como pudiera suceder que el número que se trate de representar con guarismos careciese de unidades de un cierto orden, de aquí la necesidad de hacer uso además de otra cifra que, aun cuando por sí sola no tenga valor alguno, sirva para ocupar el lugar ó lugares que correspondan á los órdenes de unidades de que carezca el número que se desea escribir.

Las cifras *significativas* se ha convenido sean las siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.

Los números por ellas representados se llaman *dígitos.* Se denomina *cero* al guarismo 0.

6. Dedúcese de lo expuesto que la primera cifra de la derecha de un número representará *unidades sencillas* ó de primer orden; la segunda, ó sea la que sigue inme-

diatamente á ésta, significará *decenas* ó unidades de segundo orden; la tercera *centenas* ó unidades de tercer orden, y así sucesivamente. Asimismo se desprende de lo dicho, que como quiera que todo número escrito con cifras se divide en centenas, decenas y unidades simples; centenas, decenas y unidades de millar; centenas, decenas y unidades de millón, etc., claro está que una vez familiarizados con la escritura de números de tres cifras, la de aquellos que sean mayores no puede ofrecer dificultad alguna. También se deduce del principio convencional de la numeración escrita, que cada guarismo tiene dos valores, el uno llamado *absoluto,* que es el que representa la cifra por sí misma, y el otro *relativo,* ó sea el que adquiere con arreglo al lugar que ocupa á la izquierda de otras.

Si se quiere escribir el número *siete mil quinientos tres millones, doscientos noventa y tres mil, seiscientos cinco,* ateniéndose á los principios establecidos, se deberá escribir en la siguiente forma:

7503293605.

Así como la lectura y escritura de las oraciones y palabras de que se compone nuestro lenguaje se efectúa de izquierda á derecha, en igual sentido se escriben y leen los números. Según esto, para expresar un número por medio de cifras, *se escribirán sucesivamente las unidades de sus diversos órdenes, principiando por las del superior, y se tendrá cuidado de señalar con la cifra 0 los lugares que deben ocupar aquellos órdenes que carecieren de unidades.* También se deduce de lo anteriormente dicho, que para leer un número ya escrito con cifras, *convendrá dividirlo en secciones de tres cifras, empezando por la derecha, é ir leyendo sucesivamente cada una de las secciones, prin-*

cipiando por la primera de la izquierda; debiendo expresar á la terminación de la lectura de cada una de aquéllas, el nombre que corresponda al orden de sus unidades.

Se ve, pues, que con diez guarismos se pueden escribir todos los números que se pudieran proponer. Obsérvese que este número de cifras es igual al de unidades que una sola de un orden superior contiene de las del inmediato inferior. Uno ú otro de estos dos números determina lo que se llama la BASE del sistema de numeración.

Se comprende que, sea cualquiera el número que se tome por base de un sistema de numeración, se podrán siempre nombrar y escribir todos los números que se propongan, sin más que aplicar en cada caso, análogas consideraciones á las expuestas en la explicación del sistema décuplo.

CAPÍTULO III.

Operaciones fundamentales.

ARTÍCULO I.

Definiciones.

7. Operación es toda combinación numérica que tiene por objeto formar un número llamado *resultado*, por medio de otros conocidos de antemano que se llaman *términos de la operación.*

Las operaciones fundamentales se dice que son cuatro: *adición, sustracción, multiplicación* y *división;* aun cuando aquel calificativo sólo debiera aplicarse á la primera, ó sea á la adición, supuesto que de ésta se derivan todas las demás.

Las operaciones llamadas de *composición* son: la adición, la multiplicación y la elevación á potencias; y las de *descomposición,* inversas respectivamente de las anteriores, son: la sustracción, la división y la extracción de raíces.

Los términos de la operación se separan del resultado por medio del signo =, que se lee *igual á;* constituyendo el conjunto lo que se llama una *igualdad,* que no es otra cosa sino la expresión de la propiedad que tienen dos números ó cantidades de poseer el mismo valor. La parte escrita á la izquierda del signo igual se llama *primer miembro,* y la que aparece á la derecha se denomina *segundo miembro.*

Al practicar cualesquiera de las operaciones fundamentales, puede incurrirse en alguna equivocación; de aquí la conveniencia de que antes de que se tomen como exactos los resultados obtenidos, sean debidamente comprobados.

Prueba de una operación, es el medio empleado para cerciorarse de su exactitud. Pudiera suceder que estando la operación equivocada, se volviese á cometer algún error al practicar la prueba; mas es tan difícil que se compensen las equivocaciones de ambas operaciones, que bien se puede admitir como exacto todo resultado en que la operación y la prueba se hallen conformes.

Entre las diferentes pruebas que suele haber para cada operación, deberá darse la preferencia en cada caso á aquella que sea más breve y sencilla y, á ser posible, que no exija la escritura de nuevas cifras.

ARTÍCULO II.

Adición.

8. Se llama adición á la operación que tiene por objeto reunir los valores de varios números conocidos, llamados *sumandos,* en uno solo que se llama *suma.*

Para indicar que varios números se han de sumar, se escribe entre ellos el signo $+$, que se lee *más.*

Dos casos conviene distinguir en la adición: 1.º, sumar números dígitos; 2.º, sumar números compuestos de varias cifras.

Primer caso. Este se reduce á añadir sucesivamente á uno de los sumandos las diferentes unidades que contienen los demás. Se abrevia esta operación, agregando de una vez las unidades que cada cifra representa; cosa fácil de ejecutar, en atención á que desde nuestros primeros años se sabe de memoria cuál es la suma de dos números dígitos cualesquiera.

Así, si hubiere que sumar los números 7, 9, 8 y 3, se indicaría la operación y el resultado se escribiría en la siguiente forma:

$$7+9+8+3=27.$$

Segundo caso. *Para sumar varios números compuestos de varias cifras, se suman las unidades del mismo orden, y si de la reunión de las unidades de un orden cualquiera, resultaren una ó más del inmediato superior, se agregarán á la suma parcial de las de éste; y el número formado por todas estas sumas parciales será la suma que se buscaba.*

En la práctica de esta operación *se disponen los sumandos de tal modo que, colocados los unos debajo de los otros, las unidades del mismo orden se correspondan en columna,* con el fin de evitar de este modo que equivocadamente se mezclen en la operación unidades de órdenes diferentes. *Se comienza á sumar por las unidades sencillas, después las decenas, luego las centenas, seguidamente las unidades de millar, y así sucesivamente,* en atención á que, procediendo de esta manera, no sólo se facilita la agregación de las decenas que pudieran resultar en cualquiera de las sumas parciales, á su inmediata del orden inmediato superior, sino también á que operando en otra forma, habría que rectificar frecuentemente cifras ya escritas en la suma total. *Finalmente, por medio de una raya horizontal trazada debajo del último sumando, se marca la separación entre éstos y la suma pedida.*

EJEMPLO.

$$\begin{array}{r l}
7482 & \\
539 & \\
84594 & \\
78 & \\
\hline
92693 & \text{Suma total.}
\end{array}\left.\right\} \text{Sumandos.}$$

Luego $7482+539+84594+78=92693$.

Es evidente que el resultado así obtenido contiene necesariamente todas las unidades sencillas, todas las decenas, todas las centenas, etc., de los sumandos, y por consiguiente se ha conseguido reunir en un solo número todas las unidades de éstos.

9. *El número total de unidades de una suma de varios sumandos es independiente del orden en que éstos se hallen colocados.* En efecto, una suma de números puede considerarse como un todo, cuyas diversas partes son los sumandos; y como quiera que en ninguno de éstos se altera el número de unidades que contiene por el cambio de lugar que pudiera experimentar, y todos ellos intervienen del mismo modo y son igualmente indispensables en la formación de la suma, se infiere que el número total de unidades de ésta, permanecerá inalterable.

La prueba de la adición se funda en la proposición anterior, y consiste en repetir las diferentes sumas parciales, comenzando á efectuar cada una de éstas en orden inverso del que se empleó al hacer por primera vez la suma; pues de este modo se pondrán de manifiesto las equivocaciones que en esta operación dependen ordinariamente del vicio que adquiere el oído, el cual desaparece cuando las palabras se modifican.

ARTÍCULO III.

Sustracción.

10. Esta operación tiene por objeto, *conocida la suma de dos números y uno de éstos, determinar el valor del otro.*

La suma dada recibe el nombre de *minuendo;* el sumando conocido se denomina *sustraendo,* y el desconocido *resto* ó *resta* de la sustracción, y también *exceso* ó *diferencia* entre el minuendo y sustraendo.

Según la definición que antecede, el minuendo tiene que ser igual á la suma del sustraendo con el resto; de donde se sigue que el número que se trata de encontrar ha de contener tantas unidades cuantas le falten al sustraendo para ser igual al minuendo; y como quiera que lo que falta á un número para ser igual á otro, es la diferencia que entre ambos existe, de aquí que también se diga que la sustracción, ó sea la operación de *restar, consiste en determinar la diferencia que hay entre dos números.* Mas si se tiene en cuenta que para hallar esta diferencia bastará quitar del mayor, ó sea del minuendo, el valor del menor, ó sea el sustraendo, se podrá decir que *restar es quitar de un número todas las unidades que contenga otro.*

Para indicar la sustracción se escribe el signo —, que se llama *menos,* que deberá colocarse entre el minuendo y sustraendo.

11. Es evidente que una suma de dos sumandos no sufrirá alteración al aumentar en un cierto número de unidades uno cualquiera de éstos, siempre que el otro sumando, en compensación, haya disminuido en el mismo número de unidades; así como también se comprende que si la suma viniese aumentada en la misma cantidad que se agregó á uno de los dos sumandos, el otro sumando habrá permanecido inalterable. De aquí se deduce, que siendo el minuendo la suma del sustraendo y resto, este último aumentaría ó disminuiría en tantas unidades como aumente ó disminuya el minuendo, en el supuesto de que el sustraendo haya permanecido inalterable; asimismo se explica que el resto disminuirá ó aumentará en el mismo número de unidades que aumente ó disminuya el sustraendo, admitiendo que el minuendo no ha variado de valor.

De lo que se acaba de exponer se desprende que *cuan-*

do al minuendo y al sustraendo se aumenten ó disminuyan en una misma cantidad, el resto no experimentará alteración alguna.

En la sustracción se suelen considerar dos casos: 1.º, restar un número compuesto de una ó varias cifras por otro de una sola; 2.º, restar dos números compuestos de varias cifras.

Primer caso. Sabiendo de memoria la suma que producen dos números dígitos cualesquiera, será fácil determinar uno de ellos conociendo la suma de ambos y el otro; pues bastará encontrar las unidades que se necesiten agregar á este último, que sería el sustraendo, para reproducir al minuendo.

Segundo caso. *Para restar dos números de varias cifras, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de un mismo orden; se traza debajo una raya horizontal, y se resta de cada cifra del minuendo su correspondiente del sustraendo, principiando por la derecha; si alguna cifra del minuendo fuere menor que su correspondiente del sustraendo, se agregarán á ella diez unidades de su orden para poder efectuar la sustracción parcial, y se tendrá en cuenta esta circunstancia para que al restar las cifras del orden inmediato superior se añada á la del sustraendo otra unidad.*

Si el minuendo y el sustraendo tuvieran muchas cifras y se escribieran en la forma propia que indica la operación, ó sea

$$8497-4626=3872,$$

entonces pudiera ocurrir que equivocadamente se hicieran intervenir, en alguna ó algunas de las restas parciales, unidades de orden diverso; y á fin de evitar que se incurra en tal error, lo más seguro es atenerse estrictamente á lo que dice la regla que se acaba de exponer, según se practica en el siguiente ejemplo :

Minuendo....	8497
Sustraendo..	4625
Resto..........	3872

El resultado obtenido será la diferencia que se deseaba encontrar, supuesto que proviene de haber quitado del minuendo sucesivamente las unidades de los diversos órdenes que contiene el sustraendo, cuyo conjunto constituye todo su valor.

Obsérvese que no siempre es indiferente el orden con que deben efectuarse las sustracciones parciales en la operación de restar, pues cuando alguna cifra del sustraendo tiene mayor número de unidades que el que corresponde á la de igual orden en el minuendo, entonces es preferible comenzar á que se efectúe la sustracción por las unidades sencillas, procediendo siempre de derecha para izquierda, pues de lo contrario habría que enmendar alguna ó algunas de las cifras escritas en el resto total.

La prueba de la sustracción consiste en sumar el sustraendo con el resto, y si la operación está bien efectuada deberá reproducirse el minuendo (10). Puede citarse como modelo esta prueba por las recomendables condiciones que en ella concurren (7).

ARTÍCULO IV.

Multiplicación.

12. La MULTIPLICACIÓN tiene por objeto, conocidos dos números llamados *multiplicando* y *multiplicador,* hallar un tercero, el cual se denomina *producto,* que debe ser en

magnitud respecto del multiplicando, lo mismo que el multiplicador es respecto de la unidad.

El multiplicando y multiplicador se llaman *factores del producto.*

El signo de multiplicar es un punto ó una cruz en forma de aspa, que se escribe entre los factores y se lee *multiplicado por.*

13. De la definición general de la multiplicación se deducen otras varias, aplicables al caso en que el multiplicador sea un número entero; así, por ejemplo, al multiplicar 35×7, obsérvese que siendo el multiplicador la reunión de siete unidades, el producto deberá ser igual al resultado que se obtenga de repetir siete veces como sumando el número 35; y, en su consecuencia, podemos decir que *multiplicar un número por otro que sea entero, es repetir el multiplicando tantas veces como sumando cuantas unidades tuviere el multiplicador.* De aquí se infiere que si el multiplicando contiene un número exacto de decenas, centenas, unidades de millar, etc., cada uno de los productos resultantes estará respectivamente expresado por decenas, centenas, unidades de millar, etc. En general puede decirse que *el producto de un número por unidades de un cierto orden, es siempre del mismo orden que esas unidades expresan.*

Aplicando también al ejemplo anterior la misma definición de la multiplicación, resulta que, supuesto que el multiplicador es siete veces mayor que la unidad, el producto deberá ser siete veces mayor que el multiplicando; de modo que, según esto, puede decirse también que *multiplicar un número cualquiera por otro que sea entero, es hacer el multiplicando tantas veces mayor cuantas unidades tenga el multiplicador.*

Para exponer con la debida claridad el procedimiento abreviado que permite obtener el valor del producto de dos factores sin necesidad de escribir el multiplicando tantas veces como sumando cuantas unidades tuviere el multiplicador, conviene distinguir tres casos: 1.º, multiplicar un número dígito por otro; 2.º, multiplicar un número compuesto de varias cifras por un dígito; y 3.º, multiplicar dos números compuestos de varias cifras.

14. Primer caso. Los productos que resultan de multiplicar un número de una sola cifra por otro también de una cifra, deben saberse de memoria. La tabla que los contiene, llamada de Pitágoras, se forma escribiendo en una fila los nueve primeros números; sumando éstos consigo mismo se tiene la segunda fila; sumando luego la primera y la segunda se formaría la tercera, y si se continúa así sumando siempre los números de que se compone la primera fila ó renglón, con sus correspondientes de la última que se haya formado hasta llegar á novena fila, se habrá llegado como resultado á la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

A poco que se fije la atención en el procedimiento seguido al construir esta tabla, se comprende sin dificultad que la segunda fila contiene los números de la primera repetidos dos veces ó multiplicados por 2; que la tercera fila contiene los números de la primera tres veces, ó multiplicados por 3; y así, sucesivamente, hasta considerar la novena fila que los contiene nueve veces.

Para hacer uso de esta tabla, se busca el multiplicando en la primera fila, y el multiplicador en la primera columna, y el número contenido en la casilla que corresponde á la vez á la columna del multiplicando y á la fila del multiplicador, nos daría el producto que se busca. Fácilmente se comprende, que de la misma manera que esta tabla se ha formado por filas horizontales, pudiera también construirse por columnas verticales, dando siempre como resultado iguales números en las mismas casillas.

15. Segundo caso. *La multiplicación de un número de varias cifras por otro de una sola*, se reduce al primer caso, si se considera que el producto se podrá hallar repitiendo por sumando tantas veces al multiplicando cuantas unidades tuviere el multiplicador (**13**); mas como quiera que para hallar esta suma se tendría necesidad de repetir un mismo número de veces la cifra (*) que corresponde á cada uno de los diversos órdenes de unidades de que se compone el multiplicando, de aquí se infiere que haciendo la multiplicación de cada una de las mencionadas cifras por la del multiplicador y sumando los resultados obtenidos, según se ve en el siguiente ejemplo, se tendrá el producto que se busca.

Multiplicar 7892 por 6. La operación pudiera disponerse en esta forma:

Multiplicando...	7892
Multiplicador...	6
	12
	540
	4800
	42000
Producto..........	47352

(*) Siempre que se diga cifra, entiéndase la colección de unidades que expresa.

En la práctica, se multiplica la cifra del multiplicador sucesivamente por las unidades simples, decenas, centenas, etc., del multiplicando, escribiendo de cada uno de estos productos únicamente la cifra de sus unidades, reservando las respectivas decenas para añadirlas al producto parcial siguiente, y así se obtiene como resultado el producto que se desea encontrar.

(*) Así, en el ejemplo anterior se dispone la operación como sigue:

$$\begin{array}{r} 7892 \\ 6 \\ \hline 47352 \end{array}$$

Luego, según esto, *para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se multiplica cada una de las cifras del multiplicando, empezando por las de orden inferior, por el multiplicador; se escriben las unidades de cada producto parcial á la izquierda del anterior, y las decenas se agregan al siguiente.*

16. Casos particulares. Antes de entrar de lleno en la multiplicación de dos números compuestos de varias cifras, conviene hallar el producto de un número por la unidad seguida de ceros; así como también el que proviene de multiplicarlo por una cifra significativa seguida de ceros.

Para efectuar la multiplicación de un número por la unidad seguida de ceros, se escriben á la derecha del número propuesto tantos ceros como acompañan á la unidad del multiplicador. En efecto: al escribir á la derecha de un

---

(*) Se prescinde de dar detalles más minuciosos acerca de la ejecución de las operaciones fundamentales, en atención á que este tratado se destina á los alumnos de segunda enseñanza, los cuales al ingresar en ella tienen que acreditar el conocimiento de aquéllos.

número, uno, dos, tres ó más ceros, se le hace respectivamente diez, ciento, mil, etc., veces mayor, supuesto que cada una de sus cifras ocupa el lugar de un orden de unidades que es diez, ciento, mil, etc., veces mayor, y por lo tanto el número queda multiplicado por 10, 100, 1000, etc.

Así, por ejemplo, $8716 \times 100 = 871600$.

Para multiplicar un número por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el multiplicando por la cifra del multiplicador, y al producto que resulta se le agregan á su derecha igual número de ceros.

En efecto, multiplicar 2839 por 6000 es repetir el 2839 por sumando 6000 veces (13); mas si se supone que están escritos estos 6000 sumandos, desde luego podrán mentalmente formarse con ellos mil grupos de 6 sumandos cada uno; el valor de uno de estos grupos se hallará multiplicando 2839 por 6, que daría por resultado el número 17034; luego si éste representa las unidades de un grupo, las de los 1000 grupos supondrán 17034000, que será igual á la suma total de los precitados 6000 sumandos, ó sea el producto que se buscaba.

17. Tercer caso. Para deducir la regla de la multiplicación *cuando los dos factores tengan varias cifras,* véase cómo se encontraría el producto de multiplicar 5843 por 4079. Seguramente se obtendría éste, repitiendo el multiplicando tantas veces como sumando cuantas unidades tiene el multiplicador, ó sean 4000 veces, más 70 veces, más 9 veces. El producto de 5843 por 9 es 52587; el del mismo multiplicando por 70 es igual á 409010, ó sean 40901 decenas, y por último, el producto de 5843 por 4000 es 23372000, ó sean 23372 millares. Es evidente que sumando estos tres productos parciales, se tendrá el producto total.

Así, en el ejemplo propuesto se tendría:

Multiplicando...		5843
Multiplicador ...		4079
Productos parciales.........		52587
		409010
		23372000
Producto total...		23833597

En la práctica la operación se dispone en la siguiente forma:

Multiplicando...		5843
Multiplicador ...		4079
Productos parciales.........		52587
		40901
		233720
Producto total...		23833597

Se omite por innecesaria la escritura de los ceros que resultan á la derecha de los productos parciales que provienen de multiplicar las decenas, centenas, etc., del multiplicador por todo el multiplicando; pero se tendrá cuidado de que la primera cifra de cada uno de los mencionados productos se halle en columna con la cifra del multiplicador de que proviene.

Por lo tanto, *para multiplicar dos números de varias cifras, se multiplica todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador; se colocan estos productos los unos debajo de los otros de modo que se corresponda la primera cifra de cada uno con su correspondiente del multiplicador; se suman todos ellos y la suma resultante expresará el producto total que se buscaba.*

Del procedimiento que se acaba de exponer, se sigue que es indiferente principiar la multiplicación por cualquier orden de unidades del multiplicador, siempre que no dejen de observarse las precitadas reglas; sin embargo, el uso y la comodidad exijen que se principie la operación por las unidades de orden inferior y se continúe sucesivamente hasta efectuar la multiplicación con las de orden más elevado.

18. Dada la diversa misión que desempeñan cada uno de los dos factores de un producto, pudiera creerse que no es indiferente considerar al multiplicando como multiplicador y á éste como multiplicando; de aquí la necesidad de demostrar el siguiente

(*) TEOREMA.—*El orden en que se multipliquen dos factores de un producto, no ocasiona alteración alguna en éste.*

En efecto, sean los números 4 y 27 los factores de un producto. Descomponiendo el factor 4 en unidades, se tendrá $4=1+1+1+1$; multiplicando estos dos miembros iguales por 27, resultará :

$$4\times27=27+27+27+27;$$

mas obsérvese que este segundo miembro equivale á repetir el número 27 cuatro veces, ó sea á 27×4; luego queda probado que

$$4\times27=27\times4.$$

Esta proposición permite efectuar la prueba de la multiplicación sin más que invertir los factores, con el fin de ver si resulta un producto igual al obtenido. También manifiesta el citado teorema que en la práctica será conveniente, en general, considerar como multiplicador al factor que, para hallar el resultado, exija menor número de productos parciales.

(*) *Teorema* es una proposición que, aunque verdadera, necesita ser demostrada. En el enunciado de todo teorema conviene distinguir el supuesto ó hipótesis y la conclusión ó tesis.

ARTÍCULO V.

Productos indicados.

En algunas ocasiones conviene indicar solamente las operaciones por medio de signos, y á pesar de presentarse en tal forma, también se las somete al cálculo (*).

Cuando una operación indicada ha de servir de elemento para efectuar otra, se encierra la primera dentro de un paréntesis. Así, por ejemplo, $(7+8+9+3)6$.

La ausencia de signo entre la suma indicada y el número 6, representa también el producto de aquélla por éste.

19. *El producto de una suma indicada por un número, se obtiene multiplicando cada uno de los sumandos por dicho número, y sumando los productos parciales que resultan.* Pues es evidente que el producto de $7+8+9+3$ por 6, se hallará repitiendo 6 veces como sumando esta suma indicada, para lo cual habrá necesidad de repetir 6 veces cada sumando y luego reunir los resultados obtenidos. En el ejemplo anterior se tendrá, que

$$(7+8+9+3)6=7\times6+8\times6+9\times6+3\times6.$$

20. *Para multiplicar una diferencia indicada por un número, se multiplican minuendo y sustraendo por dicho número y se resta del primer producto el segundo.*

En efecto, sea la diferencia indicada $9-4$ que se trata de multiplicar por 3. Desde luego se tiene que $9\times3=9+9+9$, así como también $4\times3=4+4+4$; res-

---

(*) *Calcular* números es practicar una combinación con éstos del modo que convenga en cada caso.

tando ordenadamente (*) estas dos igualdades, resulta que $9\times3-4\times3=(9-4)+(9-4)+(9-4)=(9-4)3$, de donde se deduce que $(9-4)3=9\times3-4\times3$.

En ocasiones conviene escribir los productos de los segundos miembros de las igualdades que anteceden, en los cuales aparece repetido un mismo factor, en la forma que tienen en los primeros miembros, ó sea dentro de un paréntesis los multiplicandos parciales y fuera el factor común. Cuando tal transformación ha sido efectuada, se dice que se ha *separado* ó *sacado el factor común.*

Se entiende por *producto de varios factores* el resultado que se obtiene de multiplicar el primer factor de la izquierda por el segundo, el producto que resulta por el tercero, este nuevo producto por el cuarto, y así sucesivamente hasta hacer intervenir en esta sucesión de multiplicaciones al último factor.

(**) LEMA.—*El producto de varios factores no se altera aun cuando se invierta el orden de colocación de dos factores consecutivos.*

PRIMER CASO. *Cuando son tres los factores del producto y se invierte el orden de los dos últimos.*

Se trata de demostrar que $7\times4\times8=7\times8\times4$.

En efecto, evidentemente $7\times4=7+7+7+7$, multiplicando por 8 ambos miembros de esta igualdad, se tendrá (19) que $7\times4\times8=7\times8+7\times8+7\times8+7\times8$, de donde, esto mismo escrito en forma más breve, conduce á la siguiente igualdad :

$$7\times4\times8=7\times8\times4.$$

(*) Se dice que dos igualdades se restan ordenadamente, cuando del primer miembro de una de ellas se quita el primero de la otra, y del segundo miembro de la primera el segundo de la segunda, separando ambos resultados por medio del signo =.

(**) *Lema* es un teorema que carece de importancia propia y que su principal objeto es facilitar la demostración del teorema que inmediatamente le sigue.

SEGUNDO CASO. *Cuando son más de tres los factores y se varía la colocación de dos consecutivos cualesquiera.*

Se quiere probar que

$$7\times4\times8\times9\times5\times6\times3=7\times4\times8\times9\times6\times5\times3.$$

En efecto, si se considera el resultado de multiplicar $7\times4\times8\times9$ como si fuera un solo factor, y se tiene en cuenta lo dicho en el caso anterior, resultará:

$$7\times4\times8\times9\times5\times6=(7\times4\times8\times9)\times5\times6=$$
$$=(7\times4\times8\times9)\times6\times5=7\times4\times8\times9\times6\times5;$$

en donde se ve que

$$7\times4\times8\times9\times5\times6=7\times4\times8\times9\times6\times5,$$

y multiplicando ambos miembros de esta última igualdad por los factores que falten de los que se tuvieran en el producto propuesto, resulta lo que se quería demostrar, ó sea que $7\times4\times8\times9\times5\times6\times3=7\times4\times8\times9\times6\times5\times3$.

21. TEOREMA.—*El valor de un producto de varios factores es independiente del orden de colocación de éstos.*

En efecto, invirtiendo un factor con su inmediato las veces que se consideren necesarias, siempre puede colocarse con respecto de los demás en el lugar que se desee, y haciendo extensivo á los otros factores este cambio de lugar, resultará probada la inalterabilidad del producto.

Por ejemplo, si se quisiera demostrar que

$$7\times4\times8\times9\times5=4\times5\times7\times8\times9,$$

se diría:

$$7\times4\times8\times9\times5=4\times7\times8\times9\times5=4\times7\times8\times5\times9=$$
$$=4\times7\times5\times8\times9=4\times5\times7\times8\times9.$$

(*) COROLARIO 1.º—*En un producto de diferentes factores*

(*) *Corolario* es una proposición que se deduce fácilmente de otra ya demostrada.

puede hacerse la sustitución de cierto número de ellos por su producto efectuado.

Si los factores aludidos fueran los primeros del producto indicado, no podría dudarse de la certeza de esta proposición; mas como quiera que siempre puede suponerse acontece tal circunstancia, podrá hacerse la mencionada sustitución sin que por tal motivo se altere el resultado.

Así, para demostrar que

$$7\times4\times5\times6\times8\times9=7\times4\times(5.6.8)\times9,$$

se diría:

$$7\times4\times5\times6\times8\times9=5\times6\times8\times7\times4\times9=$$
$$=(5.6.8)\times7\times4\times9=7\times4\times(5.6.8)\times9 \text{ (*)}.$$

Corolario 2.º—*Para multiplicar entre sí dos ó más productos, bastará formar un solo producto con todos los factores de que aquéllos se componen.*

Pues reemplazando en el producto de los diversos productos cada uno de ellos por los factores á cuyo producto es igual, resultaría lo que se deseaba demostrar.

Así,

$$(7.8.9.3)\times(5.6.12)\times(4.11.2)=$$
$$=7\times8\times9\times3\times5\times6\times12\times4\times11\times2.$$

Según esto, *cuando se quiera multiplicar varios números en los cuales uno, dos ó más terminan en ceros, se efectuará la multiplicación prescindiendo de éstos, y á la derecha del producto que resultare, se escribirá un número de ceros igual al de los suprimidos.*

(*) Toda igualdad que se deduzca de una proposición demostrada, sirve para que pueda reemplazarse, cuando convenga, el primer miembro por el segundo ó viceversa. Tanto en este corolario como en las demás proposiciones que se demuestran en este artículo, prueban la existencia de igualdades cuyo primer miembro expresa en cada caso la hipótesis y el segundo la tesis.

Si, por ejemplo, se quisiere probar que

$$792000 \times 6800 = (792.68)100000.$$

Obsérvese que

$$792000 \times 6800 = (792 \times 1000) \times (68 \times 100) =$$
$$= 792 \times 1000 \times 68 \times 100 = (792.68)100000.$$

Corolario 3.º—*Para multiplicar un producto indicado de varios factores por un número, basta multiplicar cualquiera de ellos por dicho número.*

Supóngase que se trata de multiplicar por 7 el producto $5 \times 8 \times 9 \times 6$ y se quiere probar que $(5 \times 8 \times 9 \times 6)7 = 5 \times 8 \times 63 \times 6$.

En efecto,

$$(5 \times 8 \times 9 \times 6)7 = 5 \times 8 \times 9 \times 6 \times 7 = 5 \times 8 \times 63 \times 6,$$

que es lo que se quería demostrar.

ARTÍCULO VI.

División.

22. La división tiene por objeto, dado el producto de dos factores y uno de éstos, determinar el otro.

El producto recibe el nombre de *dividendo,* el factor conocido el de *divisor* y el desconocido *cociente.*

El signo de la división es dos puntos que se colocan entre los términos del cociente, ó sea entre el dividendo y divisor.

En el mero hecho de ser el divisor un número entero, podrá decirse que *el cociente será tantas veces menor que el dividendo, como unidades tenga el divisor,* supuesto que al multiplicar el cociente por el divisor se hace al primero tantas veces mayor, como unidades tuviere el segundo; y como el resultado de esta multiplicación, según la definición expuesta, es igual al dividendo, se ve, pues, que éste deberá ser tantas veces mayor que el cociente, cuantas unidades contenga el divisor. De aquí se deduce, que siendo el cociente una de tantas partes iguales de que se compone el dividendo, *deberá estar expresado en unidades del mismo orden que el dividendo.*

Como quiera que también el producto del divisor por el cociente ha de ser igual al dividendo, y éste deberá contener al divisor tantas veces como unidades tenga el cociente; luego *el cociente indica el número de veces que el dividendo contiene al divisor.*

Mas como no siempre el divisor estará contenido en el dividendo un número exacto de veces, pues pudiera ocurrir que, después de haber restado el divisor del dividendo todas las veces posibles, quede un sobrante, el cual necesariamente será menor que el divisor; en tal caso se dice que la división es *inexacta,* y *el cociente entonces nos expresará el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor.*

23. En la división inexacta, al número sobrante que, como se acaba de ver, proviene de quitar del dividendo todas las veces posible el valor del divisor, se llama *residuo.*

Luego, según esto, el dividendo tendrá que ser igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo.

Si al producto del divisor por el cociente hay que añadirle el residuo para reproducir el dividendo, entonces el cociente se llama *inexacto por defecto.* En el caso de ser el residuo mayor que la mitad del divisor, conviene á veces *forzar la unidad* en el cociente, ó sea aumentar al cociente por defecto en una unidad; cuando esto sucede se dice que el cociente que resulta es *inexacto por exceso.*

Al número obtenido en el cociente en toda división inexacta, se conoce con el nombre de *cociente entero* ó *cociente incompleto.*

Cuando el cociente fuere crecido, sería demasiado laborioso y expuesto á equivocaciones su determinación por medio de sustracciones sucesivas; de aquí la necesidad de acudir á otro procedimiento más expedito; y con el fin de explicar éste con claridad, conviene distinguir tres casos:

Primero. *Cuando tanto el cociente como el divisor tengan una sola cifra.*

Para hallar la cifra del cociente, ó sea el número que multiplicado por el divisor ha de reproducir el dividendo, basta saber de memoria la tabla Pitagórica; supuesto que, por medio de ésta, averiguado que sea el producto de dos factores (que necesariamente tendrá una ó dos cifras, por provenir de la multiplicación de dos números dígitos) y uno de éstos, el otro será conocido inmediatamente. Si el dividendo que se da como producto no es igual á ninguno de los contenidos en la mencionada tabla, estará necesariamente comprendido entre dos de éstos: de modo que tomando la cifra correspondiente al menor de ellos, se tendrá desde luego el cociente entero.

24 Segundo caso. *El cociente tiene una cifra y el divisor varias,* y por consiguiente el dividendo también varias, en atención á que la cifra del cociente multiplicada por todo el divisor tiene que dar como resultado un número compuesto de diferentes cifras.

Obsérvese que el producto de la cifra del cociente, cualquiera que ella sea, por la del orden superior del divisor, dará un producto de este mismo orden superior (13); de manera que tomando en el dividendo todas las unidades que contuviere de este orden, en ellas estará contenido el producto de las dos mencionadas cifras, y, además las unidades procedentes de multiplicar la del cociente por todas las demás del divisor; luego si dividimos aquella parte separada de la izquierda del dividendo por la mencionada primera cifra del divisor, se encontrará por cociente una cifra que no podrá ser menor que la verdadera; mas como pudiera suceder que fuera mayor, se conocerá esto multiplicando el divisor por dicha cifra, y si el producto que resultase fuese mayor que el dividendo, será señal de que la cifra obtenida por la división parcial citada excede á la verdadera, en cuyo caso se la disminuye en una unidad y se volverá á hacer la multiplicación de la supuesta cifra del cociente por el divisor; si el producto resultante es menor que el dividendo, la cifra hallada será la que corresponde al verdadero cociente; pero si fuese mayor, se volvería á rebajar otra unidad en ella, y así se continuaría hasta que se encontrara una cifra que multiplicada por el divisor diera un producto igual ó algo menor que el dividendo, la cual sería entonces la verdadera cifra del cociente.

En el supuesto que se tratara de dividir 35162 por 8952, se ve que este ejemplo corresponde al segundo caso de la división, en atención á que si se admite que el cociente fuera 10, el producto de este número por el divisor daría un resultado mayor que el dividendo, lo que dice que el cociente verdadero ha de ser menor que 10, y por tanto no puede tener sino una sola cifra. Para determinar ésta, obsérvese que el dividendo puede ser considerado como el producto del divisor 8952 por la cifra del cociente; y por tanto, las 35 unidades de millar del dividendo puede suponerse que provienen del producto de las 8 unidades de millar del divisor por la cifra del cociente; dividiendo, pues, 35 por 8, se tendrá seguridad de encontrar de este modo el cociente verdadero ó un número mayor que éste, pero nunca menor, supuesto que en estas 35 unidades de millar podrá haber algunas otras que hayan provenido de multiplicar las demás cifras del divisor por el cociente, así como también del resto si la división fuere inexacta. Efectuando esta división, para lo cual bastaría apoyarse en lo dicho en el primer caso, se hallará el número 4; mas en la duda de si esta cifra es igual ó mayor que la verdadera, se deberá comprobar, para lo cual se multiplica por todo el divisor, y entonces se ve que el producto 35808 resultante es mayor que el dividendo, con cuyo motivo habrá que disminuir el cociente obtenido en una unidad y repetir la comprobación.

En la práctica se dispone la operación en la siguiente forma:

35162	8952
·8306	3

Se evita escribir el producto 26856 que resulta de multiplicar la cifra 3 del cociente por el divisor, efectuándose la multiplicación y la sustracción á la vez, para lo cual se resta de la cifra de las unidades del dividendo el producto de la cifra del cociente por las unidades del divisor, de la cifra de las decenas del dividendo el producto del cociente por las decenas del divisor, y así sucesivamente; teniendo cuidado de agregar, si fuera necesario, á cada cifra del dividendo suficiente número de decenas de su orden para hacer la sustracción posible, añadiendo al producto parcial siguiente otras tantas unidades para que el resto no se altere.

De modo que, según lo que se acaba de decir, *para efectuar la división de un número de varias cifras por otro también compuesto de varias cifras, teniendo el cociente una* *sola, se dividen las unidades del dividendo del mismo orden que la primera cifra de la izquierda del divisor, por esta cifra; el cociente obtenido se multiplica por todo el divisor y se resta del dividendo; si la resta es posible, el cociente encontrado es el verdadero; pero si no lo fuera, se disminuyen á este cociente una ó más unidades hasta tanto que pueda efectuarse la sustracción.*

Con el fin de evitar en la comprobación de la cifra del cociente el multiplicar ésta por todo el divisor, suele emplearse en la práctica otro procedimiento fundado en las siguientes consideraciones:

Como quiera que el dividendo ha de ser igual al producto del divisor por el cociente, cada una de las diferentes colecciones de unidades de que se compone el dividendo, debe contener al producto de las unidades del mismo orden del divisor por la cifra del cociente, más aquellas que pudieran provenir del producto parcial inmediato inferior.

