PIZARRAS

DE

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

CON ARREGLO Á LOS PROGRAMAS PARA EL INGRESO EN LAS

ACADEMIAS MILITARES

POR

D. ILDEFONSO GÓMEZ DE SANTIAGO

INGENIERO MILITAR

Juan López

SEGUNDA EDICIÓN

TOLEDO

IMPRENTA, LIBRERÍA Y ENCUADERNACIÓN DE RAFAEL GÓMEZ-MENOR

Comercio, 57 y Sillería, 15.

1915

y haciendo operaciones resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b + 4\,a\,b\,\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C = (a-b)^2 + 4\,a\,b\,\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C = (a-b)^2 \left(1 + \frac{4\,a\,b\,\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2}\right)$$

la hipótesis será

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{4\,a\,b\,\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2}} = \frac{2\sqrt{ab}\,\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{a-b}$$

y substituyendo se tiene

$$c^2 = (a-b)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = (a-b)^2 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}\right) = (a-b)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

y extrayendo la raíz cuadrada se tiene

$$c = \frac{a-b}{\cos \varphi}$$

aplicándole el cálculo logarítmico resultará

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log 2 + \frac{1}{2} (\log a + \log b) + \log \operatorname{sen} \frac{1}{2} C - \log (a-b)$$

y esta fórmula nos dará el valor de $\log \operatorname{tg} \varphi$, y por las tablas conoceremos el ángulo φ; conocido este ángulo se calculará c por la fórmula

$$\log c = \log (a-b) - \log \cos \varphi$$

que nos resolverá el problema.

4.° caso. Datos a, b y c. Incógnitas A, B y C.

Sistema de ecuaciones. [3] $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C \end{cases}$

Fórmulas. [4] $\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \\ \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b} \end{cases}$

F

PIZARRAS
DE
TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA
CON ARREGLO Á LOS PROGRAMAS PARA EL INGRESO EN LAS
ACADEMIAS MILITARES
POR

D. ILDEFONSO GÓMEZ DE SANTIAGO
INGENIERO MILITAR

SEGUNDA EDICIÓN

TOLEDO
IMPRENTA, LIBRERÍA Y ENCUADERNACIÓN DE RAFAEL GÓMEZ-MENOR
Comercio, 57 y Sillería, 15.
1915

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

Lección 1.ª

Modo de fijar la posición de los elementos geométricos y regla de signos.

Consideraciones preliminares.

Comparación de los problemas resueltos por { Álgebra. / Geometría. } Ventajas é inconvenientes de una y otra.

Geometría Analítica.—Unión de las dos. { Exactitud. / Generalidad. / Claridad. }

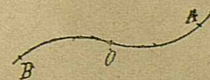
Modo de fijar la posición de un punto analíticamente.

Casos {
1.º El punto situado en una línea.
2.º El punto situado en un plano.
3.º El punto situado de cualquier modo en el espacio.
}

1.er caso. Se fijará el punto por su distancia á otro.

Ejemplo: El punto A por la distancia $O\,A$.

El punto B por la distancia $O\,B$.



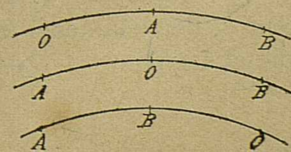
Origen.—Dirección.—Abscisa x.

Regla de los signos de Descartes.

$A\,B = X$ [1] $X = x' - x$

$O\,A = x$ [2] $X = x' + x$

$O\,B = x'$ [3] $X = x - x'$



$$\left.\begin{array}{l}\text{De la [1] } x = x' - X\\ \text{De la [2] } x = X - x'\end{array}\right\}$$ Aplicando estas dos fórmulas para valores iguales de X y x' dan signos contrarios é igual valor absoluto para x.

En las figuras se ve que los segmentos $O\ A$ van en direcciones contrarias.

$$\left.\begin{array}{l}\text{De la [2] } x' = X - x\\ \text{De la [3] } x' = x - X\end{array}\right\}$$ Iguales razonamientos hacen ver que los valores de x' son de signo contrario en las fórmulas [2] y [3] y de dirección contraria en las figuras correspondientes.

Si *convenimos* en considerar como negativos los segmentos contados en sentido contrario á como los considera la fórmula [1] las tres fórmulas se reducen á la [1].

Si se ponen de manifiesto los signos se tendrá:

$$\text{En la [1]}\begin{cases}+X\\+x'\\+x\end{cases}\qquad \text{En la [2]}\begin{cases}+X\\+x'\\-x\end{cases}\qquad \text{En la [3]}\begin{cases}+X\\-x'\\-x\end{cases}$$

y substituyendo estos valores con su signo explícito

$$\left.\begin{array}{lll}X = (+x') - (+x) & \text{ó} & X = x' - x\\ X = (+x') + (-x) & \text{ó} & X = x' - x\\ X = (-x) - (-x') & \text{ó} & X = x' - x\end{array}\right\}\ \text{la [1] es general.}$$

Observación.—Si los puntos A y B se permutaran en las figuras, tendríamos otros tres casos con otras tres fórmulas, que sólo se diferenciarían de las anteriores en que las letras x y x' estarían permutadas, y repitiendo iguales razonamientos, llegaríamos á la fórmula general; pero teniendo en cuenta que X cambia de signo, según el convenio, porque el segmento $A\ B$ está contado en contrario sentido, se tendrá:

$$-X = x - x' \quad \text{ó} \quad X = x' - x$$

que demuestra que la fórmula es cierta en todos los casos.

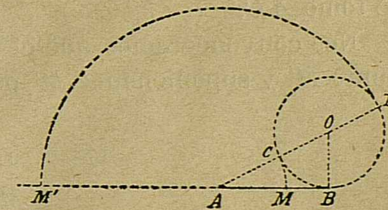
Enunciado del principio de Descartes.—Cuando la distancia de un punto á otro es susceptible de contarse en dos direcciones opuestas, según los diversos casos de una misma cuestión, bastará estudiar algebraicamente el problema en la hipótesis de una de ellas, y las fórmulas que nos resulten tendrán toda la generalidad apetecible, siempre que en las aplicaciones se cuenten en la dirección supuesta ó en la contraria los valores de aquellas fórmulas que tengan signo positivo ó negativo.

Este principio no se ha podido demostrar *á priori.*

Aplicación del principio de Descartes al problema de dividir una recta en media y extrema razón.

Enunciado.

$$\text{Planteo.}\ \begin{cases} A\,B = a \\ A\,M = x \\ B\,M = a - x \end{cases}$$



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \quad » \quad x^2 = a\,(a-x) \quad » \quad x^2 = a^2 - a\,x \quad » \quad x^2 + a\,x - a^2 = 0$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \quad [\alpha] \qquad \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} > \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Una raiz es positiva y la otra negativa.

$$\text{Estas raices serán} \left\{ \begin{array}{l} +\left(\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2} - \dfrac{a}{2}\right) \\ -\left(\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2} + \dfrac{a}{2}\right) \end{array} \right\} [\alpha']$$

Construcción geométrica.

$\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2}$ = hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $\dfrac{a}{2}$ y a (triángulo $A\ O\ B$).

Disminuyendo ó aumentando $\frac{a}{2} = O\,C = O\,D$ se tiene:

$$x' = + (A\,O - O\,C) = A\,C$$
$$x'' = - (A\,O + O\,D) = A\,D$$

Interpretación de la raíz x''. Enunciado más general.

Si el principio de Descartes es cierto para este problema, debe tomarse $A\,D$ en dirección contraria á como se tomó $A\,C$.

Nos convenceremos que el principio de Descartes es cierto para este problema planteándolo en el caso del punto M' y suponiendo $A\,M'$ positivo.

$$\text{Planteo}\begin{cases} A\,B = a \\ A\,M' = x \\ B\,M' = a + x \end{cases}$$

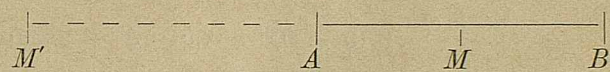
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a+x} \quad \text{ó} \quad x^2 = a\,(a+x) \quad » \quad x^2 - a\,x - a^2 = 0 \quad » \quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \qquad [\beta]$$

Una raíz es positiva y la otra negativa por las mismas razones que anteriormente. Estas raíces serán:

$$\left.\begin{aligned} x' &= + \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} + \frac{a}{2}\right) \\ x'' &= - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2}\right) \end{aligned}\right\} \text{En la otra hipótesis resultó:} \left\{\begin{aligned} x' &= + \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2}\right) \\ x'' &= - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} + \frac{a}{2}\right) \end{aligned}\right.$$

Valores iguales y de signo contrario á los obtenidos ahora para iguales valores de a. Esto nos dice que cuando la fórmula [α] nos dé para x un valor negativo, la fórmula que debe emplearse es la [β], que dará el mismo valor absoluto, pero positivo, y que según su hipótesis debe contarse en sentido contrario á la dirección supuesta positiva en la [α]; luego en virtud del convenio establecido la fórmula [α] es general.

El principio de Descartes se verifica también en el caso de que las dos raíces sean positivas, porque tomando el origen en B y haciendo el planteo en los dos casos se tendrá:



$$\begin{array}{l} \text{Origen en } B \\ \text{Punto en } M \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A\,B = a \\ B\,M = x \\ A\,M = a - x \end{array} \right\} \frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{x} \quad \text{»} \quad (a-x)^2 = a\,x$$

$$\begin{array}{l} \text{Origen en } B \\ \text{Punto en } M' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A\,B = a \\ B\,M' = x \\ A\,M' = x - a \end{array} \right\} \frac{a}{x-a} = \frac{x-a}{x} \quad \text{»} \quad (x-a)^2 = a\,x$$

y en los dos casos desarrollando se tendrá:

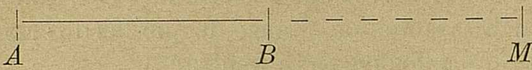
$$a^2 - 2\,a\,x + x^2 = a\,x \quad \text{ó} \quad x^2 - 3\,a\,x + a^2 = 0$$

de donde

$$x = \frac{3\,a}{2} \pm \sqrt{\frac{9\,a^2}{4} - a^2} = \frac{3\,a}{2} \pm \sqrt{\frac{9\,a^2 - 4\,a^2}{4}} = \frac{3\,a}{2} \pm \sqrt{\frac{5\,a^2}{4}} = \frac{a}{2}\,3 \pm \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}\,(3 \pm \sqrt{5})$$

y por último $\left\{ \begin{array}{l} x' = \dfrac{a}{2}\,(3 + \sqrt{5}) \\ x'' = \dfrac{a}{2}\,(3 - \sqrt{5}) \end{array} \right\}$ Como $3 - \sqrt{5} > 0$ se tendrá que x' y x'' son positivas, y como los mismos valores dan los dos planteos, se deduce que el principio de Descartes se sigue verificando.

Veamos cómo nos dice el Álgebra que el caso considerado es imposible. Planteemos el problema para el punto M''.



$$\text{Origen en } B \atop \text{Punto en } M'' \left\{ \begin{array}{l} A\,B = a \\ B\,M'' = x \\ A\,M'' = a + x \end{array} \right\} \frac{a}{a+x} = \frac{a+x}{x} \text{ » } (a+x)^2 = a\,x \text{ » } a^2 + 2\,a\,x + x^2 = a\,x \text{ » } x^2 + a\,x + a^2 = 0$$

de donde

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a^2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4a^2}{4}} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-3a^2}{4}} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{-3} = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}).$$

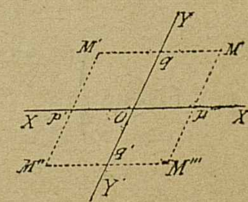
Interpretación de las soluciones imaginarias en la resolución de los problemas.

Lección 2.ª

Modo de fijar la posición de un punto y una recta analíticamente.

2.º caso. Modo de fijar analíticamente la posición de un punto en un plano.

Proyecciones del punto M, p y q; estas proyecciones se determinan por las distancias $o\,p$ y $o\,q$.