Así, en el ejemplo

45916	6583
·39	7
·41	

en donde la cifra de orden superior del divisor expresa millares. Los 45 millares del dividendo contendrán al producto de la cifra 6 del divisor por el cociente, más los millares que provengan de multiplicar las 5 centenas del divisor por el cociente. Si se supone que el cociente es 7, los 45 millares mencionados exceden al producto 42, de los 6 millares del divisor por el cociente en 3 millares, los cuales tienen que formar parte del producto de las 5 centenas del divisor por el cociente; luego este producto unido á las centenas que hayan provenido del producto de las decenas del divisor por la cifra 7 del cociente, tendrá que estar contenido en las 39 centenas, las cuales compondrán un segundo dividendo parcial. Multiplicando la cifra 7 del cociente por las 5 centenas del divisor y restado el producto de las antedichas 39 centenas, resultan 4 centenas de diferencia que corresponderán á su vez al producto de las decenas del divisor por la cifra del cociente, así como también la cifra 1 que corresponde á las decenas del dividendo propuesto; mas como no es posible restar de estas 41 decenas el producto de las 8 decenas del divisor por el cociente 7, esto dice que la cifra 7, que se supuso podía ser la cifra del cociente, es mayor que la verdadera, en atención á que el conjunto de los productos parciales que resultan al multiplicarla por el divisor, componen un número mayor que el dividendo. Ensayada la cifra 6, resulta que el primer resto que se obtiene de quitar de los 45 millares del dividendo los 36 millares que provienen de multiplicar los 6 millares del divisor por el cociente, es 9, número que considerado solamente en su valor absoluto es mayor que la cifra 6 del cociente, con cuyo motivo ya se puede asegurar que este es el verdadero cociente, supuesto que todo lo que queda que multiplicar en el divisor no compone una unidad de millar; luego su producto por 6 nunca llegará á componer 6 millares, número inferior á la parte que queda en el dividendo.

No siendo el cociente 6 mayor que el verdadero, y habiéndose probado anteriormente que tampoco es menor que éste, resulta de aquí haberse hallado la cifra que se buscaba del cociente.

De lo dicho se deduce que para el tanteo de la cifra del cociente, cuando el dividendo y el divisor tienen varias, *se divide el número de unidades del dividendo, que sean del mismo orden que las que expresa la primera cifra de la izquierda del divisor, por esta cifra; se multiplica el cociente que resulta por la cifra que sirvió de divisor, y el producto se resta del dividendo parcial; si el resto es igual ó mayor que el cociente, éste será el que se busca; pero si es menor, se coloca mentalmente á su derecha la cifra siguiente del dividendo y se vuelve á multiplicar la cifra del cociente por la segunda del divisor; este producto podrá ser ó nó, mayor que el número que forman el mencionado resto parcial y la cifra escrita á su derecha: si es mayor, la cifra hallada para cociente será demasiado grande; si no es mayor, se efectúa la sustracción; si el nuevo resto parcial es igual ó mayor que la cifra del cociente, ésta será la verdadera; pero si es menor, se coloca á su derecha la siguiente cifra del dividendo y se continuará de esta suerte hasta tanto que se encuentre un resto igual ó mayor que la cifra del cociente que se ensaya, en cuyo caso éste será el que se busca, ó hasta que se llegue á un producto parcial de la cifra dudosa por una del divisor, producto que sea mayor que el número formado por el resto parcial respectivo y* *por la cifra siguiente del dividendo, en cuyo caso la cifra ensayada será demasiado crecida y habrá que disminuirla en una unidad para repetir la comprobación en igual forma.*

Cuando se haya encontrado la cifra verdadera del cociente, se puede determinar el residuo sin necesidad de multiplicar todo el divisor por el cociente, supuesto que se han restado del dividendo algunos de los productos parciales que provienen de multiplicar la cifra del cociente por las que ocupan órdenes superiores en el divisor; luego para obtener el residuo de la división, sólo falta quitar los demás productos parciales de la parte que haya quedado en el dividendo, al hacer la comprobación de la cifra del cociente en la forma que se acaba de exponer.

EJEMPLO.

```
57924 : | 7231
        |------
·19     | 8
 ·32
  ·84
   76 residuo.
```

25. Tercer caso. *El cociente tiene varias cifras*, con cuyo motivo el dividendo tendrá necesariamente diferentes cifras y el divisor una ó varias.

Al explicar el tercer caso de la multiplicación, se vió que el producto de dos números compuestos de varias cifras, está formado de la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar todo el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador, considerado cada uno de ellos con el valor relativo que le corresponde, y como quiera que el dividendo es un producto que tiene por multiplicando al divisor, se deduce de esto que aquél estará compuesto de la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar el divisor por cada una de las diferentes cifras del cociente, considerando también á cada uno de éstos con su correspondiente valor relativo.

Según esto, si hubiera un medio de conseguir la descomposición del dividendo en los mencionados productos parciales, se podría entonces determinar las diferentes cifras del cociente, sin más que dividir cada uno de aquéllos por el divisor.

Con el fin de fijar mejor las ideas, supóngase que se trata de dividir 23833597 por 5843. Desde luego se ve, en este ejemplo, que el cociente tiene cuatro cifras, supuesto que el dividendo es mayor que 5843×1000 y menor que 5843×10000, lo que manifiesta que la cifra de orden superior del cociente que se busca expresa unidades de millar. El producto de esta cifra por el divisor dará un número exacto de millares que se hallará contenido en los millares del dividendo; mas como quiera que éstos contienen además los millares que provienen de multiplicar las centenas, decenas y unidades del cociente por el divisor, y aun las que pudiera contener el residuo si la división fuera inexacta, de aquí que al dividir 23833 por 5843, según se ha dicho (24), la cifra que se halle como cociente nunca podría ser menor que la verdadera, y obsérvese que tampoco sería mayor, pues es evidente que al dividir una parte del dividendo por el divisor, no es posible encontrarse con un cociente mayor que el que resultaría al dividir todo el dividendo propuesto por el mismo divisor.

Una vez hallada la verdadera cifra del cociente que ocupa el lugar de las unidades de orden superior, ó sea, en el ejemplo propuesto, el de los millares, ya se puede formar el correspondiente producto parcial, el cual, restado del dividendo propuesto, dará por diferencia el número 461597, en el que necesariamente estarán contenidos los demás productos parciales y el residuo que podrá ser cero; de modo, que haciendo con el 461597 análogos razonamientos á los expuestos al considerar el primer dividendo parcial, con la ventaja de haber simplificado la división al operar ahora con un dividendo inferior al propuesto, se obtendrán las centenas del cociente, luego las decenas, después las unidades y finalmente el residuo.

La operación se efectúa del modo siguiente:

```
23833597 | 5843
         |-----
23372000 | 4079
--------
··461597
  409010
--------
  ·52587
   ·····
```

Después de lo dicho, se deduce que cuando alguno de los dividendos parciales sea menor que el divisor, como sucede en el ejemplo que se acaba de proponer con el número 4615, entonces se deberá escribir un cero en el lugar de la cifra correspondiente del cociente, y colocarse á la derecha del 4615 la cifra 9 que sigue en el dividendo propuesto, con el fin de formar el dividendo parcial inmediato.

En la práctica se opera más brevemente suprimiendo la escritura de los productos que resultan de multiplicar cada cifra del cociente por el divisor, así como no colocando á la derecha de los diferentes restos obtenidos más cifras que la siguiente á la última que se consideró en el dividendo parcial precedente, según puede verse á continuación:

```
23833597 | 5843
         |-----
 ··46159 | 4079
  ·52587 |
   ····· |
```

Como quiera que este orden de consideraciones pudieran aplicarse de igual modo á cualquier otro ejemplo análogo, se sigue de aquí que *para dividir dos números enteros en este tercer caso de la división, se consideran á la* *izquierda del dividendo tantas cifras como tenga el divisor, ó una más, si este primer dividendo parcial fuere menor que el divisor; el cociente obtenido se multiplica por el divisor, y el producto que resulta se resta del dividendo parcial; si la sustracción es posible, la cifra hallada formará parte del cociente, y si no lo es, se rebaja en una ó más unidades á la mencionada cifra hallada en el cociente, hasta que aquélla pueda efectuarse; al lado del resto se escribe la cifra siguiente del dividendo, y de esta manera se forma el segundo dividendo parcial; al lado del resto se escribe la cifra siguiente del dividendo propuesto, y así se continúa hasta encontrar la última cifra del cociente. Si alguno de estos dividendos fuera menor que el divisor, se pone cero en el cociente, se forma el siguiente dividendo y se continúa como se tiene dicho.*

26. Casos particulares. *Si el divisor tuviera una sola cifra,* los razonamientos que se acaban de exponer para deducir el cociente, así como la regla que antecede, son aplicables en un todo al presente caso; pero la operación se practica habitualmente omitiendo la escritura de los restos que resultan en las diferentes divisiones parciales y colocándose el cociente obtenido debajo del dividendo, según se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 78935 & \underline{8} \end{array}$$
9866 cociente y 7 residuo.

Cuando el dividendo termina en varios ceros y el divisor se compone de la unidad también seguida de ceros, en tal caso se efectúa la división suprimiendo á la derecha del dividendo tantos ceros como acompañan á la unidad en el divisor, pues de este modo se conseguirá obtener un número que multiplicado por el divisor reproduce al dividendo, que, como ya se sabe (22), es la condición necesaria y suficiente para que aquel resultado sea el cociente verdadero. Así, por ejemplo :

$$7580000:1000=7580.$$

El procedimiento explicado para efectuar la división de dos números cuando el cociente tiene varias cifras, manifiesta el por qué esta operación no puede hacerse, como las tres que le anteceden, empezando por la derecha; supuesto que no es posible marcar de antemano en qué parte del dividendo se halla contenido el producto del divisor por las unidades, decenas, centenas, etc., del cociente, en atención que todos ellos se encuentran reunidos en un solo número que es el dividendo; al paso que se puede fijar desde luego en qué parte del dividendo se encuentra el producto del divisor por las unidades de orden superior del cociente y con ella un número que, en general, será poco mayor que el expresado producto.

Para comprobar si la operación de dividir está bien efectuada, se multiplicará el divisor por el cociente, ó éste por aquél, y al producto se le agregará el residuo, si lo hubiere, y claro está que (23) el resultado deberá ser igual al dividendo si el cociente fuese el verdadero.

ARTÍCULO VII.

Divisibilidad.

PRELIMINARES.

27. Se dice que un número es *múltiplo de otro ó divisible por otro,* cuando contiene á éste un número exacto de veces. Por ejemplo : 12 es múltiplo de 2, de 3, de 4 y de 6. Se llama *duplo, triplo, cuádruplo,* etc., de un núme-

ro, otro número que contiene á éste exactamente dos, tres, cuatro, etc., veces.

Se entiende por *divisor, factor, parte alícuota* ó *submúltiplo* de un número, otro número que se halla contenido en éste un número exacto de veces. Así, por ejemplo, los números 2, 3, 4 y 6 son á su vez divisores ó factores de 12. Se dice que un número es *par* cuando es divisible por 2, é *impar* cuando no es divisible por 2.

Se indica que un número es múltiplo de otro por medio de un punto colocado sobre éste. Así, para manifestar que 12 es múltiplo de 3, se escribiría: $12 = \dot{3}$. Cuando en esta expresión el número que hace las veces de divisor ó parte alícuota se compone de varias cifras, entre éstas y el punto se traza una raya horizontal.

Cuando un número está expresado por una operación indicada, puede conocerse si es ó nó divisible por otro, sin necesidad de efectuar aquélla, ni la subsiguiente división.

I.

28. *Para dividir una suma indicada por un número, se divide cada sumando por este número y se suman los cocientes parciales que resultan.*

Así, para dividir $(8+26+37)$ por 4, se dice que el cociente será igual á $8:4+26:4+37:4$.

En efecto, si este último fuere el cociente verdadero, al ser multiplicado por el divisor resultaría:

$$(8:4)\times 4+(26:4)\times 4+(37:4)4=8+26+37,$$

número igual al dividendo.

Corolario 1.º—*Si un número es divisor de cada uno de los sumandos de una suma, será también divisor de ésta.* Pues siendo exactos todos los cocientes parciales que resultan de dividir cada uno de los sumandos por el divisor, la suma de todos ellos será necesariamente un número entero que expresará las veces que la suma contiene exactamente al divisor.

Corolario 2.º—*Si un número es divisor de otro, lo será también de todo múltiplo de éste.*

Se quiere probar que si 3 es divisor de 12, el número 3 tiene que ser divisor de 12×5.

En efecto, $12\times5=12+12+12+12+12$; mas, como por hipótesis, el número 3 es divisor de cada uno de los sumandos de este segundo miembro, lo será de la suma, ó sea de 12×5.

Conviene, en ocasiones, enunciar esta proposición diciendo: *si un número es divisible por otro, será también divisible por todo divisor de este otro;* de modo que si 12×5 es divisible por 12, tendrá que ser divisible por el número 3 que es divisor de 12.

29. *Para dividir una diferencia indicada por un número, se dividirán el minuendo y sustraendo por dicho número y se restan los cocientes que resultan.*

Se quiere decir que $(54-28):9=54:9-28:9$.

El segundo miembro es igual al primero, supuesto que de multiplicarse por 9 reproduce al dividendo $54-18$.

Corolario 1.º—*Si un número es divisor de otros dos, lo será de su diferencia.* Pues siendo enteros los dos cocientes parciales, su diferencia tendrá que ser otro número entero, que nos manifestará las veces que la diferencia de los números propuestos contiene exactamente al divisor.

30. *Si un número es divisor de uno de dos sumandos y no lo es del otro, tampoco dividirá á la suma de éstos.* Supuesto que si dividiese á la suma tendría que dividir al segundo sumando que es igual á la diferencia que existe

entre la suma y el primer sumando; lo cual es inadmisible por ser contrario á la hipótesis (*).

31. *Para dividir un producto indicado por uno de sus factores, se suprime éste y se multiplican los restantes.*

Se trata de demostrar que $(7\times18\times5\times9):5=7\times18\times9$.

En efecto, $7\times18\times5\times9=(7\times8\times9)\times5$, manifiesta que el cociente verdadero es $7\times18\times9$, supuesto que este último producto multiplicado por el divisor 5 reproduce el dividendo propuesto.

De aquí se deduce que *para dividir un producto indicado por un divisor de cualquiera de sus factores, basta efectuar esta división y multiplicar el cociente que resulta por el producto de los demás factores.*

Se va á probar que $(3\times8\times11\times7):4=3\times2\times11\times9$.

En efecto, $3\times8\times11\times7=3\times2\times4\times11\times7$ (21, Corolario 1.º), y este último producto al dividirlo por 4, da por resultado $3\times2\times11\times7$.

II.

Los caracteres de divisibilidad de los números con respecto de otro determinado de antemano, son las condiciones necesarias y suficientes á que deben satisfacer aquéllos para que sean múltiplos de éste.

32. *Todo número que termine en ceros, es divisible por la unidad seguida de tantos ceros como tenga este número.*

Supuesto que suprimiendo estos ceros (26) se tiene un cociente exacto.

Sea, por ejemplo, el número 6700. Este número es di-

(*) Cuando de admitirse que no es cierta la tesis de una proposición, resulta como consecuencia un absurdo, entonces se dice que el método de demostración que se ha seguido es el de *reducción al absurdo.*

visible por 100, en atención á que, suprimiendo los dos ceros en que termina, queda dividido por 100.

33. *Un número es divisible por 2 cuando su primera cifra de la derecha es 0 ó par.*

Si el número termina en 0 será múltiplo de 10, por virtud del teorema que se acaba de demostrar, y 10 es múltiplo de 2; luego el número contiene exactamente al 2 ó es un múltiplo suyo. (28, Corolario 2.º)

Si su primera cifra de la derecha fuera par, como por ejemplo el 478, se podrá descomponer este número en decenas y unidades; así se tendrá: 470+8. El número 470 formado por las decenas es divisible por 2 en atención á terminar en 0, y las unidades son 8, número par en vista de la suposición; luego el 478, suma de ambos, será también divisible por 2. (28, Corolario 1.º)

34. (*) *Si la cifra de las unidades no es 0 ni cifra par, el número no sería divisible por 2;* porque descompuesto en decenas y unidades, se compondría de dos sumandos, uno de los cuales es divisible por 2 y el otro nó (30).

35. *Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 ó en 5.*

Si el número termina en 0 es divisible por 10, y 10 lo es por 5; luego el número es múltiplo de 5.

Si termina en 5, como por ejemplo 185, se puede descomponer en decenas y unidades: 180+5; las decenas son divisibles por 5 por terminar en 0; las 5 unidades contienen una vez exactamente al número 5; luego la suma de estos dos números, ó sea el 185, es divisible por 5.

Si el número no termina en 5, no es divisible por 5,

(*) Una proposición se dice que es *contraria* de otra cuando la hipótesis y la tesis en ella son contrarias de las de la primera que se llama *directa*. Así este teorema (34) es contrario del anterior (33).

porque descompuesto en decenas y unidades, forma una suma de dos sumandos, de los cuales uno es divisible por 5 y el otro nó.

36. *Un número es divisible por 4 cuando sus dos últimas cifras son ceros ó un múltiplo de 4.*

Un número es divisible por 25 cuando sus dos últimas cifras son ceros ó componen un múltiplo de 25.

Estas dos proposiciones se demuestran, como las dos anteriores, descomponiendo el número dado en centenas y unidades y haciendo ver que ambas partes son respectivamente divisibles por 4 ó por 25.

37. Lema.—*La unidad seguida de un número cualquiera de ceros se compone de un múltiplo de 9 más 1.*

Para convencerse de esta verdad, basta efectuar la división de la unidad seguida de ceros por 9, y se verá que el residuo es siempre igual á 1. Mas como quiera que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, se tendrá:

$$10000.....=1111.....\times 9+1;$$

pero como $1111.....\times 9=\dot{9}$, resultará:

$$10000.....=\dot{9}+1.$$

Corolario.—*Una cifra significativa cualquiera seguida de ceros es igual á un múltiplo de 9 más el valor absoluto de aquella cifra.*

Sea, por ejemplo, el número 8000, que es igual á 8×1000.

Como se sabe que $1000=\dot{9}+1$, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por 8, se tendrá que (19) (28, Corolario 2.º):

$$8000=\dot{9}+8.$$

38. *Un número es divisible por 9 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es un múltiplo de 9.*

Sea el número 6578; si se le supone descompuesto en $6000+500+70+8$, se tendrá, según el corolario que se acaba de demostrar, que:

$$\begin{aligned} 6000&=\dot{9}+6\\ 500&=\dot{9}+5\\ 70&=\dot{9}+7\\ 8&=\phantom{\dot{9}+}8; \end{aligned}$$

sumando ordenadamente y teniendo presente que la reunión de varios múltiplos de 9 componen otros múltiplos de 9 (**28**, Corolario 1.º), resultará que

$$6578=\dot{9}+(6+5+7+8).$$

Para que este número sea divisible por 9, es preciso que lo sea $6+5+7+3$, que es la suma de las cifras del número propuesto, porque entonces 6573 se compondría de dos sumandos, cada uno de ellos múltiplo de 9. De manera que si la suma de las cifras del número es divisible por 9, el número también lo será.

Si, como sucede en el ejemplo que se acaba de proponer, la suma de sus cifras no fuera divisible por 9, el número tampoco lo sería, supuesto que éste se halla descompuesto en dos sumandos, uno solo de los cuales es divisible por 9 (**30**); y es evidente que el resto que dejará el número, si se le divide por 9, será el mismo que deje el otro sumando, ó sea la suma de los valores absolutos de sus cifras.

Corolario.—*Un número es divisible por 3 cuando la suma de los valores de sus cifras sea un múltiplo de 3.*

Teniendo presente que todo múltiplo de 9 es también múltiplo de 3 (**28**, Corolario 2.º), se seguiría para la demostración de esta proposición un razonamiento análogo al empleado en la anterior.

Lema.—*La unidad seguida de un número par de ceros, es igual á un múltiplo de 11 más 1; y la unidad seguida de un número impar de ceros es un múltiplo de 11 menos 1.*

En efecto, efectuando la división de la unidad seguida de ceros por 11, se observa que el residuo es 1, si el número de ceros es par, y 10 en el caso de que el número de éstos fuera impar. Pero como que á todo número que dividido por 11 deja 10 de residuo, le falta una unidad para ser divisible por 11; esto manifiesta que todo múltiplo de 11 más 10, es lo mismo que un múltiplo de 11 menos 1.

Corolario.—*Toda cifra significativa seguida de un número par de ceros, es un múltiplo de 11 más la misma cifra; y todo guarismo seguido de un número impar de ceros es un múltiplo de 11 menos el valor absoluto de este guarismo.*

Sea el número 70000 que es igual á 7×10000. Se sabe que $10000 = \dot{\overline{11}} + 1$; luego multiplicando ambos miembros por 7 se tendrá $70000 = \dot{\overline{11}} + 7$.

Sea ahora el número 7000. Se sabe que $1000 = \dot{\overline{11}} - 1$; luego multiplicando ambos miembros de esta igualdad por 7, se tendrá: $7000 = \dot{\overline{11}} - 7$.

Un número es divisible por 11, cuando la suma de las cifras del lugar impar, menos la suma de las cifras de lugar par, es cero ó un múltiplo de 11.

Sea el número 37298; descompuesto éste en

$$30000 + 7000 + 200 + 90 + 8,$$

se tendrá:

$$\begin{aligned} 30000 &= \dot{\overline{11}} + 3 \\ 7000 &= \dot{\overline{11}} - 7 \\ 200 &= \dot{\overline{11}} + 2 \\ 90 &= \dot{\overline{11}} - 9 \\ 8 &= \quad\ 8 \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y teniendo presente que la suma de varios múltiplos de 11 es un múltiplo de 11, resultará:

$$37298 = \dot{\overline{11}} + (3 - 7 + 2 - 9 + 8),$$

ó bien $37298=\dot{\overline{11}}+(3+2+8)-(7+9)$; supuesto que restar de un número 7 y después 9, es tanto como quitarle $7+9$.

Para que 37298 sea divisible por 11, es preciso que $3+2+8-(7+9)$ sea igual á 0, porque en este caso queda sólo $37298=\dot{\overline{11}}$. Si $3+2+8-(7+9)$ fuera un múltiplo de 11, entonces el número propuesto se compondría de dos múltiplos de 11 y por consiguiente sería á su vez un múltiplo de 11, que es lo que se quería demostrar.

De aquí se deduce que cuando la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar, y la suma de las cifras de lugar par de un número dado, no es cero, ni tampoco múltiplo de 11, el número no será divisible por 11; supuesto que en tal caso se tendría una suma de dos sumandos, de los cuales uno sólo será divisible por 11. Es evidente que el resto que deje el número propuesto dividido por 11, será el mismo que el que resulte de dividir por 11 esta diferencia.

En el ejemplo propuesto, la suma de las cifras de lugar impar menos la suma de lugar par, ó sea $13-16=-3$, es decir, que á este número 37298 le faltan 3 unidades para ser divisible por 11; ó lo que es lo mismo, le sobran 8; luego el verdadero residuo será 8.

Siguiendo un procedimiento análogo al expuesto, ó sea examinando la serie de los residuos que se obtienen al dividir las unidades de diferentes órdenes por el número que se designe, pudieran deducirse las reglas para conocer cuando un número cualquiera es divisible por 7, 13, etc.; pero se omite este trabajo en vista de que la aplicación de aquéllas suele ser tarea más entretenida que el ensayo directo de la división (*).

(*) El estudio elemental de esta índole de propiedades, se reduce á fijar las condiciones de divisibilidad de los números por la base de nuestro sistema de numeración, por los factores de esta base y productos que se obtienen multiplicando aquélla y éstos por sí mismos una ó más veces; y, finalmente, por los números que resultan al aumentar ó disminuir en una unidad la precitada base.

ARTÍCULO VIII.

Elevación á potencias.

39. Del caso particular en que sean iguales todos los factores de un producto indicado provienen las *potencias de los números*.

La SEGUNDA POTENCIA ó CUADRADO de un número, es el producto que resulta de considerar á este número dos veces como factor. Así, el cuadrado de 7 será $7\times7=49$.

La TERCERA POTENCIA ó CUBO de un número, es el producto que se obtiene tomando á este número tres veces como factor. Según esto, el cubo de 7 será $7\times7\times7=343$.

La CUARTA POTENCIA ó la POTENCIA DE CUARTO GRADO de un número, es el producto que proviene de tomar al número cuatro veces como factor. En general pudiera decirse que POTENCIA DE UN CIERTO GRADO de un número, es el producto que resulta al tomar á ese número tantas veces como factor cuantas unidades tuviere el grado de la potencia.

La potencia de un número se indica escribiendo, en la parte de la derecha y superior de éste, otro número de menor tamaño que el anterior, llamado *exponente*, el cual debe contener tantas unidades como veces el primer número, que se denomina *base*, aparece repetido como factor. Para indicar la cuarta potencia de 7, se escribirá 7^4.

Se deduce de lo expuesto, que todas las potencias de la unidad son iguales á 1; que la potencia de primer grado de cualquier número es el mismo número; y que toda potencia de 10 equivale á la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente de la potencia.

40. *El producto de dos potencias de un mismo número, es igual á otra potencia de este número, cuyo exponente es la suma de los exponentes que tienen los factores.* Se trata de probar que $8^5 \times 8^4 = 8^{5+4}$. En efecto, $8^5 = 8.8.8.8.8$ y $8^4 = 8.8.8.8$; multiplicando ordenadamente ambas igualdades, resultará (21, Cor.º 2.º) que $8^5 \times 8^4 = (8.8.8.8.8)(8.8.8.8) = 8.8.8.8.8.8.8.8.8 = 8^9$.

De aquí se infiere que para comprobar una potencia de un número, bastará multiplicar dos potencias de este número cuyos exponentes sumados compongan el grado de la potencia que se trata de comprobar. Así, para cerciorarse de que $2^5 = 32$, se multiplicaría $2^3 \times 2^2$, y el resultado debería ser también igual á 32.

41. *El cociente que resulta de dividir dos potencias de un mismo número, es otra potencia de éste, cuyo grado se indicará por la diferencia obtenida al quitar del exponente del dividendo el del divisor.*

Se va á demostrar que $8^9 : 8^5 = 8^{9-5} = 8^4$.

En efecto, el cociente de esta división indicada es igual á 8^4, supuesto que este número multiplicado por el divisor 8^5 reproduce (40) al dividendo 8^9.

42. Si se tuviere que elevar una suma indicada de dos números al cuadrado, se tendría :

$$(70+8)^2 = (70+8)\,(70+8);$$

ahora, al hacer al multiplicando 70 veces mayor y 8 veces mayor, se tendrá :

$$(70+8)70+(70+8)8 = 70^2+70\times 8+70\times 8+8^2 =$$
$$= 70^2+2\times 70.8+8^2.$$

Lo cual manifiesta que *el cuadrado de la suma de dos números, equivale al cuadrado del primero, más el duplo del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo*; y también que *todo número compuesto de decenas y* *unidades simples, su cuadrado constará del cuadrado de las decenas, más del duplo de las decenas por las unidades, más del cuadrado de las unidades.*

43. De donde se deduce, como consecuencia inmediata, que *la diferencia que existe entre los cuadrados de dos números consecutivos, es igual al duplo del menor, más 1.* En efecto, sean los números consecutivos 78 y 79. Como $79=78+1$, se tendrá $79^2=(78+1)^2=78^2+2\times78.1+1^2$; restando del primero y último miembro 78^2, resultará: $79^2-78^2=2\times78.1+1^2=2\times78+1$, que es lo que se deseaba demostrar.

ARTÍCULO IX.

Raíz cuadrada.

44. La RAÍZ CUADRADA Ó RAÍZ SEGUNDA de un número, es otro número que elevado al cuadrado reproduce el primero. Según esto, la raíz cuadrada de 25 será 5.

Esta operación se indica por medio del signo $\sqrt{\ }$, debajo del cual se escribe el número de que se desea extraer la raíz. Así, $\sqrt{25}$ dirá raíz cuadrada de 25.

El procedimiento que se sigue para extraer la raíz cuadrada de un número, se apoya en lo dicho acerca de la formación de los cuadrados de los números.

Por la tabla de multiplicar se tiene el siguiente cuadro:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

en el cual los números del primer renglón, son las raíces cuadradas de los correspondientes, en columna, del segundo.

Puede también observarse en este cuadro que, entre los números 1 y 100, sólo existen diez que tienen por raíz cuadrada exacta un número entero, y si se ampliara más, se vería del mismo modo, que entre 1 y 10000 sólo se tienen cien cuadrados perfectos, y entre 1 y 1000000, mil, etc., lo cual manifiesta que la mayoría de los números no tienen por raíz cuadrada exacta un número entero.

Se entiende por *raíz cuadrada entera* de un número, la raíz cuadrada del mayor cuadrado perfecto contenido en él. Así, la raíz cuadrada entera de 43, será igual á la raíz cuadrada de 36, que es la del mayor cuadrado perfecto contenido en 43; y como quiera que la raíz cuadrada de 36 es 6, de aquí que el número 6 sería la raíz cuadrada entera de 43.

Se llama RESIDUO de la raíz cuadrada de un número, al exceso de este número sobre el mayor cuadrado perfecto contenido en él. Así, en el ejemplo anterior, el residuo será igual á 7, diferencia entre 36 y 43.

Obsérvese que *el residuo de la raíz cuadrada de un número tiene que ser siempre menor que el doble de su raíz entera, más una unidad,* pues si el mencionado residuo fuera mayor ó igual que esta suma, la última cifra de la raíz sería menor de lo que debiera ser; porque, según se dijo (43), acontecería entonces que en el número propuesto estaría contenido también el número que se formase, añadiendo una unidad á la última cifra de la raíz hallada.

45. La raíz cuadrada de un número mayor que 100 sería conocida, si se pudiera averiguar el número de decenas de que consta, así como también la cifra de las unidades.

Para deducir la totalidad de las decenas, bastará apoyarse en el teorema siguiente: *La raíz cuadrada entera de las centenas de un número, expresa exactamente las decenas de la raíz cuadrada de este número.*

En efecto, cuando la raíz de un número tenga más de una cifra, seguramente que se compondrá de decenas y unidades; luego el número propuesto, que puede considerarse como el cuadrado de su raíz cuadrada, constará (42) del cuadrado de las decenas, del doble de las decenas por las unidades y del cuadrado de las unidades, en el caso de que el número propuesto sea un cuadrado perfecto; y además del residuo en el caso contrario.

El cuadrado de las decenas de la raíz, no puede encontrarse sino en las centenas del número dado, supuesto que un número cualquiera de decenas al elevarlo al cuadrado tiene que dar como resultado un número exacto de centenas; pero en aquellas centenas pudieran existir alguna centena que provenga del doble del producto de las decenas de la raíz por las unidades, más las centenas del resto si las hubiere. Luego separando las dos primeras cifras de la derecha del número propuesto y extrayendo la raíz cuadrada de la parte que queda á la izquierda, ó sea de sus centenas, se tiene la seguridad de encontrar un número que no será menor que las decenas de la raíz que se busca; mas obsérvese que tampoco este número será mayor, pues de ser así, resultaría que solamente el cuadrado de las decenas de la raíz tendría más centenas que el número propuesto, lo cual es inadmisible; luego no siendo el número hallado ni menor ni mayor que las decenas de la raíz cuadrada que se busca, se habrá conseguido determinar éstas con toda exactitud.

La cifra correspondiente á las unidades de la raíz se encontrará por medio del siguiente teorema :

46. *Si de un número mayor que 100 se resta el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada y se dividen las decenas del resto por el doble de las de su raíz, el cociente que se encuentre será la cifra de las unidades mayor que ésta.*

En efecto, considerando al número propuesto como la segunda potencia de su raíz, necesariamente tendrá que componerse de las tres partes de que aquélla consta (42), más del residuo, si el número no fuere cuadrado perfecto.

De modo que si se quita del número propuesto, el cuadrado de las decenas de su raíz, en la diferencia estarán contenidas las otras dos partes, ó sea el doble producto de las decenas por las unidades, y el cuadrado de las unidades de la raíz y además el residuo, en el caso de que el número dado no fuese cuadrado perfecto. Mas si se tiene en cuenta que el doble del producto de las decenas por las unidades es un número exacto de decenas, éstas se hallarán contenidas en las decenas del mencionado resto, en las que además pudiera haber alguna decena que proviniese del cuadrado de las unidades de la raíz y del residuo, si le hay. De aquí se deduce, que dividiendo estas decenas por el doble de las decenas de la raíz, nunca podrá resultar un número menor que las unidades de ésta, y por lo tanto la cifra hallada en el cociente será igual ó mayor que la verdadera cifra que se busca.

Con el fin de fijar las ideas expuestas, conviene hacer aplicación de éstas para extraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100. Sea éste el 6084 que, por estar comprendido entre 10^2 y 100^2, tendrá dos cifras su raíz cuadrada.

Si se extrae la raíz cuadrada entera de las centenas del número propuesto, se encontrarán las 7 decenas de su raíz (45); y si se elevan al cuadrado estas decenas y se restan de 6084 las 49 centenas que resultan, se encontrará que la diferencia es 1184; ahora bien, si se dividen las 118 decenas de este número por 14, doble de la cifra de las decenas de la raíz, el cociente 8 que se obtiene será igual ó mayor que la cifra que corresponde á las unidades de la raíz que se busca (46).

Para ver si este cociente 8 es mayor que la verdadera cifra de las unidades de la raíz, pudiera elevarse al cuadrado el número 78, y en el caso en que fuera posible restar este cuadrado del número 6084, es evidente que el número 78 sería la raíz que se deseaba encontrar; pero si sucediera lo contrario, habría que disminuir la cifra 8 en una unidad y repetir la comprobación en igual forma. Mas como quiera que este procedimiento es penoso cuando la raíz tiene muchas cifras, de aquí que en la práctica se haga uso de otra manera de operar más ventajosa, que consiste en escribir el cociente 8 á la derecha del 14, duplo de las decenas de la raíz, y el número 148 que resulta, estará compuesto del doble de las decenas más de la cifra de las unidades que se trata de comprobar. Ahora bien, si se multiplica el 148 por la cifra 8, el producto de esta multiplicación se compondrá del doble de las decenas por las unidades, ó sea de 140×8, más del cuadrado de las unidades cuyo número asciende á 64. Mas si, después de esto, se quita del residuo anterior 1184, el número $140\times8+8^2$, como que ya antes se han restado de 6084 las mencionadas 49 centenas, se habrá conseguido quitar del número propuesto el cuadrado completo de 78, y por lo tanto quedará comprobado que la cifra 8 hallada en el cociente, no siendo mayor que la verdadera, será la cifra exacta de las unidades de la raíz. Si esta última sustracción no hubiere sido posible, se rebajaría al número 8 en una unidad y se volvería á comprobar la cifra 7 en igual forma que se hizo con el 8. Según esto, *para comprobar la cifra de las unidades de la raíz, se colocará el cociente que resulta de dividir las decenas del resto por el doble de las de la raíz, á la derecha del divisor,* *y, el número así formado, se multiplica por el mismo cociente; si el producto obtenido no es mayor que el resto, el mencionado cociente será la verdadera cifra de las unidades de la raíz; en el caso contrario habrá que disminuirle por lo menos en una unidad.*

La operación se dispone de la siguiente manera:

	$\sqrt{6084}$	78
Cuadrado de decenas...........	4900	
	1184	148 duplo de las decenas de la raíz más las unidades.
Doble producto de decenas por unidades y cuadrado de unidades........................	1184	8
Residuo.....	0	

En la práctica se acostumbra á suprimir la escritura del cuadrado de las decenas y la del doble producto de las decenas por las unidades, efectuando las correspondientes sustracciones de memoria, á la manera que se hacía en la división.

Sea ahora el número 7549268 que tiene más de cuatro cifras, y se quiere extraer su raíz cuadrada. Según se dijo (45), la de 75492 serán las decenas de la raíz que se desea obtener, así como la del número 754 dará las decenas de la raíz cuadrada de 75492. Determinada, pues, la raíz de 754 según se ha visto en el ejemplo anterior, se tendrá con ella el número de decenas de la raíz cuadrada de 75492.

$\sqrt{7'5\,4'9\,2'6\,8}$	2747
3 5'4	
· 2 5 9'2	47
· 4 1 6 6'8	544
· 3 2 5 9	5487

Para hallar la cifra de las unidades, se eleva al cuadrado las 27 decenas de la raíz de 75492 y se restará este cuadrado del expresado número 75492; mas como quiera que se ha quitado ya de 754 el cuadrado de 27 y han sobrado 25, es claro que si de las 754 centenas del número 75492 se resta el cuadrado de 27 decenas, la diferencia será 25 centenas; luego si de 75492 quitamos el cuadrado de 27 decenas, la diferencia será igual á 25 centenas más 92 unidades, ó sean 2592. Dividiendo, pues, las 259 decenas de este resto por el doble de las 27 decenas de la raíz cuadrada de 75492, se tendrá la cifra 4, que, comprobada, como ya se ha dicho en el ejemplo anterior, se vería era la verdadera de las unidades de la raíz, así como también que resultaba 416 para residuo de esta operación. Siendo 274 la raíz cuadrada de 75492, ese número expresará las decenas de la raíz que se busca. Para encontrar la cifra de las unidades, se considerará que ya se ha restado del número 75492 el cuadrado de 274 y obtenido como resto 416; es evidente que si del número 7549268 se quita el cuadrado de 274 decenas, quedaría como resto 416 centenas más 68 unidades, ó sea el 41668. Dividiendo las decenas de este último número, por el doble de las 274 decenas de la raíz, ó sea por 548, se procederá á comprobar la cifra 7 del cociente, según se dijo, y se hallará el número 2747 para raíz cuadrada del 7549268, y como residuo de esta operación el 3259.