Cuando se conoce M se conocen $o\,p$ y $o\,q$.

Si se conocen $o\,p$ y $o\,q$ se conoce M.

$$M\left\{\begin{array}{l} o\,p = x \\ o\,q = y \end{array}\right. \text{ » } o\,q = p\,M \quad \left.\begin{array}{l} o\,p = x \\ p\,M = y \end{array}\right\} \text{Coordenadas, ordenada } y, \text{ abscisa } x.$$

Signos de las coordenadas.—Poniendo de manifiesto los signos y suponiendo que las letras no indiquen más que el valor absoluto, se tendrá:

$$M \begin{cases} x = +\,o\,p \\ y = +\,p\,M \end{cases} \quad M' \begin{cases} x = -\,o\,p' \\ y = +\,p'\,M' \end{cases} \quad M'' \begin{cases} x = -\,o\,p' \\ y = -\,p'\,M'' \end{cases} \quad M''' \begin{cases} x = +\,o\,p \\ y = -\,p\,M''' \end{cases}$$

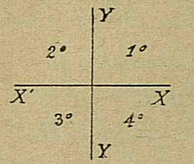
Coordenadas rectangulares.—Cuadrantes.

1.er Cuadrante las dos positivas.

2.º » x negativa é y positiva.

3.º » las dos negativas.

4.º » x positiva é y negativa.



3.er caso. Modo de fijar analíticamente la posición de un punto en el espacio.

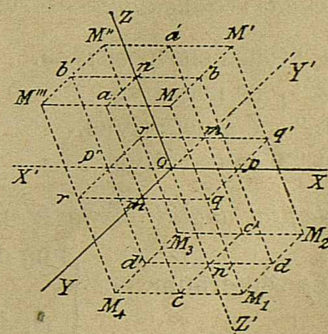
Proyecciones del punto M sobre los ejes

$$p,\ m,\ n$$

Estas proyecciones se conocen por las distancias

$$o\,p,\ o\,m,\ o\,n$$

Estas distancias determinan el punto, porque cuando se conoce M se conoce $\begin{cases} o\,p \\ o\,m \\ o\,n \end{cases}$ y si se conoce $\begin{cases} o\,p \\ o\,m \\ o\,n \end{cases}$ se conoce M.



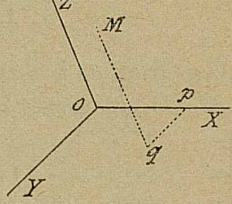
Desde el punto de o al punto M hay seis caminos por medio de líneas poligonales alabeadas cuyos lados son las tres coordenadas $o\,p$, $o\,m$ y $o\,n$

$$M \begin{cases} o\,p = x & \text{»} & x = o\,p \\ o\,m = y & o\,m = p\,q & y = p\,q \\ o\,n = z & o\,n = q\,M & z = q\,M \end{cases}$$

que son las coordenadas del punto M en el espacio $\begin{cases} z \\ y \\ x \end{cases}$ $\begin{matrix} \left.\begin{matrix} z \\ y \end{matrix}\right\} \text{Ordenadas.} \\ x \quad \text{Abscisa.} \end{matrix}$

Cómo se dibujan las coordenadas.

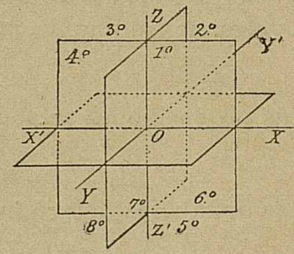
Signos de las coordenadas.—Poniéndolos de manifiesto como anteriormente, serán:



$$M\left\{\begin{array}{l} x=+\,o\,p \\ y=+\,p\,q \\ z=+\,q\,M\end{array}\right.\qquad M'\left\{\begin{array}{l} x=+\,o\,p \\ y=-\,p\,q' \\ z=+\,q'M'\end{array}\right.\qquad M''\left\{\begin{array}{l} x=-\,o\,p' \\ y=-\,p'\,r' \\ z=+\,r'\,M''\end{array}\right.\qquad M'''\left\{\begin{array}{l} x=-\,o\,p' \\ y=+\,p'\,r \\ z=+\,r\,M'''\end{array}\right.$$

$$M_1\left\{\begin{array}{l} x=+\,o\,p \\ y=+\,p\,q \\ z=-\,q\,M_1\end{array}\right.\qquad M_2\left\{\begin{array}{l} x=+\,o\,p \\ y=-\,p\,q' \\ z=-\,q'M_2\end{array}\right.\qquad M_3\left\{\begin{array}{l} x=-\,o\,p' \\ y=-\,p'\,r' \\ z=-\,r'\,M_3\end{array}\right.\qquad M_4\left\{\begin{array}{l} x=-\,o\,p' \\ y=+\,p'\,r \\ z=-\,r\,M_4\end{array}\right.$$

Coordenadas rectangulares.—Triedros trirrectangulares.—Numeración.

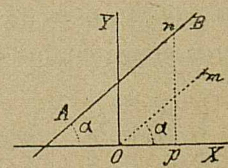


En el 1.° todas son positivas.
En el 2.° y es negativa.
En el 3.° x é y negativas.
En el 4.° x es negativa.
En el 5.° z es negativa.
En el 6.° y y z negativas.
En el 7.° las tres negativas.
En el 8.° x y z negativas.

Modo de fijar analíticamente la posición de una recta.

Una recta se determina por { uno de sus puntos: Por sus coordenadas. y su dirección: Angulo que forma esta recta con la parte positiva del eje de las X.

El ángulo dirección es igual al que forma con la parte positiva del eje X la paralela $o\,m$ trazada por el origen » α.

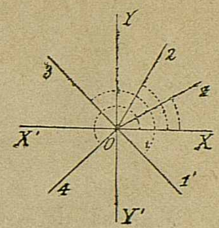


Cómo varía la magnitud-dirección y signos de dicha magnitud.

Los ángulos que dan la misma dirección, son los comprendidos en la fórmula

$$\alpha \pm 2\,n\,\pi.$$

De aquí que una misma dirección pueda darse por un ángulo negativo ó positivo. Si se nos da una dirección por un ángulo negativo, puede transformarse éste en positivo sin variar la dirección.

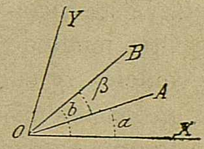


Ejemplo: Dirección de (-1427°) = dirección de $(-1427^\circ + 360^\circ \times 4)$ = dirección de $(1440^\circ - 1427^\circ)$ = dirección de $(+13^\circ)$.

Cuando se dé la recta se conocerá: Las coordenadas de un punto y la dirección.— Recíprocamente.

Problema.—Hallar el ángulo que forman dos rectas dadas analíticamente.

Resolución del problema. Discusión

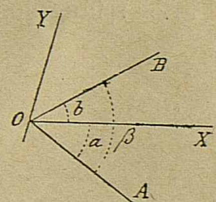


$$[1] \quad \beta = b - a \quad » \quad a = b - \beta$$

$$[2] \quad \beta = b + a \quad » \quad a = \beta - b \quad » \quad b = \beta - a$$

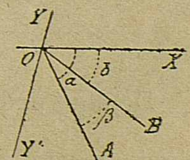
$$[3] \quad \beta = a - b \quad » \quad b = a - \beta$$

Poniendo de manifiesto los signos, según convenio, se tendrá:



$$\left.\begin{array}{lll} [1] \quad \beta = b - a & » & \beta = b - a \\ [2] \quad \beta = b + (-a) & » & \beta = b - a \\ [3] \quad \beta = -a - (-b) & » & \beta = b - a \end{array}\right\} \beta = b - a$$

Observación.—Si permutamos las letras A y B en las figuras, permutaríamos las a y b en las fórmulas, y teniendo en cuenta que β es negativo, según el convenio, se tendrá:



$$-\beta = a - b \quad \text{ó} \quad \beta = b - a$$

Regla que se deduce.

Lección 3.ª

Definición de las líneas trigonométricas.

Manera de introducir en los cálculos los elementos que fijan un punto.

Inconvenientes que presentan los elementos que fijan una recta para introducirlos en los cálculos. Modo de evitar este inconveniente rectificando el arco. Defectos de este medio.

Otro modo de evitar este inconveniente. Buscar relaciones tales, que cuando se conozca el ángulo se conozca la relación, y cuando se conozca la relación se conozca el ángulo. Trigonometría, su definición.

Relaciones trigonométricas.—Angulo $X\,O\,M$.

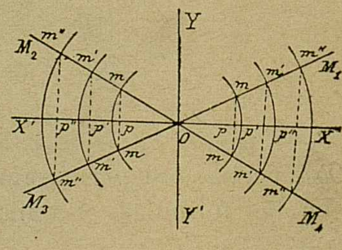
Representaremos por la letra M una cualquiera de la figura con el subíndice 1, 2, 3 ó 4 y por $m\,m'\,m''$, $p\,p'\,p''$ los correspondientes al ángulo que se escoja.

Los triángulos rectángulos $o\,m\,p$, $o\,m'\,p'$, $o\,m''\,p''$ dan

$$\frac{m\,p}{o\,m} = \frac{m'\,p'}{o\,m'} = \frac{m''\,p''}{o\,m''} = \ldots\ldots = \frac{y}{r} = \text{constante}$$

$$\frac{o\,p}{o\,m} = \frac{o\,p'}{o\,m'} = \frac{o\,p''}{o\,m''} = \ldots\ldots = \frac{x}{r} = \text{constante}$$

$$\frac{m\,p}{o\,p} = \frac{m'\,p'}{o\,p'} = \frac{m''\,p''}{o\,p''} = \ldots\ldots = \frac{y}{x} = \text{constante}$$



De aquí deducimos que son constantes las relaciones $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}$ y sus inversas $\frac{r}{x}$, $\frac{r}{y}$, $\frac{x}{y}$ y, por tanto, las siguientes definiciones:

Se llama seno la relación constante que hay entre la ordenada y el radio. » $\dfrac{y}{r}$

Coseno es la relación constante entre la abscisa y el radio. » $\dfrac{x}{r}$

Tangente es la relación constante entre la ordenada y la abscisa. » $\dfrac{y}{x}$

Cosecante es la relación constante entre el radio y la ordenada. » $\dfrac{r}{y}$

Secante es la relación constante entre el radio y la abscisa. » $\dfrac{r}{x}$

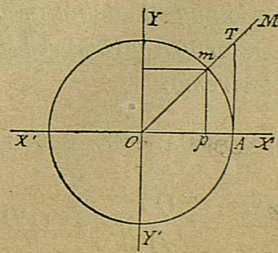
Cotangente es la relación constante entre la abscisa y la ordenada. » $\dfrac{x}{y}$

Abreviaciones que se emplean en el cálculo: sen. cos. tg. cosec. sec. cot.

Para los ángulos ó por una sola letra, por una letra para cada lado ó por las tres letras como en Geometría.

Ejemplos: cos a « sec (X, Y) » cot A o B.

Caso en que el radio es igual á la unidad. Seno. sen $(M, X) = \dfrac{y}{r} = y$.



Seno de un arco es la parte de perpendicular trazada por el extremo del arco al diámetro que pasa por el origen, ó bien la mitad de la cuerda de arco doble.

Coseno. cos $(M, X) = \dfrac{x}{r} = x$.

Coseno de un arco es la distancia que hay desde el centro al pie del seno.

$$\left.\begin{array}{l}\text{TANGENTE.}\quad \operatorname{tg}(M, X) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{m\,p}{o\,p} \\ \text{Trig.}^{\text{os}}\text{ semejantes } o\,m\,p \text{ y } O\,T\,A\ \dfrac{mp}{o\,p} = \dfrac{T\,A}{O\,A}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}(M, X) = \dfrac{T\,A}{O\,A} \\ O\,A = r = 1\end{array}\right\} \operatorname{tg}(M, X) = A\,T$$

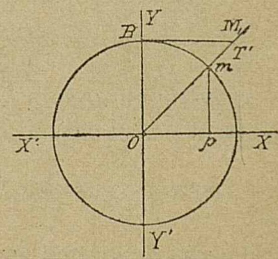
Tangente de un arco es la parte de tangente geométrica trazada en el origen del arco y comprendida entre dicho punto y el diámetro que pasa por el extremo.

$$\left.\begin{array}{l}\text{SECANTE.}\quad \sec(M, X) = \dfrac{r}{x} = \dfrac{o\,m}{o\,p} \\ \text{Trig.}^{\text{os}}\text{ semejantes } o\,m\,p \text{ y } O\,T\,A\ \dfrac{o\,m}{o\,p} = \dfrac{O\,T}{O\,A}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\sec(M, X) = \dfrac{O\,T}{O\,A} \\ O\,A = r = 1\end{array}\right\} \sec(M, X) = O\,T$$

Secante de un arco es la parte de secante geométrica que pasa por su extremo y comprendida entre el centro y el punto en que corta á la tangente trazada desde el origen.

$$\left.\begin{array}{l}\text{COTANGENTE.}\quad \cot(M, X) = \dfrac{x}{y} = \dfrac{o\,p}{m\,p} \\ \text{Trig.}^{\text{os}}\text{ semejantes } o\,m\,p \text{ y } O\,B\,T'\ \dfrac{o\,p}{mp} = \dfrac{B\,T'}{O\,B}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\cot(M, X) = \dfrac{B\,T'}{O\,B} \\ O\,B = r = 1\end{array}\right\} \cot(M, X) = B\,T'$$

Cotangente de un arco es la parte de tangente geométrica trazada en un punto situado á 90° de su origen y comprendida entre dicho punto y el de intersección con el diámetro que pasa por su extremo.



COSECANTE. $\operatorname{cosec}(M, X) = \dfrac{r}{y} = \dfrac{o\,m}{m\,p}$ » Trig.os semejantes $o\,m\,p$ y $O\,T\,B$

$\dfrac{o\,m}{m\,p} = \dfrac{O\,T'}{O\,B}$ » $O\,B = 1$ $\operatorname{cosec}(M, X) = O\,T'$.

Cosecante de un ángulo es la parte de secante geométrica que pasa por el extremo del arco, comprendida entre el centro y el punto en que corta á la tangente trazada á 90° del origen.

Por qué se le han dado los nombres de sen. tg. sec.

Por qué los de cos. cot. cosec.

Otras líneas trigonométricas.—Seno-verso es la parte de radio comprendida entre el origen y el pie del seno. Coseno-verso es el seno-verso del arco complementario.

Las mitades de estas líneas reciben los nombres de *verso* y *coverso*.

Suverso y *sucoverso* son, respectivamente, el verso y coverso de lo que le falta al arco para valer 180° ó 270°.

Ejemplo. seno-verso $\alpha = n\,A$

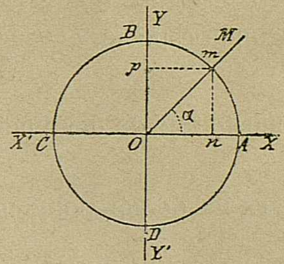
coseno-verso $\alpha = p\,B$

verso $\alpha = \dfrac{1}{2}\,n\,A$

coverso $\alpha = \dfrac{1}{2}\,p\,B$

suverso $\alpha = \dfrac{1}{2}\,n\,C$

sucoverso $\alpha = \dfrac{1}{2}\,p\,D$



Manera de determinar los senos de algunos arcos.—Si conociéramos la cuerda del arco doble, su mitad sería el seno. Cuando la cuerda de este arco doble es el lado de algún polígono regular que lo conozcamos en función del radio, haciendo $R = 1$ y tomando la mitad se tendrá el seno.

Ejemplo.—Triángulo. $l = R\sqrt{3} = \sqrt{3}$ haciendo $R = 1$. Valor gradual del arco $\dfrac{1}{3}\,360° = 120°$ » sen $60° =$ $\dfrac{1}{2}$ cuerda $120° = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

Cuadrado. $l = R\sqrt{2} = \sqrt{2}$ para $R = 1$. Valor gradual del arco $= \frac{1}{4}\,360^\circ = 90^\circ$; luego sen $45^\circ = \frac{1}{2}$ cuerda $90^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Pentágono convexo. $l = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{2}}$ para $R = 1$. Valor gradual del arco $\frac{1}{5}\,360^\circ = 72^\circ$; luego sen $36^\circ = \frac{1}{2}$ cuerda de $72^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Pentágono estrellado de segunda especie. $l = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ para $R=1$, arco $= \frac{1}{5} \times \times 2 \times 360 = \frac{1}{5}\,720 = 144^\circ$ puesto que da dos vueltas, luego sen $72^\circ = \frac{1}{2}$ cuerda de $144^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Repitiendo igual cálculo para los demás polígonos, encontramos los siguientes resultados:

sen $18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ » sen $30^\circ = \frac{1}{2}$ » sen $36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ » sen $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

sen $60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ » sen $72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ » sen $108^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$.

Lección 4.ª

Variación de las líneas trigonométricas.

Cuando el ángulo es nulo............... $\begin{cases} x = r. \\ y = o. \end{cases}$

Si crece de 0º á 90º..................... $\begin{cases} x \text{ dim.} \\ y \text{ aum.} \end{cases}$

Si es igual á 90º........................ $\begin{cases} x = o. \\ y = r. \end{cases}$

Si crece de 90º á 180º.................. $\begin{cases} x \text{ neg.}^{\text{o}} \text{ aum.} \\ y \text{ dim.} \end{cases}$

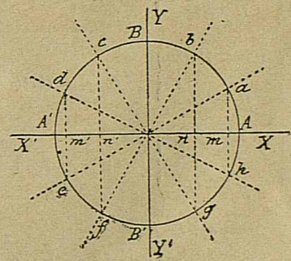
Cuando el ángulo es igual á 180º......... $\begin{cases} x = -r. \\ y = o. \end{cases}$

Cuando crece desde 180º á 270º.......... $\begin{cases} x \text{ neg.}^{\text{o}} \text{ dim.} \\ y \text{ neg.}^{\text{o}} \text{ aum.} \end{cases}$

Cuando es igual á 270º.......... ...... $\begin{cases} x = o. \\ y = -r. \end{cases}$

Cuando crece de 270º á 360º......... ... $\begin{cases} x \text{ aum.} \\ y \text{ neg.}^{\text{o}} \text{ dim.} \end{cases}$

Cuando es igual á 360º.......... .... $\begin{cases} x = r. \\ y = o. \end{cases}$



Cuando el ángulo crece más de 360º, x é y pasarán por los mismos valores.

Conocido el modo de variar de x é y, pueden conocerse las variaciones de las líneas trigonométricas que son cocientes ó relaciones en que entrarán estas cantidades variables, obteniéndose por este medio las variaciones consignadas en el siguiente cuadro:

Angulos.	Valores de x é y.	sen $\frac{y}{r}$	cos $\frac{x}{r}$	tg $\frac{y}{x}$	cosec $\frac{r}{y}$	sec $\frac{r}{x}$	cot $\frac{x}{y}$
0°	$x=r$ $y=o$	0	$+1$	0	$+\infty$	$+1$	$+\infty$
0° á 90°	$x=d$ $y=a$	a	d	a	d	a	d
90°	$x=o$ $y=r$	$+1$	0	$\pm\infty$	$+1$	$\pm\infty$	0
90° á 180°	$x=n.a$ $y=d$	d	$n.a$	$n.d$	a	$n.d$	$n.a$
180°	$x=-r$ $y=o$	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$
180° á 270°	$x=n.d$ $y=n.a$	$n.a$	$n.d$	a	$n.d$	$n.a$	d
270°	$x=o$ $y=-r$	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$	0
270° á 360°	$x=a$ $y=n.d$	$n.d$	a	$n.d$	$n.a$	d	$n.a$
360°	$x=r$ $y=o$	0	$+1$	0	$\mp\infty$	$+1$	$\mp\infty$

Observaciones.

1.ª En el primer cuadrante son todas las líneas positivas.

En el segundo son positivas el seno y la cosecante.

En el tercero son positivas la tangente y la cotangente.

En el cuarto son positivas el coseno y la secante.

2.ª Creciendo el ángulo más de 360° las líneas pasarán por los mismos valores anteriores.

De aquí se deduce que los ángulos

$$\alpha \quad » \quad \alpha \pm 2\,n\,\pi$$

tienen las mismas líneas

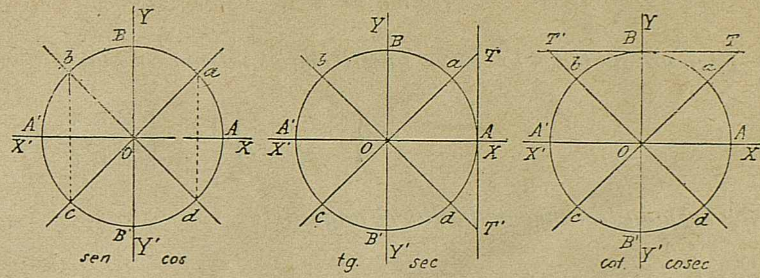
3.ª Que prescindiendo del signo, las líneas toman en todos los cuadrantes los mismos valores absolutos que en el primero.

4.° Que las líneas varían entre los siguientes límites:

$$\left.\begin{matrix}\text{sen}\\ \text{cos}\end{matrix}\right|\ +1 \text{ á } -1 \qquad \left.\begin{matrix}\text{tg}\\ \text{cot}\end{matrix}\right|\ +\infty \text{ á } -\infty \qquad \left.\begin{matrix}\text{sec}\\ \text{cosec}\end{matrix}\right|\ \begin{matrix}+1 \text{ á } +\infty\\ \text{y}\\ -1 \text{ á } -\infty\end{matrix}$$

De aquí se deduce que cualquier número

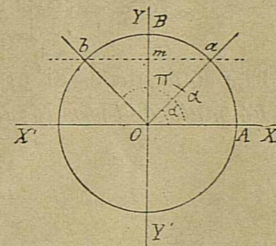
de la escala de la realidad, positivo ó negativo, puede ser tangente ó cotangente de un ángulo, y que de estos números sólo pueden ser seno ó coseno los menores que la unidad y los demás secant e y cosecante.



Estudio de la variación de las líneas geométricamente. Se supone el radio la unidad.

De lo estudiado se deduce que cuando se nos dé un ángulo, podemos conocer sus líneas trigonométricas. Veamos ahora el problema inverso.

1.° *Dado el seno hallar el ángulo.*



Dato. $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = p \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r} \end{array}\right\} \dfrac{y}{r} = p \quad » \quad y = p\,r \quad » \quad o\,m = p\,r \quad » \quad \dfrac{o\,m}{o\,a} = \dfrac{p\,r}{r} = p$

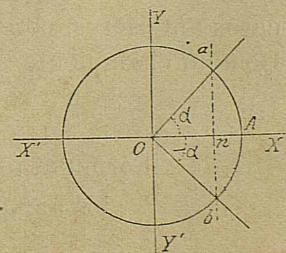
Soluciones. Angulos $\left\{\begin{array}{l} A\,o\,a = \alpha \\ A\,o\,b = \pi - \alpha \end{array}\right.$

Para que el problema sea posible $o\,m \leqq o\,B \quad » \quad y \leqq r \quad » \quad p\,r \leqq r \quad » \quad p \leqq 1$

Fórmula de todos los ángulos que tienen el mismo seno.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \\ \pi - \alpha \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha + 2\,n\,\pi \\ \pi - \alpha + 2\,n\,\pi \end{array}\right. \qquad n \gtrless o \quad \left\{\begin{array}{l} 2\,n\,\pi + \alpha \\ (2\,n + 1)\,\pi - \alpha \end{array}\right.$$

2.° *Dado el coseno hallar el ángulo.*



Dato. $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = q \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \end{array}\right\} \dfrac{x}{r} = q \quad » \quad x = q\,r \quad » \quad o\,n = q\,r \quad » \quad \dfrac{o\,n}{o\,a} = \dfrac{q\,r}{r} = q$

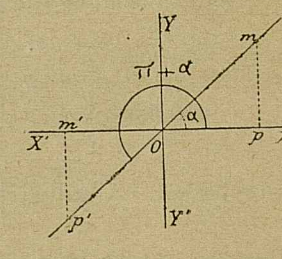
Soluciones. Angulos $\begin{cases} A\,o\,a = +\alpha \\ A\,o\,b = -\alpha \end{cases}$. Para que el problema sea posible $o\,n \leqq o\,A$ » $q\,r \leqq r$ » $q \leqq 1$

Fórmula de todos los arcos que tienen el mismo coseno.

$$\begin{cases} +\alpha \\ -\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} +\alpha + 2\,n\,\pi \\ -\alpha + 2\,n\,\pi \end{cases} \quad » \quad n \gtrless 0 \quad » \quad 2\,n\,\pi \pm \alpha$$

3.° Dada la tangente hallar el ángulo.