47. De las consideraciones que se acaban de exponer, las cuales pudieran aplicarse á cualquier otro ejemplo, se deduce la siguiente regla:

Para extraer la raíz cuadrada de un número, se divide en secciones de dos cifras, comenzando por la derecha; se extrae la raíz cuadrada de la primera sección de la izquierda, la cual pudiera tener una sola cifra; se eleva al cuadrado esta raíz, y el número que resulta se resta de la mencionada sección. A la derecha del resto obtenido, se escribe *la sección siguiente, se separa la primera cifra de la derecha y se divide la parte que queda á la izquierda por el doble de la raíz hallada; el cociente se escribe á la derecha de este divisor, y el número que resulta se multiplica por el mismo cociente, el producto se resta del conjunto que forma el dividendo con la cifra de las unidades colocada á su derecha, y si fuere posible esta sustracción, el cociente hallado se escribe á la derecha de la primera cifra de la raíz; si no lo es, se le quitan una ó más unidades hasta tanto que se pueda efectuar la sustracción. Al lado del resto se baja la sección siguiente, y se repite lo que se ha hecho con el resto anterior, esto es, se separa la primera cifra de la derecha y se divide el número que queda á la izquierda por el doble de la raíz hallada, y así se continúa hasta que se haya bajado la primera sección de la derecha del número propuesto y se hayan encontrado la cifra de las unidades de la raíz y el residuo de ésta.*

En el caso de que alguno de los restos fuere menor que el duplo de la raíz hallada, se pone cero en la raíz, se baja la sección siguiente y se continúa la operación como se ha dicho.

El temor de escribir una cifra demasiado crecida en la raíz, hace que á veces se admita para ésta una que sea más pequeña que la verdadera, lo cual se conocerá en que el correspondiente resto tiene que aparecer, en tal caso, igual ó mayor que el doble de la raíz que se haya encontrado aumentada en una unidad (44). Cuando en algunas de las divisiones efectuadas, con el fin de encontrar las diferentes cifras de que se compone la raíz, diese un cociente mayor que 9, se hará la comprobación de la parte de la raíz que se haya encontrado, pues en tal caso es de suponer que esta parte sea menor que la verdadera.

Siempre se podrá comprobar el resultado obtenido al extraer la raíz cuadrada de un número, elevando aquél al cuadrado y agregando á éste el residuo si lo hubiere (44).

48. Obsérvese que *todo número cuya primera cifra de la derecha termine en 2, 3, 7 y 8, no puede ser cuadrado perfecto,* en atención á que no existe ningún número que multiplicado por sí mismo termine en una de las mencionadas cifras. Por análoga consideración se deduce que *todo número que termine en un número impar de ceros no es posible que sea cuadrado perfecto.*

Todo número par, que no sea múltiplo de 4, no puede ser cuadrado perfecto. En efecto, su raiz cuadrada no será un número impar, porque éste, elevado al cuadrado, daría otro número impar; pero todo número par al elevarlo al cuadrado deberá contener al factor 2 repetido por lo menos dos veces, ó sea á su producto, lo que le haría ser múltiplo de 4. (21, Corolario 2.º)

Todo número cuya cifra de las unidades sencillas sea 5 y la de las decenas no sea 2, nunca puede ser cuadrado perfecto.

En efecto, para que un número terminado en 5 sea cuadrado perfecto, es indispensable que su raiz cuadrada termine también en 5; supuesto que entre los cuadrados de los números dígitos solamente 25, cuadrado de 5, termina en 5; mas como quiera que en la segunda potencia de todo número compuesto de decenas y unidades, siendo éstas en número de 5, se verifica que las dos primeras partes de que aquélla consta componen un número exacto de centenas, resulta de aquí que el cuadrado de las unidades, que en este caso es 25, tiene que aparecer en la suma ocupando las dos primeras de la derecha.

Observación.—De las consideraciones expuestas, al deducir el procedimiento para extraer la raiz cuadrada de un número, se infiere que, como por cada una de las secciones en que se ha dividido el número propuesto al proceder á extraer su raiz, ha sido obtenida una cifra en ésta, síguese de aquí que la raiz cuadrada de un número tiene tantas cifras como secciones hubiere.

CAPÍTULO IV.

Números primos.

ARTÍCULO I.

Nociones preliminares.

49. Se llama número PRIMO aquel que no es divisible sino por sí mismo y por la unidad. Así los números 1, 2, 3, 5, 7, etc., se dice que son primos.

Varios números se denominan PRIMOS ENTRE SÍ cuando no tienen más divisor común que la unidad, como acontece con los números 8, 15, 24 y 49. De donde se deduce, que varios números á pesar de no ser primos, considerados aisladamente, pueden ser primos entre sí.

50. *Siempre que un número primo no divida á otro, los dos son primos entre sí.*

En efecto, el número primo únicamente es divisible por sí mismo y la unidad, y claro está que si no es divisor del otro, ambos no pueden tener más divisor que les sea común que la unidad. Luego son primos entre sí. Así 17 y 48 son primos entre sí.

COROLARIO.—*Dos números primos son primos entre sí.*

51. *Todo número que no sea primo equivale á un producto de factores primos.*

En efecto, todo número que no sea primo tiene que ser divisible por otro, así como también por el cociente que resulte de dividir aquél por éste. Ahora bien, si estos dos factores de que se compone el número propuesto fueran primos, el teorema quedaría demostrado; pero si uno de los dos, ó ambos, no lo fueran, se podría aplicar á ellos la misma consideración y descomponerlos en el producto de otros dos factores, repitiendo del mismo modo las divisiones, mientras que los factores resultantes no fueran primos. Esto tendría que acontecer necesariamente al cabo de un cierto número de divisiones, pues de lo contrario, la serie de operaciones sería ilimitada, y, en su consecuencia, resultaría el absurdo de que el número propuesto equivaldría al producto de un número infinito de factores mayores que la unidad.

Después de lo que acaba de decirse, se explica el por qué á todo número que no sea primo se le llame *compuesto;* así como también que los divisores primos se denominen *factores simples.*

La serie de los números primos no tiene fin. En efecto, si se llama p (*) á un número primo tan grande como se quiera, el producto de todos los números primos menores que p aumentado en una unidad, sería igual á

$$1.2.3.5.7.11.13..... p+1;$$

este número será primo ó nó. Si fuere primo, se tendría ya un número primo mayor que otro cualquiera p; si no fuese primo, no sería divisible por ninguno de los números primos que existen desde 1 hasta p, en atención á que dividido por cualquiera de ellos, el re-

(*) Con objeto de dar mayor sencillez en algunas ocasiones á los razonamientos, conviene representar los números por medio de las letras del alfabeto; mas no se crea por eso que una demostración es más ó menos general según que los números á que se haga referencia estén representados por cifras ó por letras, pues si la demostración es concluyente, tan general es de una manera como de otra, supuesto que el razonamiento que se haga sobre el número que se designe, es independiente de su valor particular, y por lo tanto se podrá aplicar á cualquier otro que se encuentre en condiciones idénticas.

siduo sería la unidad; luego el mencionado número compuesto tendría necesariamente algún divisor primo mayor que p.

52. *Todo número que no sea divisible por aquellos cuyos cuadrados no le exceden, es número primo.*

En efecto, sea N un número y r su raíz cuadrada entera. Todo número puede considerarse como el producto de dos factores, pues aun en el caso de que fuera primo, éstos serían 1 y N; pero en general se tendrá $N=a\times b$. Esta igualdad manifiesta que si a es mayor que r, éste será á su vez superior al otro factor b; luego no es posible que N posea un divisor que exceda de r, sin que á la vez tenga también otro menor que r. Esto dice que si N no es divisible por ningún número inferior á r, tampoco será divisible por ninguno mayor que r, y en su consecuencia el número N no tendrá otros divisores que él mismo y la unidad.

Este teorema facilita el medio de conocer si un número dado es primo ó compuesto, lo cual se conseguirá sin más que dividirlo por los números que no excedan á su raíz cuadrada. Este procedimiento se simplifica en la práctica, dividiendo el número propuesto solamente por los números primos que no sean mayores que su raíz cuadrada entera; pues si el número dado para ensayar, tuviese un divisor compuesto menor que aquella raíz, entonces el expresado número tendría que ser divisible por los divisores primos del mencionado compuesto. (28, COROLARIO 2.º)

53. Según lo dicho, cuando se carezca de tabla de números primos, y se desee averiguar si un número dado es primo ó compuesto, *se le dividirá sucesivamente por los números primos 2, 3, 5, 7, etc., en su orden correlativo ascendente, y si se llega, sin haber obtenido ningún cociente*

exacto, á un cociente entero menor que el último divisor ensayado, se podrá asegurar entonces que el número propuesto es primo.

Así, por ejemplo, para averiguar si el número 283 es ó nó primo, se le dividiría por los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17, y como quiera que no es exacto ninguno de los cocientes que resultan y el último de éstos es menor que el divisor, ya se puede asegurar que el número 283, no siendo divisible por ningún otro cuyo cuadrado no le excede (52), tendrá que ser número primo.

ARTÍCULO II.

Descomposición de un número en sus factores simples.

54. Una vez demostrado que todo número compuesto equivale á un producto de factores primos (51), se conseguirá la determinación de éstos en la práctica, *dividiendo el número propuesto y los cocientes sucesivos que vayan resultando por el menor divisor simple diferente de la unidad, hasta que se llegue á obtener el cociente 1.*

Sea el número 4200. Este número se ve (33) que es divisible por 2; efectuando esta división se tendrá $4200=2\times2100$. Pero el cociente 2100 también es divisible por 2; luego se verificará que $2100=2\times1050$. Mas el cociente 1050 todavía es divisible por 2; luego $1050=2\times525$. El número 525 ya no es múltiplo de 2, pero sí lo es de 3; de donde $525=3\times175$. Este nuevo cociente 175 no es divisible por 3, pero sí lo es por 5; por tanto, $175=5\times35$. Mas como quiera que $35=5\times7$ y el número 7 es también primo, ya no es posible continuar más allá la descomposición. Se ve que en ésta ha aparecido el factor 2 repetido tres veces, el 3 una, el 5 dos, y finalmente el 7 una sola vez. Es fácil hacer patente que el número propuesto equivale al producto de todos ellos, sin más que sustituir el segundo miembro de cada una de estas igualdades en su equivalente de la inmediata anterior, y así se tiene: $175=5\times5\times7$; $525=3\times5\times5\times7$; $1050=2\times3\times5\times5\times7$; $2100=2\times2\times3\times5\times5\times7$; $4200=2\times2\times2\times3\times5\times5\times7=2^3\times3\times5^2\times7$.

La operación se acostumbra á disponer en la forma siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 4200 & 2 \\ 2100 & 2 \\ 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Para demostrar que esta descomposición de factores primos es única, conviene anteponer la siguiente proposición:

55. Lema.—*Todo número primo que divida al producto de dos factores, de los cuales uno de ellos es un número primo diferente del anterior, se verificará que el otro factor tendrá que ser divisible por aquel divisor* (*).

Se va á demostrar que si 11 divide á $31\times N$, siendo 11 y 31 números primos, N tendrá que ser divisible por 11.

En efecto, si se divide el mayor de los números primos por el menor y después el mismo dividendo por el residuo de la división anterior, y se continúa dividiendo siempre el mismo dividendo por el residuo de la última

(*) Este lema permite que se pueda prescindir, en la teoría de los números primos, de la determinación del máximo común divisor por medio de divisiones sucesivas; facilitándose con tal motivo la mayoría de las demostraciones que en ella se exponen.

división efectuada, se llegará á obtener el residuo 1; en atención á que debiendo ser las divisiones en número limitado, supuesto que los residuos van disminuyendo en una ó más unidades, el último de ellos tendrá que ser 1, por ser el dividendo número primo. Si por otra parte se tiene en cuenta, que el residuo de toda división es igual al dividendo menos el producto del divisor por el cociente, resultarán las siguientes igualdades :

$$31-2\times11=9; \qquad 31-3\times9=4;$$
$$31-7\times4=3; \qquad 31-10\times3=1.$$

Multiplicando por N ambos miembros de cada igualdad, se tendrá :

$$31N-2\times11N=9N; \qquad 31N-3\times9N=4N;$$
$$31N-7\times4N=3N; \qquad 31N-10\times3N=N.$$

Por dividir el número 11 á $31N$ por la hipótesis y á $2\times11N$ por ser un múltiplo suyo, 11 dividirá á la diferencia $9N$ (29, Corolario 1.º); continuando este orden de consideraciones en las demás igualdades, se tendría que por dividir 11 á $31N$ y á $3\times9N$, dividiría á la diferencia $4N$ que existe entre ambos; y por dividir á $31N$ y á $7\times4N$, dividiría á $3N$, y finalmente, dividiendo 11 á $31N$ y á $10\times3N$, tendría que dividir también á su diferencia N.

56. *Un número no puede admitir dos descomposiciones diferentes en factores simples.*

En la demostración de este teorema se quiere hacer ver que al descomponer nuevamente un número en sus factores primos, no puede resultar ninguno que sea diferente de los que aparecieron en la primera descomposición; así como tampoco puede haber cambio alguno en los exponentes que afectan á aquellos factores.

Si se admite que $2\times17\times29$, es el resultado de la descomposición efectuada con un número, no es posible que descompuesto otra vez en sus factores primos, aparezca entre éstos otro que sea diferente, por ejemplo el 13.

En efecto, representando con la letra Q el producto de los factores simples, que multiplicados por 13 reproducen el número propuesto, se tendrá:

$$2\times17\times29=13\times Q.$$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por 2, resultaría:

$$17\times29=13\times Q'$$

llamando Q' al cociente de dividir Q por 2 (55).

Dividiendo los dos miembros de la última igualdad por 17 y llamando Q'' al cociente de dividir Q' por 17, se tendrá:

$$29=13\times Q''$$

igualdad absurda, supuesto que si Q'' fuera igual á 1, resultaría $29=13$, y si Q'' fuera mayor que 1, diría esta igualdad que el número primo 29 se podía descomponer en factores primos.

Cuando alguno de estos factores tuviere diferente exponente, en la nueva descomposición efectuada, se reduciría este caso al que se acaba de considerar, sin más que dividir cada una de estas descomposiciones por la menor potencia con que apareciese el expresado factor; así $2^3\times3\times5^2\times7$ no puede ser igual á $2\times3\times5^4\times7$, pues de admitir que lo fuera, dividiendo ambos productos por 2, se tendría:

$$2^2\times3\times5^2\times7=3\times5^4\times7,$$

igualdad absurda, por aparecer el factor 2 en el primer miembro y no en el segundo.

Esta proposición manifiesta, que cualquiera que sea el orden seguido al efectuar las divisiones que, se ha visto, son necesarias para la determinación de los factores primos de un número, siempre contendrán los mismos divisores simples afectados de iguales exponentes.

57. Varios números se dice que son *primos entre sí, dos á dos,* cuando cada uno de ellos es primo con cada uno de los demás. Por ejemplo, los números 8, 11, 15 y 49 son primos entre sí, dos á dos; y en esta atención tienen que ser también primos entre sí (49).

Obsérvese, con tal motivo, que la recíproca no es siempre cierta, pues puede ocurrir que varios números sean primos entre sí y no lo sean dos á dos, como sucede con 4, 7, 12 y 15.

Todos los números primos son también primos entre sí, dos á dos.

ARTÍCULO III.

Divisores de un número descompuesto en factores simples.

58. Al tratar de los caracteres de divisibilidad de los números (32 al 38), se examinaban las condiciones generales que debían poseer aquéllos, para que fueran múltiplos de otro que se suponía conocido. Con el fin de dar ahora al estudio de la divisibilidad mayor latitud, hay que ocuparse de la cuestión inversa; esto es, dado un número, precisar las condiciones necesarias y suficientes que son comunes á todos sus divisores. De modo, que así como en aquella ocasión conociendo un número que hacía las veces de divisor, se investigaban las condiciones de sus múltiplos, al presente se trata de proponer un número descompuesto en factores primos, al cual se considera como divi-

dendo, y se quieren determinar los caracteres que deben concurrir en sus divisores, expresados en forma factorial.

59. La proposición que sirve de base á esta teoría (*) dice como sigue:

Un número es divisible por otro, siempre que todos los factores primos de éste se hallen contenidos en aquél.

Esto es; se va á demostrar que para que el número $2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7$ sea divisible por $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$, se requiere que los factores primos de éste, se hallen contenidos en aquél, y que los factores primos de $2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7$ posean exponentes que no sean inferiores á los que tienen los mismos factores en $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

En efecto, según se dijo (21, Corolario 1.º), descomponiendo á $2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7$ en el producto de dos factores, de los cuales el uno sea $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$, se tendrá la igualdad

$$2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7 = (2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7)\,(2 \times 3 \times 5^4),$$

lo que manifiesta que la división es exacta y el cociente igual á $2 \times 3 \times 5^4$.

Corolario.—*Todo número es divisible no sólo por sus divisores primos, sino también por los productos que con éstos se pueden formar tomándolos dos á dos, tres á tres, etc.*

Esta proposición se acostumbra á enunciar diciendo:

Si un número es divisible por varios números primos entre sí, dos á dos, lo será también por su producto.

De aquí se deduce que todo número que sea divisible por 2 y 3, lo será también por 6; y si lo fuere por 3 y 5, lo será por su producto 15. Análogamente pudieran deducirse las reglas para conocer cuando un número es divisible por 12, 18, etc. (**)

(*) *Teoría* es el conjunto de proposiciones expuestas con la debida correlación y que se refieren á un mismo objeto.

(**) Teniendo presente que $10^3 = 2^3 \times 5^3$; así como las demostraciones (33 á 36) para conocer cuando un número es divisible

El razonamiento del teorema anterior hace ver que es necesaria la condición que en el mismo se establece, para conocer cuando un número es divisible por otro, y el teorema contrario manifiesta que la expresada condición es suficiente.

60. *Un número no es divisible por otro, si todos los factores primos de éste no entran en aquél.*

Se va á probar que el número $2^2\times3^4\times5^2\times13^3$ no es divisible por $2^3\times3\times5^2\times7$, por contener éste al factor 7 que no entra en aquél, y al factor 2 con mayor exponente en el segundo número que en el primero.

En efecto, si $2^2\times3^4\times5^2\times13$ fuera divisible por $2^3\times3\times5^2\times7$, llamando Q al cociente de la división exacta, se tendría la igualdad

$$2^2\times3^4\times5^2\times13=(2^3\times3\times5^2\times7)\times Q;$$

pero como que Q, si no es número primo, equivale á un producto de factores primos, resultaría, de la igualdad que antecede, el absurdo de que un mismo número podía descomponerse de dos modos diferentes en factores primos.

Corolario 1.º—*Todo número que sea primo con cada uno de los factores de un producto, será primo con el producto.*

Corolario 2.º—*Todo número primo divisor de un producto de varios factores, es divisor por lo menos de uno de*

---

por 2, 5, 2^2 y 5^2, se podría probar que *un número es divisible por 2^3, cuando las tres primeras cifras de la derecha son ceros ó compongan un múltiplo de 8;* y en general que *un número es divisible por 2^n, cuando las* n *primeras cifras de la derecha son ceros ó múltiplos de 2^n.* Análogas consideraciones se pudieran hacer extensivas á los divisores formados por las potencias de cualquier grado del número 5, factor también de la base de nuestro sistema de numeración.

ellos; pues si no lo fuera, sería primo con cada uno de éstos, y por consiguiente con el producto según el corolario anterior, lo cual es contrario á la hipótesis.

Corolario 3.º—*Si dos números son primos entre sí, todas sus potencias también lo serán.*

Sean A y B dos números primos entre sí y A^m y B^n sus potencias.

Como los únicos factores diferentes de A^m y de B^n son respectivamente A y B, y éstos, según la hipótesis, no tienen más factor primo común que la unidad, tampoco podrán tener otro diferente sus potencias. (60, Cor.º 2.º)

61. Si un número D divide al producto $A \times B$ de dos factores, y es primo con A, tendrá que ser divisor del otro factor B.

En efecto, en el producto de $A \times B$ entran todos los factores primos de D, pero ninguno de ellos puede aparecer en A según la hipótesis; luego necesariamente tienen que hallarse todos contenidos en B.

Una vez que se sabe la manera de formar los divisores de un número conocido, si se quisiera hallar todos ellos, convendría proceder con sujeción á la siguiente regla: *Se comenzará por escribir la unidad y todas las potencias sucesivas del primer factor primo; se multiplicará cada uno de los números que resulten, por las potencias del segundo factor primo; multiplíquense después los números obtenidos por las potencias sucesivas del tercer factor simple, y así se continuará del mismo modo hasta tanto que se hagan intervenir en las multiplicaciones todas las potencias del último factor primo.*

Por ejemplo, para hallar todos los divisores del número 4200, se determinarán primeramente sus factores primos (54) y se tendrá que $4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$; luego se deberá aplicar la regla que antecede en la siguiente forma:

1	2	4	8
3	6	12	24
5	10	20	40
15	30	60	120
25	50	100	200
75	150	300	600
7	14	28	56
21	42	84	168
35	70	140	280
105	210	420	840
175	350	700	1400
525	1050	2100	4200

Por medio de la proposición que sigue, se vendrá en conocimiento de si se ha omitido ó nó alguno de los factores del número dado.

Un número tiene tantos divisores simples y compuestos, como unidades cuenta el producto de los exponentes de sus factores primos, aumentado cada uno de ellos en una unidad.

En efecto, sea $N=a^m \times b^n \times c^p$ el número propuesto. Al escribir la primera fila, ó sea la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo a, se tendrán $(m+1)$ divisores; multiplicando éstos por las n potencias sucesivas de b, aparecerán por tal concepto $(m+1)\times n$ divisores, que agregados á los $(m+1)$, que ya se tenían formados, resultarán $(m+1)(n+1)$ factores; multiplicados todos estos factores primos por las potencias sucesivas del tercer factor c, se tendrán $(m+1)(n+1)\times p$, á los que agregando los $(m+1)(n+1)$ ya obtenidos, resultará en totalidad un número de factores, que será igual á $(m+1)(n+1)(p+1)$.

En el ejemplo propuesto el número total de factores estaría dado por el producto de $(3+1)(1+1)(2+1)(1+1)=48$.

ARTÍCULO IV.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números.

62. Se llama máximo común divisor de varios números, al mayor de los divisores comunes á ellos.

El M. C. D. (*) *de varios números es el producto de las menores potencias de sus factores primos comunes.*

En efecto, si se forma un producto con los factores simples comunes, afectado cada uno del menor exponente que posea en los números propuestos, se obtendrá un número que será divisor de todos ellos (59) y además será también el mayor divisor posible, pues si se llegara á aumentar alguno de exponentes ó se hiciera aparecer en el mencionado divisor algún factor, que no fuera común á los números dados, ya no podría ser divisor común de todos ellos (60).

Ejemplo.—Hallar el M. C. D. de los números 189000, 163800, 147000 y 8400.

Descompuestos estos números en los factores simples, resulta:

$$189000=2^3\times3^3\times5^3\times7; \qquad 163800=2^3\times3^2\times5^2\times7\times13;$$
$$147000=2^3\times3\times5^3\times7^2; \qquad 8400=2^4\times3\times5^2\times7.$$

El producto de las menores potencias de los factores primos comunes será $2^3\times3\times5^2\times7=4200$.

Luego el M. C. D. de los números propuestos será 4200.

Corolario 1.º—*Si un número es divisor de otros varios, lo será también de su* M. C. D.

Corolario 2.º—*Si varios números se multiplican ó dividen por otro, el* M. C. D. *de aquéllos también queda multiplicado ó dividido por él.*

Corolario 3.º—*Si varios números se dividen por su* M. C. D., *los cocientes que resultan son primos entre sí.*

Se dice que varios números son *equimúltiplos de otros* cuando resultan de multiplicar á éstos por un mismo número. Así, todos los números que tengan su divisor co-

(*) Abreviatura de *máximo común divisor.*

mún diferente de la unidad, son equimúltiplos de los cocientes que se obtienen al dividir aquéllos por el expresado divisor.

Se entiende por *mínimo común múltiplo de varios números,* el menor número que sea divisible por todos ellos.

63. *El* M. C. M. (*) *de varios números es igual al producto de las mayores potencias de los diferentes factores simples que en ellos existen.*

En efecto, el producto así formado será un múltiplo de todos los números propuestos, en atención á que contendrá todos los factores primos de cada uno de éstos con exponentes que no podrán ser inferiores á los que aparecen en las descomposiciones efectuadas (59); y, por otra parte, será el menor múltiplo posible, pues si en él se disminuyera algún exponente ó se omitiese algún factor, dejaría de ser múltiplo de ellos (60).

Ejemplo.—Averiguar cuál es el M. C. M. de los números 189000, 163800, 147000 y 8400.

Descompuestos éstos en sus factores simples y formando el producto de las mayores potencias con todos los factores simples diferentes, resultará que el M. C. M. de los números propuestos será $2^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 7^2 \times 13 = 34398000$.

Corolario 1.º—*Un múltiplo de varios números, es también múltiplo del menor múltiplo de todos ellos.* Supuesto que todo múltiplo de varios números contendrá á los factores primos diferentes, afectado cada uno con un exponente igual ó mayor que el más crecido con que aparezca en las diversas descomposiciones efectuadas, luego tendrá que contener al M. C. M. que precisamente se halla formado por aquéllos.

Corolario 2.º—*Si varios números son primos entre sí,*

(*) Así se escribe abreviadamente *mínimo común múltiplo.*

dos á dos, su M. C. M. *será el producto de todos ellos.* Los factores primos de que se compone cada uno de los números que se consideran, tienen que ser, por la hipótesis, diferentes; luego su M. C. M. tendrá que formarse con el producto de todos ellos.

Obsérvese que si se determina el M. C. D. y el M. C. M. de dos números, siguiendo las reglas que se acaban de establecer, se verá que todas las potencias de los factores simples, que entran en estos números, se distribuyen entre el M. C. D. y el M. C. M., pasando á formar parte del primero las menores potencias de los factores comunes, y del segundo las potencias mayores de la totalidad de los factores, ó sea de aquellos que son comunes á ambos y de los que no lo son. En cuanto á las potencias iguales de un mismo factor, una de ellas formaría parte del M. C. D. y la otra del M. C. M. Luego según esto, el producto de estos dos últimos números tiene que componerse de todos los factores, y éstos con los mismos exponentes que los que contiene el producto de los números propuestos; en su consecuencia ambos productos tienen que ser iguales.

Llamando, pues, D y M respectivamente al M. C. D. y al M. C. M. de los dos números A y B, se tendrá: $D \times M = A \times B$ (*).

De donde se deduce que $M = A \times B : D = (A:D)B = (B:D)A$.

Lo que manifiesta que *el* M. C. M. *de dos números puede obtenerse también, dividiendo uno de éstos por el* M. C. D. *de ambos y multiplicando el cociente hallado por el otro número.*

Apoyándose en esta regla, se desprende otro procedimiento para determinar el M. C. M. de varios números.

En efecto; si se tienen los números A, B, C y D y se llama M al M. C. M. cuyo valor se trata de determinar. Obsérvese que siendo M múltiplo de A, B, C y D, tendrá que serlo también del M. C. M. de A y B (63, COROLARIO 1.º), al cual se representará para fijar las ideas con la letra m. Siendo M múltiplo de m y de C, deberá serlo del M. C. M. de m y C; el cual se distinguirá con la letra m'. Pero siendo M múltiplo de m' y D será múltiplo del M. C. M. de estos dos números, al cual llamamos m''; lo cual dice que M no es menor que m''.

(*) Esta igualdad dice que el M. C. D. de dos números se obtiene también dividiendo el producto de éstos por su M. C. M.

Por otra parte se tiene que, por ser m'' múltiplo de m' y D, y m' múltiplo de m y C, se verificará que m'' será múltiplo de m, C y D. (28, COROLARIO 2.º) Mas siendo así que m'' es múltiplo de m, tendrá que serlo también de A y B divisores de m; de donde se ve que m'' tiene que ser múltiplo de A, B, C y D, y en su consecuencia no puede ser menor que M.

De aquí se deduce que, no pudiendo ser m'' ni mayor ni menor que M, ambos tendrán que ser iguales; luego se hallará M ó sea el M. C. M., practicando las operaciones para encontrar m''. Según esto, *para determinar el* M. C. M. *de varios números, se hallará el* M. C. M. *de los dos primeros, después el de este* M. C. M. *y el del tercer número, en seguida el del que se acaba de encontrar y el cuarto, y así sucesivamente hasta determinar el* M. C. M. *del último hallado y del único número que quede de los propuestos, cuyo resultado será el* M. C. M. *que se trataba de encontrar.*

LIBRO II.

QUEBRADOS.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

ARTÍCULO I.

64. Se manifestó (2) que las fracciones provenían del acto de medir una cantidad, sirviéndose de una unidad mayor que aquélla; resultando de la comparación que, con tal motivo, se establecía entre ambas *una parte alícuota de la unidad* ó *la reunión de varias partes iguales de ésta,* que es á lo que se llama QUEBRADO ORDINARIO. Una de estas partes iguales constituye lo que se denomina *unidad fraccionaria,* y el conjunto de todas ellas formaría la unidad entera, que, en tal caso, pudiera considerarse como unidad colectiva.

De lo dicho se desprende, que para expresar un quebrado se necesitan dos números: uno cuya misión sea *denominar* la unidad fraccionaria, y otro que sirve para *numerar* la totalidad de las unidades fraccionarias que contiene el quebrado. Al primero de estos dos números se llama *denominador* y al segundo *numerador*.

El numerador y denominador constituyen los *términos del quebrado.*

Si una unidad entera se divide en 2 partes iguales, cada una de ellas se llama un medio ó una mitad; si en 3, un tercio; si en 4, un cuarto; si en 5, un quinto.....; si en 11, un onceavo; si en 12, un doceavo; y en general cuando la unidad se haya dividido en más de diez partes iguales, se agregará al número de éstas la terminación *avos*.

Si se quisieran expresar cinco unidades fraccionarias, de las que cada una de ellas valiera una séptima parte de la unidad entera, se escribiría el numerador 5 y debajo el denominador 7, separados por medio de una raya horizontal en la siguiente forma: $\frac{5}{7}$. Para enunciar un quebrado ya escrito, se leería primeramente el numerador y seguidamente el denominador; así, en el ejemplo anterior, se diría *cinco séptimos*.

Al comparar los términos de un quebrado, puede suceder: 1.º, que los dos sean idénticos, en cuyo caso el valor del quebrado es igual á la unidad, supuesto que contiene la totalidad de las porciones iguales en que ésta se considera dividida: 2.º, cuando el numerador es menor que el denominador, y entonces el valor del quebrado es menor que la unidad, en atención á que contiene menos partes iguales que ésta; y 3.º, si el numerador es mayor que el denominador, sucederá que el valor del quebrado será mayor que la unidad, por contener más partes iguales que ésta. Con tal motivo, los quebrados se dividen en *propios* é *impropios*. El quebrado propio es aquel cuyo numerador es menor que su denominador; al paso que el impropio se distingue del anterior en que su numerador es igual ó mayor que su respectivo denominador.

65. De las consideraciones que se acaban de exponer acerca de la procedencia de los quebrados, se deduce que *todo quebrado equivale al cociente que resulta de dividir el numerador por su denominador.*

Se trata de hacer ver que $\frac{5}{3}=5:3$.

En efecto,

$$\frac{5}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1:3+1:3+1:3+1:3+1:3.$$

Pero este último miembro equivale según lo dicho (28) á $(1+1+1+1+1):3$, ó sea $5:3$.

La igualdad $5:3=\frac{5}{3}$ manifiesta, que haciendo en ella el 5 las veces de dividendo, deberá ser igual al producto del cociente $\frac{5}{3}$ por el divisor 3; luego, según esto, *el producto de un quebrado por su denominador, es igual á su numerador.*

Asimismo se deduce, que *todo entero es igual á un quebrado cuyo denominador sea un número cualquiera y su numerador el producto de este denominador por aquel entero.* En efecto, si se quisiera transformar el número 7 en quebrado equivalente cuyo denominador sea 8; obsérvese que siendo así que una unidad entera contiene 8 octavas partes, las 7 unidades contendrán 56 octavas partes, ó sea $\frac{56}{8}$. Luego $7=\frac{56}{8}$.

66. *El cociente completo de toda división inexacta se compone del cociente incompleto más un quebrado cuyo numerador es el residuo y su denominador el divisor.*

Sea la división de 39 por 7, cuyo cociente incompleto es 5 y el residuo 4. Según lo dicho (23), se tendrá $39=7\times5+4$; dividiendo ambos miembros de esta igualdad por 7, resultará (28) que $39:7=5+4:7=5+\frac{4}{7}$.

Esta operación se denomina *extraer* ó *sacar el entero de un quebrado impropio.*

Al conjunto de un entero y un quebrado se llama *número mixto.*

68. Si se quisiera efectuar la operación inversa, ó sea *transformar un número mixto en quebrado equivalente,* no habría sino *multiplicar el entero por el denominador del quebrado, al producto se le agregaría el numerador, y á esta suma se le pondría por denominador el del quebrado.*

Sea $6\frac{5}{7}$ el número mixto que se propone transformar en quebrado equivalente. Como quiera que $6=\frac{6\times7}{7}$ se tendrá la siguiente igualdad: $6\frac{5}{7}=\frac{6\times7}{7}+\frac{5}{7}$; este segundo miembro indica la reunión de 42 unidades fraccionarias con otras 5 de igual denominador, lo cual da por resultado el quebrado $\frac{42+5}{7}$ y con él la comprobación de la regla expuesta.

CAPÍTULO II.

Alteraciones en los términos de una fracción.

69. *De dos fracciones de igual denominador, será mayor la que tenga mayor numerador.* En efecto, siendo igual en ambas la unidad fraccionaria, será mayor el quebrado que contenga número más crecido de éstas, ó sea el que tenga mayor numerador.

Para expresar una desigualdad entre dos números, se escribirá entre éstos el signo $>$ que se lee *mayor que,* ó el signo $<$ que significa *menor que.* Así, según la proposición que se acaba de demostrar, resulta que $\frac{7}{8} > \frac{5}{8}$, ó en otra forma $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$.

70. *Si se multiplica el numerador de un quebrado por un número entero, el quebrado queda multiplicado por éste.*

Se trata de hacer ver que $\frac{4 \times 3}{7} = \frac{4}{7} \times 3$. En efecto, al comparar los dos quebrados $\frac{4 \times 3}{7}$ y $\frac{4}{7}$ se observa que el primero de éstos, contiene 3 veces más partes del mismo tamaño que el segundo; luego $\frac{4 \times 3}{7}$ será (13) el resultado de haber multiplicado á $\frac{4}{7}$ por 3.

Corolario.—*Si el numerador de un quebrado se parte por uno de sus divisores, el quebrado queda partido por éste.*

Pues, se acaba de ver, que $\frac{4}{7}$ es 3 veces menor que

$\frac{4\times3}{7}$; luego según lo dicho (22), será el cociente de dividir este último quebrado por 3.

71. *De dos quebrados que poseen el mismo numerador, será mayor el que tenga menor denominador.*

En efecto, cada uno de estos quebrados contiene el mismo número de unidades fraccionarias; pero éstas son mayores en aquel quebrado que tiene menor denominador; luego este último será el mayor.

Si se multiplica el denominador de un quebrado por un número entero, el quebrado queda dividido por este entero.

Se quiere probar que $\frac{7}{12\times5}=\frac{7}{12}:5$.

En efecto, al comparar los quebrados $\frac{7}{12\times5}$ y $\frac{7}{12}$ se ve que ambos tienen el mismo numerador; pero la unidad fraccionaria del primero de estos dos quebrados, es 5 veces más pequeña que la del segundo; luego por ser $\frac{7}{12\times5}$ 5 veces más pequeño que $\frac{7}{12}$ podrá considerársele como cociente de dividir $\frac{7}{12}$ por 5.

Corolario.—*Si se parte el denominador de un quebrado por uno de sus divisores, el quebrado queda multiplicado por el mencionado divisor.* Pues se acaba de ver que $\frac{7}{12}$ es 5 veces mayor que $\frac{7}{12\times5}$.

72. *El valor de un quebrado no varía, multiplicando sus dos términos por un mismo número entero.*

En efecto, el mismo número de veces que se hace mayor al quebrado cuando se multiplica su numerador por un número entero, se ha hecho menor al multiplicar su denominador por el mencionado entero; luego el valor del quebrado no habrá sufrido alteración alguna.

Corolario.—*El valor de un quebrado permanece inalterable, dividiendo sus dos términos por un mismo factor de éstos.*

73. Observaciones.—1.ª Del teorema 70 se deduce que para multiplicar un quebrado por un número entero, basta multiplicar el numerador por el entero dejándole el mismo denominador; pero el producto puede obtenerse más sencillamente en el caso de que el denominador del quebrado propuesto sea divisible por el entero, sin más que apoyarse en lo dicho (71, Corolario). Así, al multiplicar $\frac{7}{12}$ por 4, aun cuando el producto sea $\frac{7\times4}{12}=\frac{28}{12}$, es más sencillo y conveniente decir que el expresado producto vale $\frac{7}{12:4}=\frac{7}{3}$.