Dato. $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = t \\ \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \dfrac{y}{x} = t$ » $y = t\,x$ » $m\,p = t\,x$ » $\dfrac{m\,p}{o\,p} = \dfrac{t\,x}{x} = t$



El problema es siempre posible.

Fórmula de todos los arcos que tienen la misma tangente.

$$\begin{cases} \alpha \\ \pi + \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + 2\,n\,\pi \\ \pi + \alpha + 2\,n\,\pi \end{cases} \quad \left.\begin{cases} 2\,n\,\pi + \alpha \\ (2\,n + 1)\,\pi + \alpha \end{cases}\right\} N\,\pi + \alpha$$

Si los datos fueran la cosecante, la secante ó la cotangente, tomando sus inversas nos hallaríamos en uno de los casos anteriores, obteniendo iguales fórmulas para los ángulos que tengan esas mismas líneas.

De aquí el siguiente cuadro:

Fórmulas que comprenden todos los ángulos que tengan.....	El mismo seno ó cosecante........	$2\,n\,\pi + \alpha$; $(2\,n + 1)\,\pi - \alpha$
	La misma tangente ó cotangente..	$N\,\pi + \alpha$
	El mismo coseno ó secante.......	$2\,n\,\pi \pm \alpha$

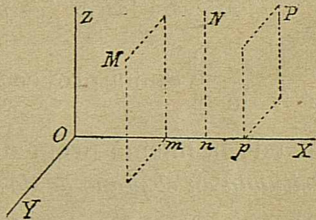
Lección 5.ª

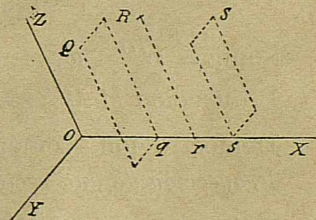
Proyecciones.

Proyección de un punto sobre una recta.

$$\text{Definición.—Proyección} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ortogonal.} \\ \text{Oblicua.} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Proyección} & M.....m \\ \text{»} & N.....n \\ \text{»} & P.....p \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{Ortogo-} \\ \text{nales.} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Proyección} & Q..... q \\ \text{»} & R..... r \\ \text{»} & S..... s \end{array} \right\} \text{Oblicuas.}$$





Proyección de una recta sobre un eje.—Definición.—Dirección de la proyección.

Proyección de $MN = mn$

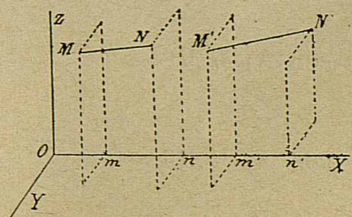
» de $NM = nm = -mn$

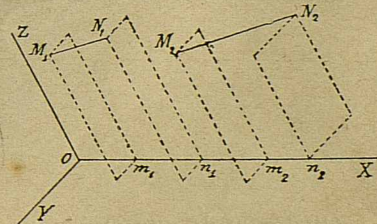
Proyección positiva y negativa.

Punto M, coordenadas $x\ y\ z$

» N » $x'\ y'\ z'$

Cualquiera que sea la colocación de los puntos M, N, m, n y o, se tendrá:



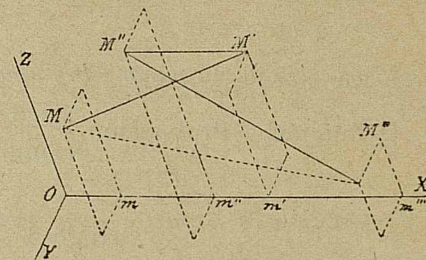


$$mn = on - om \left\{ \begin{array}{l} on = \text{abscisa de } N = x' \\ om = \quad \text{»} \qquad M = x \end{array} \right\} \text{Proyección de } MN = mn = x' - x$$

$$\text{De aquí se deduce}\left\{\begin{array}{llll} \text{Proyección de } MN & \text{sobre el eje} & X = x' - x \\ \text{»} \quad MN & \text{»} \quad \text{»} & Y = y' - y \\ \text{»} \quad MN & \text{»} \quad \text{»} & Z = z' - z \end{array}\right.$$

Suma algebraica de las proyecciones de los lados de una línea quebrada (plana ó alabeada) sobre un eje.

TEOREMA. *La suma algebraica de las proyecciones,* etc.



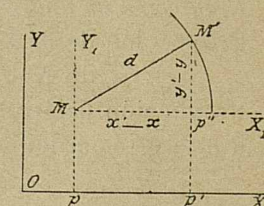
$$\begin{array}{lll} \text{Proyección } M\ M' & = x' & - x \\ \text{»} \quad M'\ M'' & = x'' & - x' \\ \text{»} \quad M''\ M''' & = x''' & - x'' \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Suma} = x''' - x \\ \text{Proyección } M\,M''' = x''' - x \end{array}\right\} \text{Suma proyecciones} = \text{Proyección } M\,M'''$$

Demostración geométrica de la misma propiedad.

Proyección de una recta situada en el plano de dos ejes coordenados sobre estos ejes.

$p\,p' = x' - x$ » $M'\,p'' = M'\,p' - p'\,p'' = M'\,p' - M\,p = y' - y$ » $M\,M' = d.$



En los ejes X_1 é Y_1 se tendrá:

$$\text{sen } X_1\,M\,M' = \frac{y' - y}{d} \quad \text{»} \quad d \text{ sen } X_1\,M\,M' = y' - y$$

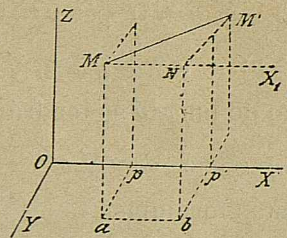
$$\cos X_1\,M\,M' = \frac{x' - x}{d} \quad \text{»} \quad d \cos X_1\,M\,M' = x' - x$$

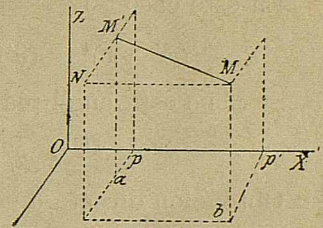
Observando que el ángulo $X_1\,M\,M' = (d,\ X)$ se tendrá:

$$y' - y = d \text{ sen } (d,\ X)$$
$$x' - x = d \cos (d,\ X)$$

Traducción al lenguaje vulgar de estas fórmulas.

TEOREMA. *La proyección ortogonal de una recta sobre otra es igual,* etc.



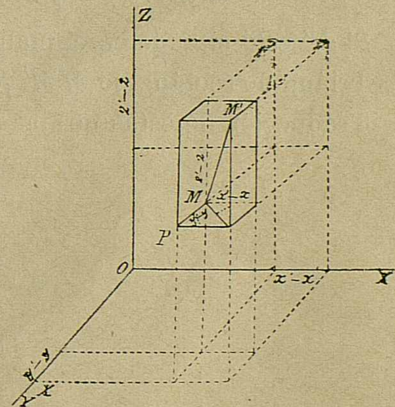


En el mismo plano, la última fórmula anterior demuestra el teorema. Demostración cuando la recta y el eje se cruzan.

$$MN = MM' \cos(d, X_1) \left\{ \begin{array}{l} MN = pp' = x' - x \\ \cos(d, X_1) = \cos(d, X) \end{array} \right\} x' - x = d \cos(d, X)$$

Hallar la distancia entre dos puntos dados por sus coordenadas rectangulares.

Paralelepípedo rectángulo.—Modo de formarlo.



$$\text{Aristas de este paralelepípedo.} \left\{ \begin{array}{l} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{array} \right.$$

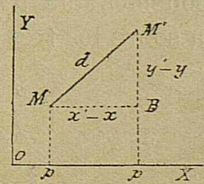
$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \quad » \quad d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

Traducción de esta fórmula al leguaje ordinario.

Caso en que los puntos M y M' estén en el plano de las $x\,y$ » $z' = 0$ » $z = 0$

$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \quad \text{ó} \quad d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

Obtención directa de estas fórmulas.



Triángulo rectángulo $M\,M'\,B$ » $\overline{MM'}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BM'}^2$

$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \quad » \quad d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

Caso en que el punto M coincida con el origen.

En este caso » $x = 0$ » $y = 0$ » $z = 0$

$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x'^2 + y'^2 \text{ » } d = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Si M no está en el plano de las $x\,y$ se tendrá:

$$d^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \text{ ó } d = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

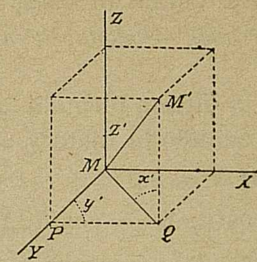
Obtención directa de estas fórmulas.

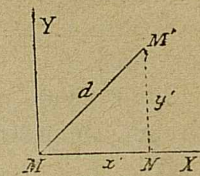
$$d^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \text{ ó } d = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Si M' está situado en el plano de las $x\,y$.

Triángulo rectángulo $M\,M'\,N$ » $d^2 = x'^2 + y'^2$ ó $d = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Traducción de estas formas al lenguaje corriente.





Lección 6.ª

Proyecciones (continuación).

Si suponemos una recta de longitud d y cuyos extremos tengan por coordenadas $x\,y\,z$ y $x'\,y'\,z'$ proyectando esta recta sobre los tres ejes se podrá escribir:

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= d \cos(d, X) \\ y' - y &= d \cos(d, Y) \\ z' - z &= d \cos(d, Z) \end{aligned}\right\} \quad \text{ó} \quad \left\{\begin{aligned} (x' - x)^2 &= d^2 \cos^2(d, X) \\ (y' - y)^2 &= d^2 \cos^2(d, Y) \\ (z' - z)^2 &= d^2 \cos^2(d, Z) \end{aligned}\right\} \quad [\alpha]$$

Sumando estas últimas igualdades:

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=d^2\,[\cos^2(d,X)+\cos^2(d,Y)+\cos^2(d,Z)]$$

pero $(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=d^2$; luego $d^2=d^2\,[\cos^2(d,X)+\cos^2(d,Y)+\cos^2(d,Z)]$

y dividiendo por d^2 é invirtiendo,

$$\cos^2(d,X)+\cos^2(d,Y)+\cos^2(d,Z)=1$$

Traducción de esta fórmula al lenguaje vulgar.

Si la recta d está situada en el plano de las $x\ y$, el ángulo $(d,Z)=90^\circ$ y su coseno es nulo, de donde

$$\cos^2(d,X)+\cos^2(d,Y)=1$$

Puede deducirse esta fórmula directamente. Sumando sólo las dos primeras de las [α] resulta:

$(x'-x)^2+(y'-y)^2=d^2\,[\cos^2(d,X)+\cos^2(d,Y)]$; pero en un plano $(x'-x)^2+(y'-y)^2=d^2$;

luego $d^2=d^2\,[\cos^2(d,X)+\cos^2(d,Y)]$ y dividiendo por d^2 é invirtiendo, $\cos^2(d,X)+\cos^2(d,Y)=1$

Fórmula de la proyección de una línea poligonal sobre un eje.

Enunciado. Si una línea quebrada cualquiera conduce de un punto á otro la proyección, etc.

Proyección de cada lado de la línea poligonal

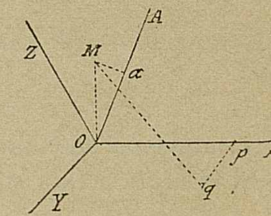
$$d\cos(d,X) \quad » \quad d'\cos(d',X) \quad » \quad d''\cos(d'',X).....$$

Pero la suma de estas proyecciones es igual á la proyección de la recta que une los extremos, y si estos extremos tienen por abscisas x y x_1 se tendrá:

$$x_1-x=d\cos(d,X)+d'\cos(d',X)+.....$$

Problema 1.º Dadas las coordenadas rectangulares ú oblicuas de un punto con relación á tres ejes, y los ángulos que un eje A que pasa por el origen forma con ellos, hallar la abscisa ortogonal de este punto con relación al nuevo eje A.

$$\text{Datos}\begin{cases} x & \text{»} & (A, X) \\ y & \text{»} & (A, Y) \\ z & \text{»} & (A, Z) \end{cases} \qquad \text{Incógnita} \quad a = o\,a$$



Proyectando sobre el eje la línea quebrada $o\ p\ q\ m$

$$a = x \cos (A, X) + y \cos (A, Y) + z \cos (A, Z).$$

Si el eje A estuviera en el plano de las $x\ y$ lo mismo que el punto M por ser $z = o$ se tendría:

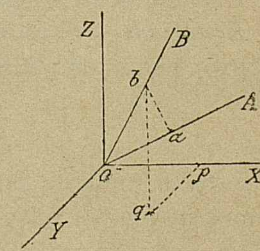
$$a = x \cos (A, X) + y \cos (A, Y)\ [m].$$

Problema 2.º Dados los ángulos que dos rectas A y B forman con tres ejes rectángulares, determinar el que forman entre sí.

Se puede siempre suponer que las rectas pasen por el origen, pues si esto no ocurriera formarían un ángulo igual al de sus paralelas trazadas por aquel punto y razonaríamos sobre estas paralelas.

$$o\,b = b \quad \text{»} \quad \text{arbitrario}$$

$$o\,a = a \quad \text{»}$$



Proyectando $o\ b$ sobre los ejes A, X, Y y Z, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos (A, B) \\ x &= b \cos (B, X) \\ y &= b \cos (B, Y) \\ z &= b \cos (B, Z) \end{aligned}\right\}$$

Substituyendo estos valores en la fórmula del problema anterior,

$$a = x \cos (A, X) + y \cos (A, Y) + z \cos (A, Z)$$

resultará:

$$b \cos(A, B) = b \cos(B, X) \cos(A, X) + b \cos(B, Y) \cos(A, Y) + b \cos(B, Z) \cos(A, Z).$$

y dividiendo por b todos los términos

$$\cos(A, B) = \cos(A, X) \cos(B, X) + \cos(A, Y) \cos(B, Y) + \cos(A, Z) \cos(B, Z) \quad [1]$$

Traducción al lenguaje vulgar.

Si las rectas A y B fueran perpendiculares entre sí, $\cos(A, B) = \cos 90^o = 0$, luego

$$\cos(A, X) \cos(B, X) + \cos(A, Y) \cos(B, Y) + \cos(A, Z) \cos(B, Z) = 0 \quad [2]$$

Enunciando que de aquí se deduce.

Si las rectas A y B estuvieran en el plano de las $x\,y$ » $\cos(A, Z) = \cos 90^o = 0$ » $\cos(B, Z) = \cos 90^o = 0$, las fórmulas [1] y [2] quedarán convertidas en las siguientes:

$$\cos(A, B) = \cos(A, X) \cos(B, X) + \cos(A, Y) \cos(B, Y) \text{ y } \cos(A, X) \cos(B, X) + \cos(A, Y) \cos(B, Y) = 0$$

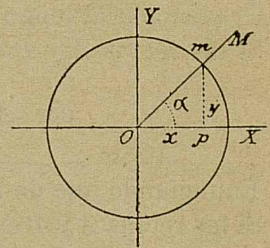
Estas fórmulas podían obtenerse directamente con tal de substituir en la $[m]$ los valores de a, x é y.

Traducción al lenguaje vulgar de estas últimas fórmulas.

Lección 7.ª

Fórmulas trigonométricas.

Relaciones entre las líneas trigonométricas de un ángulo.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}, \quad \sec\alpha = \frac{r}{x}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}$$

Elevando al cuadrado las dos primeras y sumando, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{y^2}{r^2}\\[2ex] \cos^2\alpha = \dfrac{x^2}{r^2}\end{array}\right\} \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2+x^2}{r^2} \quad » \quad y^2 + x^2 = r^2 \quad » \quad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{r^2}{r^2} = 1 \quad [1]$$

Dividiendo la primera por la segunda:

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r}\\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{x}{r}\end{array}\right\} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} \quad » \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha \left\} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tag}\alpha \quad [2]\right.$$

Dividiendo la segunda por la primera:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r} \end{array}\right\} \quad \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} \quad » \quad \frac{x}{y} = \cot\alpha \left\{ \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \cot\alpha \right. \quad [3]$$

Comparando la segunda con la quinta:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \\ \sec\alpha = \dfrac{r}{x} \end{array}\right\} \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \quad » \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad [4]$$

Comparando la primera con la sexta:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r} \\ \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y} \end{array}\right\} \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} \quad » \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \quad [5]$$

Problemas que se pueden resolver con las cinco fórmulas trigonométricas.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \\ \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \end{array}\right\}$$

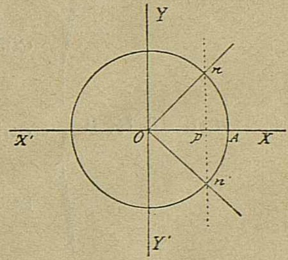
En estas fórmulas entran las siguientes cantidades: *sen* α, *cos* α, *tg* α, *cot* α, *sec* α y *cosec* α. Si conocemos una de ellas se tendrá un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, y resolviéndolo se pueden determinar las demás líneas en función de la conocida.

Análogamente al seno deduciremos:

Dado el cos α

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha &= \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \end{aligned}\right.$$

Todas estas fórmulas tienen el doble signo, exceptuando la secante. A un mismo seno corresponden muchos ángulos, y de aquí la paridad de valores de las demás líneas. Los arcos que tienen el mismo coseno terminan en n y n' teniendo $o\,p$ por abscisa, pero las ordenadas $n\,p = -n'\,p$ y, por ta nto, el doble signo en todas las fórmulas menos la secante, que depende sólo de la abscisa.



Dada la tangente, determinar las demás líneas.

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ » dividiendo por $\cos^2 \alpha$ los dos miembros se tendrá: $\dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \dfrac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$ ó $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$, multiplicando por $\cos^2 \alpha$ resulta $\cos^2 \alpha\,(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = 1$ y despejando $\cos^2 \alpha$ » $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$ y extrayendo la raíz cuadrada

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} \qquad [6]$$

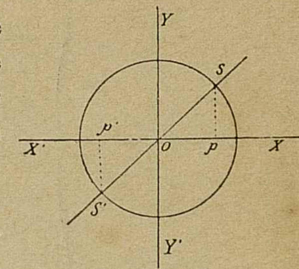
Para obtener el seno se multiplica por $\cos \alpha$ los dos miembros de la igualdad $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ y resul ta $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \times \cos \alpha$, y poniendo por $\cos \alpha$ el valor que da la [6], resulta:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \times \frac{\pm 1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 + 1}} = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$$

Con estos datos, y como en todos los casos, se podrá establecer el siguiente cuadro de fórmulas:

$$\text{Dada la tg }\alpha \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \pm \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} \\ \cos\alpha &= \pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} \\ \cot\alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \\ \sec\alpha &= \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} \\ \operatorname{cosec}\alpha &= \pm \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}{\operatorname{tg}\alpha} \end{aligned} \right.$$

Todas las líneas tienen doble signo excepto la cotangente. La razón es análoga á la explicada en los problemas de dado el seno y coseno. Los arcos que tienen la misma tangente terminan en s y en s' y las coordenadas de estos puntos son iguales y de signo contrario, resultando iguales y de signo contrario todas las líneas menos la cotangente que por ser función de las dos coordenadas el cociente siempre tiene el mismo signo.

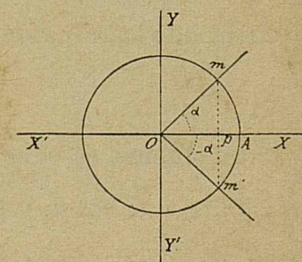


Si los datos fueran cotangente, secante ó cosecante, tomando sus inversas, nos hallaríamos en uno de los casos anteriores.

Relación entre las líneas trigonométricas de dos ángulos iguales y de signo contrario.

Angulo (α) (x, y) » Angulo ($-\alpha$) (x', y')

$$\left.\begin{aligned} &\text{Angulo } (\alpha) \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos\alpha \quad » \quad x = r\cos\alpha \\ \frac{y}{r} &= \operatorname{sen}\alpha \quad » \quad y = r\operatorname{sen}\alpha \end{aligned} \right. \\ &\text{Angulo } (-\alpha) \left\{ \begin{aligned} \frac{x'}{r} &= \cos(-\alpha) \quad » \quad x' = r\cos(-\alpha) \\ \frac{y'}{r} &= \operatorname{sen}(-\alpha) \quad » \quad y' = r\operatorname{sen}(-\alpha) \end{aligned} \right. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$



Según se ve en la figura, y substituyendo en vez de x, y, x' é y' sus valores, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} r\cos(-\alpha) = r\cos\alpha \\ r\,\text{sen}(-\alpha) = -r\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right\} \text{ y dividiendo por } r \left\{\begin{array}{l} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \end{array}\right.$$

Para la *tg, cot, sec* y *cosec*, se tiene:

$$\text{tg}(-\alpha) = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\text{sen}(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\text{sen}\,\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = -\cot\alpha$$

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

$$\text{cosec}(-\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(-\alpha)} = \frac{1}{-\text{sen}\,\alpha} = -\frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = -\text{cosec}\,\alpha$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \\ \sec(-\alpha) = \sec\alpha \\ \text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha \end{array}\right\}$$

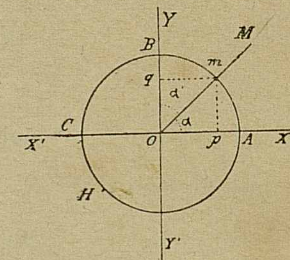
De aquí el cuadro resumen que se traduce al lenguaje vulgar del siguiente modo: *Dos ángulos de la misma magnitud, pero de signos contrarios, tienen todas las líneas iguales en magnitud y de signos contrarios, excepto el coseno y la secante, que son iguales en magnitud y signo.*

Lección 8.ª

Relaciones de las líneas trigonométricas.

Definición de Angulos complementarios

$$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2} \quad » \quad \text{si } \alpha > \frac{\pi}{2} \quad » \quad \alpha' < o$$



Arcos complementarios.
Origen de un arco el punto A. Origen del complemento el punto B.
Ejemplos: Complemento arco $A\,m =$ arco $B\,m$.
Complemento arco $A\,B\,C\,H =$ arco negativo $B\,C\,H$.