2.ª Del teorema 71 se desprende que el cociente de un quebrado por un entero es otro quebrado cuyo numerador es igual al del propuesto, y cuyo denominador es el producto del denominador de aquél por el entero; pero este cociente se puede obtener en forma más ventajosa, siempre que el numerador del quebrado que se considere sea divisible por el entero, apoyándose en lo dicho (70, Corolario). Así, para dividir $\frac{28}{9}$ por 7, pudiera decirse que el cociente era $\frac{28}{9\times7}=\frac{28}{63}$, pero en atención á ser 28 divisible por 7, será preferible expresarlo en la forma $\frac{28:7}{9}=\frac{4}{9}$.

Si á los dos términos de un quebrado propio se les añade ó esta un mismo número, el valor del quebrado aumenta ó disminuye respectivamente.

Sea el quebrado propio $\frac{7}{12}$, y n el número que se aumenta á sus dos términos; se va á demostrar que $\frac{7+n}{12+n}>\frac{7}{12}$.

En efecto; siendo $7<12$ se tendrá también $7+n<12+n$. Lo que le falta al quebrado propuesto para valer la unidad es $\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$ y el exceso de la unidad sobre el quebrado $\frac{7+n}{12+n}$ es igual á $\frac{5}{12+n}$, y como quiera que $\frac{5}{12}>\frac{5}{12+n}$, esto manifiesta que la primera diferencia es mayor que la segunda; luego $\frac{7}{12}<\frac{7+n}{12+n}$. Análogamente se demostraría la segunda parte de este teorema.

Si á los dos términos de un quebrado impropio se le aumenta ó disminuye un mismo número, el quebrado disminuye ó aumenta respectivamente.

Sea el quebrado impropio $\frac{13}{6}$ y n el número que se añade á sus dos términos; se desea probar ahora que $\frac{13+n}{6+n}<\frac{13}{6}$.

En efecto, siendo $13>6$ se verificará que $13+n>6+n$. El exceso del quebrado propuesto sobre la unidad será $\frac{13-6}{6}=\frac{7}{6}$, y el del quebrado $\frac{13+n}{6+n}$ también sobre la unidad es $\frac{13-6}{6+n}=\frac{7}{6+n}$; pero como $\frac{7}{6}>\frac{7}{6+n}$ resulta de aquí que $\frac{13}{6}>\frac{13+n}{6+n}$.

Por consideraciones de igual orden se haría patente la segunda parte del teorema.

En atención á que según se vió (65), todo quebrado es el cociente de una división, en la cual el dividendo y divisor de ésta son respectivamente iguales al numerador y denominador de aquél, y teniendo en cuenta las proposiciones expuestas (70, 71, 72 y 73), queda de manifiesto la evidencia de los siguientes teoremas, aplicables á la división de dos números enteros cualesquiera.

74. *Si el dividendo se multiplica por un número entero ó se divide por uno de sus factores, habiendo permanecido el divisor inalterable, el cociente queda multiplicado ó dividido respectivamente por aquel entero ó factor.*

75. *Si el divisor se multiplica por un número entero ó se parte por uno de sus factores, quedando invariable el dividendo, el cociente que resulte aparecerá dividido ó multiplicado respectivamente por el mismo entero ó por aquel factor.*

76. *Si el dividendo y divisor se multiplican por un mismo número entero ó se dividen por un factor común á ambos, el cociente no experimenta alteración alguna.*

De esta última proposición se deduce que, cuando el dividendo y el divisor terminen en ceros, puede simplificarse la división suprimiendo igual número de ceros en ambos términos del cociente, sin que éste sufra alteración en su valor por la modificación efectuada.

Así, la división de 7290000 por 48000, queda reducida á la del número 7290 por 48.

CAPÍTULO III.

Transformaciones de los quebrados.

ARTÍCULO I.

77. SIMPLIFICAR un quebrado es *encontrar otro equivalente á él y cuyos términos sean menores.*

La posibilidad de simplificar los quebrados lo demuestra la proposición (72, COROLARIO) en que se hacía ver que un quebrado no altera su valor aun cuando sus dos términos se dividan por un factor común á ambos.

Se dice que un quebrado es *irreducible* cuando no se puede simplificar. La existencia de esta clase de quebrados se hace patente por el teorema que sigue:

78. *Un quebrado es irreducible si sus dos términos son primos entre sí.* Se trata de hacer ver que el quebrado $\frac{4}{7}$ cuyos dos términos son primos entre sí, es necesariamente irreducible.

En efecto, si no fuera irreducible, habría otro equivalente cuyos términos serían menores; representando á éste por $\frac{a}{b}$, se tendría que $\frac{4}{7}=\frac{a}{b}$; multiplicando ambos miembros de esta igualdad por b, resultaría que $\frac{4\times b}{7}=$ $=a$... (1); en donde puede observarse que 7 divide al producto $4\times b$, es primo con 4, por la hipótesis, luego tendrá que dividir á b (61); llamando q al cociente de dividir b por 7, se verificará que $b=7\times q$; sustituyendo en la igualdad (1) este valor en vez de b, se obtendrá $\frac{4\times 7\times q}{7}=a=4\times q$; lo que manifiesta que todo quebrado equivalente á $\frac{4}{7}$ tiene que tener la forma $\frac{4\times q}{7\times q}$, que brado cuyos términos son mayores que los del propuesto, por ser q número entero.

Corolario 1.º—*Todo quebrado equivalente á otro cuyos términos son primos entre sí, tiene sus términos equimúltiplos de los de éste.*

Corolario 2.º—*Dos quebrados irreducibles iguales, son idénticos.* Supuesto que los términos de cada uno de ellos tendrían que ser equimúltiplos de los del otro.

79. De lo expuesto se infiere que para reducir un quebrado á su más simple expresión, se deberán dividir los dos términos por su m. c. d.; supuesto que de ese modo se habrá conseguido obtener un quebrado equivalente al propuesto y cuyos términos sean primos entre sí. (62, Corolario 3.º)

Ejemplo: para simplificar el quebrado $\frac{282}{470}$, se dividirían sus dos términos por su m. c. d., que es 94, y resultaría $\frac{282}{470}=\frac{3}{5}$.

En ocasiones se efectúa la simplificación de quebrados dividiendo sucesivamente sus dos términos por los factores que desde luego se vea que les son comunes.

Conviene obtener los quebrados en forma irreducible, pues de este modo, á la vez que se adquiere más fácilmente idea de su valor, se consigue abreviar las operaciones en que intervienen.

ARTÍCULO II.

80. La llamada *reducción de quebrados á un común denominador* tiene por objeto, transformar los quebrados que se propongan, en otros respectivamente equivalentes que posean el mismo denominador.

Esta modificación en la forma de los quebrados tiene su fundamento en la inalterabilidad de su valor, cuando sus dos términos se multiplican por un número entero cualquiera (72).

81. Se concibe la posibilidad de poder transformar varios quebrados en otros de igual denominador, en atención á que éste debe ser un múltiplo de todos los denominadores de aquéllos; así es que, una vez fijado el expresado múltiplo, la cuestión queda reducida á determinar los correspondientes numeradores, para lo cual, no habrá sino dividir el citado múltiplo por cada uno de los denominadores, y multiplicar los cocientes que vayan resultando por el numerador del respectivo quebrado; pues, procediendo de este modo, no se hace sino multiplicar los dos términos de cada quebrado por el factor que le falta á su denominador para componer el mencionado múltiplo. El procedimiento más natural y sencillo de determinar éste, será formar el producto de todos los denominadores, y como quiera que el cociente de dividir este resultado por cada uno de éstos, es el producto de los denominadores restantes, de aquí que *para reducir varios quebrados á un común denominador, se multipliquen los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.*

Así, si se quisiera reducir á un común denominador los quebrados $\frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{14}, \frac{2}{15}$, indicando primeramente y luego efectuando las operaciones que prescribe la regla, se tendria:

$$\frac{5}{6}=\frac{5(7.14.15)}{6(7.14.15)}=\frac{7350}{8820}; \quad \frac{4}{7}=\frac{4(6.14.15)}{7(6.14.15)}=\frac{5040}{8820};$$

$$\frac{3}{14}=\frac{3(6.7.15)}{14(6.7.15)}=\frac{1890}{8820}; \quad \frac{2}{15}=\frac{2(6.7.14)}{15(6.7.14)}=\frac{1176}{8820}.$$

82. Si se considera ahora como múltiplo común de los denominadores al M. C. M. de éstos, las operaciones que en tal caso hubiera necesidad de efectuar, á fin de conseguir la transformacióu de varios quebrados en otros del mismo denominador, ganarían en sencillez y los quebrados resultantes aparecerían más simplificados que por el procedimiento anterior; de aquí que, en general, la regla que conviene practicar *para reducir quebrados á un común denominador, consiste en transformar éstos, en sus equivalentes irreducibles; hallar luego el* M. C. M. *de sus denominadores, y éste será el denominador común. Los numeradores se obtienen multiplicando el numerador de cada quebrado propuesto, por el cociente que resulta de dividir el precitado* M. C. M. *por el respectivo denominador.* Aplicando esta regla al ejemplo anterior, con el fin de hacer más patentes sus ventajas, se tendrá, en vista de que el M. C. M. de los denominadores es (62) igual á 2.3.5.7=210, el siguiente cuadro de operaciones:

$$\frac{5}{6}=\frac{5(5.7)}{6(5.7)}=\frac{175}{210}; \quad \frac{4}{7}=\frac{4(2.3.5)}{7(2.3.5)}=\frac{120}{210};$$

$$\frac{3}{14}=\frac{3(3.5)}{14(3.5)}=\frac{45}{210}; \quad \frac{2}{15}=\frac{2(2.7)}{15(2.7)}=\frac{28}{210}.$$

Observación.—Cuando los denominadores de los quebrados propuestos sean primos entre sí, dos á dos, los quebrados obtenidos por una y otra regla tienen que ser idénticos, supuesto que, en este caso particular, el m. c. m. de los denominadores estaría formado por el producto de todos ellos. (63, Corolario 2.º)

La reducción de quebrados á un común denominador es indispensable en muchos casos para poder operar con ellos, y conveniente cuando se trata de comparar los valores de diversos quebrados.

CAPÍTULO IV.

Numeración de las fracciones decimales.

83. Se llama *fracción decimal* aquel quebrado cuyo denominador es una potencia de 10. Según esto, las fracciones decimales no son sino un caso particular de los *quebrados ordinarios*. Tanto las fracciones decimales como toda expresión compuesta de parte entera y parte decimal, reciben el nombre de *números decimales.*

Con el fin de investigar las propiedades particulares de las fracciones decimales, conviene fijarse en que del mismo modo que se puede expresar un número por muy grande que sea, formando unidades que vayan siendo de 10 en 10 veces mayores, se podrá también expresar otro por muy pequeño que sea, formando unidades que cada vez vayan siendo 10 veces menores, de suerte que estas dos series de unidades parten del mismo origen que, en el presente caso es la unidad entera, y van en sentido ascendente y descendente formando el *sistema décuplo* ó *decimal,* del cual hasta el presente sólo se ha estudiado (Capítulo II) una parte que es la que se refiere á los múltiplos de la unidad: ahora bien, para completar el sistema de numeración, formando por la parte que corresponde á sus divisores, se supondrá la unidad entera dividida en 10 partes iguales llamadas *décimas,* cada décima en otras 10 llamadas *centésimas,* cada centésima en 10 *milésimas,* y, prosiguiendo de este modo, se podrá obtener un número indefinido de órdenes de unidades, de los cuales uno cualquiera de ellos será 10 veces menor que el inmediato anterior.

En tal forma, los órdenes de unidades de la serie descendente se corresponden simétricamente con los de la ascendente, y los nombres que se emplean para distinguir aquéllos son los usados en ésta con sólo terminarles en *ésimas;* así, la unidad de séptimo orden, que, como se sabe, se refiere á *unidades de millón,* correspondiendo á la de séptimo orden decimal (á partir de las unidades sencillas) expresará *millonésimas.*

En vista de que cada unidad de un orden decimal se forma de 10 del inmediato inferior, se podrá, aplicando el principio convencional de la numeración escrita (5), escribir las fracciones decimales sin necesidad de ponerles denominador, siempre que se tenga una señal para distinguir el lugar que corresponde á las unidades sencillas, pues una vez conocido éste, la primera cifra que se encuentre á su derecha expresará décimas, la segunda centésimas, la tercera milésimas, y en general una cifra cualquiera pertenecerá al orden que corresponda al número de cifras que existen desde ella hasta las unidades simples inclusive. Ejemplo:

....9820471653 7 8205461937...

9	decenas de millar de millón.
8	millares de millón.
2	centenas de millón.
0	decenas de millón.
4	millones.
7	centenas de millar.
1	decenas de millar.
6	millares.
5	centenas.
3	decenas.
7	**Unidades sencillas.** / **Unidades simples.**
8	décimas.
2	centésimas.
0	milésimas.
5	diez milésimas.
4	cien milésimas.
6	millonésimas.
1	diez millonésimas.
9	cien millonésimas.
3	mil millonésimas.
7	diez mil millonésimas.

La separación entre la parte entera y la decimal del número que se trata de escribir, se ha convenido en que se señale por medio de una coma.

En el caso de que el número decimal careciese de parte entera, se escribirá un 0 en su lugar.

Aun cuando pudiera expresarse un número decimal enunciando separadamente las unidades que contiene cada orden, este procedimiento se simplifica en la práctica convirtiendo todas estas unidades al orden inferior, á la manera que se hacía con los números enteros.

Así, en la fracción compuesta de 8 décimas, 5 centésimas, 9 milésimas y 3 diez milésimas, se tendría que como una décima equivale á 1000 diez milésimas, una centésima se compone de 100 diez milésimas y una milésima de 10 diez milésimas, resultaría que el número decimal propuesto constaría de 8000 diez milésimas, 500 diez milésimas, 90 diez milésimas y de 3 diez milésimas, ó sea de 8593 diez milésimas.

Cuando se quiera expresar verbalmente un número compuesto de parte entera y parte decimal, se enunciará primeramente la parte entera y luego la decimal; pero también pudiera expresarse convirtiendo todas las unidades de sus diversos órdenes en el inferior de éstos. Así, un número decimal compuesto de 37 unidades enteras y de 514 milésimas, equivale á 37514 milésimas. En efecto, si una unidad entera contiene 1000 milésimas, las 37 unidades constarán de 37000 milésimas, que reunidas á las 514 milésimas del número propuesto, componen 37514 milésimas.

Según lo dicho, se tendrá que *para leer un número decimal, se enuncia primeramente la parte entera y después la decimal, como si fuera también entera, dándole la denominación que á su última cifra corresponda;* ó, pudiera leerse también, *enunciando el número total de unidades de los diversos órdenes que posea, á la manera que se hace con los números enteros, teniendo cuidado de expresar todas aquellas unidades en el orden decimal inferior.*

Asimismo se deduce de lo expuesto, que *para escribir un número en el que la parte entera se halle separada de la decimal, se colocarán primeramente las unidades enteras, á continuación la coma y las cifras decimales que aquel número contiene según su orden correlativo descendente, teniendo cuidado de que la última de estas cifras ocupe el lugar que le corresponda.*

Para escribir un número cuando por el enunciado se encuentran reunidas la parte entera y la decimal, *se escribirá como si todo él fuera entero; teniendo cuidado de colocar la coma de modo que la última cifra ocupe el lugar designado por su denominación.*

De lo dicho se infiere que quien esté habituado á expresar constantemente números enteros, con la misma facilidad podrá enunciar y escribir números decimales cualesquiera.

84. Sin embargo, obsérvase entre unos y otros la diferencia de que cuando se escriben ceros á la derecha de un número entero, éste varía (16); mientras que *si se colocan ceros á la derecha de un número decimal, su valor no experimenta alteración alguna,* por cuanto que no habiendo cambiado, por tal circunstancia, la colocación de la coma, todas sus cifras no sólo conservan invariable el valor absoluto, sino también el relativo que antes poseían. Así: 7,36 equivale á 7,36000; supuesto que uno y otro constan de las mismas unidades simples, así como de igual número de décimas y de centésimas; y uno y otro carecen por completo de milésimas, diez milésimas y cien milésimas.

CAPÍTULO V.

Operaciones con los números fraccionarios.

ARTÍCULO I.

Generalidades.

85. Considerando á un quebrado como una reunión de unidades fraccionarias cuyo número estará expresado por su numerador, se infiere que las cuestiones en que intervienen quebrados puedan reducirse á sus análogas en que se opera con enteros. Así se explica que las definiciones que se refieren al cálculo de estos números, el modo de indicar y comprobar las diversas operaciones que con ellos se efectúan, y hasta las denominaciones que se aplican á los términos, signo y resultado de cada una de aquéllas, se hagan también extensivas á los quebrados.

Dado el interés que tiene el cálculo de éstos, así como la dificultad que, sin más amplias aclaraciones, pudiera ofrecer en algunos casos la determinación de la unidad fraccionaria en los resultados, se hace indispensable detenerse en cada una de las expresadas operaciones, á fin de desvanecer toda duda en la deducción de aquéllos.

Aun cuando todo lo que se diga de las fracciones ordinarias, se puede aplicar desde luego á las decimales (83), conviene sin embargo ocuparse separadamente de unas y otras, no sólo por su diversidad de carácter, sino con el fin de hacer patente, con la inmediata comparación de los procedimientos que respectivamente se empleen, la mayor facilidad con que se opera cuando los números que se someten al cálculo son decimales.

ARTÍCULO II.

Adición.

86. Quebrados ordinarios.—*Para sumar quebrados que tienen igual denominador, se suman sus numeradores, y esta suma se divide por el denominador común.* Es evidente que de este modo se tendrá en un solo número el valor de todos los sumandos.

Así: $\frac{4}{19}+\frac{7}{19}+\frac{5}{19}=\frac{16}{19}$.

Si los quebrados que se quisieran sumar tuviesen distintos denominadores, se reducirían al mínimo denominador común y quedaría este caso convertido en el anterior.

Para sumar los quebrados $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{8}{15}$; se reducirían á un común denominador, á fin de que en todos ellos la unidad fraccionaria tuviese el mismo valor, y se tendría $\frac{20}{60}+\frac{24}{60}+\frac{35}{60}+\frac{32}{60}=\frac{111}{60}$.

Cuando el resultado obtenido sea un quebrado impropio, conviene presentarlo en forma más sencilla, lo que se consigue sacando los enteros; así, en el ejemplo que se acaba de proponer, en vez del número $\frac{111}{60}$, se escribiría el número mixto equivalente, ó sea $1\frac{51}{60}$.

Para sumar números mixtos se sumarían primeramente *los quebrados, y si esta suma compusiera alguna unidad entera, se incorporaría á la suma de los enteros.*

En efecto, el número que resulte al proceder de este modo, contendrá todas las unidades, tanto enteras como fraccionarias, de los sumandos.

Se quiere sumar $4\frac{5}{9}$, $2\frac{3}{8}$ y $7\frac{1}{6}$; se dispondrá la operación del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{r} 4\frac{5}{9} \\ 2\frac{3}{8} \\ 7\frac{1}{6} \end{array}\right\} \frac{5}{9}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{40}{72}+\frac{27}{72}+\frac{12}{72}=\frac{79}{72}=1\frac{7}{72}$$

$$\overline{14\frac{7}{72}}$$

También pudieran sumarse los números mixtos transformándolos en quebrados equivalentes (68), quedando entonces la cuestión reducida á sumar quebrados; pero tal procedimiento exije operaciones más laboriosas que el anterior, y, en esta atención, apenas se hace uso de él como no sea para comprobar resultados.

87. Números decimales.—*Estos se suman como si fueran números enteros y se escribe en la suma la coma, debajo de la columna que forman las comas de los sumandos.* Pues de este modo se consigue reunir en un solo número todas las unidades enteras, las décimas, las centésimas, etc. de los números que se suman.

Con el fin de evitar equivocaciones, conviene igualar con ceros el número de cifras decimales de los sumandos (84).

Ejemplo: $18{,}34+7{,}0659+548{,}7+0{,}123$. Se dispondrá la operación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 18{,}3400 \\ 7{,}0659 \\ 548{,}7000 \\ 0{,}1230 \\ \hline 574{,}2289 \end{array}$$

Observación.—Como quiera que las fracciones decimales son un caso particular de las ordinarias, pudiera deducirse también la regla que se acaba de exponer, fijándose en que al igualar, por medio de ceros, el número de cifras decimales de los sumandos, han quedado reducidos éstos á un denominador común; al sumar los números propuestos como si fueran enteros, supone tanto como haber sumado los numeradores de los quebrados ordinarios en que se habían transformado aquellos números; y finalmente, al separar de la derecha de la suma, por medio de la coma, tantas cifras decimales como hubiere en el sumando propuesto que tuviese más, se ha puesto de manifiesto en el resultado, de una manera implícita, el denominador que afectaba á todos ellos.

ARTÍCULO III.

Sustracción.

88. Quebrados ordinarios.—*Para restar quebrados que tengan el mismo denominador, se quita del numerador del minuendo el del sustraendo, y el resto se divide por el denominador común.*

Es evidente que $\frac{7}{11}-\frac{4}{11}=\frac{3}{11}$.

Cuando los quebrados que se hayan de restar no tienen el mismo denominador, se reducen al mínimo denominador común, y entonces queda convertido este caso en el anterior.

Así: $\frac{7}{12}-\frac{5}{18}=\frac{21}{36}-\frac{10}{36}=\frac{11}{36}$.

Para restar dos números mixtos, se halla primeramente la diferencia entre los quebrados, y después la que existe entre los enteros, y la reunión de ambos restos será la diferencia de los mixtos que se habían propuesto.

Sean los números mixtos que se han de restar $19\frac{3}{4}$ y $8\frac{5}{12}$.

Se dispone la operación como sigue:

$$\left.\begin{array}{r} 19\frac{3}{4} \\ 8\frac{5}{12} \\ \hline 11\frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \frac{3}{4}-\frac{5}{12}=\frac{9}{12}-\frac{5}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Luego $19\frac{3}{4}-8\frac{5}{12}=11\frac{1}{3}$.

En el caso de que el quebrado del minuendo fuese menor que el del sustraendo, se le agrega á aquél una unidad, y se efectúa la sustracción teniendo cuidado de considerar con una unidad menos á la parte entera del minuendo.

Restar de $7\frac{2}{9}$ el número $3\frac{4}{5}$.

Disponiendo la operación en la forma anterior, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} 7\,\frac{2}{9} \\ 3\,\frac{4}{5} \end{array}\right\} \quad \frac{2}{9}-\frac{4}{5}=\frac{10}{45}-\frac{36}{45};\ \left(\frac{45}{45}+\frac{10}{45}\right)-\frac{36}{45}=\frac{55}{45}-\frac{36}{45}=\frac{19}{45}$$

$$\overline{3\,\frac{19}{45}}$$

Luego $7\,\frac{2}{9}-3\,\frac{4}{5}=3\,\frac{19}{45}$.

Después de reducir los quebrados $\frac{2}{9}$ y $\frac{4}{5}$ á un común denominador, se ve que no es posible efectuar la resta, en atención á que el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo; mas si se toma una unidad de la parte entera de éste y se agrega á su parte fraccionaria, la cuestión entonces queda reducida al caso anterior.

También pudiera efectuarse la sustracción de dos números mixtos poniendo éstos bajo la forma de quebrados equivalentes y restando éstos; pero este procedimiento no suele practicarse por ser más pesado que el anterior.

En el caso particular de que se quisiera *restar un quebrado de un entero,* se toma una unidad del entero y éste se expresa en unidades fraccionarias iguales á las del quebrado propuesto; de esta unidad entera, escrita en esta forma, se quita el quebrado propio que compone el sustraendo, y la diferencia unida al minuendo disminuido en una unidad, será el resto que se buscaba. Ejemplo:

$$7-\frac{4}{9}=6\,\frac{9}{9}-\frac{4}{9}=6\,\frac{5}{9}.$$

Cualquiera que sea el caso que se considere, y el procedimiento que se siga para obtener el resultado, siempre acontecerá que al sumar éste con el sustraendo, deberá reproducir al minuendo (10).

89. Números decimales.—*Para restar éstos, se escribe el minuendo y debajo el sustraendo, de modo que se correspondan las comas, se iguala con ceros el número de cifras decimales, y se restan como enteros, poniendo la coma en su lugar.*

Así, se habrá conseguido obtener la verdadera diferencia que existe entre ambos números, supuesto que se han quitado del minuendo las diversas colecciones de unidades que componen al sustraendo.

Para restar de 41,7 el número 9,6584, se dispondría la operación de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r} 41{,}7000 \\ 9{,}6584 \\ \hline 32{,}0416 \end{array}$$

Observación.—Procediendo de este modo es como si con las fracciones decimales, puestas en forma de quebrados ordinarios, se hubieran efectuado las operaciones que prescribe la correspondiente regla (88).

ARTÍCULO IV.

Multiplicación.

90. Quebrados ordinarios.—Al explicar esta operación, conviene distinguir dos casos: 1.º, cuando son dos los factores que se multiplican; 2.º, cuando el producto se halla formado por un número cualquiera de factores.

Primer caso. *Para multiplicar dos quebrados se parte el producto de los numeradores por el de los denominadores.*

Se quiere hacer ver que $\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{5\times3}{7\times8}$. Según la definición general (12), el objeto de esta multiplicación es tomar las $\frac{3}{8}$ partes de $\frac{5}{7}$; se sabe (71) que $\frac{1}{8}$ parte de $\frac{5}{7}$ es igual á $\frac{5}{7\times8}$; luego las $\frac{3}{8}$ partes de $\frac{5}{7}$ equivaldrán á $\frac{5}{7\times8}\times3=\frac{5\times3}{7\times8}$ (*).

Dos números se llaman *recíprocos* cuando su producto es la unidad entera. Según esto, los quebrados $\frac{m}{n}$ y $\frac{n}{m}$ son el uno recíproco del otro.

91. Mediante un razonamiento análogo se vería que *para multiplicar un entero por un quebrado,* se tendría que tomar del multiplicando las partes que indica el multiplicador; y, en su consecuencia, para obtener el resultado *se dividiría por el denominador del quebrado el producto del entero por el numerador.*

Así, se verificaría que $4\times\frac{5}{9}=\frac{4\times5}{9}$ (**).

Para multiplicar dos números mixtos, se convierten éstos en quebrados y, de este modo, la cuestión queda reducida á efectuar la multiplicación de éstos. Por ejemplo:

$$7\,\frac{2}{3}\times4\,\frac{5}{9}=\frac{23}{3}\times\frac{41}{9}=\frac{23\times41}{3\times9}.$$

(*) Después de lo dicho (85), parece natural que para deducir el producto de dos quebrados, se hubieran expuesto las consideraciones que se indican en las siguientes igualdades: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\times\frac{cb}{bd}=\frac{ad}{bd\times bd}\times cb=\frac{ad\times cb}{bd\times bd}=\frac{ac}{bd}$; pero se ha dado la preferencia á la demostración que antecede teniendo en cuenta su mayor sencillez.

Conviene advertir que cuando varias letras que representan números, no tienen signo alguno interpuesto, se sobrentiende que se omite el signo de la multiplicación.

(**) Nada se dice en este lugar de la multiplicación de un quebrado por un entero, supuesto que este caso ya se estudió (70-71).

Cuando siendo el multiplicando un número mixto, el multiplicador es entero, en lugar de reducir el número mixto á quebrado equivalente, es más ventajoso multiplicar las dos partes que componen el mixto por el entero y sumar los dos productos parciales.

Así: $7\,\frac{3}{19}\times4=28\,\frac{12}{19}$.

92. Segundo caso. *El producto de varios quebrados se obtiene partiendo el producto de todos los numeradores por el de los denominadores.* Efectuando las multiplicaciones en el orden que se dijo (20), se tendría que

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ace}{bdf}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}.$$

Según esto, cuando existan factores comunes en los numeradores y denominadores, convendría suprimir éstos desde luego, á fin de facilitar las multiplicaciones en el resultado y que éste aparezca más simplificado.

Si en el producto indicado, además de estar formado por quebrados, hubiere factores enteros, según lo dicho (91), aparecerían éstos en el producto de los numeradores.

Siendo así que permanecen invariables los dos productos que forman el numerador y el denominador del resultado, cualquiera que sea el orden en que se coloquen sus respectivos factores (21), se sigue de aqui, que *el producto de varios enteros y quebrados ó quebrados solamente, no se altera aun cuando varíe el orden en que se efectúe la multiplicación de estos números.* Según esto, los diferentes corolarios deducidos del teorema correspondiente al caso en que todos los factores eran enteros (21) pudiera hacerse ver que también resultaban ciertos cuando fuesen fraccionarios, supuesto que los razonamientos que se empleaban en aquellas demostraciones son también aplicables á estos números.

Apoyándose en la definición general de la multiplicación (12) y haciendo uso de consideraciones en un todo análogas á las empleadas en los teoremas 19 y 20, pudiera ahora hacerse patente la evidencia de éstos, en el caso de que los números que se consideren sean enteros y fraccionarios ó todos fraccionarios.

Pudiera observarse también que según la precitada definición, cuando se multiplique un número entero ó fraccionario por un quebrado propio, el producto que resulte será menor que el multiplicando.

Se ha visto (90), que $\frac{5}{9} \times \frac{3}{8}$ era lo mismo que apreciar los $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{9}$. Como quiera que en tal caso hay que tomar de un quebrado las partes que indica el denominador del otro, de aquí que á la expresión $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{9}$ se llame *quebrado de quebrado*, y que para hallar su valor se multipliquen los dos quebrados.

Del mismo modo se podrían formar expresiones compuestas de más de dos quebrados, las cuales reciben el nombre de *quebrado de quebrados*. Por ejemplo: $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{9}$ de $\frac{4}{7}$ de $\frac{1}{6}$. El valor de este resultado se encontraría multiplicando todos ellos. En efecto, $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{9}$ se ha visto es igual á $\frac{15}{72}$; luego la expresión anterior se reduciría á $\frac{15}{72}$ de $\frac{4}{7}$ de $\frac{1}{6}$; pero $\frac{15}{72}$ de $\frac{4}{7}$ equivale á $\frac{60}{504}$ y en esta atención habría necesidad de tomar los $\frac{60}{504}$ de $\frac{1}{16}$.

93. Números decimales.— *Para multiplicar un número decimal por otro decimal, se prescinde de las comas, se multiplican como si fueran enteros, y después se separan*

de la derecha del producto tantas cifras decimales como haya en ambos factores, poniendo ceros á la izquierda si fuere necesario.

En efecto; escribiendo los números decimales en forma de quebrados ordinarios y efectuando con ellos las operaciones indicadas, quedaría deducida la regla.

Por ejemplo:

$$4{,}78\times 0{,}00192=\frac{478}{100}\times\frac{192}{100000}=\frac{478\times 192}{10000000}=0{,}0091776.$$

Del mismo modo se deduciría que *para multiplicar un número decimal por un entero ó un entero por un decimal, se multiplicarían como si fueran ambos enteros, y después se separarían en el producto, por medio de la coma, tantas cifras decimales como tuviere el factor decimal.* Supuesto que tanto $\frac{75}{1000}\times 19$ como $19\times\frac{75}{1000}$ equivalen á $\frac{75\times 19}{1000}$.

94. Caso particular. *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma á la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad.* Supuesto que las cifras del resultado obtenido, después de haber movido la coma en el multiplicando, representan el mismo número de unidades que en el decimal que se considera, pero tantas veces mayores que las de éste, como indica el multiplicador.

Así: $9{,}71536\times 100=971{,}536$.

Comparando, en el ejemplo que antecede, el lugar de cada cifra del multiplicando con el que ocupa en el producto, se ve que en éste han quedado hechas 100 veces mayores las colecciones que corresponden á los diversos órdenes de unidades del multiplicando.

Cuando no hubiere bastantes cifras decimales en el multiplicando, se supliría su falta agregando los ceros que fueran necesarios. Ejemplo: $73{,}4\times 1000=73400$.

ARTÍCULO V.

División.

95. QUEBRADOS ORDINARIOS.—*Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el dividendo por el quebrado recíproco del divisor.*

Se trata de demostrar que $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ (*).

En efecto, el resultado $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ satisface á la condición de que multiplicado por el divisor reproduce el dividendo; luego es el verdadero cociente (22).

Del mismo modo se probaría que *el cociente de dividir un entero por un quebrado, se obtiene multiplicando aquél por el recíproco del quebrado multiplicador.*

Así: $7:\frac{5}{8}=7\times\frac{8}{5}=\frac{7\times 8}{5}$ (**).

Para dividir dos números mixtos, por regla general, se transforman en quebrados, y se efectúa la división de és-

(*) También pudiérase haber deducido el cociente reduciendo el dividendo y el divisor á un denominador común y haber transformado la operación en la siguiente forma:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd}=ad:bc=\frac{ad}{bc}.$$

En el caso particular de que los dos términos del dividendo fueran respectivamente múltiplos de los del mismo nombre del divisor, convendría obtener el resultado, *dividiendo el cociente de los numeradores por el de los denominadores.*

En efecto, $\frac{ma}{nb}:\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$.

(**) No se trata en este lugar de la división de un quebrado por un entero, supuesto que este caso ya se estudió (70, COROLARIO y 71).

tos como se acaba de manifestar. Ejemplo: dividir $7\frac{5}{9}$ por $2\frac{3}{8}$. Transformando estos números en quebrados, se tendría: $7\frac{5}{9}:2\frac{3}{8}=\frac{68}{9}:\frac{19}{8}=\frac{544}{171}=3\frac{31}{171}$.

Si el dividendo es un número mixto y el divisor entero, con el fin de facilitar la división, convendría dividir separadamente cada una de las dos partes de que se compone el dividendo por el divisor y reunir ambos resultados.

Ejemplo: dividir $8\frac{7}{11}:4=2\frac{7}{44}$.

Los teoremas que se demostraron (28, 29 y 30) al tratar de la primera parte referente á la divisibilidad de los números enteros, se pueden hacer extensivos á los quebrados sin más que emplear idénticos razonamientos á los que en las demostraciones de aquéllos se exponían, y teniendo además en cuenta que la definición de la división (22) es general.

Asimismo pudiera hacerse patente que en igual caso se encuentran las proposiciones (74, 75 y 76) que se dedujeron para los números enteros.

De la antedicha definición se deduce también, que si un número entero ó fraccionario, se divide por un quebrado propio, el cociente es mayor que el dividendo.

96. NÚMEROS DECIMALES.—*Para dividir un número decimal por un entero, se efectuará la división como si ambos fueran enteros, y de la derecha del cociente se separarán tantas cifras decimales como tenga el dividendo.* Se quiere dividir 378,0928 por 21.

Es evidente que

$$378{,}0928:21=\frac{3780928}{10000}:21=\frac{3780928:21}{10000},$$

cuyo resultado se halla conforme con la regla que se enunció.

Observación.—El cociente que se acaba de encontrar se diferencia del verdadero en menos de una unidad del último orden decimal. Según esto, cuando se desee aproximar un cociente en menos de una unidad del orden decimal que se fije de antemano, basta poner á la derecha de la parte decimal del dividendo los ceros necesarios para que el último de éstos, comenzando á contar por la izquierda, ocupe el lugar de las unidades decimales que se hayan fijado.

Por ejemplo, si se deseara aproximar el cociente de dividir 378,0928 por 21 hasta cien milésimas, se agregaría á la derecha del dividendo un cero, para que exprese cien milésimas; después, practicando lo dicho en la regla, se efectuaría la división considerando como entero á este dividendo, y se tendría que $37809280:21=1800441\frac{19}{21}$ cuyo cociente completo habría que dividirlo por 100000, y el resultado sería $18{,}00441\,\frac{19}{21\times100000}$, en el cual, si se prescinde del quebrado $\frac{19}{21\times100000}$, cuyo valor se ve que es menor que una cien milésima, se tendrá en el número 18,00441 el cociente con la aproximación deseada.

97. *Para dividir un número entero ó decimal por otro decimal, se multiplicará el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor, y el producto obtenido se dividirá por el divisor considerado como entero.* Si por ejemplo se tuviese que dividir 378,0928 por 0,021, se diría:

$$378{,}0928:0{,}021=378{,}0928:\frac{21}{1000}=378{,}0928\times1000:23,$$

cuyo resultado final se halla conforme con la regla que se acaba de citar.

En el caso de que el dividendo tuviera un número de cifras decimales igual ó menor que las que posee el divisor, entonces la cuestión quedaba reducida á dividir dos números enteros.

98. Caso particular.—*Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se trasladará la coma tantos lugares, á la izquierda de donde se encuentre en el dividendo, como ceros posea la unidad del divisor; y, si no hubiere en aquél bastantes cifras, se suplirán con ceros las que falten.*

Según esto, 378,0928:10000=0,03780928, en atención á que al multiplicar 3,03780928 por el divisor reproduce el dividendo.

ARTÍCULO VI.

Elevación á potencias.

99. Quebrados ordinarios.—*La potencia de cualquier grado de una fracción, es igual á la potencia del mismo grado del numerador, dividida por la del denominador.*

En efecto, según la definición de lo que se entiende por potencia de un número (39) y la regla para la multiplicación de quebrados (92), se verificará que

$$\left(\frac{7}{9}\right)^5=\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{7.7.7.7.7}{9.9.9.9.9}=\frac{7^5}{9^5}.$$

Para elevar un número mixto á una potencia, se le transforma en quebrado, y entonces queda este caso reducido al anterior.