Casos que pueden concurrir en los ángulos $\begin{cases} 1.^{\circ}\ \alpha \text{ y } \alpha' \text{ positivos.} \\ 2.^{\circ}\ \alpha > 9.^{\circ} \text{ y } \alpha' \text{ negativo.} \end{cases}$

1.er caso. Ángulo α $\begin{cases} x = o\,p \quad » \quad \dfrac{y}{r} = \operatorname{sen} \alpha \quad » \quad y = r \operatorname{sen} \alpha \\ y = p\,m \quad » \quad \dfrac{x}{r} = \cos \alpha \quad » \quad x = r \cos \alpha \end{cases}$

» α' $\begin{cases} x' = o\,q \quad » \quad \dfrac{y'}{r} = \operatorname{sen} \alpha' \quad » \quad y' = r \operatorname{sen} \alpha' \\ y' = q\,m \quad » \quad \dfrac{x'}{r} = \cos \alpha' \quad » \quad x' = r \cos \alpha' \end{cases}$

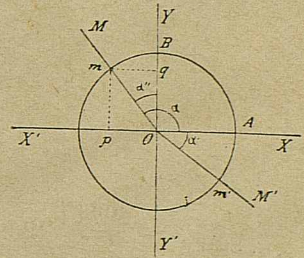
$$\begin{cases} y = x' \quad » \quad r \operatorname{sen} \alpha = r \cos \alpha' \quad » \quad \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha' \\ x = y' \quad » \quad r \cos \alpha = r \operatorname{sen} \alpha' \quad » \quad \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha' \end{cases}$$

Esto nos dice que el seno de un ángulo es el coseno de su complemento y el coseno de un ángulo el seno de su complemento.

Esta propiedad se verifica aunque uno de los ángulos sea negativo, como veremos ahora.

2.º caso. $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ » $\alpha' = -\alpha''$ » $\alpha - \alpha'' = \frac{\pi}{2}$

Ángulo $\alpha = A\,O\,M$ » Ángulo $\alpha' = A\,O\,M'$ » Ángulo $\alpha'' = B\,O\,M$.



Como el arco complementario del $A\,m$ es $B\,m$, que se cuenta de derecha á izquierda, ó sea en sentido contrario de como se consideraba en el caso anterior, el arco $B\,m$ es negativo, lo mismo que el ángulo α'', que tiene por medida este arco, y como α'' es el valor absoluto, debemos poner de manifiesto el signo.

$$\text{Ángulo } \alpha \begin{cases} x = o\,p \quad » \quad \frac{x}{r} = \cos\alpha \quad » \quad x = r\cos\alpha \\ y = p\,m \quad » \quad \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\alpha \quad » \quad y = r\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$\text{Ángulo } (-\alpha'') \begin{cases} x = o\,q \quad » \quad \frac{x'}{r} = \cos(-\alpha'') \quad » \quad x' = r\cos(-\alpha'') \\ y = q\,m \quad » \quad \frac{y'}{r} = \operatorname{sen}(-\alpha'') \quad » \quad y' = r\operatorname{sen}(-\alpha'') \end{cases}$$

$$y = x' \quad » \quad r\operatorname{sen}\alpha = r\cos(-\alpha'')$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \cos(-\alpha'')$$
$$x = y' \quad » \quad r\cos\alpha = r\operatorname{sen}(-\alpha'')$$
$$\cos\alpha = \operatorname{sen}(-\alpha'')$$

y poniendo en vez de $-\alpha''$ su igual α', resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha' \\ \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha' \end{array}\right\} [1]$$

De aquí deducimos que *el coseno de un ángulo es el seno de su complemento.*

De la fórmula $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ resulta $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Substituyendo este valor en las [1], se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \cos \alpha &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{aligned}\right\} \text{ y dividiendo miembro á miembro}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \quad \text{ó bien } \operatorname{tg} \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \text{ é invirtiendo la división}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \quad \text{ó bien } \cot \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \text{ y tomando la inversa de la segunda}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \quad \text{ó bien } \sec \alpha = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \text{ y tomando la inversa de la primera}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \quad \text{ó bien } \operatorname{cosec} \alpha = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Con estas fórmulas se puede formar el siguiente cuadro:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ \operatorname{tg}\alpha &= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ \sec\alpha &= \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ \cot\alpha &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ \operatorname{cosec}\alpha &= \sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \end{aligned}\right.$$

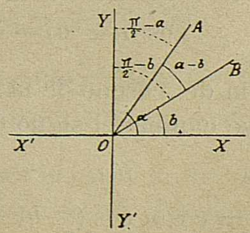
Las últimas fórmulas nos dicen que el coseno, cotangente y cosecante de un ángulo son, respectivamente, el seno, tangente y secante del ángulo complementario.

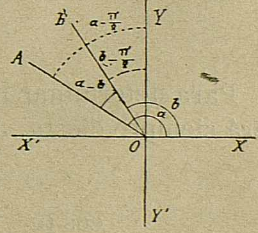
División de las líneas trigonométricas. $\left\{\begin{array}{l}\text{Líneas.}\\ \text{Colíneas.}\end{array}\right.$

Las colíneas de un ángulo son las líneas del ángulo complementario.

Problema.—Dados los senos y cosenos de dos ángulos, determinar el seno y coseno de su suma y su diferencia.

Sean las dos rectas A y B que pasan por el origen y forman con el eje de las X los ángulos a y b; estas dos rectas formarán entre sí el ángulo $(a - b)$ y con el eje de las Y formarán los ángulos $\frac{\pi}{2} - a$ y $\frac{\pi}{2} - b$ si los ángulos a y b son menores que $\frac{\pi}{2}$, como sucede en la primera figura, y si los ángulos son mayores que $\frac{\pi}{2}$ formarán con el eje Y los ángulos $a - \frac{\pi}{2}$ y $b - \frac{\pi}{2}$ como indica la figura segunda.





Aplicando á las rectas A y B la fórmula del coseno de ángulo que forman dos rectas, se tiene:

$$\cos(A, B) = \cos(A, X) \,.\, \cos(B, X) + \cos(A, Y) \,.\, \cos(B, Y) \quad [2]$$

$$\text{pero} \left\{ \begin{array}{l} \cos(A, B) = \cos(a - b) \\ \cos(A, X) = \cos a \\ \cos(B, X) = \cos b \\ \cos(A, Y) = \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \\ \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \cos - \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \end{array} \right\} = \text{sen}\, a \\ \cos(B, Y) = \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \\ \cos\left(b - \frac{\pi}{2}\right) = \cos - \left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \end{array} \right\} = \text{sen}\, b \end{array} \right.$$

substituyendo estos valores en la [2], se tiene

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}\, a \,\text{sen}\, b \quad [3]$$

Para determinar la fórmula del coseno de la suma podremos poner $-b$ en vez de b, puesto que la fórmula [3] será siempre cierta, aunque se cambie el signo de una de sus letras, y resultará:

$$\cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \text{sen}\, a \,\text{sen}(-b) \left\{ \begin{array}{l} \cos(a - (-b)) = \cos(a + b) \\ \cos(-b) = \cos b \\ \text{sen}(-b) = -\text{sen}\, b \end{array} \right.$$

substituyendo estos valores resulta

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad [4]$$

Encontraremos la fórmula del seno de la suma substituyendo en la [3] en vez de a, $\frac{\pi}{2} - a$ y será.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{sen} b \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \operatorname{sen}(a+b) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \end{array} \right.$$

substituyendo estos valores se tiene

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \qquad [5]$$

La fórmula del seno de la diferencia se obtiene cambiando en la [5] b por $-b$, con lo que resulta:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \qquad [6]$$

Estas cuatro fórmulas se pueden escribir $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b \\ \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{array} \right.$

y se traducen al lenguaje vulgar diciendo que *el seno de la suma ó diferencia de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo más ó menos el coseno del primero por el seno del segundo, y el coseno de la suma ó diferencia de dos ángulos es igual al producto de los cosenos menos ó más el producto de los senos de dichos ángulos.*

Determinar el seno y el coseno del doble de un ángulo en función del seno y coseno de este ángulo.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a \cdot \cos b+\cos a \cdot \operatorname{sen} b \\ \cos (a+b)=\cos a \cdot \cos b-\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b\end{array}\right\} \text{ haciendo } b=a \text{ resulta}$$

$$\begin{array}{lll}\operatorname{sen}(a+a)=\operatorname{sen} a \cdot \cos a+\cos a \cdot \operatorname{sen} a & \text{ó bien} & \operatorname{sen} 2a=2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a \\ \cos (a+a)=\cos a \cdot \cos a-\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} a & \text{»} & \cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a\end{array}$$

Esta última fórmula puede ponerse en función del seno ó del coseno del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l}\cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1\left\{\begin{array}{l}\cos^2 a=1-\operatorname{sen}^2 a \\ \operatorname{sen}^2 a=1-\cos^2 a\end{array}\right.\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\cos 2a=1-\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 a=1-2 \operatorname{sen}^2 a \\ \cos 2a=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)=\cos^2 a+\cos^2 a-1=2 \cos^2 a-1.\end{array}\right.$$

En resumen se tienen las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} 2a=2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a \quad \text{»} \quad \cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a\left\{\begin{array}{l}\cos 2a=1-2 \operatorname{sen}^2 a \\ \cos 2a=2 \cos^2 a-1\end{array}\right.$$

Estas fórmulas deben aprenderse de memoria porque se aplican con mucha frecuencia en el algoritmo trigonométrico.

Determinar el seno y el coseno del triplo de un ángulo en función del seno y coseno de este ángulo.

En la fórmula $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a \cos b+\cos a \operatorname{sen} b$, se hace $b=2a$ y se tiene:

$$\operatorname{sen}(a+2a)=\operatorname{sen} a \cos 2a+\cos a \operatorname{sen} 2a\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}(a+2a)=\operatorname{sen} 3a \\ \cos 2a=1-2 \operatorname{sen}^2 a \\ \operatorname{sen} 2a=2 \operatorname{sen} a \cos a\end{array}\right.$$

substituyendo se tiene:

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} a\,(1 - 2\operatorname{sen}^2 a) + \cos a \,.\, 2\operatorname{sen} a \cos a = \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a + 2\operatorname{sen} a \cos^2 a$$

pero $\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$, y substituyendo este valor para que quede todo en función del seno, resulta:

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a + 2\operatorname{sen} a\,(1 - \operatorname{sen}^2 a) = \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a + 2\operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a$$

y reduciendo términos semejantes se tiene:

$$\operatorname{sen} 3a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a$$

Para el coseno se sigue un procedimiento análogo, poniendo todo en función de esta línea, como indica el siguiente cálculo:

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ » $b = 2a$ » $\cos(a + 2a) = \cos a \cos 2a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} 2a$

pero

$$\cos(a + 2a) = \cos 3a$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a$$

substituyendo se tiene:

$$\cos 3a = \cos a\,(2\cos^2 a - 1) - \operatorname{sen} a \,.\, 2\operatorname{sen} a \cos a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a \operatorname{sen}^2 a$$

pero

$$\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$$

luego $\cos 3a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a\,(1 - \cos^2 a) = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a + 2\cos^3 a$

y reduciendo términos semejantes

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

Tangente de la suma ó diferencia de dos ángulos.—Dividiendo miembro á miembro las igualdades.

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a\cos b \pm \cos a\,\text{sen}\,b\\ \cos\,(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\end{array}\right\}\text{resulta}\quad \frac{\text{sen}\,(a \pm b)}{\cos\,(a \pm b)} = \frac{\text{sen}\,a\cos b \pm \cos a\,\text{sen}\,b}{\cos a\cos b \mp \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}$$

Poniendo en vez del cociente que indica el primer miembro la tangente del mismo ángulo y dividiendo numerador y denominador del segundo miembro por el producto de los cosenos se tiene:

$$\text{tg}\,(a \pm b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a.\cos b}{\cos a.\cos b} \pm \dfrac{\cos a.\text{sen}\,b}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b} \mp \dfrac{\text{sen}\,a.\text{sen}\,b}{\cos a.\cos b}} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a} \pm \dfrac{\text{sen}\,b}{\cos b}}{1 \mp \dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a}\cdot\dfrac{\text{sen}\,b}{\cos b}} = \frac{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b}{1 \mp \text{tg}\,a.\text{tg}\,b}$$

obteniendo, por tanto, la siguiente fórmula, que se puede traducir al lenguaje vulgar

$$\text{tg}\,(a \pm b) = \frac{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b}{1 \mp \text{tg}\,a.\text{tg}\,b}$$

Determinar la tangente del doble de un ángulo en función de la tangente de este ángulo.