Ejemplo: $\left(8\,\frac{3}{7}\right)^2=\left(\frac{59}{7}\right)^2=\frac{59^2}{7^2}=\frac{3481}{49}=71\,\frac{2}{49}.$

100. *Una potencia cualquiera de un quebrado irreducible, es otro quebrado irreducible.* En atención á que la potencia de un quebrado, es otro quebrado cuyos dos términos son potencias de los del propuesto; mas como quiera que los términos de éste son primos entre sí (78), sus potencias también lo serán. (60, COROLARIO 3.º)

NÚMEROS DECIMALES.—*Para elevar un número decimal á una potencia, se considera como si fuese entero, y en el resultado obtenido, se separan, por medio de la coma, tantas cifras decimales como unidades tuviere el producto del exponente por el número de cifras decimales del número propuesto.* Pues de la regla para la multiplicación de los números decimales (93), se infiere que, cuando uno de éstos se eleve al cuadrado, el número que resulte tendrá doble número de cifras decimales que el propuesto; y si éste se elevara al cubo, aparecería la tercera potencia con tres veces más cifras decimales, y así sucesivamente.

Ejemplo:

$$(2{,}93)^4 = 2{,}93 \times 2{,}93 \times 2{,}93 \times 2{,}93 = 73{,}70050801.$$

En donde se ve que teniendo el número propuesto 2 cifras decimales y siendo 4 el exponente, el producto de ambos ó sea el número 8, expresa el número de cifras decimales de $(2{,}93)^4$.

ARTÍCULO VII.

Raíz cuadrada.

QUEBRADOS ORDINARIOS.—Para mayor claridad en la explicación, conviene distinguir tres casos: 1.º, que los dos términos del quebrado propuesto sean cuadrados perfectos; 2.º, que sólo el denominador tenga raíz cuadrada exacta; 3.º, que ninguno de los términos del quebrado sea cuadrado perfecto.

101. Primer caso. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado, cuyos términos sean cuadrados perfectos, se extrae la raíz del numerador, y se divide por la del denominador.*

En efecto, sea el quebrado $\frac{4}{25}$. Su raíz cuadrada será $\frac{2}{5}$, en atención á que al elevar $\frac{2}{5}$ á la segunda potencia, reproduce al número propuesto (44).

Cuando el quebrado $\frac{A}{B}$ *sea irreducible* (*), *y alguno de sus términos no sea cuadrado perfecto, ya se puede asegurar que no tendrá raíz cuadrada exacta.* Pues si la tuviese, ésta sería ó un número entero ó un quebrado que siempre se podría suponer irreducible. Si se admite que la raíz exacta es un entero, su cuadrado tendría que ser igual á la fracción irreducible propuesta, lo cual es absurdo; si la raíz fuere un quebrado irreducible tal como $\frac{a}{b}$, al elevarlo á la segunda potencia se tendría que $\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$; mas como quiera que el quebrado $\frac{a^2}{b^2}$ ha de ser también irreducible (100), resultaría según lo dicho (78, Corolario 2.º), que $A=a^2$ y $B=b^2$; lo cual es contrario á la hipótesis.

(*) Es necesario suponer que el quebrado que se considera es irreducible, pues de no serlo, pudiera ocurrir que sin tener ninguno de sus términos raíz exacta, la tuviese el quebrado. Por ejemplo, sea la fracción $\frac{45}{80}$, en la que á pesar de que ninguno de sus términos tiene raíz cuadrada exacta, el quebrado la tiene, según puede verse suprimiendo el factor 5 que es común á ambos.

102. Mediante un razonamiento análogo, se haría ver que *si un número entero no es cuadrado perfecto, no es posible que tenga raíz cuadrada exacta.*

De las consideraciones que anteceden se desprende que la condición necesaria y suficiente para que una fracción irreducible tenga raíz cuadrada exacta, es que sus dos términos sean cuadrados perfectos.

103. SEGUNDO CASO. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuyo denominador sea cuadrado perfecto, no siéndolo el numerador, se extrae la raíz entera del numerador, y ésta se divide por la exacta del denominador.* El quebrado que con tal motivo resulte, será el valor de la raíz cuadrada que se deseaba encontrar, con un error menor que la unidad dividida por la raíz exacta del denominador.

Se trata de hacer ver que $\frac{5}{8}$ es la $\sqrt{\frac{29}{64}}$ con un error menor que $\frac{1}{8}$. En efecto, $\frac{29}{64}$ se halla comprendido entre $\frac{25}{64}$ y $\frac{36}{64}$, luego el valor de la $\sqrt{\frac{29}{64}}$ será mayor que $\frac{5}{8}$ y menor que $\frac{6}{8}$, diferenciándose de cualquiera de ellos, y por consiguiente de $\frac{5}{8}$, en menos de $\frac{1}{8}$ de unidad.

104. Se vió (47) la manera de obtener la raíz cuadrada de un número entero aproximada á la verdadera en menos de una unidad; y si ahora se quisiera obtener la expresada raíz con mayor aproximación, se conseguiría el objeto transformando el entero en quebrado equivalente, cuyo denominador sea un cuadrado perfecto; y en tal forma se podrá encontrar, por virtud de la regla expuesta en este segundo caso, la raíz cuadrada de un número entero, aproximada á la verdadera en menos de la parte alícuota de la unidad que se desee.

Sea a un número entero del cual se quiere extraer la raíz cuadrada con un error menor que $\frac{1}{b}$ de unidad.

Se tiene (65) que $a=\frac{a\times b^2}{b^2}$, de donde $\sqrt{a}=\sqrt{\frac{ab^2}{b^2}}=$ $=\frac{\sqrt{ab^2}}{b}$; (1) lo que manifiesta que *para extraer la raíz cuadrada de un número entero, en menos de una parte alícuota de la unidad, se multiplica el entero por el cuadrado del denominador de la mencionada parte alícuota, se extrae la raíz cuadrada entera del producto, y esta raíz se divide por el antedicho denominador.*

Ejemplo: extraer la raíz cuadrada de 19 en menos de $\frac{1}{13}$ de unidad, según la regla:

$$\sqrt{19}=\frac{\sqrt{19\times 13^2}}{13}=\frac{56}{13}=4\,\frac{4}{13}.$$

105. Tercer caso. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuyo denominador no sea cuadrado perfecto, se multiplican sus dos términos por el denominador, ó por un número tal, que transforme al quebrado propuesto en otro cuyo denominador tenga raíz exacta,* con cuyo motivo este caso queda reducido al anterior.

Ejemplo 1.° $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3\times 7}{7^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4}{7}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$ de unidad.

Ejemplo 2.° $\sqrt{\frac{7}{24}}=\sqrt{\frac{7\times 6}{24\times 6}}=\sqrt{\frac{42}{144}}=\frac{\sqrt{42}}{12}=\frac{6}{12}=\frac{3}{4}$ con un error menor que $\frac{1}{12}$ de unidad.

Si el denominador del quebrado, que se considera, no fuese número primo, ni un producto de factores primos distintos, como sucede en el ejemplo 2.º anterior, se simplifica la operación transformando el quebrado en otro equivalente, cuyo denominador sea el *mínimo cuadrado perfecto,* el cual puede deducirse por virtud de las siguientes consideraciones: todo número descompuesto en factores, al multiplicarlo por si mismo, se obtendrá un resultado, que estará formado de aquellos factores afectados de exponentes pares (21, Corolario 2.º); de aquí se infiere que la condición necesaria y suficiente para que un número descompuesto en factores primos sea cuadrado perfecto, es que los exponentes que les afectan sean de grado par. Luego *para conseguir determinar el mínimo cuadrado perfecto del denominador de un quebrado,* que, como antes se dijo, se supone irreducible, *se descompondría el citado denominador en sus factores primos y se multiplicarían los dos términos del quebrado, únicamente por el producto de aquellos factores que tengan exponentes impares.*

Obsérvese que la regla (104) es también aplicable al caso en que se desee obtener la raiz de un quebrado en menos de una parte alícuota de la unidad, supuesto que nada impide que en la expresión literal deducida (1) se considere al número a como fraccionario.

Para extraer la raíz cuadrada de un número mixto, se reduce éste á quebrado, y se extrae su raíz como en los anteriores casos.

106. Números decimales.—*Para extraer la raíz cuadrada de un decimal, se le agrega á su derecha un cero, en el caso de que la parte fraccionaria tenga un número impar de cifras, y se prescinde de la coma; una vez hecho esto, extráigase la raíz del número como si fuera entero, y, de la derecha del resultado, se separará la mitad de cifras decimales que tuviere el número propuesto.*

En efecto, si se tratara de extraer la raíz cuadrada de 0,15129, debería agregarse un cero á su derecha, con lo cual se habrá conseguido que el denominador del quebrado ordinario equivalente fuera cuadrado perfecto, con cuyo motivo al poner en práctica lo dicho (103 y 105), queda justificada la regla que se acaba de exponer.

Así se tendría:

$$\sqrt{0,15129}=\sqrt{\frac{151290}{(1000)^2}}=\frac{\sqrt{151290}}{1000}=0,123,$$

raíz aproximada á la verdadera en menos de 0,001.

Si ahora se desea que la raíz se aproxime á la verdadera en menos de una unidad fraccionaria decimal cualquiera, no habría sino apoyarse en el orden de consideraciones que anteceden (104 y 105), empezando por hacer que el número de sus cifras decimales, fuera doble del que ha de tener la raíz que se busca, para lo cual habría necesidad de escribir á la derecha de aquél los ceros que fueren indispensables para que se consiga esta circunstancia; se prescindiría desde luego de la coma, extraeríase la raíz del número que así se forma, y del resultado deberían separarse la mitad de cifras decimales que posea el número de quien se ha obtenido la raíz.

Ejemplo: $\sqrt{11,948}$ aproximada á la verdadera en menos de 0,0001.

Como quiera que la raíz ha de tener cuatro cifras decimales, para obtener ésta habría que agregar á la derecha del número que se considera cinco ceros, extraer la raíz cuadrada del resultado, y se tendría el número 34565, del cual habría que separar por medio de la coma las cuatro primeras cifras de su derecha, según se hace patente por la expresión $\sqrt{11,948}=\frac{\sqrt{11,948\times10000^2}}{10000}=3,4565.$

Al extraer la raíz cuadrada en semejantes casos, es indiferente escribir los ceros necesarios á la derecha del número propuesto ó agregarlos de dos en dos á los diferentes residuos. Cuando el número propuesto contenga más cifras decimales que el doble de las que ha de tener la raíz que se busca, se prescindirá en aquél de todas aquellas cifras que excedieren de las indispensables.

107. Cuando se desee extraer la raíz cuadrada de un número entero con un error menor que una parte alícuota de la unidad, es preferible que ésta sea decimal, pues de ese modo se facilita la determinación del cuadrado del denominador que corresponde á la citada parte de la unidad, así como también la obtención del producto de este cuadrado por el número propuesto y la división de la raíz hallada por el antedicho denominador.

De la expresión (1) deducida (104), se infiere que *para extraer la raíz cuadrada de un número entero, en menos de una unidad decimal, se escribirán á la derecha de aquél tantas veces dos ceros como exprese el orden decimal que marca la aproximación; se extraerá la raíz cuadrada del número que resulta, y deberán separarse en la raíz hallada tantas cifras decimales como pares de ceros se hubieren escrito.*

Ejemplo: extraer la $\sqrt{1269}$ aproximada en menos de 0,01:

$$\sqrt{1269}=\frac{\sqrt{12690000}}{100}=35,62.$$

CAPÍTULO VI.

Transformación de los quebrados ordinarios en decimales y viceversa.

I.

108. Siendo más sencillo y breve el operar con fracciones cuando éstas se presentan en forma decimal, según se ha visto (CAPÍTULO V), se explica la conveniencia de que se investigue la manera de convertir á esta clase de fracciones, los quebrados ordinarios que pudieran proponerse.

Si por ejemplo se quisiera expresar el quebrado irreducible $\frac{91}{16}$ en decimal equivalente, necesario sería averiguar las unidades de diversos órdenes de que se compone la fracción decimal que se busca. Para conseguirlo, obsérvese que como todo quebrado ordinario se puede considerar como un cociente indicado, y al efectuar la división del numerador por el denominador se obtendrá para la parte entera del resultado, el número 5, y 11 como residuo; pero la división de estas 11 unidades por 16 equivale á dividir 110 décimas por el mismo divisor 16; luego (22) las décimas del número pedido serán 6 y quedará un residuo de 14 décimas que, transformadas en centésimas, se convertirían en 140 centésimas, las cuales, divididas por 16, dan 8 centésimas en el cociente y 12 en el nuevo residuo, el cual equivale á 120

91	16
110	5,6875
· 140	
· 120	
· · 80	
· ·	

milésimas, que divididas por 16 dan por cociente 7 milésimas y por residuo 8 unidades de este último orden decimal, que si se las transforma en 80 diez milésimas y se las divide por el mismo divisor 16, hacen que se obtenga la cifra 5 que ocupa el lugar de las diez milésimas en el cociente; luego el quebrado propuesto equivale exactamente á la fracción 5,6875.

De lo dicho se deduce que *para convertir un quebrado ordinario irreducible en decimal, se divide el numerador por el denominador, y el cociente entero que se encuentre, será la parte entera del número decimal que se busca, la cual será cero si el quebrado propuesto fuese propio; y por cada cifra decimal que se trate de hallar en el cociente, se escribe un cero á la derecha de cada uno de los residuos, á fin de que hagan las veces de dividendos en las diferentes divisiones parciales que se efectúen.*

109. Ya se dijo (2) que el número de partes iguales en que se ha de dividir la unidad para formar un quebrado, tiene que satisfacer á la condición de estar contenida exactamente en la cantidad que se mide; pero si en vez de dividir la unidad en cualquier número de partes iguales, éstas fueran 10, 100, 1000, etc., pudiera ocurrir en tal caso que la cantidad que se trataba de apreciar no fuera posible expresarla sin error alguno en forma decimal, por acontecer entonces que la nueva unidad fraccionaria no estaba contenida un número de veces en la citada cantidad.

Según la regla que se acaba de deducir, se infiere que, *cuando el denominador del quebrado irreducible que se proponga, descompuesto en sus factores primos no contuviese sino al 2 ó al 5 ó á ambos á la vez, el quebrado podría transformarse con toda exactitud en decimal*; pero, en el caso contrario, esto es, *si en el mencionado denominador* *existiera algún factor diferente de los citados, el quebrado que se considera no podría expresarse sin error alguno en aquella forma.*

En efecto: según la primera parte de esta proposición, todos los factores primos del denominador aparecerían en el producto de multiplicar el numerador del quebrado por 10^n, en donde n represente un número entero suficientemente crecido; luego la división sería exacta (59) (*). Esto no sucedería cuando en el denominador existiera un factor que además de ser primo con el numerador, lo fuera también con 10^n según se dijo (60).

Con el ejemplo anterior se ha visto un caso en el que un quebrado ordinario era reducible á fracción decimal exacta; véanse ahora otros dos en los que sucede lo contrario.

Transformar los quebrados $\frac{6}{13}$ y $\frac{47}{148}$ en fracciones decimales.

1.er ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 60 & 13 \\ \hline \cdot 80 & 0{,}461538461538\ldots \text{ (**)} \\ \quad \cdot 20 & \\ \quad\quad \cdot 70 & \\ \quad\quad\quad \cdot 50 & \\ \quad\quad\quad 110 & \\ \quad\quad\quad\quad \cdot 60 & \end{array}$$

(*) Si se considera al quebrado irreducible $\frac{a}{2^5 \times 5^3}$, se verificará que $\frac{a}{2^5 \times 5^3} = \frac{a \times 5^2}{10^5}$; lo que manifiesta que la fracción decimal exacta equivalente al quebrado propuesto, tiene tantas cifras decimales como unidades posea el mayor de los exponentes de los factores 2 y 5.

(**) Por medio de puntos suspensivos se indica que continúan indefinidamente los períodos en una fracción decimal.

2.º ejemplo :

470	148
· 260	0,31756756....
1120	
· · 840	
1000	
· 112	

Estos números decimales, obtenidos como cocientes inexactos en uno y otro ejemplo, constan de cifras que se repiten indefinidamente, por cuyo motivo se llaman *fracciones periódicas*. El grupo de cifras que se repite en las fracciones de esta índole recibe el nombre de *período.*

110. El teorema anterior pone de manifiesto la condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria sea convertible en decimal exacta; al paso que el origen y existencia de las fracciones decimales periódicas se hace patente al demostrar la proposición siguiente :

Todo quebrado ordinario que no sea reducible á fracción decimal exacta, equivale á una fracción periódica. En efecto, el procedimiento que se sigue para convertir un quebrado ordinario en decimal, hace ver que en las divisiones que con tal motivo habría necesidad de efectuar, se tendría una serie indefinida de residuos que como se sabe deberían ser menores que el divisor; de modo que si al llegar á practicar tantas divisiones como unidades menos una tuviere éste, no se hubiese obtenido un cociente exacto, sucedería que al verificar la siguiente, tendría que resultar repetido alguno de los residuos anteriores, y con tal motivo iríanse reproduciendo las mismas cifras en los residuos y cociente, apareciendo dispuestas en igual orden y sucediéndose indefinidamente.

Obsérvese que, en el 1.er ejemplo, se tiene el valor del quebrado $\frac{6}{13}$ en menos de una billonésima, supuesto que el número que se desprecia es igual á $\frac{6}{13}$ de billonésima; y el segundo resultado se diferencia del verdadero en $\frac{112}{148}$ de cien millonésima, número inferior á una cien millonésima. Continuando la escritura de cifras en los respectivos cocientes, pudieran obtenerse uno y otro todavía con mayor aproximación.

111. Ahora bien; como quiera que el cociente completo de toda división inexacta equivale al cociente entero, más un quebrado cuyo numerador es el residuo y su denominador el divisor, aplicando á este quebrado el procedimiento expuesto (108) puede obtenerse el valor de un cociente indicado en menos de una unidad decimal del orden que se haya prefijado.

Cuando la cifra ó cifras que forman el período comienza en las décimas, como sucede en el 1.^{er} ejemplo, entonces se dice que la fracción es *periódica pura;* mas si el período principia en otro lugar decimal, como acontece en el 2.^{o} ejemplo, se le aplica la denominación de *periódica mixta.*

II.

112. Fracciones decimales periódicas.—Siempre que se desee efectuar una operación en la que intervengan esta clase de fracciones y se quiera obtener con rigurosa exactitud el resultado, hay necesidad de convertir precisamente éstas en quebrados ordinarios. Al quebrado ordinario irreducible, equivalente á un número decimal conocido, se denomina *fracción generatriz.*

Para encontrar la generatriz de una fracción periódica pura, se pone por numerador el período, y por denominador *tantos nueves como cifras posea el mencionado período.*

En efecto, sea la fracción 0,754754.....; si se representa por f la generatriz, resultará f=0,754754.....; multiplicando ambos miembros de esta igualdad por 1000, ó sea por la unidad seguida de tantos ceros como posea el período, resultará 1000 f=754,754754.....; restando de esta igualdad la que antecede, aparecerá 999 f=754; luego si 999 f equivalen á 754, una vez f valdrá $\frac{754}{999}$ (*).

113. *Para determinar la generatriz de una fracción periódica mixta, se escribe por numerador la parte irregular, ó sea la parte no periódica, seguida de un período, menos la antedicha parte irregular; y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como guarismos tenga la precitada parte irregular.*

En efecto, sea la fracción 0,31756756.....; representando también con la letra f la generatriz, se tendrá f=0,31756756..... Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por 100000, con el fin de que la coma venga á colocarse á la derecha del primer período, aparecerá la igualdad 100000 f=31756,756756.....

Si se multiplica también la primera igualdad por 100 de modo que la coma venga á estar á continuación de la parte no periódica, se obtendrá 100 f=31,756756.....

Restando ahora ordenadamente estas dos últimas equivalencias, resultará que 99900 f=31756—31; de donde se deduce que $f=\frac{31756-31}{99900}$ (**) $=\frac{31725}{99900}=\frac{47}{148}$.

(*) Este resultado manifiesta, que *la fracción generatriz equivalente á una fracción decimal periódica pura, no puede contener al factor 2 ni al factor 5.*

(**) Según manifiesta la diferencia indicada que aparece en el numerador, éste no puede terminar en cero, por cuyo motivo

114. Fracciones decimales no periódicas.—Estas se dividen en exactas é inexactas, según que sea limitado ó nó el número de sus cifras decimales.

Cuando las fracciones decimales son exactas, se transforman en quebrados ordinarios sin más que poner de manifiesto en ellas el denominador que les corresponde (83) y simplificar el quebrado que, en forma ordinaria, resulta; así:

$$0{,}35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}.$$

Si se quisiera comprobar tanto este último resultado como los dos anteriores, no habría sino transformar el quebrado ordinario obtenido en decimal, y es evidente que, si la operación ha sido bien efectuada, aparecerá reproducida la fracción propuesta.

115. Obsérvese que tanto estas fracciones como las periódicas, siempre puede suponerse que provienen de reducir un quebrado ordinario á decimal y por consiguiente como si fueran el resultado de una división; no sucede lo mismo con aquellas que sin ser periódicas se componen de un número ilimitado de cifras, cuya existencia quedó demostrada (101 y 102). No siendo posible convertir esta clase de fracciones decimales en quebrados ordinarios que les sean rigurosamente equivalentes, puede obtenerse, sin embargo, su valor aproximado con menor error que una unidad de cualquier orden, sin más que *despreciar todas las cifras decimales que están colo-*

---

el denominador de la fracción generatriz de otra decimal periódica mixta, se tendrá que componer de los factores 2 y 5, ó por lo menos de uno de ellos, elevado á una potencia cuyo exponente será igual al número de cifras que posee la parte irregular; y, además, de algún factor distinto.

cadas á continuación de la de este orden y hallando, como en el caso anterior, el quebrado ordinario que le corresponde.

Si se quisiera transformar el número inconmensurable 3,1415926535..... en quebrado ordinario, con un error por defecto menor que 0,00001, no habría sino aplicar la regla que antecede y se tendría $\frac{314159}{100000}$ como valor aproximado de la fracción generatriz pedida.

CAPÍTULO VII.

Igualdades fraccionarias.

DEFINICIONES.

116. La expresión de dos quebrados equivalentes, separados por medio del signo igual, recibe el nombre de *proporción* ó *igualdad fraccionaria,* y cada uno de los quebrados de que se compone toma el nombre de *razón* (*). Según esto, cociente, quebrado y razón de dos números son una misma cosa. Los términos de cada razón se denominan *antecedente* y *consecuente,* que respectivamente corresponden al numerador y denominador, ó sea al dividendo y divisor de una división indicada.

Así como en la división acontece que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, así también se tendrá que el antecedente será igual al producto del consecuente por la razón.

La igualdad fraccionaria $\frac{3}{7}=\frac{12}{28}$ suele escribirse también en la siguiente forma : $3:7::12:28$, que se lee diciendo : 3 *es á* 7 *como* 12 *es á* 28.

(*) Se entiende por *razón* ó *relación* en general, el resultado que se obtiene al comparar dos números. Mas como quiera que esta comparación puede hacerse bien sea examinando las veces que un número contiene á otro, ó bien determinando en cuanto excede el primero al segundo, de aquí, que en aquel caso se tenga la llamada *razón por cociente* y en este último la denominada *razón por diferencia.* En el presente capítulo siempre se hace referencia á la razón por cociente.

El primero y cuarto término de una proporción se llaman *extremos,* y el segundo y tercero *medios.* Los términos de una proporción no sólo pueden ser enteros sino también fraccionarios.

Se dice que una proporción es *continua,* cuando los medios son iguales, y entonces el número repetido, que ocupa los lugares que corresponden al primer consecuente y al segundo antecedente, se llama *medio proporcional.* El cuarto término de una proporción continua recibe el nombre de *tercero proporcional* al primero y segundo.

ARTÍCULO I.

Propiedades de las igualdades fraccionarias.

117. *Si cuatro números forman proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios.* En efecto, siendo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por el producto de los consecuentes, resultará $\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d}$; de donde (31) $ad=bc$.

Recíproco (*).—*Si el producto de dos números es igual al de otros dos, se podrá formar con estos cuatro números proporción, siempre que sean medios ó extremos los factores de cada producto.* Pues, según la hipótesis, se tiene $ad=bc$; si ahora se dividen ambos miembros de esta igualdad

(*) *Recíproco* de un teorema es otro teorema cuyo enunciado tiene por hipótesis la conclusión del primero y por conclusión su hipótesis. Los recíprocos no siempre son ciertos, según puede verse en algunas de las proposiciones conocidas. (28, Corolario 1.º) por el producto de dos factores, uno de cada miembro, por ejemplo : bd, se tendrá $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, de donde, simplificando, resulta $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

118. *En toda proporción un término extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.* En efecto; de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se tiene que $ad=bc$, de donde dividiendo ambos miembros por a se tendrá $d=\frac{bc}{a}$.

Ejemplo : $\frac{3}{4}=\frac{9}{d}$, de donde $d=\frac{4\times 9}{3}=12$.

En toda proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio. En efecto, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ó $ad=bc$; dividiendo ambos miembros por b se tendrá $c=\frac{ad}{b}$.

Ejemplo : $\frac{3}{4}=\frac{c}{12}$, de donde $c=\frac{3\times 12}{4}=9$.

119. *En toda proporción continua el término medio es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.* Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, se tendrá $b^2=ac$, de donde, extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, resultará $b=\sqrt{ac}$.

Ejemplo : $\frac{4}{b}=\frac{b}{16}$, de donde $b=\sqrt{4\times 16}=8$.

Es evidente que *si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones formarán también proporción.*

120. *Si se multiplican ordenadamente varias proporciones, los productos forman proporción.*

En efecto, si se tienen las proporciones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$, $\frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$ y se multiplican ordenadamente, resultará $\frac{a\,a'a''}{b\,b'b''}=\frac{c\,c'c''}{d\,d'd''}$, que es lo que se deseaba demostrar.

Las potencias del mismo grado de los cuatro términos de una proporción forman también proporción. Pues si se elevan á la potencia del grado n los dos miembros de la igualdad fraccionaria $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se tendrá que $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$, que es lo que se deseaba demostrar.

ARTÍCULO II.

Transformación de las igualdades fraccionarias.

121. Del recíproco del teorema fundamental (117) se deduce que pueden cambiarse de lugar los términos de una proporción, sin que ésta deje de subsistir, siempre que en las modificaciones que con ella se efectúen, resulte que el producto de los medios sea igual al de los extremos.

Así, en la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alternando (*) los térmi-

---

(*) Según esto, una proporción se puede disponer en ocho formas distintas; así de la igualdad fraccionaria $\frac{2}{3}=\frac{14}{21}$, se deducirían las siguientes:

$$\frac{2}{14}=\frac{3}{21},\ \frac{3}{2}=\frac{21}{14},\ \frac{3}{21}=\frac{2}{14},\ \frac{14}{21}=\frac{2}{3},\ \frac{14}{2}=\frac{21}{3},\ \frac{21}{14}=\frac{3}{2},\ \frac{21}{3}=\frac{14}{2}.$$

Cuando se mudan de lugar los medios ó los extremos, se llama *alternar* los términos. Si se ponen los medios por extremos y viceversa, se dice que es *invertir* la proporción; y, finalmente, si la segunda razón se escribe como primera y ésta por segunda denomínase *permutar* las razones.

nos medios, se tendría $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, y si en aquélla se alternan los extremos, resultaría $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; invirtiendo la proporción propuesta, se obtendría $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; y permutando las razones aparecería la proporción $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

122. *Una proporción subsiste aun cuando se multipliquen un término medio y un extremo por un mismo número.*

En efecto, de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce $\frac{am}{bm}=\frac{c}{d}$ y también $\frac{am}{b}=\frac{cm}{d}$.

Este teorema permite transformar una proporción que tenga términos fraccionarios, en otra cuyos términos sean enteros. Así, en la proporción $\frac{5}{8}:\frac{7}{12}::\frac{2}{3}:x$, si se multiplican los dos términos de la primera razón por 24, M. C. M. de sus denominadores, se tendría $15:14::\frac{2}{3}:x$, y multiplicando por 3 los antecedentes, resultaría $45:14::2:x$.

Corolario.—*Una proporción subsiste aun cuando un término medio y un extremo se dividan por un mismo número.* Apoyándose en esta proposición puede simplificarse una igualdad fraccionaria, dividiendo un medio y un extremo por el factor ó factores que les fueren comunes.

123. *En toda proporción la suma ó diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón, es al antecedente ó consecuente de la misma, como la suma ó diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón, es al antecedente ó consecuente que le corresponde.*

En efecto, si se añade ó quita en la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ á cada antecedente su consecuente respectivo, las dos razones aumentarán ó disminuirán en una unidad, y por consiguiente subsistirán las igualdades

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.\ (*)$$

Invirtiendo la proporción propuesta, se tiene $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, de donde se deducen las igualdades fraccionarias

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \text{ y } \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}.$$

124. *En toda proporción la suma de los dos términos de la primera razón es á su diferencia, como la suma de los términos de la segunda razón es á su diferencia.* De la igualdad fraccionaria $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce, por el teorema anterior, que $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, así como que $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$; alternando en una y otra proporción los medios, se tendría $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$ y $\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}$, y por lo tanto (119) se verificaría que $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$, de donde, alternando los medios, resultaría $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

125. *En toda proporción la suma de los antecedentes*

(*) Se supone que es $a>b$; pero si los antecedentes fueran en la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ menores que los respectivos consecuentes, entonces ésta se escribiría en la siguiente forma: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

es á la de los consecuentes como un antecedente es á su consecuente.

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; alternando los medios se tendrá $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; y aplicando ahora lo dicho (123), resultará $\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$; de donde volviendo á alternar los medios quedará, con la igualdad fraccionaria $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$, demostrado el teorema.

Corolario.—*En toda serie de razones iguales, la suma de antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente cualquiera es á su consecuente.*

Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ la serie de razones iguales que se propone; por el teorema que antecede se tendrá que $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$, de donde $\frac{a+c}{b+d}=\frac{e}{f}$, y de aquí, por idéntica consideración, se tendrá que $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}$, ó sea $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{g}{h}$; en cuya atención también se verificará que $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{g}{h}$, lo cual es lo que se deseaba probar.

PARTE SEGUNDA.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

LIBRO I.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

CAPÍTULO I.

Sistema de pesas y medidas.

GENERALIDADES.

126. Aun cuando la elección de unidad sea arbitrária según se dijo (1), sin embargo, cuando se trata de medir un conjunto de cosas que, bajo un concepto cualquiera, son iguales, entonces la misma naturaleza de éstas parece que señala en cada caso, cuál ha de ser la unidad que conviene adoptar; tal sucede cuando se desea apreciar una arboleda, una piara de vacas, etc., en donde un árbol, una vaca, etc., ó la reunión de un cierto número de estos objetos, serán respectivamente las unidades que procede considerar. No acontece lo mismo cuando se quiere medir el tamaño ó el peso de un cuerpo, la duración de un suceso, etc., supuesto que ya entonces no existe aquel género de limitación en la unidad que se fije; mas como quiera que el resultado que se obtiene al medir una cantidad, ha de ser conocido de los demás hombres, se

hace necesario convenir de antemano en cuáles han de ser las unidades que se han de adoptar en las relaciones comerciales que entre aquéllos medien. Por otra parte, conviene además, que la unidad de medida posea una magnitud apropiada al tamaño de la cantidad que trata de apreciarse: una magnitud pequeña procede que se compare con una unidad pequeña, al paso que una cantidad grande reclama para su apreciación una unidad crecida, pues de no ser así, esto es, si la unidad fuese muy chica y la cantidad medida considerable ó viceversa, siempre resultaría esta última expresada con muchas cifras, lo cual tras de dificultar el poderse formar una idea aproximada de su valor, exigiría en los cálculos en que aquélla interviniese, operaciones más laboriosas que las que se efectuarían, si la expresión de la cantidad á que se hace referencia hubiera poseído la debida sencillez. De aquí se desprende la conveniencia de que en cada clase de medidas haya diferentes unidades.

127. Las clases de unidades que se consideran en los usos más corrientes de la vida son: de *longitud,* de *superficie,* de *capacidad,* de *peso,* de *tiempo* y de *numerario.* Las unidades lineales, de superficie y de capacidad se llaman vulgarmente *medidas;* las de peso reciben la denominación de *pesas,* y las de numerario *monedas.*

La designación de las unidades adoptadas y el conocimiento de éstas y de su mutua dependencia, constituye lo que se llama *sistema de pesas y medidas.* Un sistema de pesas y medidas se dice que es *legal* en una nación, cuando se halla impuesto por su Gobierno.

ARTÍCULO I.

Sistema métrico.

128. Este sistema es el legal en España. Todas sus unidades se derivan de la unidad de longitud llamada METRO, por cuyo motivo es la fundamental del sistema. Los múltiplos de las unidades principales se designan anteponiendo al nombre de cada una de ellas las palabras griegas *deca, hecto, kilo* y *miria,* que en abreviatura se escriben *D., H., K.* y *M.,* y respectivamente significan diez, ciento, mil, diez mil: los divisores se expresan anteponiendo al nombre de la unidad principal las palabras de origen latino *deci, centi* y *mili,* que significan décima, centésima y milésima, y se expresan abreviadamente por medio de las letras *d., c.* y *m.*

129. UNIDADES LINEALES.—La unidad principal de éstas es el *metro,* que tiene por longitud la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París. Esta unidad se representa con la letra *m.*

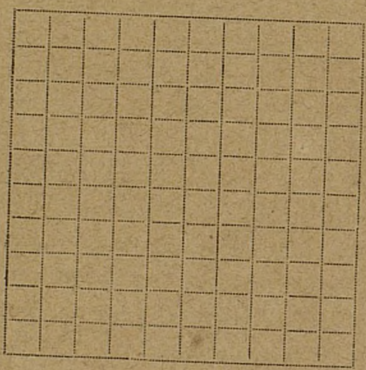
Las unidades lineales y sus relaciones con la principal son las siguientes:

Múltiplos	*Miriámetro* .	*(Mm.)* =	10000	metros.
	Kilómetro . .	*(Km.)* =	1000	»
	Hectómetro .	*(Hm.)* =	100	»
	Decámetro . .	*(Dm.)* =	10	»
Unidad principal.	METRO . . .	*(m.)* =	1	»
Divisores	*Decímetro* . .	*(dm.)* =	0,1	de metro.
	Centímetro . .	*(cm.)* =	0,01	»
	Milímetro . .	*(mm.)* =	0,001	»

En este cuadro se ve que una unidad cualquiera contiene diez de la inmediata inferior.

De lo dicho (126) se infiere que para medir grandes distancias se deberá tomar por unidad el kilómetro ó el miriámetro: en agrimensura se usan con frecuencia el decámetro ó el hectómetro: para las necesidades más frecuentes se emplean el metro y el decímetro: y, finalmente, con objeto de apreciar pequeñas longitudes se usa con preferencia del centímetro y del milímetro.

130. Unidades de superficie.—La unidad principal de superficie es el *metro cuadrado*, cuya figura está representada por cuatro lados iguales que se cortan dos á dos formando ángulos también iguales.



Si cada lado del cuadrado tuviese de longitud un metro y se trazaran rectas que uniesen los puntos de división que señalan en los lados opuestos los decímetros lineales, según se ve en la figura que aparece al margen, resultarán con tal motivo 10 fajas ó tiras, cada una de las cuales constará á su vez de diez decímetros cuadrados, y por consiguiente las 10 fajas contendrán un total de 100 decímetros cuadrados.

Del mismo modo pudiera hacerse ver que cada decímetro cuadrado contiene cien centímetros cuadrados, y, en general, se tendrá que *toda unidad de superficie, perteneciente al sistema métrico, contiene 100 de la inmediata inferior, ó sea un número de éstas igual á la segunda potencia del número de veces que la unidad lineal de la primera contiene á la unidad de longitud á que se refiere la segunda.*

En agrimensura se considera además otra unidad principal de superficie llamada *área*. Esta es un cuadrado cuyo lado es un decámetro, el cual se representa por medio de la letra *a*.

Según lo que se acaba de exponer, las unidades superficiales y sus relaciones con la principal, son las siguientes :

Múltiplos.	*Miriámetro cuadrado*	*(Mm.²)*	$=10000^2$	$=$	100000000	*m.²*
	Kilómetro cuadrado	*(Km.²)*	$=1000^2$	$=$	1000000	»
	Hectómetro cuadrado ó hectárea.	*(Hm.² ó Ha.)*	$=100^2$	$=$	10000	»
	Decámetro cuadrado ó área. . .	*(Dm.² ó a.)*	$=10^2$	$=$	100	»
Unidad principal: METRO CUADRADO Ó CENTIÁREA.		*(m. ó ca.)*	$=1^2$	$=$	1	»
Divisores. .	*Decímetro cuadrado*	*(dm.²)*	$=0{,}1^2$	$=$	$0{,}01$	de *m.²*
	Centímetro cuadrado	*(cm.²)*	$=0{,}01^2$	$=$	$0{,}0001$	»
	Milímetro cuadrado	*(mm.²)*	$=0{,}001^2$	$=$	$0{,}000001$	»

De dónde se deduce que no es lo mismo decir miriámetro, kilómetro, hectómetro y decámetro cuadrados, que decenas de millar, millares, centenas de millar y decenas de metro cuadrado; ni tampoco es lo mismo decímetro, centímetro y milímetro cuadrados, que la décima, centésima y milésima parte de un metro cuadrado.

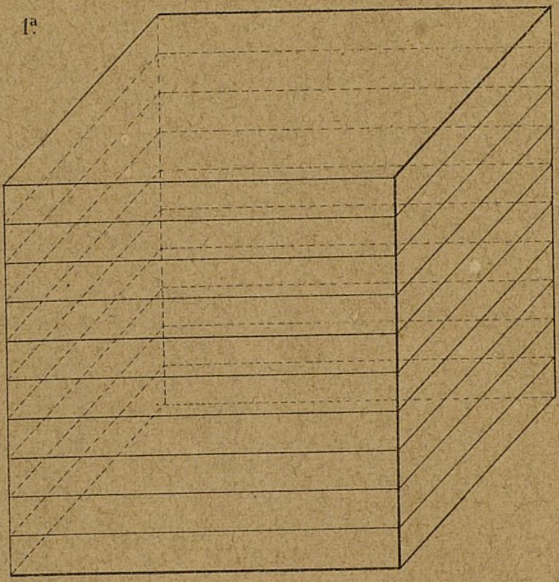
Obsérvese también que no aparecen en el cuadro que antecede ni la decárea ni la deciárea, porque como en el sistema métrico las unidades superficiales tienen la forma de cuadrados cuyos lados cuentan con un número exacto de metros, no es posible representar los 1000 *m.²* que posee la decárea ni tampoco los 10 *m.²* á que equivale la deciárea (48).

131. UNIDADES DE VOLUMEN.—La unidad principal es el *metro cúbico*.

Se llama *cubo* al cuerpo terminado por seis caras ó planos iguales, teniendo cada uno de éstos la forma de un cuadrado. La figura 1.ª representa un cubo, y si se supone en él que cada lado ó arista tiene un metro lineal, resultará lo que se llama un *metro cúbico.* Si se divide la altura de éste en 10 partes iguales y por los puntos de división se le corta por planos paralelos á las bases, quedará el metro cúbico dividido en diez capas ó porciones iguales, una de las cuales está representada en la figura 2.ª Si ahora se supone dividido el ancho aparente de esta capa ó tonga en diez partes también iguales y por los puntos de división se consideran planos paralelos al del dibujo, resultará dividida esta tonga en 10 barras iguales, cada una de las cuales tendrá un decímetro de alto, otro de ancho y un metro de longitud. Si el largo de una de estas barras ó listones se divide también en 10 partes iguales, según se ve en la figura 3.ª, y por los puntos de división se trazan planos que sean paralelos á los que forman sus extremidades, resultará descompuesta la mencionada barra en 10 cubos iguales al de la figura 4.ª, el cual será la representación de un decímetro cúbico, y en su consecuencia quedará demostrado que cada metro cúbico contiene un millar de decímetros cúbicos. Haciendo extensivo este razonamiento á otra unidad de volumen diferente, se vería que en el sistema métrico *una unidad cualquiera de volumen equivale á 1000 de la inmediata inferior,* ó sea *á un número de éstas igual á la tercera potencia del número de veces que la unidad lineal que determina la arista de la primera, contiene á la unidad de longitud igual á la arista de la segunda.*

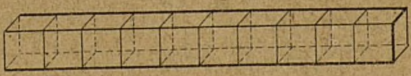
Las unidades cúbicas y sus relaciones con la principal son las siguientes :

1ª



2ª

3ª



4ª

Múltiplos.	*Miriámetro cúbico*.......	$(Mm.^3)=$	10000^3	$=$	1000000000000 $m.^3$
	Kilómetro cúbico........	$(Km.^3)=$	1000^3	$=$	1000000000 »
	Hectómetro cúbico.......	$(Hm.^3)=$	100^3	$=$	1000000 »
	Decámetro cúbico........	$(Dm.^3)=$	10^3	$=$	1000 »
Unidad principal: METRO CÚBICO.......		$(m.^3)=$	1^3	$=$	1 »
Divisores..	*Decímetro cúbico*........	$(dm.^3)=$	$0{,}1^3$	$=$	$0{,}001$ de $m.^3$
	Centímetro cúbico........	$(cm.^3)=$	$0{,}01^3$	$=$	$0{,}000001$ »
	Milímetro cúbico........	$(mm.^3)=$	$0{,}001^3$	$=$	$0{,}000000001$ »

Las unidades de volumen superiores al metro cúbico se usan en muy raras ocasiones. El metro cúbico es conocido con el nombre de *tonelada de arqueo*.

Obsérvese que miriámetro, kilómetro, hectómetro no representan respectivamente 10000, 1000, 100 y 10 metros cúbicos, así como tampoco decímetro, centímetro y milímetro significan 0,1, 0,01, 0,001 de metro cúbico.

Si se tratara de medir áridos y líquidos por medio de las unidades de volumen que acaban de mencionarse, resultaría que, como entre unas y otras existen tan notables diferencias en su capacidad, en la mayoría de los casos se carecería de una unidad adecuada para apreciar la parte del espacio que aquellos cuerpos ocupaban. Con el fin, pues, de hacer desaparecer tal inconveniente, se han formado las llamadas *unidades de capacidad,* que sirven para medir los líquidos, granos, objetos en polvo, etc.

132. La unidad principal de las medidas de esta índole es el LITRO, que consiste en una vasija cuya cabida es la de un decímetro cúbico. Se expresa con la letra *l.*

Las unidades de capacidad ó *cabida* y sus relaciones con la principal son las siguientes:

Múltiplos	*Kilólitro*. .	*(Kl.=m.³)*	=1000	*l.*
	Hectólitro.	*(Hl.)*	= 100	»
	Decálitro .	*(Dl.)*	= 10	»
Unidad principal.	Litro. . .	*(l.=dm.³)*	= 1	»
Divisores.	*Decílitro* .	*(dl.)*	= 0,1	»
	Centílitro.	*(cl.)*	= 0,01	»

El kilólitro y el hectólitro apenas se usan. El miriálitro y el mililitro no tienen existencia real en las colecciones de pesas y medidas que se construyen; así es que cuando se trata de medir cuerpos en polvo ó líquidos en cantidades pequeñísimas, como sucede en las platerías y farmacias, se aprecian aquéllos al peso.

133. Unidades de peso.—La unidad principal es el gramo, ó sea el peso en el vacío de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4° del termómetro centígrado. El *gramo*, la *tonelada* y el *quintal*, se expresan respectivamente por medio de las letras *g.*, *T.* y *Q.*

Las diversas unidades de peso y sus relaciones con la principal son las siguientes :

Múltiplos.	*Tonelada de peso.*	*(Tm.)*	= 1000000	*g.*
	Quintal métrico. .	*(Qm.)*	= 100000	»
	Kilogramo.	*(Kg.)*	= 1000	»
Unidad principal.	Gramo.	*(g.)*	= 1	»
Divisores.	*Decigramo*.	*(dg.)*	= 0,1	»
	Centigramo	*(cg.)*	= 0,01	»
	Miligramo.	*(mg.)*	= 0,001	»

La unidad usual es el kilogramo. El miriagramo, el hectogramo y el decagramo no se usan; se consigue expresar un número cualquiera de unidades del primero por decenas de kilogramo; si fueran del segundo por medio de su equivalente en centenas de gramo, y si del tercero sirviéndose de las decenas de gramo que le correspondieren.

De lo expuesto se deduce que una tonelada de peso equivale al de un kilólitro de agua que se encuentre en las condiciones necesarias para formar el peso gramo, ó sea al peso de una tonelada de arqueo ocupada por aquel mismo líquido. También se infiere de lo dicho que el kilogramo es el peso en el vacío de un litro de agua destilada, y á la temperatura de 4º centesimales.

134. Observación.—Las ventajas del sistema métrico sobre cualquiera otro de los usados, son evidentes: 1.º, porque sus unidades, siguiendo, como se ha visto, la misma ley en su formación que las de los diversos órdenes en la numeración décupla, hace que se faciliten la expresión y el cálculo de los números concretos que se consideren. 2.º, porque es entre todos los sistemas de pesas y medidas, el que se halla adoptado por mayor número de naciones, contribuyendo esta circunstancia á que se extienda cada día más su conocimiento y á que se faciliten y estrechen las relaciones mercantiles que entre aquéllas existen.

ARTÍCULO II.

Unidades de numerario y de tiempo.

135. La unidad principal de numerario es la peseta, moneda efectiva de plata cuyo peso es igual á 5 gramos y 23 milímetros su diámetro.

Las unidades legales puestas en circulación, se hallan incluidas en el siguiente cuadro:

MONEDAS DE		
ORO.	PLATA.	BRONCE.
25 pesetas.	5 pesetas.	0,10 de peseta.
20 »	2 »	0,05 »
10 »	1 »	0,02 »
5 »	0,50 »	0,01 »

La moneda de 5 pesetas recibe el nombre de *duro* ó *peso fuerte;* y toda aquella que sea de mayor valor que éste se llama *doblón.*

Los metales de que se forman las unidades de numerario, no son sino mezclas ó *aleaciones* de oro ó plata con cobre, ó de este metal con estaño y zinc. Se llama *fino* en las monedas de oro y plata al metal de más valor que forma parte de la aleación. La *ley* de la moneda está determinada por la cantidad de fino contenida en mil unidades de peso de la respectiva aleación.

El Decreto de 19 de Octubre de 1868 y Real orden de 21 de Marzo de 1871, señalan la proporción en que han de mezclarse los metales para la acuñación del numerario; mas como quiera que no es fácil que éste posea siempre el peso y ley marcados en las citadas disposiciones superiores, se concede tanto para el uno como para la otra un *permiso* ó *tolerancia* que también se fija en aquellos decretos.

Así, por ejemplo, tratándose de la peseta, se vería que está compuesta de 835 partes en peso de plata pura y 165 de cobre; el permiso en su peso, sea por exceso ó *fuerte,* ó sea por defecto ó *feble,* se estima en 5 milésimas de gramo, y la tolerancia, en su ley, en 3 milésimas.

136. Unidades de tiempo.—Las principales son el *día* y el *año.* El día es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por un mismo meridiano. El año es el tiempo que media entre dos pasos consecutivos del Sol por el Equinoccio, y equivale á 365,24222 días; mas para los usos corrientes se supone que el año consta de 365 días (año común), y cada cuatro de éstos se aumenta en un día, componiéndose en tal caso de 366 (año bisiesto) (*).

(*) Como que cada año bisiesto tiene un error por exceso de 0,03112 de día, se infiere que al cabo de 100 bisiestos, ó sea de 400 años, aquel error ascenderá á 3 días casi cabales; de donde se deduce que cada 400 años habrá que rebajar 3 bisiestos. Así se explica que, á pesar de ser bisiesto el año cuyo número de orden compone un múltiplo de 4, se exceptúen de esta regla aquellos que siendo seculares, no fueren divisibles por 400.

Las unidades de tiempo son las siguientes:

El siglo.	=100 años.
El año	= 12 meses.
La semana. . . .	= 7 días.
El día.	= 24 horas.
La hora.	= 60 minutos.
El minuto	= 60 segundos.

Cuando no se requiera una exactitud rigurosa, se admite que el mes consta de 30 días, y por consiguiente el año de 360.

Los meses de Abril, Junio, Septiembre y Noviembre, constan cada uno de 30 días; Febrero tiene 28 en los años comunes y 29 en los bisiestos, y los siete meses restantes son de 31.

Entre los múltiplos del mes pudieran citarse el *semestre,* ó sea el período de 6 meses; el *cuatrimestre,* de 4, y el *trimestre,* de 3.

Además del siglo existen otros múltiplos del año, tales como el *decenio,* 10 años; el *lustro,* 5; el *trienio,* 3, y el *bienio,* 2 (*).

(*) Reconocidas por todos las ventajas del sistema métrico de pesas y medidas sobre el que antiguamente regía, y abolido éste de una manera definitiva desde 1.º de Julio de 1893 (Real Decreto de 10 de Mayo de 1892), se ha omitido en el presente tratado todo cuanto pudiera hacer referencia al sistema invalidado.

CAPÍTULO II.

Transformaciones de los números concretos.

DEFINICIONES.

137. Cuando se desea apreciar una cantidad con una de las unidades superiores del sistema de medidas que se considere, puede ocurrir que la mencionada unidad no se halle contenida exactamente en aquella cantidad, en cuyo caso el resto que aparezca se podrá estimar á su vez en unidades inferiores, y continuando en consideraciones de esta índole, se tendría como consecuencia *un conjunto* de números concretos de la misma naturaleza, pero referidos á distintas unidades, constituyendo lo que se llama *número complejo*. Ejemplo: 3 doblones, 1 duro y 4 pesetas.

Por oposición, se llama *número incomplejo* á un todo concreto referido á una sola unidad; como acontece con 8 litros, 17 horas, etc.

Cuando se tienen dos ó más números concretos, éstos pueden ser *homogéneos* ó *heterogéneos,* según que sean ó nó de la misma naturaleza.

En atención á lo que se acaba de decir, los números complejos se expresan ordenándolos según la magnitud que, de mayor á menor, tienen sus respectivas unidades.

El cálculo de los números, tanto complejos como incomplejos, exije que se halle precedido de la resolución del siguiente problema: *Dado un número concreto, transformarle en incomplejo de un determinado orden.*

Problema es una cuestión en la que se propone enconrar el valor de una ó varias cantidades desconocidas ó *incógnitas* que se hallan ligadas á otras conocidas ó *datos.* RESOLVER un problema es determinar los valores de la incógnita ó incógnitas.

ARTÍCULO I.

Convertir un número concreto en incomplejo de una cualquiera de sus unidades.

138. PRIMER PROBLEMA.—*Transformar un incomplejo en otro también incomplejo.*

En la resolución de este problema pueden ocurrir dos casos, según que el incomplejo obtenido sea ó nó de orden inferior.

PRIMER CASO.—Expresar 17 horas en incomplejo de segundo.

Una hora equivale á 3600 segundos; luego las 17 horas contendrán 3600 segundos $\times 17 = 61200$ segundos.

Esto manifiesta que *para transformar un incomplejo en otro expresado en unidades de orden inferior, se multiplica el número propuesto, considerado como abstracto, por el número de veces que su unidad contiene á aquella en que se quiere expresar.*

Aplicando esta regla al caso en que los números propuestos sean métricos, se hace patente la sencillez con que se obtiene el resultado.

EJEMPLO 1.º—Expresar 87 kilogramos en decigramos:

Como 1 Kg.=10000 dg., los 87 Kg.$=87\times 10000$ dg.$=$ $=870000$ dg.

EJEMPLO 2.º—Expresar 6 decámetros cuadrados en centímetros cuadrados:

1 Dm.^{2}=1000000 cm.^{2}, luego los 6 Dm.^{2}=6000000 cm.^{2}

139. Segundo caso.—Expresar 7928 pliegos de papel en incomplejo de resma (*):

Como una resma contiene 500 pliegos, un pliego equivaldrá á $\frac{1}{500}$ de resma, y por consiguiente 7928 pliegos supondrán $\frac{1}{500}$ de resma $\times 7928 = \frac{7928}{500}$ de resma.

Según esto, *para reducir un incomplejo á otro expresado en unidades de mayor magnitud, se dividirá el incomplejo propuesto, como si fuera abstracto, por el número de veces que su unidad esté contenida en aquella á que se desea referir el resultado.*

Aplicando esta regla al caso de los números métricos, se tendrá:

Ejemplo 1.º—Expresar 578 litros en hectólitros:

1 litro$=\frac{1}{100}$ Hl., luego $578 \times \frac{1}{100}$ Hl.$=5{,}78$ Hl.

Ejemplo 2.º—Expresar 7893456 centímetros cúbicos en metros cúbicos:

1 cm.$^3 = \frac{1}{1000000}$ de m.^{3}, luego 7893456 cm.$^3 =$ $=7{,}893456$ m.^{3}

140. Segundo problema.— *Transformar un número complejo en incomplejo.*

También al resolver esta cuestión se pueden presentar dos casos, según que el incomplejo del resultado sea ó nó de orden inferior.

Primer caso.—*Expresar un complejo en incomplejo de orden inferior.* Como quiera que, todo número complejo

(*) En la venta del papel se suelen emplear las siguientes unidades: la *bala* equivale á 32 *resmas;* la resma á 20 *manos;* la mano á 5 *cuadernillos;* el cuadernillo á 5 *pliegos,* y el pliego á 4 *cuartillas.*

consta de varios incomplejos en los cuales las respectivas unidades tienen magnitud diferente, se comprende que aquél equivaldrá á la suma de los incomplejos que resulten al referir cada uno de sus órdenes al inferior. En la práctica se facilita la obtención del resultado, comenzando por expresar las unidades de orden superior del número propuesto en las del inmediato menor, y se le añaden al producto las unidades que hubiere de este orden en el complejo que se considera; la suma así obtenida se reduce al orden inmediato inferior, y al resultado se le agregarán las unidades que hubiere de este orden en el número propuesto, y así se continuará procediendo del mismo modo hasta llegar á las unidades previamente designadas.

Según esto, para expresar 4 años, 25 días, 16 horas y 19 minutos en incomplejo de minuto, se haría uso del procedimiento que se acaba de exponer, y dispondríase la operación como sigue:

4	años.
365	días.
1460	
25	
1485	días.
24	horas.
5940	
2970	
16	
35656	horas.
60	minutos.
2139360	
19	
2139379	minutos.

Haciendo aplicación de este procedimiento á los números métricos, se tendrá:

Ejemplo 1.º—Reducir 7 hectómetros, 3 metros, 8 decímetros y 9 milímetros á incomplejo de milímetro:

El resultado se ve desde luego que es igual á 703809 mm.

Ejemplo 2.º—Reducir 7 Hm.^{2}, 3 m.^{2}, 8 dm.^{2} y 9 mm.^{2} á incomplejo de mm.^{2}:

El resultado sería 70003080009 mm.^{2}

141. Segundo caso.—*Transformar un complejo en incomplejo de un orden diferente del inferior.* Para resolver este caso, bastará expresar el complejo propuesto en incomplejo de orden inferior, y luego el resultado obtenido se transformará en incomplejo del orden que se desee (139). En la práctica se facilita esta operación *reduciendo los números de órdenes superiores á incomplejo del que se haya fijado en el enunciado de la cuestión, y al resultado se le añaden las unidades que del mismo orden existan en el complejo propuesto; luego se reducen á incomplejo del último orden aquellos que sean inferiores al fijado, y á incomplejo de éste el número que se acaba de hallar, y finalmente, se suman los dos resultados obtenidos.*

Ejemplo.—Transformar 9 resmas, 15 manos, 3 cuadernillos, 4 pliegos y 1 cuartilla á incomplejo de cuadernillo:

9	4
20 manos.	4 cuartillas.
180	16
15	1
195	
5 cuadernillos.	17 cuartillas$=\frac{17}{20}$ de cuadernillo.
975	
3	

Resultado: 978 cuadernillos y $\frac{17}{20}$ de cuadernillo.

En la operación que aparece á la izquierda, se reducen las 9 resmas, 15 manos y 3 cuadernillos á incomplejo de cuadernillo, y por la de la derecha se tienen expresados, también en cuadernillos, los 4 pliegos y 1 cuartilla.

Haciendo aplicación de lo dicho á los números métricos, se tendrá desde luego que el número 7 *Km.*, 6 *Dm.*, 7 *dm.*, 8 *cm.* y 3 *mm.*, expresado en *m.*, equivale á 7060,583. Así como también 23 $Hm.^2$, 8 $m.^2$, 76 $cm.^2$ y 81 *mm.* equivale á 230008,007681 $m.^2$

ARTÍCULO II.

Convertir un número incomplejo en complejo equivalente.

142. Este problema, inverso del anterior, permite la comprobación de éste; y, cuando acontece que los órdenes de unidades que corresponden al concreto que se considera no están sujetos á ley decimal, interesa muy especialmente su resolución, supuesto que así se puede formar, por la sola expresión de aquel número, una idea más cabal de su verdadero valor.

PRIMER PROBLEMA.—*Transformar un incomplejo de orden inferior en complejo.* Desde luego puede asegurarse que el incomplejo que se considere en este problema ha de poséer más unidades que las necesarias para componer una del orden inmediato superior; de modo que dividiendo el número propuesto por las veces que su unidad se encuentre contenida en la inmediata superior, se tendrá en el resto el número de orden inferior que ha de tener el complejo que se pide. El cociente entero obtenido se reduce al orden inmediato superior, y así se continúa procediendo de un modo análogo hasta llegar al cociente expresado por las unidades de mayor tamaño, en cuyo caso este último cociente y todos los residuos que sucesivamente han sido hallados, compondrán el complejo pedido.

Ejemplo.—Expresar 2139379 minutos en complejo equivalente:

Se dispondría la operación de la siguiente manera:

2139379 minutos	60		
·339	35656 horas	24	
·393	116	1485 días	365
·337	·205	· ·25 días	4 años.
·379	·136		
·19 minutos	·16 horas		

Resultado: 4 años, 25 días, 16 horas y 19 minutos.

Aplicando á los números métricos lo que se acaba de decir, se tendrá que 2789345 mm.=2 Km., 7 Hm., 8 Dm., 9 m., 3 dm., 4 cm. y 5 mm.

Así como también 2789345 mm.^{2}=2 m.^{2}, 78 dm.^{2}, 93 cm.^{2} y 45 mm.^{2}

143. Segundo problema.—*Transformar un incomplejo de unidades de orden superior en complejo.*

Como quiera que el incomplejo que se propone en este problema, ha de tener la forma fraccionaria, *se dividirá el numerador de este quebrado por su denominador, y el cociente obtenido será el número de unidades del mismo orden que aquel á que se refiere el quebrado que se considera; se multiplica después el resto por las veces que una unidad de aquel orden contiene á la del inmediato inferior, el producto que resulta se divide por el mismo divisor, y el cociente obtenido expresará las unidades del citado orden inmediato inferior; y así se deberá continuar hasta llegar á un cociente exacto ó á las unidades de orden inferior.*

Ejemplo.—Expresar $\frac{59}{7}$ de doblón isabelino en complejo:

$\frac{59}{7}$ de doblón. .$=8$ y $\frac{3}{7}$ de doblón.

$\frac{3}{7}$ de doblón. .$=\frac{3\times 5}{7}$ de duro$=2$ y $\frac{1}{7}$ de duro.

$\frac{1}{7}$ de duro. . .$=\frac{1\times 5}{7}=\frac{5}{7}$ de peseta.

$\frac{5}{7}$ de peseta. .$=\frac{5\times 100}{7}=71$ y $\frac{3}{7}$ de céntimo de peseta.

Resultado: 8 doblones, 2 duros y 71 céntimos de peseta, con un error por defecto igual á $\frac{3}{7}$ de céntimo de peseta.

Si se observa que en todas las divisiones efectuadas se verifica que el divisor es el mismo denominador de la fracción propuesta, y los numeradores 3, 1, 5 y 3 de los quebrados que resultan en la operación, son los residuos de las divisiones que ha habido necesidad de efectuar, se explicará la conveniencia de disponer el cálculo en la siguiente forma:

Reducir á complejo $\frac{59}{7}$ de kilogramo:

59 Kg.	7
·30 Hg.	8 Kg., 4 Hg., 2 Dg., 8 g., 5 dg., 7 cg., 1 mg.
·20 Dg.	
·60 g.	
·40 dg.	
·50 cg.	
·10 mg.	
3	

Al resolver los ejemplos que se refieren al segundo problema, se consigue lo que se llama *valuar un quebrado*.

Conviene fijarse en la analogía que existe entre la manera de conducir esta operación, y la empleada (108) al convertir un quebrado ordinario en decimal.

CAPÍTULO III.

Operaciones de los números concretos.

GENERALIDADES.

144. En el cálculo de los concretos hay que tener en cuenta, no sólo el número formado por el conjunto de sus unidades, sino también la naturaleza de éstas. Bajo el primer punto de vista, conviene advertir que aquéllos se hallan sometidos á las mismas reglas que los abstractos; y, por lo que se refiere al segundo, hay que proceder de modo que el resultado exprese unidades de la naturaleza y orden que en cada problema corresponda. En esta consideración, aun cuando las definiciones y principios fundamentales en que se apoyan las operaciones que se practican con los números concretos, son esencialmente iguales á los que se aplicaban en el cálculo de los abstractos, hay necesidad, al ocuparse de aquellos números, de investigar en cada caso cuál es la operación que debe efectuarse con los datos para venir en conocimiento del valor y naturaleza del resultado; pues así como se puede ejecutar con dos números abstractos cualesquiera, la operación que se desee, no sucede lo mismo con los concretos, pues es evidente que sería impracticable la idea de sumar ó restar números de diversa naturaleza, así como carecería de sentido la multiplicación ó división de dos concretos extraños á toda cuestión práctica que pudiera motivar la operación.

Con el fin de exponer con claridad y sencillez los procedimientos que permiten obtener, con la debida exactitud y brevedad, el valor de los resultados en cada una de las cuatro operaciones fundamentales que se efectúan con los números concretos, conviene proceder separadamente en el estudio de cada una de éstas.

ARTÍCULO I.

Adición.

145. Para que varios números concretos puedan expresarse en uno solo, es condición esencial que aquéllos sean homogéneos. Es evidente también que si los sumandos fueran incomplejos y estuviesen referidos á un mismo orden de unidades, se efectuaría la suma como si fueran abstractos, y el resultado debería expresarse en unidades de igual orden que el que correspondiese á aquellos elementos de la suma.

Cuando los incomplejos propuestos no estuvieran expresados en unidades del mismo orden, se transformarían todos ellos en otros referidos á idéntico orden, quedando entonces este caso reducido al anterior.

Ejemplo 1.º—7 doblones+23 duros+54 pesetas+748 céntimos de peseta=175 pesetas+115 pesetas+54 pesetas+7,48 de peseta=351 pesetas y 48 céntimos de peseta.

Ejemplo 2.º—78 Hl.+49 Dl.+8 dl.+256 cl.=7800 l. +490 l.+0,8 l.+2,56 l.=8293,36 l.

146. Para sumar varios complejos *se suman las unidades del mismo orden de todos los sumandos, empezando por las del inferior; y si en alguna de las sumas parciales resultasen unidades del orden inmediato superior, se agre-*

garán éstas á la suma siguiente, escribiendo en la suma total las unidades restantes.

Ejemplo.—Sumar 8 semanas, 3 días, 29 minutos y 36 segundos, con 5 días, 7 horas, 44 minutos y 19 segundos, y con 2 semanas, 1 día, 10 horas y 28 segundos. Se dispone la operación en la forma siguiente:

	8 semanas,	3 días,	»	29 minutos,	36 segundos.
	»	5	7 horas,	44	19
	2	1	10	»	28
Resultando	11 semanas,	2 días,	18 horas,	14 minutos,	23 segundos.

También pudiera efectuarse esta suma convirtiendo los sumandos en incomplejos del mismo orden, y entonces, este caso quedaba reducido al anterior; pero es preferible practicar la operación según acaba de hacerse, en vista de la mayor facilidad con que se obtiene el resultado.

Obsérvese que cuando son métricos los complejos que se desea sumar, es indiferente seguir uno ú otro procedimiento, dada la prontitud con que aquéllos se reducen á incomplejo de un orden cualquiera.

ARTÍCULO II.

Sustracción.

147. De la definición general de la sustracción y después de lo dicho en el artículo anterior, se infiere que el minuendo y sustraendo han de ser homogéneos. Si ambos términos de la sustracción estuviesen expresados en incomplejos del mismo orden, es evidente que entonces se podría efectuar la resta del mismo modo que se hacía cuando los números eran abstractos, debiendo ser en tal caso la diferencia de igual orden que el que corresponde á los mencionados términos.

Si los incomplejos se refiriesen á unidades de diversa magnitud, se convertirían en otros de órdenes idénticos y ya entonces este caso se reduciría al anterior.

Ejemplo 1.º—29 resmas—147 manos=580 manos—147 manos=433 manos.

Ejemplo 2.º—27 Km.—695 m.=27000 m.—695 m.= =26305 m.

148. La sustracción de los números complejos se efectúa, *restando separadamente de las unidades de cada orden del minuendo las del mismo orden del sustraendo, empezando por las del inferior. Si algún sustraendo parcial fuese mayor que el minuendo correspondiente, se agrega á éste una unidad del orden inmediato superior y se considera en la sustracción siguiente al sustraendo con una unidad más.*

Ejemplo.—Restar 1840 años, 5 meses, 25 días, 12 horas y 17 minutos, de 1894 años, 9 meses, 2 días, 10 horas y 45 minutos.

Se dispone la operación del modo siguiente:

	1894 años,	9 meses,	2 días,	10 horas,	45 minutos.
	1840	5	25	12	17
Resultado:	54 años,	3 meses,	6 días,	22 horas,	28 minutos.

Pudiera también efectuarse la sustracción de los números complejos, transformándolos en incomplejos del mismo orden, pero entonces la operación sería mas laboriosa. Sin embargo, cuando los datos son métricos es indiferente proceder de uno ú otro modo.

ARTÍCULO III.

Multiplicación.

149. El problema que generalmente se resuelve en la multiplicación de concretos, consiste en *hallar el valor de* *varias unidades enteras ó fraccionarias de una misma naturaleza, conocido que sea el de una de ellas.* Como que en toda multiplicación el producto y el multiplicando han de estar expresados por unidades del mismo orden (13), de aquí se infiere que de los dos factores propuestos en la cuestión, el multiplicando será el valor conocido de la unidad, y el otro factor ó sea el homogéneo con esa unidad será el multiplicador. La mencionada unidad entera á que se refiere el multiplicando recibe el nombre de *unidad principal.*

Para poder efectuar la comparación del multiplicador con la unidad principal, habrá que expresar el valor de aquél en unidades del mismo orden que al que se refiere ésta, y en su consecuencia por ese valor considerado como abstracto, será por lo que habrá que multiplicar al multiplicando para obtener el producto que se busca.

150. Cuando el multiplicando y multiplicador sean homogéneos, lo cual sucede con escasa frecuencia, se puede tomar cualquiera de ellos por multiplicando, debiendo reducir, según se acaba de manifestar, el multiplicador al orden de la unidad principal y considerarlo como abstracto al efectuar la multiplicación.

Al determinar el producto de complejos conviene distinguir los siguientes casos: 1.º, que sólo el multiplicando sea complejo; 2.º, que sólo el multiplicador sea complejo; 3.º, que ambos sean números complejos.

151. Primer caso.—Para multiplicar un complejo por un incomplejo, *se multiplican las unidades de cada orden del multiplicando por el multiplicador, y si algún producto parcial contuviera unidades del orden inmediato superior, se añadirán éstas al producto parcial del citado orden.*

Ejemplo.—Un kilómetro de cable cuesta 6 doblones, 3 duros, 4 pesetas y 28 céntimos de peseta. ¿Cuánto importarán 57 kilómetros?

La cuestión queda reducida á hacer 57 veces mayor el complejo 6 doblones, 3 duros, 4 pesetas y 28 céntimos. Luego

	6 doblones,	3 duros,	4 pesetas,	28 céntimos.
				57
Producto . .	342	171	228	1596
Producto reducido. . .	385 doblones,	4 duros,	3 pesetas,	96 céntimos.

En el ejemplo que antecede, pudiera haberse efectuado el cálculo, reduciendo el multiplicando á incomplejo de un orden cualquiera y efectuando después la multiplicación de ambos factores.

Se ha supuesto en el precitado ejemplo que el multiplicador se hallaba referido á unidades del mismo orden que la principal; pero si esto no sucediese, se expresaría el multiplicador en unidades del mencionado orden.

152. Segundo caso.—Para multiplicar un número incomplejo por otro que sea complejo, *se reduce éste al orden indicado por la unidad principal, después se multiplican como abstractos, debiéndose expresar el resultado obtenido en el orden á que pertenece el incomplejo que hace veces de multiplicando.*

Ejemplo.—Una locomotora recorre por término medio 27 kilómetros en cada hora de servicio. ¿Cuánto recorrerá en 2 días, 13 horas y 49 minutos?

Reduciendo el multiplicador á incomplejo de hora, se vería que equivale á 61 horas y $\frac{49}{60}$ de hora. Luego el trayecto recorrido sería 27 Km.$\times\frac{3709}{60}$=1669,05 Km.

153. Tercer caso.—Para multiplicar un complejo por otro, *se convierte el multiplicador en incomplejo del or-*

den expresado por la unidad principal, con cuyo motivo este caso ya queda reducido al 1.º

Ejemplo.—Una resma de papel importa 2 duros, 3 pesetas y 45 céntimos. ¿Cuánto costarán 8 balas, 19 resmas, 17 manos y 3 cuadernillos?

Convirtiendo el multiplicando en incomplejo de peseta, se ve que equivale á 13,45 de peseta, y transformando el multiplicador en incomplejo de la unidad principal, quedará reducida la cuestión á multiplicar 13,45 de peseta por 275,88 de resma, lo que da por resultado final 3710,586 de peseta, ó sean 742 duros y 58,6 céntimos de peseta.

154. Estos casos se pueden también resolver por otro método, conocido con el nombre de *partes alícuotas,* según puede verse á continuación:

1.º Una resma de papel vale 2 duros, 3 pesetas y 45 céntimos. ¿Cuánto importarán 275 resmas?

Se comenzará por multiplicar las unidades de orden superior del multiplicando por el multiplicador; luego se deberán descomponer los diversos órdenes inferiores de que consta el primero, en partes alícuotas de la unidad superior inmediata, y se sumarán después los resultados correspondientes á cada una de las mencionadas partes. Se dispondría la operación en la forma siguiente:

		2 duros,	3 pesetas,	45 céntimos.
		275		
		550 duros,	0 pesetas,	0 céntimos.
Por 1	peseta.	55 »	0 »	0 »
Por 1	»	55 »	0 »	0 »
Por 1	»	55 »	0 »	0 »
Por 0,25	»	13 »	3 »	75 »
Por 0,20	»	11 »	0 »	0 »
Resultado		739 duros,	3 pesetas,	75 céntimos.

Es evidente que 2 duros por 275 es igual á 550 duros;

ahora bien, para multiplicar 3 pesetas por 275, se diría: si 5 pesetas, ó sea un duro, al multiplicarlas por 275 da de producto 275 duros, á una peseta corresponderá la quinta parte, ó sea 55 duros. Repitiendo dos veces más este resultado, se tendrá escrito el valor que corresponde á 3 pesetas. Para determinar el producto de 45 céntimos por el multiplicador, se descompondrá este número en 25 céntimos más 20 céntimos, ambos divisores exactos de los 100 céntimos que una peseta contiene.

155. 2.° Una resma de papel cuesta 2 duros, 3 pesetas y 45 céntimos. ¿Cuánto importarán 8 balas, 19 resmas, 17 manos y 3 cuadernillos?

Cuando acontece que el multiplicador es complejo y contiene, como sucede en el ejemplo propuesto, órdenes inferiores á la unidad principal, se deberán descomponer aquéllos en partes alícuotas de ésta, ó unas de otras ya conocidas, y luego se tomarán del multiplicando, ó de los productos que resulten, las porciones que se hallen indicadas por las antedichas partes alícuotas. En el problema que se trata de resolver se tendría:

	2 duros,	3 pesetas,	45 céntimos.
	275 resmas,	17 manos,	3 cuadernillos.
	739 duros,	3 pesetas,	75 céntimos.
Por 10 manos. . . .	1 »	1 »	72,5 »
Por 5 »	0 »	3 »	36,25 »
Por 2 »	0 »	1 »	34,5 »
Por 1 cuadernillo.	0 »	0 »	13,45 »
Por 1 » .	0 »	0 »	13,45 »
Por 1 » .	0 »	0 »	13,45 »
Producto reducido.	742 duros,	0 pesetas,	58,6 céntimos.

Como que por el ejemplo anterior se conoce cuál es el valor de 275 resmas de papel, se tendrá el número 739 duros, 3 pesetas y 75 céntimos como uno de los sumandos que han de formar el resultado. Para determinar el que corresponde á 17 manos, se descompondrá este número en 10 más 5 más 2, todas partes alícuotas de 20; y se hallarán sus valores apreciando respectivamente lo que corresponde á media resma, á la mitad de 10 manos y á la quinta parte de éstas. Para averiguar el importe de 3 cuadernillos, se hallaría lo que corresponde á uno, y el número obtenido que es 13,45 céntimos de peseta, se repetiría como sumando dos veces más. Reuniendo el importe de las diferentes partes de que se compone el multiplicador, se tendrá la totalidad del producto, ó sea el resultado pedido.

Ejemplo.—Un quintal métrico de coke cuesta pesetas 1,60. ¿Cuánto importarán 7 toneladas, 2 quintales y 40 kilogramos?

Reduciendo el multiplicador á incomplejo de quintal, se tendrá que el valor del quintal será igual á 1,60 pesetas$\times$72,40=115,84 pesetas.

Resolviendo este mismo problema por el método de partes alícuotas, se dispondría la operación en la siguiente forma :

1 peseta y 60 céntimos.
7 toneladas, 2 quintales y 40 kilogramos.

Producto de 1 peseta por 72. . .	72 pesetas	0 céntimos.
» » 0,50 » » ». . .	36 »	0 »
» » 0,10 » » ». . .	7 »	20 »
Valor de 20 kilogramos.	0 »	32 »
» » » »	0 »	32 »
Resultado. . . .	115 pesetas	84 céntimos.

Obsérvese que los tres primeros sumandos componen el valor de 72 quintales, y los dos últimos el que corresponde á 40 kilogramos.

ARTÍCULO IV.

División.