Haciendo $b = a$ en la fórmula $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a.\text{tg}\,b}$ se tiene:

$$\text{tg}\,(a - a) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}\,a.\text{tg}\,a} \quad \text{que simplificada da:} \quad \text{tg}\,2\,a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2\,a}$$

que era la fórmula que buscábamos.

Lección 9.ª

Relaciones entre los senos, cosenos y tangentes de ángulos suplementarios.

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,(a-b)=\text{sen}\,a\cos b-\cos a\,\text{sen}\,b\\ \cos\,(a-b)=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\\ \text{tg}\,(a-b)=\dfrac{\text{tg}\,a-\text{tg}\,b}{1+\text{tg}\,a\,\text{tg}\,b}\end{array}\right\}\ \text{Haciendo } a=\pi\text{, resultan las siguientes:}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,(\pi-b)=\text{sen}\,\pi\cos b-\cos\pi\,\text{sen}\,b\\ \cos\,(\pi-b)=\cos\pi\cos b+\text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,b\\ \text{tg}\,(\pi-b)=\dfrac{\text{tg}\,\pi-\text{tg}\,b}{1+\text{tg}\,\pi.\,\text{tg}\,b}\end{array}\right\}\ \text{pero}\ \left\{\begin{array}{l}\text{sen}\,\pi=0\\ \cos\pi=-1\\ \text{tg}\,\pi=0\end{array}\right.\ \text{Substituyendo se tiene}\ \left\{\begin{array}{l}\text{sen}\,(\pi-b)=\text{sen}\,b\\ \cos\,(\pi-b)=-\cos b\\ \text{tg}\,(\pi-b)=-\text{tg}\,b\end{array}\right\}\ [m]$$

Lo que nos dice que *los senos de los ángulos suplementarios son iguales en magnitud y signo, y los cosenos y tangentes de igual magnitud y de signo contrario.*

Relación entre los senos, cosenos y tangentes de los ángulos cuya diferencia es π.

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,(a+b)=\text{sen}\,a\cos b+\cos a\,\text{sen}\,b\\ \cos\,(a+b)=\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\\ \text{tg}\,(a+b)=\dfrac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,b}{1-\text{tg}\,a\,\text{tg}\,b}\end{array}\right\}\ a=\pi\ \left\{\begin{array}{l}\text{sen}\,(\pi+b)=\text{sen}\,\pi\cos b+\cos\pi\,\text{sen}\,b\\ \cos\,(\pi+b)=\cos\pi\cos b-\text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,b\\ \text{tg}\,(\pi+b)=\dfrac{\text{tg}\,\pi+\text{tg}\,b}{1-\text{tg}\,\pi.\,\text{tg}\,b}\end{array}\right.$$

$$\text{pero}\ \begin{cases}\text{sen}\ \pi = 0\\ \cos\ \pi = -1\\ \text{tg}\ \ \pi = 0\end{cases}\quad \text{substituyendo}\ \begin{cases}\text{sen}\ (\pi + b) = -\ \text{sen}\ b\\ \cos\ (\pi + b) = -\cos b\\ \text{tg}\ \ (\pi + b) = \text{tg}\ b\end{cases}\ [n]$$

Estas fórmulas nos dicen que los senos y cosenos de ángulos cuya diferencia es π son iguales en magnitud y de signos contrarios, y las tangentes iguales en magnitud y signo.

Alteraciones que sufren las líneas de un ángulo cuando á éste se le agrega un número par ó impar de semicircunferencias.

Si á un ángulo b se le agrega π, su seno y coseno cambian de signo conservando el mismo valor absoluto, y la tangente no cambia de valor ni de signo; si se le agrega π nuevamente, volverán á cambiar de signo el seno y el coseno; es decir, que tendrán igual valor é igual signo que al principio, y como la tangente no cambia de valor ni de signo, podemos decir que si á un ángulo b se le agrega $2\,\pi$, sus líneas no cambian ni en valor ni en signo. De estas consideraciones deducimos que, si á un ángulo se le agrega un número par de semicircunferencias, sus líneas trigonométricas no varían, y que si se le añade un número impar, sus líneas no varían de valor absoluto, pero el seno y el coseno cambian de signo; la tangente no cambia de signo, porque en la fórmula $\text{tg}\ (n\,\pi + \alpha) = \text{tg}\ \alpha$, de todos los arcos que tienen la misma tangente, n es par ó impar.

Determinar las líneas trigonométricas de un ángulo en función de otro menor que 90°.

Supongamos un ángulo a y dividámoslo por $\pi = 180°$; como el dividendo a será igual al producto del divisor π por el cociente c más el resto r, podemos escribir $a = \pi.\ c + r$; si el resto r es menor que la mitad del divisor, será menor que 90°, pero si fuera mayor se podrá tomar el resto por exceso y escribir $a = \pi\ (c + 1) - r'$, en que r', resto por exceso, será menor que 90°. Por este procedimiento puede descomponerse el ángulo a en dos partes: la primera será un múltiplo de π, y la segunda, positiva ó negativa, un ángulo menor que 90°; por consiguiente, podemos escribir la siguiente fórmula:

$$a = m\ .\ \pi \pm b$$

en que m es un número entero cualquiera y b un ángulo menor que 90°. Si restamos á este ángulo $m\,\pi$ ó $(m - 1)\,\pi$, según que m sea par, ó impar, habremos restado un número par de semicircunferencias, y, por tanto, el ángulo a tendrá las mismas líneas trigonométricas que las diferencias

$$\pm b \quad \text{ó} \quad \pi \pm b$$

según que m sea par ó impar. En el primer caso, por las fórmulas de ángulos iguales y de signos contrarios, pueden reducirse las líneas del ángulo a á las del b menor que 90°, y en el segundo, por las fórmulas de las líneas de los ángulos $(\pi + b)$ y $(\pi - b)$ en función de las líneas de b, puede también hacerse esta reducción; luego en todos los casos podemos reducir las líneas de un ángulo cualquiera a á las de *otro* b menor que 90°, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 1.° Sea el ángulo 1826°

$$\begin{array}{r|l} 1826 & 180 \\ \hline 26 & 10 \end{array}$$

$1826° = 10\,\pi + 26$. Restando $10\,\pi$ y teniendo en cuenta que las líneas no varían, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{sen } 1826° &= \text{sen } 26° \\ \cos 1826° &= \cos 26° \\ \text{tg } 1826° &= \text{tg } 26° \end{aligned}$$

Ejemplo 2.° Sea el ángulo 2010°

$$\begin{array}{r|l} 2010 & 180 \\ \hline 210 & 11 \\ 30 & \end{array}$$

$2010° = 11\,\pi + 30°$, restando $10\,\pi$ se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } 2010° &= \text{sen } (\pi + 30°) \\ \cos 2010° &= \cos (\pi + 30°) \\ \text{tg } 2010° &= \text{tg } (\pi + 30°) \end{aligned}\right\} \text{ y según las fórmulas } [n] \left\{\begin{aligned} \text{sen } 2010° &= -\text{ sen } 30° \\ \cos 2010° &= -\cos 30° \\ \text{tg } 2010° &= \text{tg } 30° \end{aligned}\right.$$

Ejemplo 3.° Sea el ángulo 1726°

$$\begin{array}{l|l} 1726 & 180 \\ \cline{2-2} 106 & 9 \\ (74) & \end{array}$$

$1726° = 10\,\pi - 74°$, y restando *10* π resultará:

$$\begin{aligned} \text{sen } 1726° &= \text{sen } (-74°) = -\text{sen } 74° \\ \cos 1726° &= \cos (-74°) = \cos 74° \\ \text{tg } 1726° &= \text{tg } (-74°) = -\text{tg } 74° \end{aligned}$$

Ejemplo 4.° Sea el ángulo 1900°

$$\begin{array}{l|l} 1900 & 180 \\ \cline{2-2} 100 & 10 \\ (80) & \end{array}$$

$1900° = 11\,\pi - 80°$. Restando *10* π resulta:

$$\begin{aligned} \text{sen } 1900° &= \text{sen } (\pi - 80°) = \text{sen } 80° \\ \cos 1900° &= \cos (\pi - 80°) = -\cos 80° \\ \text{tg } 1900° &= \text{tg } (\pi - 80°) = -\text{tg } 80° \end{aligned}$$

Transformar en producto la suma ó diferencia de dos senos ó de dos cosenos.
Sumando y restando las igualdades:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } (a + b) &= \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b \\ \text{sen } (a - b) &= \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b \end{aligned}\right\} \text{ resultan las [1] } \left\{\begin{aligned} \text{sen } (a + b) + \text{sen } (a - b) &= 2 \text{ sen } a \cos b \\ \text{sen } (a + b) - \text{sen } (a - b) &= 2 \cos a \text{ sen } b \end{aligned}\right.$$

haciendo iguales operaciones con las igualdades:

$$\left.\begin{aligned} \cos (a + b) &= \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \\ \cos (a - b) &= \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \end{aligned}\right\} \text{ resultan las [2] } \left\{\begin{aligned} \cos (a + b) + \cos (a - b) &= 2 \cos a \cos b \\ \cos (a + b) - \cos (a - b) &= -2 \text{ sen } a \text{ sen } b \end{aligned}\right.$$

Si suponemos que $\left\{\begin{array}{l|l} a+b=p & 2a=p+q \quad » \quad a=\frac{1}{2}(p+q) \\ a-b=q & 2b=p-q \quad » \quad b=\frac{1}{2}(p-q) \end{array}\right\}$ y si substituímos estos valores en las fórmulas [1] y [2] se tendrá:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) \qquad [3]$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q) \qquad [4]$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) \qquad [5]$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q) \qquad [6]$$

que son las fórmulas buscadas.

Demostrar que la suma de dos senos es á su diferencia como la tangente de la semisuma de sus ángulos es á la tangente de la semidiferencia.

Dividiendo miembro á miembro las igualdades [3] y [4] resulta:

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{\cos \frac{1}{2}(p-q)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(p+q) \times \cot \frac{1}{2}(p-q)$$

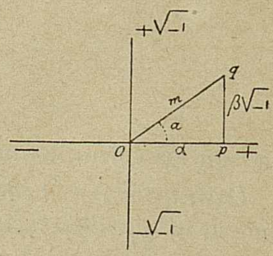
y como $\cot\frac{1}{2}(p-q)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-q)}$, podemos substituir este valor en la igualdad anterior y resulta, por último:

$$\frac{\operatorname{sen} p+\operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q)\times\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-q)}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Representación geométrica de las cantidades imaginarias.

La expresión $\cos a+\operatorname{sen} a\sqrt{-1}$, que interviene en la fórmula de Moivre, que estudiaremos después, representa el signo de la cantidad imaginaria mediante un convenio que vamos á establecer. Si á partir de un punto o de un cierto eje suponemos las cantidades contadas á la derecha como positivas y las contadas á la izquierda como negativas, tendremos los dos ejes $o+$ y $o-$, que indicarán en qué sentido se han de tomar estas cantidades; un nuevo eje que pase por el punto o, tal como el $o\,q$, tendrá una dirección que no será ni positiva ni negativa, aunque participe algo del sentido de estos signos, según se incline á la derecha ó á la izquierda; ahora bien, la perpendicular al eje $+\,-$ en el punto o no participará ni del signo positivo ni del negativo, por no inclinarse á ninguna de estas direcciones, luego es una nueva dirección que mediante un *convenio* podrá representar otro signo distinto del positivo ó negativo, y *admitiendo* que $+\sqrt{-1}$ represente un signo, podremos *convenir* que la cantidad que esté afectada de este signo se cuente en la dirección de la perpendicular por encima del eje $+\,-$; como la prolongación de la perpendicular por la parte inferior dará una dirección completamente opuesta á la anterior, representará el signo $-\sqrt{-1}$.



El Álgebra nos enseña que las raíces de una ecuación de segundo grado, en el caso de ser imaginarias, pueden siempre reducirse á la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ [7], en la cual α y β pueden ser cantidades positivas ó nagativas.