156. En esta operación conviene distinguir dos casos: 1.º, que el dividendo y el divisor sean heterogéneos; 2.º, que ambos sean homogéneos.

PRIMER CASO.—Teniendo en cuenta que la división es la operación contraria de la multiplicación (22), se verificará que cuando el cociente haga las veces de multiplicando, la relación entre el dividendo y el cociente será entonces la misma que la del divisor y la unidad. En esta atención, el divisor y la unidad deberán ser, no sólo de la misma naturaleza, sino hasta del mismo orden, así como también deberán ser homogéneos el cociente y el dividendo, pues si éstos fueran heterogéneos su comparación sería imposible.

Por el problema que generalmente se resuelve, cuando el dividendo y el divisor son heterogéneos, *se conoce el valor de un concreto entero ó fraccionario y se desea averiguar el de una unidad homogénea con él, la cual recibe el nombre de unidad principal.*

Con el fin, pues, de determinar la relación que existe entre el divisor y la unidad principal, se deberá reducir aquél al orden expresado por ésta, si es que ya no lo estaba, y con tal motivo se tendrá la relación buscada que aparecerá expresada por el divisor considerado como abstracto.

157. Según esto, *para dividir dos concretos, cuando el dividendo y el divisor sean heterogéneos, se reducirá el dividendo á incomplejo de cualquiera de sus órdenes, y el divisor al mismo que la unidad principal; se efectúa la división*

de ambos números, y el cociente obtenido será de igual orden que el del dividendo.

Ejemplo 1.º—Habiendo costado 8 balas, 19 resmas, 17 manos y 3 cuadernillos de papel la cantidad de 742 duros y 58,6 céntimos de peseta, ¿cuánto importará la resma?

La naturaleza del cociente manifiesta que en este problema el dividendo es 742 duros y 58,6 céntimos de peseta. Reduciendo éste á incomplejo de orden inferior, á fin de evitar que el dividendo tenga denominador alguno, se deducirá el número 371058,6 céntimos de peseta, el cual se deberá dividir por el divisor 275,88 expresado en el mismo orden que la unidad principal, que, en el presente caso, es la resma. Efectuada la división, resulta que el cociente será igual á 2 duros, 3 pesetas y 45 céntimos.

Ejemplo 2.º—Con 115,84 pesetas se han comprado 7 toneladas, 2 quintales y 40 kilogramos de coke. ¿Cuánto costará el quintal?

Reduciendo el divisor á incomplejo de quintal, el valor de éste aparecerá dado por 115,84:72,40=115,84 pesetas:72,40=1,60 pesetas.

158. Cuando ocurra que el divisor sea entero, es entonces preferible dejar el dividendo en forma compleja y efectuar separadamente las divisiones de cada orden del dividendo por el divisor, cuidando siempre de transformar cada resto al orden inmediato inferior, para que, añadiéndole las unidades del mismo que contuviere el dividendo propuesto, se forme el dividendo parcial respectivo.

Ejemplo 3.º—El importe de 275 resmas de papel ha sido 739 duros, 3 pesetas y 75 céntimos. ¿Cuánto valdrá la resma?

Se dispondrá la operación del modo siguiente:

739 duros, 3 pesetas y 75 céntimos.	275
189	2 duros, 3 ptas. y 45 cénts.
5	
948 pesetas.	
12375 céntimos.	
1375	
0	

159. Segundo caso.—El cociente deberá hacer aquí las veces de multiplicador y se verificará que el dividendo tendrá que ser respecto del divisor lo que el cociente sea respecto de la unidad principal. De modo que siendo el dividendo y el divisor de la misma naturaleza, el cociente y aquella unidad deberán ser de igual orden.

Para conocer la relación que existe entre el dividendo y el divisor, habrá que reducir ambos á unidades de idéntico orden, y entonces la relación entre estos dos números será la misma que la del cociente y la unidad principal ó sea el cociente buscado.

Según esto, para dividir dos números concretos cuando el dividendo y el divisor son homogéneos, *se reducen uno y otro á incomplejos del mismo orden, y se efectúa la división como si fueran abstractos, siendo el cociente que resulte de igual orden que el de la unidad principal.*

El problema que se resuelve en este caso, consiste en *hallar las veces que un número concreto contiene á otro de su misma naturaleza.*

Ejemplo.—Con 2 duros, 3 pesetas y 45 céntimos se ha comprado una resma de papel; ¿qué cantidad de papel de la misma clase podrá adquirirse con 742 duros y 58,6 céntimos de peseta?

Reduciendo el dividendo y el divisor á incomplejos de céntimo de peseta, se tendrán respectivamente 371058,6 céntimos y 1345 céntimos; luego la expresión del cociente en incomplejo de resma, sería : $\frac{371058{,}6}{1345}$; valuando este quebrado según se dijo (143), se tendrá que el cociente buscado será igual á 275 resmas, 17 manos y 3 cuadernillos.

Ejemplo 2.º—Un carro tarda una hora en recorrer 3,82 kilómetros; ¿cuánto tiempo invertirá en un trayecto de 50 kilómetros?

Efectuando la operación indicada 50:3,82, se tendrá para cociente el complejo 13 horas, 5 minutos y 20 segundos.

LIBRO II.

COMPARACIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO I.
Regla de tres.

ARTÍCULO I.
Nociones preliminares.

160. Se ha visto (116) que para que haya proporción entre cuatro números abstractos, es necesario que la razón ó cociente de dos de ellos sea igual á la de los otros dos; mas esta circunstancia no es suficiente por sí sola, tratándose de números concretos, supuesto que para conocer las veces que un concreto contiene á otro, se requiere que sean homogéneos; de aquí que imprescindiblemente los cuatro números que formen proporción hayan de ser de la misma naturaleza ó por lo menos dos á dos homogéneos y referidos al mismo orden de unidades.

Cuando se verifica que dos cantidades varían simultáneamente de un modo tal que los valores de la primera se hallan en la misma razón ó relación que los correspondientes de la segunda, se dice que las dos citadas cantidades son *directamente proporcionales* á las otras dos, ó son *entre sí como* las otras dos.

Así sucede con el número de obreros y el producto elaborado, en el supuesto que todos ellos poseen igual aptitud y condiciones para el trabajo; así como tambien con el tiempo que un móvil tarda en recorrer una distancia, el cual es directamente proporcional á la longitud de ésta, admitiendo que el movimiento de aquél sea uniforme.

La existencia de la proporcionalidad de las cantidades se reconoce en la práctica apoyándose en la siguiente proposición.

161. *Si multiplicando el valor de una cantidad por un número entero ó fraccionario, el de su correspondiente queda también multiplicado por el mismo número, dichas cantidades deberán ser directamente proporcionales.* En efecto, sea a el valor de la primera cantidad y b el de su correspondiente; si se representan con A y B los productos que resultan de multiplicar respectivamente a y b por un número cualquiera n, se tendrá $a \times n = A$ y $b \times n = B$; dividiendo ordenadamente estas dos igualdades, resultará que $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$, que era lo que se deseaba demostrar.

Según esto, la proporción directa se formará diciendo: *primera cantidad es á su correspondiente como segunda cantidad es á la que le corresponde;* y alternando los términos medios en aquélla, pudiera decirse también: *primera cantidad es á su homogénea como la correspondiente á la primera es á la que corresponde á la segunda.*

Cuando dos cantidades varían simultáneamente de modo que la razón ó relación de dos valores cualesquiera de una de ellas, es inversa de la relación de los valores simultáneos de la otra, entonces se dice que las cantidades son *inversamente proporcionales.*

Ejemplos: el número de obreros que intervienen en la elaboración de un producto, es inversamente proporcional al tiempo que invierten en la obtención de aquél.

El tiempo que tarda un móvil en recorrer una distancia, es inversamente proporcional á la velocidad del movimiento uniforme con que camina en el trayecto.

Se reconoce que dos cantidades son inversamente proporcionales á sus correspondientes, sirviéndose del siguiente teorema:

162. *Si multiplicando el valor de una cantidad por un número entero ó fraccionario cualquiera queda dividida su correspondiente por el mismo número, entonces las mencionadas cantidades serán inversamente proporcionales.*

En efecto, sea a el valor de la primera cantidad, b el de su correspondiente, y n un número cualquiera por el cual se multiplica a y se divide b. Si se supone que $a \times n = A$ y $b : n = B$; se tendrá, multiplicando ordenadamente ambas igualdades, $a \times b = A \times B$; de donde (117 Recíproco) resultará que $\frac{a}{A} = \frac{B}{b}$.

De modo que la proporción inversa se formará de la siguiente manera: *primera cantidad es á su homogénea como la correspondiente á esta última es á la que corresponde á la primera.*

En la práctica para conocer cuando dos cantidades son directa ó inversamente proporcionales, se hace, para mayor sencillez, $n = 2$.

ARTÍCULO II.

Definiciones.

163. La REGLA DE TRES comprende todos aquellos problemas que se resuelven por medio de una ó más proporciones. Se llama *simple* cuando depende de una

sola proporción, y *compuesta* cuando su resolución exije dos ó más proporciones.

I.

REGLA DE TRES SIMPLE.

164. Esta regla tiene por objeto *hallar el valor de una cantidad conociendo el de otra homogénea* (*) *con ella, siendo ambos valores directa ó inversamente proporcionales á dichas cantidades.*

Problema 1.º—30 Kg. de azúcar han costado pesetas 36,19. ¿Cuánto importarán 78 Kg. de la misma clase de azúcar?

Representando la incógnita con la letra x se dispondrán las cantidades, para mayor claridad, en la siguiente forma :

30 Kg. . . . . 36,19 pesetas.
78 » . . . . . x »

Como á doble cantidad de azúcar correspondería á ésta doble valor, se tendría la siguiente proporción: $\frac{30}{78}=\frac{36,19}{x}$; de donde $x=36,19\times\frac{78}{30}$ pesetas$=94,09$ ptas.

165. Esta conclusión manifiesta que en la regla de tres simple, cuando la proporción es directa, el valor de la incógnita *es igual al de su homogénea, multiplicado por la razón directa que existe entre el nuevo valor de la otra cantidad y el que ésta tenía antes.*

Problema 2.º—Para empapelar una habitación han sido necesarios 500 metros longitudinales de papel, cuyo

---

(*) Cuando se habla de cantidades homogéneas en las proporciones, se supone que están referidas á un mismo orden ó especie de unidades.

ancho es de 7 dm.; ¿qué número de metros serían precisos si el ancho fuera de 9 dm.?

Siendo x la incógnita, se dispondrían los elementos del problema en la siguiente forma:

7 dm.	500 m.
9 »	x »

Si el ancho del papel, en vez de ser de 7 dm., fuera de 14, claro está que sólo se necesitaría 250 m. longitudinales; luego la proporción será inversa, y, en su consecuencia, se tendría: $\frac{7}{9}=\frac{x}{500}$; de donde $x=500\times\frac{7}{9}$m.$=$ $=388,89$ m.

166. De modo que cuando la proporción es inversa, el valor de la incógnita *es igual al de su homogénea multiplicado por la razón inversa que existe entre el nuevo valor de la otra cantidad y el que ésta tenía antes.*

167. Todos los problemas que comprende esta regla pueden también resolverse por el método conocido con el nombre de *reducción á la unidad,* que *consiste en determinar el valor que corresponde á una unidad del mismo orden que aquel á que están referidas las dos homogéneas que se conocen, y una vez averiguado este valor, ya es fácil determinar el de la incógnita, que será el correspondiente á una de dichas homogéneas conocidas.*

Haciendo aplicación de esta regla á la resolución del problema 1.º, se diría: Si 30 Kg. de azúcar valen pesetas 36,19, un Kg. de aquella sustancia costará $\frac{36,19}{30}$ pesetas, y, por consiguiente, los 78 kilogramos importarán $\frac{36,19}{30}$ pesetas$\times78=36,19\times\frac{78}{30}$ pesetas. Valor idéntico al obtenido anteriormente por medio de una proporción.

II.

REGLA DE TRES COMPUESTA.

168. En los problemas que se resuelven por medio de esta regla, *se quiere hallar el valor de varias unidades conociendo el valor de otras homogéneas con ellas y los de otros pares de cantidades que, siendo también homogéneas dos á dos, están ligadas con las primeras por medio de una proporcionalidad.*

Para resolver una cuestión de esta índole, se la descompone en tantos problemas de regla de tres simple, cuantos sean los pares de cantidades homogéneas conocidas que aparezcan en el enunciado de aquéllos, lo cual se consigue suponiendo en cada descomposición que todas las condiciones menos una son comunes. Se resuelven sucesivamente las diferentes proporciones que con tal motivo se suponen formadas, teniendo en cuenta que la incógnita de cada una de ellas pasa á ser dato en la siguiente, y así se continúa hasta que se llega á la última proporción, en la cual se verifica que el término desconocido es la incógnita del problema.

Ejemplo 1.º—21 obreros han abierto un foso de 350 metros de longitud en 26 días, trabajando 10 horas en cada uno de ellos. ¿Cuántos trabajadores serán necesarios para abrir otro foso de 600 metros longitudinales en 13 días, trabajando á razón de 12 horas diarias?

Para resolver este problema, hay que descomponerlo en tres proporciones, ó reglas de tres simples, que es el número de pares de homogéneas conocidas.

	Obreros.	Metros.	Días.	Horas.
	21	350	26	10
	x	600	13	12
1.ª	21	350	26	10
	y	600	26	10

Se prepara la operación como se ve al margen en conformidad con el enunciado del problema. Para formar la 1.ª regla de tres simple se diría: si 21 obreros han abierto 350 metros en 26 días, trabajando á razón de 10 horas por día, para abrir 600 metros en los mismos días y trabajando igual número de horas, ¿cuántos hombres serán necesarios? Representando por y este número y teniendo presente que la incógnita y su homogénea son directamente proporcionales á los metros longitudinales de foso (165), se tendrá $y=21\times\frac{600}{350}$..... (1).

	Metros.	Días.	Horas.	Obreros
2.ª	600	26	10	y
	600	13	10	z

Si para abrir 600 metros de foso en 26 días, trabajando 10 horas diarias, se han necesitado y hombres; para hacer el mismo trabajo en 13 días y trabajando 10 horas por día, ¿cuántos hombres harían falta? Llamando z á este número, y fijándose en que la incógnita y su homogénea son inversamente proporcionales á los días empleados en la faena (166), se tendrá $z=y\times\frac{26}{13}$..... (2).

	Metros.	Días.	Horas.	Obreros
3.ª	600	13	10	z
	600	13	12	x

La 3.ª proporción se formará diciendo: si para abrir 600 metros de foso en 13 días, trabajando 10 horas por cada día, se necesitan z hombres; para hacer la misma obra en igual número de días, trabajando 12 horas por día, ¿cuántos trabajadores se necesitarán? Como quiera que este número es la incógnita del problema y ésta se halla representada por la letra x; si por otra parte se tiene presente que esta incógnita y su homogénea conocida son inversamente proporcionales á las horas de trabajo (166), resultará $x=z\times\frac{10}{12}$..... (3).

Sustituyendo en la igualdad (2) en vez de y su valor hallado en la expresión (1), se tendrá el valor de z, y reemplazando éste en la (3) se obtendrá el de x, ó sea el de la incógnita del problema.

Para la determinación de x es más cómodo multiplicar ordenadamente las igualdades (1), (2) y (3) y suprimir los factores y y z comunes en ambos miembros de la igualdad que resulta, y en tal caso, ésta quedaría reducida á

$$x=21\times\frac{600}{350}\times\frac{26}{13}\times\frac{10}{12}\ldots\ldots (4).$$

En la práctica se simplifica además la operación suprimiendo los factores que hubiere comunes en alguno de los numeradores y en cualquiera de los denominadores de los diferentes factores fraccionarios, y así, sin tener necesidad de efectuar otras operaciones, resultaría que, en el presente caso, $x=60$ trabajadores.

169. La expresión (4) manifiesta que el valor de la incógnita *es igual al de su homogénea multiplicado por las razones que existen entre los valores conocidos correspondientes á la primera y los respectivos de la segunda, en el supuesto de que las cantidades que intervengan fueren directamente proporcionales; y por las razones invertidas, de los antedichos valores, si las cantidades á que éstos se refieren son inversamente proporcionales.*

En ocasiones la igualdad (4) conviene escribirla en la siguiente forma : $\frac{x}{21}=\frac{650}{350}\times\frac{26}{13}\times\frac{10}{12}\ldots\ldots$ (5).

170. Resolviendo el mismo problema por el método de reducción á la unidad, se diría : si para abrir 350 metros de foso en 26 días, trabajando 10 horas por día, son necesarios 21 hombres, para abrir un metro en el mismo número de días y trabajando igual número de horas, se necesitarán $\frac{21}{350}$; luego para abrir 600 metros harán falta

$\frac{21}{350}\times600$ hombres. Ahora bien, si para abrir 600 metros longitudinales de foso en 26 días, trabajando 10 horas diarias, han sido necesarios $\frac{21}{350}\times600$ hombres, para hacer la misma obra en un solo día se necesitarán $\frac{21}{350}\times600\times26$ hombres; luego para efectuarla en 13 días serán precisos $\frac{21\times600\times26}{350\times13}$ hombres. Si para abrir 600 metros en 13 días, trabajando á razón de 10 horas al día, se ha necesitado un número de obreros expresado por $\frac{21\times600\times26}{350\times13}$, para ejecutar la misma obra en igual número de días, trabajando una sola hora por cada día, se necesitarían $\frac{27\times600\times26\times10}{350\times13}$ hombres; luego según esto, para abrir 600 metros de foso en 13 días, trabajando á razón de 12 horas al día, serían precisos $\frac{27\times600\times26\times10}{350\times13\times12}$ obreros, ó sean los mismos 60 hombres que antes se obtuvieron en la determinación del valor de x.

Ejemplo 2.º—Con 75 Kg. de hilo se han tejido 8 piezas de tela de 25 m. de largo y 64 cm. de ancho cada una. ¿Cuántos Kg. del mismo hilo serán precisos para obtener 11 piezas que tengan cada una 16 m. de largo y 80 cm. de ancho?

Piezas.	m.	cm.	Kg.
8	25	64	75
11	16	80	x

Escrito el enunciado como aparece al margen, se hace la comparación entre los dos valores de la naturaleza de la incógnita, con los de cada uno de los otros pares de valores que se refieren á cantidades homogéneas, y se ve que en esta cuestión todas las proporciones son directas, y, por consiguiente, en virtud de lo dicho (169), se tendría: $x=75\times\frac{11}{8}\times\frac{16}{25}\times\frac{80}{64}$..... (1), de donde $x=82{,}5$ Kg.

171. De la igualdad (1) se deduce $\frac{x}{75}=\frac{11\times16\times80}{8\times25\times64}$; lo cual manifiesta que *cuando una cantidad es proporcional á otras varias, también será directamente proporcional al producto de éstas.*

Análogamente pudiera hacerse ver que *si una cantidad es inversamente proporcional á otras, será también inversamente proporcional á su producto.* Una y otra proposición constituyen el *teorema de las razones compuestas* (*).

ARTÍCULO III.

Aplicaciones.

Entre las aplicaciones más frecuentes de la regla de tres, se encuentran las llamadas reglas de interés simple

---

(*) Si se quisiera demostrar esta segunda parte sirviéndose de notación literal, se diría: sean M, N, P y Q varias cantidades que dependen unas de otras, siendo la primera inversamente proporcional con cada una de las siguientes, considerando las dos que se comparan aisladamente de las demás; si por otra parte se representan con las letras m, n, p, q y m', n', p', q' dos sistemas de valores correspondientes á aquellas cantidades, y se expresa con la letra x el valor que toma M cuando sólo se altera N convirtiéndose en n', y con la y el valor que adquiere M cuando N y P se convierten respectivamente en n' y p' permaneciendo q inalterable, se tendrá el siguiente cuadro:

M	N	P	Q
m	n	p	q
x	n'	p	q
y	n'	p'	q
m'	n'	p'	q'

En donde, teniendo en cuenta lo dicho (169), cuando las cantidades que se comparan son inversamente proporcionales, resultará $m'=m\times\frac{n}{n'}\times\frac{p}{p'}\times\frac{q}{q'}$; y por consiguiente, $\frac{m'}{m}=\frac{n\,p\,q}{n'p'q'}$, que es lo que se deseaba demostrar.

y de descuento comercial, que en realidad no son otra cosa sino un conjunto de ejemplos sencillos de aquélla, supuesto que todas las cuestiones que á las mencionadas reglas pertenecen, se resuelven por una ó dos proporciones directas.

I.

REGLA DE INTERÉS SIMPLE.

172. Se llama *interés* la cantidad que produce, durante cierto tiempo, un capital prestado con la condición de que cien unidades de dinero ocasione al prestador un beneficio anual llamado *tanto por ciento.*

El interés se dice que es *simple* cuando no se acumula al capital á la terminación de cada unidad de tiempo, que habitualmente es el año.

Según lo dicho en los problemas que se resuelven en esta regla, hay que considerar: el capital, el *tanto p.* °/₀ (*), el tiempo y el interés. La dificultad estriba en determinar la relación que liga á estas cuatro cantidades.

173. Es evidente que *los intereses de dos capitales diferentes prestados durante el mismo tiempo, son directamente proporcionales á los capitales.* Se admite como exacto que *los intereses de un mismo capital son proporcionales á los tiempos.*

Luego, por virtud de lo dicho (171), se verificará también que *los intereses de dos capitales distintos, que han estado impuestos diferente tiempo, tienen que ser directamente proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.*

De modo, que si c representa un capital prestado; t un

(*) Manera abreviada de escribir *tanto por ciento.*

número entero ó fraccionario que expresa en años la duración del préstamo; r el tanto p. % anual, y, por último, i el interés del capital c, al cabo del tiempo t, se tendrá:

Capital.	Años.	Interés.
100	1	r
c	t	i

$$\frac{i}{r}=\frac{ct}{100} \ldots\ldots (1), \text{ de donde } i=\frac{crt}{100} \ldots\ldots (2).$$

Si en este valor de i se supone que $t=1$, se transformará en $i=\frac{cr}{100}$, que expresa el interés del capital c al cabo de un año.

Si t en vez de estar expresado en años lo estuviera en días ó meses, lo cual es frecuente, se sustituiría respectivamente en las igualdades (1) y (2) en vez de t, $\frac{t}{360}$ ó $\frac{t}{12}$.

Obsérvese que la proporción (1) facilita la manera de averiguar el valor de una cualquiera de las cuatro cantidades literales que en ella aparecen ligadas, conocido que sea el valor de las tres restantes. Así se tendría $r=\frac{100\times i}{ct} \ldots\ldots (3)$, y también $ct=\frac{100\times i}{r}$; de donde $c=\frac{100\times i}{rt} \ldots\ldots (4)$ y $t=\frac{100\times i}{cr} \ldots\ldots (5)$.

174. Por medio de las expresiones (2), (3), (4) y (5) pueden resolverse todos los problemas referentes á esta regla, sin más que sustituir en ellas, en lugar de cada letra, el valor particular que ésta tenga asignado en el enunciado de la cuestión.

Ejemplo 1.º—¿Cuánto habrá producido en 7 meses un capital de 36000 pesetas al 5 p. % anual? Haciendo la correspondiente sustitución en la expresión (2), se tendrá:

$$i=\frac{36000\times 5\times \frac{7}{12}}{100}=1050 \text{ pesetas.}$$

EJEMPLO 2.º—¿A qué tanto p. % habrá estado impuesto un capital de 7200 duros que en 210 días ha producido 1050 pesetas?

Haciendo uso en este caso de la expresión (3), resultaría $r=\frac{100\times1050}{36000\times\frac{210}{360}}=5.$

EJEMPLO 3.º—¿Qué capital impuesto al 5 p. % puede producir en 7 meses 1050 pesetas?

Reemplazando en la expresión (4) en lugar de cada letra su respectivo valor, resultará: $c=\frac{100\times1050}{5\times\frac{7}{12}}=36000$ pesetas.

EJEMPLO 4.º—¿Cuántos días han estado impuestas 36000 pesetas para que al 5 p. % hayan producido 210 duros?

Sirviéndose de la igualdad (5), se tendría:

$$t=\frac{100\times210}{7200\times5}=\frac{7}{12} \text{ de año.}$$

Obsérvese que la expresión general (2) pudiera haberse deducido formando dos proporciones, ó también sirviéndose del método de reducción á la unidad.

II.

REGLA DE DESCUENTO COMERCIAL.

175. Las *letras* ó *pagarés* que en el comercio se han de hacer efectivos al cabo de cierto tiempo, no tienen en la actualidad *el valor nominal* que representan. Para determinar la cantidad que hay que descontar del valor nominal de una letra á fin de obtener el actual, se conviene en que de cada 100 unidades del nominal se des-

cuente un tanto al año, que recibe el nombre de *tanto de descuento.*

De aquí se infiere que el descuento de una letra debe ser siempre igual al interés del *valor actual.* También se desprende de lo dicho, que el problema que hay que resolver en esta regla no es otro sino el ya resuelto en la de interés simple, sin más diferencia que lo que allí se denominaba c ahora se llama V, valor nominal del pagaré; lo que antes se expresaba con la letra i ahora será d, descuento de la letra; lo que representaba el tanto p. % de interés, al presente tanto de descuento, y, finalmente, r es aquí el tanto de descuento y t el tiempo que media entre el día en que se entrega el valor actual de la letra y aquel en que ésta vence.

Así es que la expresión general (2) se transformaría en $d=\frac{Vrt}{100}$.

Ejemplo.—¿Qué descuento debe sufrir una letra de 45000 pesetas, pagadera al cabo de 70 días, siendo 4 el tanto de descuento?

Se tendrá : $d=\dfrac{45000\times4\times\frac{70}{360}}{100}=350$ pesetas.

Siguiendo el procedimiento expuesto en la regla de interés simple, pudieran determinarse separadamente las expresiones generales que se refieren á los valores de V, r y t; con los cuales se resolverían todos los problemas relativos á esta regla, de igual modo que se hizo en aquélla.

CAPÍTULO II.

Repartimientos proporcionales.

ARTÍCULO I.

Generalidades.

176. Los repartimientos proporcionales ó *prorrateos* tienen por objeto dividir un número conocido en partes proporcionales á otros números dados.

Sea N el número conocido que desea dividirse en partes proporcionales á los a, b y c: llamando x, y, z las partes en que se trata de descomponer á N, las cuales se quiere que sean respectivamente proporcionales á los números dados, se tendría la siguiente serie de razones iguales: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$; de donde, según se dijo (**125**, Corolario), resultaría que $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$; mas como $x+y+z=N$, se tendría que la mencionada serie podrá escribirse $\frac{N}{a+b+c}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, de donde resulta que $x=\frac{N}{a+b+c}\times a$, $y=\frac{N}{a+b+c}\times b$, $z=\frac{N}{a+b+c}\times c$. De aquí se deduce que *para dividir un número en partes proporcionales á otros varios, se divide el primer número por la suma de todos los otros, y el cociente se multiplica por cada uno de éstos.*

Ejemplo.—Entre cinco individuos han trasportado desde una misma viña á esta poblacion 600 botas de mosto. El 1.º ha conducido 80, el 2.º 96, el 3.º 120, el 4.º 150 y el 5.º 154: se les ha pagado por el arrastre 2400 pesetas. ¿Cuánto corresponde á cada uno?

Es evidente que habrá que dividir las 2400 pesetas, importe de la totalidad del trabajo, en partes proporcionales á los números 80, 96, 120, 150 y 154 que expresan el efectuado por cada uno de los cinco individuos.

Sustituyendo en las igualdades literales que se acaban de deducir, en vez de cada letra el valor particular que le corresponde en el ejemplo propuesto, se tendrá lo que debe percibir cada uno de aquellos individuos.

1.º $\frac{2400}{80+96+120+150+154}\times 80=320$ pesetas.

2.º $\frac{2400}{80+96+120+150+154}\times 96=384$ »

3.º $\frac{2400}{80+96+120+150+154}\times 120=480$ »

4.º $\frac{2400}{80+96+120+150+154}\times 150=600$ »

5.º $\frac{2400}{80+96+120+150+154}\times 154=616$ »

Compr.ⁿ $320+384+480+600+616=24000.$

Conviene suprimir los factores comunes que tuvieren los números á que han de ser proporcionales las partes, con el fin de facilitar la operación.

Otra simplificación ocurre cuando los números a, b y c son quebrados, pues reducidos éstos á un común denominador, basta entonces descomponer el número N en partes proporcionales á los numeradores que hubiesen resultado.

Las expresiones generales deducidas anteriormente pudieran escribirse también en la siguiente forma: $x=\frac{N\times a}{a+b+c}$, $y=\frac{N\times b}{a+b+c}$, $z=\frac{N\times c}{a+b+c}$.

Por la primera regla se obtienen los resultados con más prontitud; pero cuando el cociente de la división del número propuesto por la suma de aquellos á quienes deben ser proporcionales las partes, no es rigurosamente exacto, es entonces preferible seguir la segunda regla, que permite obtener resultados más aproximados á los verdaderos.

Por medio de repartimientos proporcionales se resuelven los problemas correspondientes al *reparto de contribuciones, cupo de quintas, socorros mutuos*, etc.

El reparto de contribuciones se hace distribuyendo el impuesto total entre las provincias, proporcionalmente á la riqueza imponible de cada una de ellas; la parte correspondiente á cada provincia se reparte entre los pueblos proporcionalmente á la riqueza de éstos, y la parte de cada pueblo proporcionalmente á la de cada contribuyente.

Para averiguar el cupo de quintos de cada provincia ó pueblo, se distribuye el número total de quintos, ó el que corresponde á cada provincia, proporcionalmente al número de mozos sorteables de cada provincia ó pueblo.

Los socorros mutuos tienen por objeto repartir el importe de la pérdida que, á consecuencia de un siniestro ó avería, experimenta en sus bienes uno de los asociados, en partes proporcionales á los valores que cada uno de éstos representa.

ARTÍCULO II.

Regla de compañía.

177. Los problemas de repartimientos proporcionales de uso más frecuente se hallan incluidos en la REGLA DE COMPAÑÍA Ó DE SOCIEDAD, la cual tiene por objeto averiguar la ganancia ó pérdida que corresponde á cada uno de varios asociados, conociendo el capital que cada uno

de ellos aportó á la sociedad, el tiempo que estuvo impuesto y la ganancia ó pérdida del capital social.

178. Desde luego se comprende que *las ganancias ó pérdidas de dos capitales diferentes, impuestos durante un mismo tiempo en la sociedad, son directamente proporcionales á los capitales.*

Se admite como cierto, que *las ganancias ó pérdidas de un mismo capital que está impuesto tiempos distintos, son directamente proporcionales á los tiempos.*

Luego si se tiene en cuenta el teorema de las razones compuestas (171), resultará, como consecuencia de los dos principios que anteceden, que *las ganancias ó pérdidas de dos capitales diferentes, que no han estado el mismo tiempo impuestos en la sociedad, tienen que ser directamente proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.*

179. Después de lo dicho, se infiere que todas las cuestiones referentes á la regla de compañía, quedan reducidas á dividir la ganancia ó pérdida total en partes proporcionales á los capitales, si el tiempo es el mismo; á los tiempos, si los capitales son iguales; y á los productos de los capitales por los tiempos, cuando éstos y los capitales son diferentes.

Ejemplo 1.º—Tres socios emprendieron un negocio; el primero puso de capital 199 duros, el segundo 144 duros y el tercero 1135 pesetas. En la especulación ganaron 840 pesetas; ¿qué cantidad corresponde á cada uno?

Expresando todas las cantidades que aprontaron los asociados en unidades de igual valor, que, para fijar las ideas, se supondrá sean duros, habrá que dividir el número 840 en partes proporcionales á 199, 144 y 227, y se tendrá :

Ganancia del 1.º $\frac{840\times199}{570}$=293,26 pesetas.

» del 2.º $\frac{840\times144}{570}$=212,21 »

» del 3.º $\frac{840\times227}{570}$=334,53 »

Ganancia total... =840,00 pesetas.

Ejemplo 2.º—Un comerciante emprendió una especulación con un capital *A*; 5 meses después admitió un socio que aprontó una cantidad igual; transcurridos 100 días se les unió otro individuo con el mismo caudal que los anteriores; 70 días después se les incorporó otro sujeto con un capital idéntico, y, finalmente, al terminar el año de haber ingresado en la sociedad el cuarto individuo que la componía, se disolvió ésta con una pérdida de 5184 pesetas. ¿Cuánto perdió cada uno?

Expresando en días los tiempos que estuvieron en la asociación los diferentes individuos que la formaban, resulta que

El 1.º estuvo 680 días. El 3.º estuvo 430 días.
El 2.º » 530 » El 4.º » 360 »

Dividiendo el número 5184 en partes proporcionales á los tiempos, ó sea á 68, 53, 43 y 36, se tendrá que habrán perdido :

El 1.º $\frac{5184}{200}\times68=1762,56$ duros;

El 2.º $\frac{5184}{200}\times53=1373,76$ »

El 3.º $\frac{5184}{200}\times43=1114,56$ »

El 4.º $\frac{5184}{200}\times36=\ 933,12$ »

Compr.ⁿ 1762,56+1373,76+1114,56+933,12=5184.

Ejemplo 3.º—Una persona establece una industria con 34600 pesetas; á los 7 meses se le asoció otra con 44620 pesetas; 13 meses después se les unió un tercer sujeto con 53400 pesetas; transcurridos de esto 19 meses, se disolvió la asociación con una ganancia de 2580 duros. ¿Cuánto correspondió á cada uno?

El 1.º tuvo 34600 pesetas durante 39 meses; capital×tiempo=1349400.

El 2.º tuvo 44620 pesetas durante 32 meses; capital×tiempo=1427840.

El 3.º tuvo 53400 pesetas durante 19 meses; capital×tiempo=1014600.

Como los productos de los capitales por los tiempos tienen por M. C. D. el número 40, dividiéndoles por éste, la cuestión quedará reducida á dividir 2580 en partes proporcionales á los números 33735, 35696 y 25365, cuyo resultado manifiesta que la ganancia

del 1.º	ascendía	á	918 duros	y	72	cénts.	de peseta.
del 2.º	»	á	971 »	y	2,57	»	»
del 3.º	»	á	690 »	y	1,71	»	»
Comprobación.....			2580 duros	y	0,00	cénts.	de peseta.

Obsérvese la analogía que existe entre los tres principios en que se apoya la regla de compañía (178) y los que sirvieron de fundamento para la resolución de los problemas pertenecientes á la regla de interés simple (173).

CAPÍTULO III.

Regla de aligación ó de las mezclas.

180. Esta regla tiene por objeto resolver los dos problemas siguientes: 1.º Hallar el precio medio ó el de la unidad de una mezcla de varias sustancias, conociendo el número de unidades de cada especie que han de entrar en la mezcla, y sus precios respectivos. 2.º Conociendo el precio medio y los de las sustancias mezcladas, determinar el número de las unidades de cada especie que han de entrar en la mezcla.

Las cuestiones de la primera índole pertenecen á la llamada *regla de aligación directa*, y las de la segunda á la de *aligación inversa*.

ARTÍCULO I.

Regla de aligación directa.

181. La resolución de ésta se funda en las siguientes consideraciones: el valor total de una mezcla es evidentemente igual á la suma de los valores de las diferentes sustancias mezcladas, y una vez que sean conocidos el valor de la mezcla y el número de unidades que contiene, claro es que el valor de una de ellas se hallará dividiendo el de la mezcla por el número de aquellas unidades (156).

Siendo n, n', n''..... el número de unidades mezcladas de cada una de las especies, y p, p', p''..... sus respectivos precios, resultará que el precio de la mezcla será:

$np+n'p'+n''p''+.....$; y si se representa por P el precio de la unidad de mezcla, se verificará que

$P(n+n'+n''+.....)=np+n'p'+n''p''+.....$ (1); de donde

$$P=\frac{np+n'p'+n''p''+.....}{n+n'+n''+.....} \quad (2).$$

Ejemplo.—Un almacenista de vino ha mezclado 2700 hectólitros de vino de 160 pesetas el hectólitro; 893 hectólitros de 44 duros cada hectólitro; 621 hectólitros de 250 pesetas cada uno de éstos, y, finalmente, 96 litros de 300 pesetas el hectólitro. ¿A cómo deberá venderse el hectólitro de la mezcla?

Expresando todas las cantidades en hectólitros, sus respectivos precios en pesetas y sustituyendo en la igualdad (2) los valores particulares que en este caso corresponden á $n, n', n'', n''', p, p', p'', p'''$, se tendrá:

$$P=\frac{2700\times160+893\times220+621\times250+0,96\times300}{2700+893+621+0,96}=186 \text{ pesetas.}$$

182. Caso particular.—Cuando es el mismo el número de unidades mezcladas de las diferentes especies, la igualdad (2) se reduce á $P=\frac{np+np'+np''+np'''+.....}{n+n+n+n+.....}$ simplificando y llamando N al número de especies diferentes que intervienen en la mezcla, se tendrá:

$$P=\frac{p+p'+p''+p'''+.....}{N} \quad (3).$$

Cuando esto sucede, se dice que P es el *promedio*, ó también el *medio diferencial*, de los números $p, p', p'', p'''...$

Luego la igualdad (3) manifiesta que para determinar el promedio de varios números *se divide la suma de todos ellos, por el número de sumandos.*

Ejemplo.—Se han mezclado en cantidades iguales café de $3^p,25$ el kilogramo, con café de $2^p,75$, con otro de $1^p,60$ y, finalmente, con café de $1^p,20$. ¿Cuál será el precio á que deberá venderse el kilogramo de la mezcla?

Aplicando la regla que se acaba de deducir, se tendrá:

$$x=\frac{3^p,25+2^p,75+1^p,60+1^p,20}{4}=2,20 \text{ pesetas.}$$

En algunas ocasiones, á pesar de seguirse un procedimiento en un todo análogo al que se acaba de exponer en la resolución del problema anterior, no aparecen en el enunciado de la cuestión que se propone, precios de las cantidades que se han de reunir ó mezclar.

Ejemplo.—Las cinco experiencias hechas con el fin de averiguar la cantidad de gas del alumbrado que se quema en un mechero durante una hora, acusan los siguientes valores: 1.er ensayo, 298 litros; 2.°, 291; 3.°, 311; 4.°, 306; 5.° y último, 294. ¿Cuál será el promedio del consumo de gas por hora en el expresado mechero?

Según la regla expuesta (3),

$$x=\frac{291+294+298+306+311}{5}=300 \text{ litros.}$$

Es evidente que el valor del promedio de varios números siempre estará comprendido entre el mayor y el menor de éstos.

ARTÍCULO II.

Regla de aligación inversa.

183. Conviene considerar en ésta dos casos: 1.°, que sean dos las especies que se mezclan; 2.°, que éstas sean tres ó más.

Primer caso.—La resolución de los problemas que corresponden á este caso, es una consecuencia de lo dicho en la regla de aligación directa, pues la igualdad (1) se reduce ahora á $P(n+n')=np+n'p'$, de donde $Pn+Pn'=$ $=np+n'p'$; restando de ambos miembros de esta igualdad np y Pn' se tendrá $Pn-np=n'p'-Pn'$, y separando los factores comunes en uno y otro miembro, resultará:

$n(P-p)=n'(p'-P)$, de donde $\frac{n}{n'}=\frac{p'-P}{P-p}$ (4).

Esto dice, que *los números de unidades que se tomen de cada especie para formar la mezcla, son inversamente proporcionales á las diferencias de sus respectivos precios al precio medio.*

Ejemplo.—¿En qué cantidades deben mezclarse dos vinos cuyos respectivos precios son 300 pesetas y 576 pesetas el hectólitro, para que éste valga 400 pesetas? Aplicando la regla que acaba de deducirse, en el supuesto de que n represente el número de unidades de la 1.ª clase de vino y n' las de la 2.ª, se tendrá:

$$\frac{n}{n'}=\frac{576-400}{400-300}=\frac{176}{100}=\frac{44}{25} \text{ ó } \frac{n}{n'}=\frac{44}{25} \text{ (4);}$$

en donde se ve sólo el valor de la razón en que se encuentran las dos cantidades desconocidas; de aquí que el problema tenga una infinidad de soluciones y por tanto sea *indeterminado,* pues si á los dos números que forman la razón $\frac{44}{25}$ se les multiplica ó divide por un mismo número, cualquiera que éste sea, siempre resultarán nuevos valores para n y n'.

184. Si se quisiera hacer determinado este problema, no habría sino suponer conocida una cualquiera de estas dos incógnitas, y entonces en la proporción (4) sólo habría un término desconocido.

EJEMPLO.—Teniendo 700 hectólitros de vino de á 576 pesetas el hectólitro, ¿con cuántos hectólitros de vino de á 300 pesetas se deberán mezclar para que el precio de la mezcla sea de 400 pesetas el hectólitro?

La igualdad (4) sería ahora $\frac{n}{700}=\frac{44}{25}$, de donde $n=\frac{44\times700}{25}=1232$ hectólitros.

También pudiera hacerse determinado este primer caso, sin más que suponer se conocía la suma ó la diferencia de los números que expresan las unidades que de una y otra especie se mezclan, supuesto que la igualdad fraccionaria $\frac{n}{n'}=\frac{44}{25}$, se puede transformar (**123**) de los modos siguientes:

$$\frac{n+n'}{n}=\frac{44+25}{44},\ \frac{n+n'}{n'}=\frac{44+25}{25},\ \frac{n-n'}{n}=\frac{44-25}{44},\ \frac{n-n'}{n'}=\frac{44-25}{25}.$$

EJEMPLO.—Teniendo vino de 300 pesetas el hectólitro y vino de 576 pesetas, ¿cuántos hectólitros deberán tomarse de uno y otro vino para que resulten 1932 hectólitros de á 400 pesetas el hectólitro?

De la primera de estas cuatro igualdades se deduce que $\frac{1932}{n}=\frac{69}{44}$, de donde $n=\frac{1932\times44}{69}=1232$ hectólitros.

De la segunda igualdad resultará $\frac{1932}{n'}=\frac{69}{25}$, de donde $n'=\frac{1932\times25}{69}=700$ Hl.

Comprobación: $n+n'=1232+700=1932$ hectólitros.

Resumiendo: para que un problema de la regla de aligación inversa, que se refiere al primer caso, sea determinado, es suficiente con que se conozca el número de unidades de una de las especies que entran en la mezcla, ó que sea conocida la suma de las unidades que intervienen de una y otra especie; ó, finalmente, que se conozca la diferencia de las mismas.

185. Segundo caso.—Cuando el número de especies que se han de mezclar es mayor que dos, se van combinando aquéllas de dos en dos, de modo que el precio medio se halle comprendido entre los precios respectivos de dichas especies, pudiéndose así obtener las infinitas soluciones de que es susceptible el problema.

Ejemplo.—Se quiere mezclar trigo de cinco clases cuyos precios son de 17, 20, 21, 26 y 30 pesetas el hectólitro: para que el hectólitro de la mezcla resulte á 24 pesetas, ¿cuántas han de entrar en ésta de cada clase de trigo?

La operación se dispondrá de la siguiente manera:

Precio medio.	Precio de las especies.	Número de unidades de cada especie.
24	17	30—24= 6
	20	26—24= 2
	21	30—24= 6
	26	24—20= 4
	30	24—21=3, 24—17=7 → 10

Si se consideran primeramente las dos especies de 17 y 30 pesetas, y se escriben al frente de cada una la diferencia entre el precio medio y el de la otra, se tendrá el número 6 de la primera y el 7 de la segunda. Haciendo una comparación análoga entre las especies de 20 y de 26 ptas., se obtendrán respectivamente los números 2 y 4. Finalmente, si se toman las especies de 21 y de 30 pesetas, se tendrán los números 6 y 3.

Si se quisiera comprobar el resultado obtenido, se haría uso de la regla de aligación directa, y así se tendría :

6 Hl.	á 17	pesetas	valen	102 pesetas.
2 »	á 20	»	»	40 »
6 »	á 21	»	»	126 »
4 »	á 26	»	»	104 »
10 »	á 30	»	»	300 »
28 Hl.	de mezcla		valen	672 pesetas.

672 pesetas : 28=24 pesetas, precio medio.

Se pudieran haber encontrado tantas soluciones como se quisieran sin más que combinar las especies dadas de otra ú otras maneras diferentes; ó también multiplicando por un mismo número, cualquiera que éste sea, los de la solución hallada.

APÉNDICE.

Límites.—Cantidades inconmensurables.

186. Se vió (101 y 102) que no era posible obtener con rigurosa exactitud el valor de la raíz cuadrada de ciertos números enteros y fraccionarios; pero que era factible en tal caso determinar diferentes números que se aproximasen cada vez más al valor que aquélla representa. También se vió (109) que á medida que en una fracción periódica se consideraban mayor número de períodos, los números que iban resultando se acercaban cada vez más á la correspondiente fracción generatriz. De donde se deduce que hay expresiones numéricas variables cuyo valor se va aproximando al de otra invariable tanto como se quiera, pero sin llegar nunca á igualarse con ella: esta expresión de valor constante se dice que es el *límite* de la variable.

Los límites de una cantidad variable pueden ser superiores ó inferiores, ó, esto dicho en otros términos, el límite puede ser mayor ó menor que todos los valores de la variable.

La unidad pudiera citarse como límite superior de los quebrados propios y á la vez como límite inferior de los impropios.

Esto manifiesta que el continuo aumento ó disminución de un número no supone que necesariamente haya de llegarse á formar otro mayor ó menor que cualquier número por grande ó pequeño que éste fuese; pues si la ley de su variación reconoce límites, nunca acontecerá que por la sucesiva agregación ó disminución de incrementos sometidos á la expresada ley, se obtenga un resultado que sea mayor que su límite superior ni tampoco menor que el inferior.

187. De la definición de lo que se entiende por límite de una expresión variable, se infiere que *una cantidad variable no puede tener dos límites superiores ó inferiores diferentes;* pues si se aproxima á uno de ellos tanto como se quiera, siempre habrá entre la cantidad variable y el segundo límite, la diferencia que hay entre éste y el primero, más la que existe entre los dos límites, que es una cantidad constante: luego, según esto, la cantidad variable no se podría acercar al segundo límite tanto como se desee.

COROLARIO 1.º—*Si dos cantidades variables son constantemente iguales, sus respectivos límites también serán iguales* (*).

COROLARIO 2.º—*El límite del resultado de efectuar una operación cualquiera con cantidades variables, es igual al resultado de verificar la misma operación con los límites de dichas cantidades.* En efecto, sean C y C' dos cantidades variables cuyos límites son respectivamente L y L'. Si C y C' se acercan tanto como se quiera á L y L', la suma $C+C'$ se acercará á $L+L'$ tanto como se desee; el producto $C\times C'$ se aproximará también al $L\times L'$ tanto cuanto se quiera, y así pudiera decirse lo mismo de las demás operaciones. De modo que, según esto, cuando se quiera efectuar cualquier operación con números in-

(*) Esta proposición es conocida con el nombre de *teorema de los límites.*

conmensurables, se sustituyen éstos por los números *conmensurables* (*) que se les aproximen tanto como se quiera, y la operación efectuada con éstos expresará, con un cierto error, el valor del resultado que corresponde á la operación efectuada con los inconmensurables propuestos.

Es evidente que el error cometido sería tanto menor cuanto mayor fuera el grado de aproximación de los números conmensurables que reemplazarán en el cálculo á los inconmensurables.

Los corolarios que acaban de mencionarse permiten generalizar todas las proposiciones relativas á las operaciones que se han efectuado con los números enteros y fraccionarios, haciéndolas extensivas á los inconmensurables.

Complemento aritmético.

188. Se entiende por COMPLEMENTO ARITMÉTICO de un número, la diferencia que existe entre este número y la unidad del orden inmediato superior al de la primera cifra de la izquierda de aquél.

El complemento de un número entero ó decimal se obtiene *restando de 10 la primera cifra de la derecha y de 9 cada una de las demás,* lo cual no es sino una consecuencia del procedimiento expuesto para efectuar la sustracción (11 y 89).

Por medio de los complementos se consigue transformar las sustracciones en adiciones. En efecto; si al minuendo y al sustraendo se les agrega el valor del complemento de este último, el resto no experimentará alte-

(*) Todo número entero ó fraccionario se dice que es *conmensurable.*

ración alguna (11) y, con tal motivo, el resultado se obtendrá *sumando el minuendo con el complemento del sustraendo y quitando de la suma la unidad seguida de tantos ceros como cifras tuviere el mencionado sustraendo.*

EJEMPLO.

$$8563-724=8563+\text{Comp.}^{\circ}\ 724-(724+\text{Comp.}^{\circ}\ 724)=$$
$$=8563+276-1000=7839.$$

Resultado que se pudiera comprobar efectuando directamente la sustracción.

Raíz cúbica.

I.

189. Se llama RAÍZ CÚBICA de un número, otro número que elevado al cubo, ó sea considerado tres como factor, reproduce el número propuesto. Así la raiz cúbica de 64 será 4. En general, se entiende por RAÍZ DE UN GRADO CUALQUIERA de un número, otro número que, elevado á la potencia que indique su grado, reproduzca el número propuesto.

El número que expresa el grado de la raíz se llama *índice.* Cuando el grado de la raiz excede del segundo, entonces se escribe el índice dentro del ángulo que se encuentra á la izquierda del signo radical. El ejemplo anterior se escribiría, según lo dicho, en la siguiente forma: $\sqrt[3]{64}=4$.

La determinación de la raiz cúbica de los números menores que 1000, se apoya en la tabla de los cubos de los números enteros menores que 10.

Raíces...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos....	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Si por ejemplo quisiera extraerse la $\sqrt[3]{476}$, no habría sino buscar, en los números de la tabla que antecede, el mayor cubo que se hallase contenido en el número propuesto que, en el presente caso, sería 343, y la raiz cúbica de éste determinaría para aquélla que se busca el número 7.

Se entiende por raiz cúbica *entera* de un número, la raiz cúbica del mayor cubo perfecto contenido en él. Se llama *residuo* de la raiz cúbica de un número, al exceso de este número sobre el mayor cubo contenido en él. Así, en el ejemplo anterior, se tendrá que el residuo es 133.

190. *Todo número entero que no tenga por raiz cúbica exacta otro entero, tendrá por raiz cúbica un número inconmensurable.* Si en el ejemplo último se supusiera que la raiz exacta fuese 7 más una fracción, reduciendo este número mixto á quebrado irreducible, se tendría que, al elevarlo al cubo debería dar por resultado otro quebrado irreducible (**100**), el cual nunca podría valer lo mismo que el número propuesto que, por hipótesis, es entero.

Cuando el número del cual se trate de extraer la raiz cúbica sea mayor que 1000, entonces para deducir el valor de ésta, hay que servirse además del siguiente teorema :

191. *El cubo de la suma de dos números, equivale al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

En efecto, siendo a y b los dos sumandos, el cubo de su suma será : $(a+b)^3=(a+b)^2\times(a+b)=(a^2+2ab+b^2)\ (a+b)=$ $=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

De modo que todo número descompuesto en dos sumandos, de los cuales el uno sea la totalidad de sus decenas y el otro las unidades simples, su cubo constará *del cubo de las decenas, más del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más del triplo de las decenas por el cuadrado de unidades, más el cubo de las unidades.*

Corolario.—*La diferencia entre los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más una unidad.* En efecto, sean n y $n+1$ dos números consecutivos.

$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$; restando de ambos miembros de esta igualdad el número n^3, se tendrá que $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$.

192. De aquí se deduce que, siempre que en la extracción de la raiz cúbica de un número, se verifique que el residuo sea mayor ó igual que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, más el triplo de la misma, más una unidad, la última cifra de la raiz será menor que la verdadera, supuesto que entonces, en el número propuesto, estará contenido el cubo del número que se forma añadiendo una unidad á la última cifra de la raiz hallada.

II.

193. La raiz cúbica de un número mayor que 1000 sería conocida si se pudiera averiguar el número de las decenas, así como la cifra que corresponde á las unidades de aquélla. Con el fin de deducir el valor de la totalidad de las decenas de la raiz, bastará apoyarse en el siguiente teorema : *La raiz cúbica entera de los millares de un número expresa exactamente las decenas de la raiz cúbica de este número.*

En efecto, siempre que la raiz cúbica del número propuesto tenga más de una cifra, se compondrá necesariamente de decenas y unidades simples; mas como quiera que el expresado número puede considerarse como el cubo de su raiz cúbica, se compondrá de las cuatro partes mencionadas en el teorema anterior, más del residuo, si aquél no fuere cubo perfecto. Pero el cubo de las decenas de la raiz únicamente puede estar contenido en los millares de este número, supuesto que un número cualquiera de decenas al elevarlas al cubo, da un número exacto de millares; pero en los millares del número propuesto puede haber también algún millar que provenga de las otras tres partes de que consta el mencionado cubo, y del residuo si lo hubiere. Esto manifiesta que separando las tres primeras cifras de la derecha del número dado, y extrayendo la raiz cúbica de los millares, se tiene la seguridad de hallar un número que no será menor que las decenas de la raiz, pero tampoco será mayor, porque entonces sólo el cubo de las decenas de la raiz cúbica tendría más millares que todo el número propuesto, lo cual sería absurdo; luego la raiz cúbica de los millares de este número serán las decenas de la raiz.

194. La cifra de las unidades de ésta, se determinará con el auxilio del teorema siguiente : *Si de un número se resta el cubo de las decenas de su raiz cúbica y las centenas del resto se dividen por el triplo del cuadrado de aquellas decenas, el cociente*

será la cifra de las unidades de la raíz cúbica ó un número mayor.

Considerando al número propuesto como al cubo de su raiz cúbica, se compondrá de los cuatro sumandos que le forman (**191**) más del residuo, si aquél no fuera cubo perfecto. Si se resta del número propuesto el cubo de las decenas de su raiz, el resto contendrá al triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades, más el residuo si lo hubiere. Pero el primero de estos sumandos es un número exacto de centenas, supuesto que se compone del cuadrado de decenas, y por consiguiente, se hallará contenido en las centenas del resto, en las cuales pudiera haber además alguna centena que provenga de los otros dos sumandos, y del residuo, si lo hubiere. Luego, según esto, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, nunca podrá resultar en el cociente un número menor que las unidades de ésta, y por tanto la cifra hallada será la verdadera de las precitadas unidades ó mayor que la verdadera.

Si como aclaración de estas consideraciones quisiera extrarse la $\sqrt[3]{76843298}$, se dispondría la operación en la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \sqrt[3]{76'843'298} & = 425 \\ 64 & \\ \hline 128'43 & 48 \\ 10088 & \\ \hline \cdot 27552'98 & 5292 \\ 2677625 & \\ \hline \cdot\cdot 77673 & \end{array}$$

Siendo el número propuesto mayor que 1000, su raíz cúbica se compondrá de decenas y unidades; para obtener las decenas de ésta, será necesario encontrar la raíz cúbica del mayor cubo contenido en los 76843 millares del número propuesto (**193**). Pero siendo 76843 mayor que mil, su raíz cúbica también constará de decenas y unidades, de modo que para determinar las decenas, será necesario extraer la raíz cúbica del mayor cubo contenido en 76 millares, la cual es 4; así, la raíz cúbica de 76843, contiene desde luego 4 decenas, las cuales ya pueden escribirse á la derecha del número propuesto que es el lugar destinado para la raiz que se busca. La cifra de las unidades de la raiz de 76843 se determinará restando de este número el cubo de las 4 decenas que se acaban de obtener, ó sea 64 millares, lo que dará el resto 12843; si ahora se dividen las 128 centenas de este número por 48, triplo del cuadrado de las 4 decenas halladas, el cociente 2 que resulta será igual ó mayor que la verdadera cifra de las unidades. Para cerciorarse de si esta cifra es ó no demasiado crecida, se podría elevar al cubo el número 42 y, si fuera posible restar este cubo del número 76843, en tal caso 42 sería su raiz cúbica. Hay otra manera más sencilla de proceder para efectuar la comprobación de la cifra 2, que consiste en formar las tres partes que faltan del cubo de 42, que son: triplo del producto del cuadrado de decenas por unidades, triplo del producto de decenas por el cuadrado de unidades y cubo de unidades; cuya suma es igual á 10088, número inferior al resto 12843, y por tanto la cifra 2 no es mayor que la verdadera, y como se sabe (**194**), que la cifra hallada en el cociente de la última división efectuada nunca puede ser menor que la que se busca, se tendrán determinadas con seguridad las 42 decenas de que consta la raiz cúbica del número propuesto.

Si ahora se quisiese hallar la cifra que ocupa el lugar de las unidades simples de la raiz cúbica de 76843298, no habría sino restar de este número el cubo de las 42 decenas; mas como quiera que este cubo es un número exacto de millares, bastará restar éstos de los 76843 millares que contiene aquél y bajar á la derecha de la diferencia que se obtiene la sección siguiente, y así se tendrá el número 2755298, el cual contendrá al triplo del cuadrado de las 42 decenas por las unidades, más el triplo de las 42 decenas por el cuadrado de las unidades, el cubo de las unidades. Luego, dividiendo las 27552 centenas de aquel número por el triplo 5292 del cuadrado de la raiz hallada, se tendrá el cociente 5, el cual se comprobará como en el caso anterior. De modo, que la raiz cúbica del número propuesto es igual á 425 con un error por defecto menor que una unidad simple.

195. De todos los razonamientos expuestos, se deduce la siguiente regla general:

Para extraer la raíz cúbica de un número entero, se divide éste en secciones de tres cifras, empezando por la derecha; se extrae la raíz cúbica de la primera sección de la izquierda, se *eleva al cubo esta raíz y se resta de la primera sección mencionada, siendo indiferente que ésta tenga una, dos ó tres cifras. Al lado del resto se escribe la sección siguiente: se separan las dos primeras cifras de la derecha, y se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raíz hallada; con esta raíz y el cociente se forman las tres partes del cubo que faltaban y se restan del dividendo juntamente con las dos cifras que antes se habían separado; si la sustracción no es posible, se rebajan al cociente una ó más unidades, hasta que aquélla se pueda efectuar; si tal sucede este cociente será la segunda cifra de la raíz, la cual se escribirá á la derecha de la primera. Al lado del resto se coloca la sección siguiente, y se repite lo que se hizo con el resto anterior, y así se continúa hasta encontrar la última cifra de la raíz y el correspondiente resto, que sería el residuo de la raíz cúbica pedida.*

En el caso de que las centenas de alguno de los restos fuera un número menor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, se escribirá cero en la raíz, se bajará á la derecha de aquél la sección siguiente y se continuará la operación en la misma forma que se ha dicho.

La raíz cúbica de un número debe tener según la regla **195**, tantas cifras como secciones posea aquél.

196. *Un número que termine en un número de ceros no divisible por tres, no puede ser cubo perfecto.*

Pues cualquiera que fuese su raiz cúbica, ésta terminaría ó no en uno ó más ceros, y al elevarla al cubo carecería á su derecha de ceros ó si los tuviera éstos aparecerían en número igual al de los que tenia la citada raiz multiplicado por tres (**21**, COROLARIO 2.º).

Obsérvese que esta condición aunque necesaria para que un número que termine en ceros tenga raiz cúbica exacta, no es por sí sola suficiente, supuesto que pueden existir números que, á pesar de que terminan en un número de ceros múltiplo de tres, no son cubos perfectos.

III.

197. QUEBRADOS ORDINARIOS.—En la extracción de la raiz cúbica de estos números conviene distinguir tres casos: 1.º, que los dos términos sean cubos perfectos; 2.º, que sólo el denominador tenga raiz cúbica exacta; 3.º, que ninguno de los dos términos del quebrado sea cubo perfecto.

PRIMER CASO.—*Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuyos términos sean cubos perfectos, se extrae la raíz del numerador y se divide por la del denominador.*

En efecto; sea el quebrado $\frac{8}{27}$. Su raiz cúbica será $\frac{2}{3}$, en atención á que al elevar $\frac{2}{3}$ al cubo reproduce al número propuesto (189).

198. SEGUNDO CASO.—*Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuyo denominador sea cubo perfecto, no siéndolo el numerador, se extrae la raíz entera del numerador y ésta se divide por la exacta del denominador.* El quebrado que resulte será el valor de la raiz cúbica que se deseaba encontrar con un error menor que la unidad dividida por la raiz exacta del denominador.

En efecto; la raiz cúbica de $\frac{57}{125}$, se halla comprendida entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$; luego se diferenciará de cualquiera de estos dos quebrados en menos de $\frac{1}{5}$.

COROLARIO.—*Para extraer la raíz cúbica de un entero en menos de una parte alícuota de la unidad, se multiplica el entero por el cubo del denominador de la mencionada parte alícuota, se extrae la raíz cúbica entera del producto y el resultado se divide por el antedicho denominador.*

Si se quisiera determinar la raiz cúbica del entero a en menos de $\frac{1}{b}$, se tendría : $a=\frac{ab^3}{b^3}$ de donde $\sqrt[3]{a}=\frac{\sqrt[3]{ab^3}}{b}$ (1).

TERCER CASO.—*Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuyo denominador no sea cubo perfecto, se multiplican sus dos términos por el cuadrado del denominador, con cuyo motivo este caso queda reducido al anterior.*

Si el denominador del quebrado propuesto no fuese número primo, bastaría multiplicar sus dos términos solamente por los factores que necesita para que el denominador sea cubo perfecto.

Ejemplo : $\sqrt[3]{\frac{59}{360}}=\sqrt[3]{\frac{59\times3\times5^2}{360\times3\times5^2}}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$.

199. NÚMEROS DECIMALES. – Para extraer la raíz cúbica de estas fracciones, se les añaden á su derecha los ceros suficientes para que el número de cifras decimales sea múltiplo de tres; prescíndese luego de la coma, se extrae la raíz del número que resulta como si fuera todo él entero, y de la derecha de la raíz cúbica obtenida, se separan la tercera parte de cifras decimales que tuviere el número propuesto.

En efecto : $\sqrt[3]{0,93452}=\sqrt[3]{\frac{934520}{100^3}}=\frac{\sqrt[3]{934520}}{100}=0,97$.

De la igualdad (1) deducida (**198**, COROLARIO), se desprende que *para extraer la raíz cúbica de un entero en menos de una unidad decimal dada, se escribirá á la derecha de aquél tantas veces tres ceros como exprese el orden decimal que señale la aproximación; se extraerá la raíz cúbica del número que resulta, y á la derecha de ésta se separan las cifras decimales que marca el grado de aproximación deseado.*

Monedas antiguas.

200. Se dijo (**135**) cuáles eran las monedas en circulación cuyo valor se hallaba comprendido en las disposiciones superiores que están en vigor; por más que actualmente la mayoría de aquéllas se encuentra acuñada con anterioridad al año 1869; pero existen además de las citadas monedas, otras de oro y plata que no habiendo sido mandadas recoger por el Gobierno, pueden considerarse todavía como de uso legal en las transacciones.

Refiriendo estas unidades de numerario al *real vellón,* pieza de plata equivalente á 0,25 de peseta, se ha formado el siguiente cuadro :

MONEDAS DE

ORO.			PLATA.		
Onza anterior á 1772.	321 1/4	rs.	Escudo ó medio duro.	10	rs.
Id. posterior á 1772.	320	»	Peseta columnaria . .	5	»
Media onza	160	»	Media peseta column.ª	2 1/2	»
Coronilla vieja . . .	21 1/4	»	Real columnario. . . .	1 1/4	»

Estas monedas antiguas, exceptuando el escudo, se presentan con muy escasa frecuencia en el tráfico corriente.

Regla de percentaje.

Se entiende por PERCENTAJE el valor que corresponde á varias unidades homogéneas, en relación con el asignado á cien de éstas.

Según esta definición, los problemas que se refieren á la regla de interés simple y á la de descuento comercial, no son en realidad sino cuestiones de percentaje, supuesto que aquéllos y éstas reconocen como base para su resolución, principios esencialmente idénticos. Con tal motivo, cuando se trata, tanto en los unos como en las otras, de encontrar las respectivas soluciones, hay que servirse de una igualdad común que es la deducida en la regla de interés simple: $i=\frac{cr}{100}$. Reemplazando en ella p, percentaje, en lugar de i; se transformará en $p=\frac{cr}{100}$ ó $\frac{p}{r}=\frac{c}{100}$..... (1), de donde puede hallarse una cualquiera de las tres cantidades literales que en esta igualdad aparecen, conocidas que sean las otras dos.

Para formarse una idea aproximada de lo variadas y frecuentes que son las aplicaciones de esta regla, así como la sencilla manera de resolver los problemas que á ella pertenecen, bastará fijarse en los siguientes ejemplos:

1.º Teniendo que adicionar á una partida de 1238 hectólitros de vino un 3 p. % de aguardiente, ¿qué cantidad de este liquido, de igual graduación, será necesaria?

Haciendo en la igualdad (1) última $c=1238$ hectólitros y $r=3$, se tendrá $p=37,14$ hectólitros.

2.º En una partida de 1238 hectólitros de vino se han acetificado 6190 litros; ¿qué tanto por ciento de la totalidad corresponde al vino avinagrado?

Sustituyendo en la igualdad (1) en vez de p, 61,90 hectólitros, y en lugar de c, 1238 hectólitros, se obtiene para r el valor 5.

3.º Un comisionista percibe el 12 p. % del importe del vino que vende; en el supuesto de que aquél haya recibido por tal concepto de la casa que representa, 2094 pesetas, ¿qué cantidad im porta el vino vendido?

Reemplazando en la misma igualdad 12 por r y 2094 pesetas por p, se tiene para c, ó sea la incógnita, 17450 pesetas.

202. En el comercio la regla de percentaje tiene numerosas é importantes aplicaciones, entre las cuales pueden citarse las siguientes :

Seguros.—Las compañías de seguros se comprometen por medio de un resguardo (póliza), que entregan al interesado, á indemnizar á éste de los siniestros causados en su propiedad por el fuego, tormentas, etc., mediante el pago de cierta cantidad, llamada *prima* ó *premio,* que cada uno de los dueños abona por el objeto asegurado. La prima ó premio del seguro es generalmente un tanto por ciento del valor de la finca ú objeto que se asegura.

También se reducen á cuestiones de percentaje los *derechos de aduana,* ó sea lo que ha de pagarse al Estado por las mercancías importadas ó exportadas. Estos derechos se calculan de dos maneras distintas, según la índole de la mercancía : ó bien abonando una cantidad fija por cada objeto ó determinado número de ellos, ó bien abonando un tanto por ciento del importe de la mercancía.

Los corretajes son percentajes del importe de géneros ó valores que se abonan al *corredor* por su intervención en la compraventa de aquéllos.

Las taras, ó sea la rebaja que se hace del peso total de los fardos de mercancías por las cajas, barriles, sacos, etc., en que se hallan contenidas, también se calculan de dos maneras: á tanto por bulto y á tanto por ciento del peso total.

Compra y venta de papel del Estado.—Este papel consiste en unos documentos llamados *láminas,* que representan un valor nominal, el cual produce un interés constante. Las mencionadas láminas se venden ó *cotizan* en la *Bolsa* á un tanto por ciento, variable, de su valor nominal.

Los giros, cuyo premio es también un tanto por ciento de la cantidad girada; y, finalmente, los cambios entre dos poblaciones, los cuales se verifican *á la par,* á un tanto por ciento de *beneficio* ó de *daño,* según que el valor efectivo pagado en la primera es igual, menor ó mayor que el recibido en la segunda.

Regla de conjunta.

203. Esta regla llamada también de CAMBIO tiene por objeto *averiguar la relación que existe entre dos cantidades, sirviéndose para conseguirlo de otras relaciones intermedias que, siendo conocidas de antemano, ligan á las mencionadas cantidades.*

Los problemas que se resuelven por medio de esta regla son un caso particular de la de tres compuesta; y, en su consecuencia, todos ellos pueden resolverse por medio de varias proporciones y también por el método de reducción á la unidad. El procedimiento peculiar de la regla de que se trata es el más breve, y reconoce como fundamento el siguiente lema:

Si se multiplican ordenadamente varias equivalencias (*) *tales que el primer miembro de cada una de ellas sea de la misma especie que el segundo de la anterior, los productos obtenidos serán equivalentes, siendo el primero de la especie primera y el segundo de la última.*

$$4^a = 7^b \ (^{**})$$
$$9^b = 11^c$$
$$3^c = 8^d$$

Si se multiplican por 9 los dos miembros de la primera de las equivalencias que aparecen al margen, y por 7 los de la segunda, considerando al 9 y al 7 como si fueran números abstractos, se tendrá que

$$4.9^a = 7.9^b$$
$$7.9^b = 11.7^c$$

de donde se deduce que $4.9^a = 11.7^c$, lo cual manifiesta que la proposición es cierta cuando son dos los equivalencias que se consideran. De suerte que si ahora se multiplica la equivalencia que se acaba de obtener con la tercera de las propuestas, resultará como consecuencia que $4.9.3^a = 7 \times 11 \times 8^d$. Del mismo modo pudiera demostrarse que este lema es cierto cuando se tiene mayor número de equivalencias en las condiciones que determina su enunciado.

204. Según esto, para resolver los problemas de la regla de

(*) Se llama *equivalencia* la expresión de dos cantidades que teniendo el mismo valor se hallan referidas á unidades diferentes y separadas por el signo =. Ejemplo: 21 días=3 semanas.

(**) Las letras *a, b, c* y *d* significan aquí las diversas clases de unidades ó especies que intervienen en las equivalencias que se establecen.

conjunta *se empieza por establecer una equivalencia entre el número de unidades, cuya equivalencia se desea averiguar en unidades de otra especie, y el número desconocido de estas unidades; se escriben después las demás equivalencias teniendo cuidado de colocarlas de modo que el primer miembro de la siguiente sea de la misma especie que el segundo de la anterior, y se tendrá, procediendo de este modo, una serie de equivalencias que al multiplicarlas ordenadamente permitirá que se obtenga otra en la cual será fácil hallar el valor de la incógnita.*

Ejemplo.—Determinar el número de libras esterlinas que se han de cobrar en Londres por 3600 gallones de vino vendidos en Jerez á 476 pesetas el hectólitro, sabiendo que una libra esterlina equivale á 240 peniques, 35 gallones á 159 litros y 10 peniques á una peseta.

x lib. est.	=	3600 gall.
35 gall.	=	159 l.
1 l.	=	0,01 Hl.
1 Hl.	=	476 ptas.
1 pta.	=	10 pen.
240 pen.	=	1 lib. est.

Escritas las equivalencias que aparecen al margen, de conformidad con la regla que se acaba de exponer, resulta que al multiplicarlas ordenadamente, se tendrá $x\times35\times240$ lib. est.= =$3600\times159\times0{,}01\times476\times10$, lib. est., de donde

$$x=\frac{3600\times159\times0{,}01\times476\times10}{35\times240}=3243{,}6 \text{ libras esterlinas.}$$

Obsérvese que en los problemas de esta índole, el primer miembro de la primera equivalencia y el segundo de la última tienen que ser de la misma especie. Asimismo se comprende que el resultado final puede obtenerse más fácilmente, dividiendo por un mismo número los miembros de diferente nombre de dos equivalencias cualesquiera.

En el caso de que se deseara resolver este problema por medio de proporciones, á la manera que se hacía en la regla de tres compuesta; se dispondrá la operación en la forma que se ve al margen; y, si se tiene en cuenta que cada dos de las cantidades que intervienen en la cuestión han de ser equivalentes, la proporcionalidad que entre ellas exista tendrá que ser siempre directa (161), de

Gall.	L.	Hl.	Ptas.	Pen.	Lib. est.
35	1	1	1	240	1
3600	159	0,01	476	10	x

modo que, aplicando el teorema de las razones compuestas, se verificará que $\frac{x}{1}=\frac{3600\times159\times0,01\times476\times10}{35\times1\times1\times1\times240}$ de donde

$$x=\frac{3600\times159\times0,01\times476\times10}{35\times240}.$$

Este procedimiento además de comprobar el valor de x obtenido por medio de la regla de conjunta, manifiesta que esta regla es la síntesis de aquél.

Descuento matemático.

205. Si V' representa el valor actual ó efectivo de una letra ó pagaré, r el tanto por ciento de interés, t el tiempo á que dicho documento es pagadero y d' el descuento matemático, y si se tiene en cuenta que d' debe ser la ganancia del capital V' en el tiempo t, resultará que la igualdad $i=\frac{crt}{100}$, deducida en la regla de interés simple, se transformará ahora en $d'=\frac{V'rt}{100}$; pero siendo V' igual al exceso del valor nominal V de la letra sobre el descuento d', resultará que $d'=\frac{(V-d')rt}{100}$, de donde $100\ d'=$ $=Vrt-d'rt$, ó $100\ d'+d'rt=Vrt$; separando el factor común que existe en el primer miembro, se tendrá $d'(100+rt)=Vrt$; luego $d'=\frac{Vrt}{100+rt}$.

Como quiera que en el descuento comercial se acostumbra á que el tanto de descuento sea igual al tanto por ciento de interés, resulta de la comparación de las igualdades $d=\frac{Vrt}{100}$ y $d'=\frac{Vrt}{100+rt}$, que en la determinación del descuento comercial se opera con más facilidad que para la del matemático y que el valor obtenido para aquél es superior al de éste (71). La causa de esto es que en el descuento matemático, conocido también con el nombre de *descuento racional*, el tomador de la letra se limita á apropiarse estrictamente el interés que corresponde al valor actual ó efectivo de ésta, que es lo justo; al paso que en el comercial se verifica que por cada 100 unidades del valor nominal del pagaré, producen á quien lo toma r, y como solamente entrega su valor efectivo expresado por $100-r$, esto manifiesta que el tomador del documento no sólo percibe el interés que corresponde al valor actual de éste, sino también el interés del descuento; con cuyo motivo hace suyos los intereses de una cantidad que obra en su poder.

Determinando el descuento matemático en el problema propuesto (175), al exponer la regla del descuento comercial, se obtiene: $d' = \dfrac{45000 \times 4 \times \frac{70}{360}}{100 + 4 \times \frac{70}{360}} = 347{,}30$ pts. El interés de 347,30 pesetas $= \dfrac{347{,}3 \times 4 \times \frac{70}{360}}{100} = 2{,}70$ »

$$\overline{}$$

Luego resulta comprobado que 350,00 pesetas es igual al valor del descuento comercial de una letra de 45000 pesetas, pagadera al cabo de 70 días, siendo 4 el tanto por ciento de descuento.

FIN DE LA ARITMÉTICA.

ÍNDICE.

ERRATAS.

Pág.	Lín.	Dice	Debe decir
57	33	*unidades mayor*	*unidades ó mayor.*
60	15-16	producto de las decenas	de las decenas más las unidades.
143	20	hectómetro	hectómetro y decámetro cúbicos.
143	23	y milímetro	y milímetro cúbicos.
164	16	del quintal	de aquél.