Para efectuar la operación que la fórmula [7] nos indica hemos de colocar α y $\beta\sqrt{-1}$ unas á continuación de otras, con sus mismos signos; suponiendo que α y β sean positivas, tendremos que tomar α desde o hasta p, ó sea en el sentido positivo, y β en el sentido $+\sqrt{-1}$, y á continuación de α, desde p hasta q, la recta que une q con el origen o nos representará en magnitud y en signo el resultado de la operación, análogamente á las operaciones de suma algebraica sobre el eje $+ -$.

De las consideraciones anteriores deducimos que

$$op = \alpha \quad \text{y} \quad pq = \beta$$

y representando por a el ángulo que la recta $o\,q$ forma con el eje positivo, se tendrá multiplicando y dividiendo por m la fórmula [7]:

$$m\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m}\sqrt{-1}\right) \text{ pero } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha}{m} = \dfrac{op}{oq} = \dfrac{x}{r} = \cos a \\[2ex] \dfrac{\beta}{m} = \dfrac{pq}{oq} = \dfrac{y}{r} = \operatorname{sen} a \end{array} \right\} \quad [8]$$

y substituyendo estos valores en la [8] resultará:

$$m\,(\cos a + \operatorname{sen} a\sqrt{-1})$$

que es la forma de toda expresión imaginaria que proceda de una ecuación de segundo grado. En esta expresión m que representa el valor absoluto de ella, se llama *módulo*, a que es el ángulo que indica la dirección *argumento* y $(\cos a + \operatorname{sen} a\sqrt{-1})$ representa el signo ó sentido en que se ha de tomar m.

Fórmula de Moivre. Caso de dos factores.

$(\cos a + \operatorname{sen} a\sqrt{-1})(\cos b + \operatorname{sen} b\sqrt{-1}) = \cos a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b\sqrt{-1} + \operatorname{sen} a\sqrt{-1} \times \cos b + \operatorname{sen} a\sqrt{-1} \times$ $\times \operatorname{sen} b\sqrt{-1} = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + (\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b)\sqrt{-1} = \cos(a+b) + \operatorname{sen}(a+b)\sqrt{-1}$.

Esto nos dice que el producto de dos expresiones imaginarias de la forma $\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}$ es otra expresión imaginaria de la misma forma cuyo argumento es suma de los argumentos de los factores.

Si son tres los factores, se multiplican los dos primeros por la regla anterior y queda el caso reducido á dos factores.

$$(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})(\cos b + \operatorname{sen} b \sqrt{-1})(\cos c + \operatorname{sen} c \sqrt{-1}) = [\cos(a+b) + \operatorname{sen}(a+b)\sqrt{-1}](\cos c + \operatorname{sen} c \sqrt{-1}) =$$
$$= \cos(a+b+c) + \operatorname{sen}(a+b+c)\sqrt{-1}$$

Del mismo modo se demostraría para cuatro, cinco, etc., factores.

Si se verifica la ley para m factores se verifica también para $m+1$, porque el producto de los m primeros se puede efectuar y quedará reducido á una expresión de la misma forma con argumento suma de los m argumentos y ya queda el caso reducido á la multiplicación de dos factores, que, efectuada, nos dará una expresión cuyo argumento será suma de los $m+1$ argumentos, luego la ley es general. De aquí deducimos que

$$(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})(\cos b + \operatorname{sen} b \sqrt{-1})(\cos c + \operatorname{sen} c \sqrt{-1}) \ldots\ldots (\cos l + \operatorname{sen} l \sqrt{-1}) = \cos(a+b+c+\ldots\ldots+l) +$$
$$+ \operatorname{sen}(a+b+c+\ldots\ldots+l)\sqrt{-1}$$

y si suponemos que $a = b = c = \ldots\ldots = l$ se tendrá:

$$(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}) \ldots\ldots (\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}) = \cos(a+a+\ldots\ldots+a) + \operatorname{sen}(a+a+\ldots\ldots+a)\sqrt{-1}$$

si suponemos que son m los factores y efectuamos las operaciones indicadas, resultará:

$$(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})^m = \cos m \,.\, a + \operatorname{sen} m \,.\, a \sqrt{-1}$$

que es la fórmula de Moivre, que se traduce al lenguaje vulgar diciendo: *la potencia de una expresión imaginaria de la forma cos* a + *sen* a $\sqrt{-1}$ *es otra expresión imaginaria de la misma forma, cuyo argumento es igual al producto del argumento de la base por el exponente de la potencia.*

Generalización de la fórmula de Moivre.

Necesidad de generalizar esta fórmula.

Supongamos que m sea fraccionario » $m = \frac{p}{q}$ siendo p y q números enteros y positivos.

Si elevamos á la potencia q la expresión imaginaria $\cos \frac{a}{q} + \operatorname{sen} \frac{a}{q} \sqrt{-1}$ resultará:

$$\left(\cos \frac{a}{q} + \operatorname{sen} \frac{a}{q} \sqrt{-1}\right)^q = \cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}$$

por ser q un número entero y positivo; extrayendo la raíz quésima, se tiene

$$\cos \frac{a}{q} + \operatorname{sen} \frac{a}{q} \sqrt{-1} = \sqrt[q]{\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}}$$

pero como extraer la raíz quésima de una cantidad es lo mismo que elevar esta cantidad á la potencia $\frac{1}{q}$ tendremos:

$$\left(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{q}} = \cos \frac{a}{q} + \operatorname{sen} \frac{a}{q} \sqrt{-1};$$

elevando nuevamente á la potencia p resulta:

$$\left(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\cos \frac{a}{q} + \operatorname{sen} \frac{a}{q} \sqrt{-1}\right)^p = \cos \frac{p}{q} a + \operatorname{sen} \frac{p}{q} a \sqrt{-1}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Supongamos que m sea negativo » $m = -m'$

$$(\cos m'a + \operatorname{sen} m'a \sqrt{-1}) (\cos m'a - \operatorname{sen} m'a \sqrt{-1} = (\cos m'a)^2 - (\operatorname{sen} m'a \sqrt{-1})^2 = \cos^2 m'a + \operatorname{sen}^2 m'a = 1$$

de aquí deducimos que

$$\frac{1}{\cos m' a + \operatorname{sen} m' a \sqrt{-1}} = \cos m' a - \operatorname{sen} m' a \sqrt{-1} \quad \text{ó bien}$$

$$\frac{1}{(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})^{m'}} = \cos m' a - \operatorname{sen} m' a \sqrt{-1} \quad \text{pero} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})^{m'}} = (\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})^{-m'} \\ \cos m' a = \cos(-m') \times a \\ -\operatorname{sen} m' a = \operatorname{sen}(-m') \times a \end{array} \right.$$

luego substituyendo tendremos:

$$(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})^{-m'} = \cos(-m') a + \operatorname{sen}(-m') a \sqrt{-1}$$

que demuestra la generalidad de la fórmula en el caso de ser m negativo.

Lección 10.

Problemas.

Problema 1.º Dado el coseno de un ángulo determinar el seno y coseno del ángulo mitad.

En las fórmulas $\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1 \\ \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \end{array} \right\}$ se puede substituir $\frac{a}{2}$ en vez de a; haciendo esta substitución é invirtiendo la segunda, se obtiene el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 \dfrac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \dfrac{a}{2} = 1 \\ \cos^2 \dfrac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{a}{2} = \cos a \end{array} \right\}$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas que resuelven el problema que nos proponemos, y que sumadas y restadas dan

$$2\cos^2\frac{a}{2}=1+\cos a \quad » \quad \cos^2\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{2} \quad » \quad \cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{a}{2}=1-\cos a \quad » \quad \mathrm{sen}^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2} \quad » \quad \mathrm{sen}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

que eran los valores que se nos pedían en el problema.

Discusión.—El doble signo de sen $\frac{a}{2}$ y cos $\frac{a}{2}$ es debido á que cuando se da el coseno de un ángulo a, dicho ángulo no queda determinado, pudiendo corresponder á este coseno muchos ángulos cuyas mitades pueden tener senos y cosenos distintos. Nos convenceremos de que esto es así tomando la mitad de la fórmula de todos los ángulos que tienen el mismo coseno y viendo qué valores corresponden á los senos y cosenos de estos ángulos mitad.

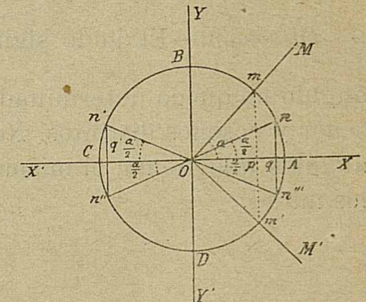
$$\text{Fórmula} \quad » \quad 2n\pi\pm a \quad \text{cuya mitad es} \quad n\pi\pm\frac{a}{2}$$

$$\text{Ángulos}\quad n\pi\pm\frac{a}{2}\left\{\begin{array}{l} n \quad » \quad \text{par}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{sen}\left(n\pi\pm\frac{a}{2}\right)=\mathrm{sen}\pm\frac{a}{2}=\pm\,\mathrm{sen}\frac{a}{2}\\ \cos\left(n\pi\pm\frac{a}{2}\right)=\cos\pm\frac{a}{2}=\cos\frac{a}{2}\end{array}\right.\\ n \quad » \quad \text{impar}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{sen}\left(n\pi\pm\frac{a}{2}\right)=\mathrm{sen}\left(\pi\pm\frac{a}{2}\right)=\mp\,\mathrm{sen}\frac{a}{2}\\ \cos\left(n\pi\pm\frac{a}{2}\right)=\cos\left(\pi\pm\frac{a}{2}\right)=-\cos\frac{a}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\text{En resumen, para el} \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \left\{ \begin{array}{l} + \text{sen} \dfrac{a}{2} \\ - \text{sen} \dfrac{a}{2} \end{array} \right. \\ \cos \left\{ \begin{array}{l} + \cos \dfrac{a}{2} \\ - \cos \dfrac{a}{2} \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

es decir, que los ángulos mitad de todos los que tienen el mismo coseno tienen senos y cosenos iguales y de signo contrario, como nos indican las fórmulas.

Discusión geométrica.—Todos los arcos que tienen el mismo coseno terminan en dos puntos m y m' simétricos respecto al eje de las X; los arcos que terminan en m son:



$$\left.\begin{array}{l} a = \text{arco } A\,m \\ 2\pi + a = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,m \\ 4\pi + a = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,B\,C\,D\,A\,m \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \text{cuyas mitades} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,n \\ \pi + \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,n'' \\ 2\pi + \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right.$$

terminan en los puntos n y n'' diametralmente opuestos y que, por tanto, tienen senos y cosenos iguales y de de signo contrario. Los arcos que terminan en m' son:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi - a = \text{arco } A\,B\,C\,D\,m' \\ 4\pi - a = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,B\,C\,D\,m' \\ 6\pi - a = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,B\,C\,D\,A\,B\,C\,D\,m' \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \text{cuyas mitades} \left\{\begin{array}{l} \pi - \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,n' \\ 2\pi - \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,D\,n''' \\ 3\pi - \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,B\,n' \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right.$$

terminan en los puntos n' y n''' diametralmente opuestos, y por tanto, tendrán los senos y cosenos de signos contrarios y de igual valor absoluto del que se vió en la otra serie de arcos, según nos indica la figura, puesto que $n\,q = n'\,q'$, $n''\,q' = n'''\,q$ y $o\,q = o\,q'$, no habiendo más que dos valores para el seno y dos para el coseno, iguales y de signos contrarios.

Si al mismo tiempo que el coseno se diera el ángulo, su mitad no podría tener más que un seno y un coseno. Se desecha la solución extraña en este caso reduciendo este ángulo mitad á la fórmula $n\,\pi \pm b$, siendo $b < 90^\circ$ y calculando sus líneas en función de las de b, con lo cual quedará conocido el seno y el coseno de $\frac{a}{2}$ por conocerse ya sus signos.

Ejemplo: Sea el dato $\cos(17\,\pi + 60^\circ) = \cos(\pi + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ ó bien $\cos 3120^\circ = -\frac{1}{2}$ de aquí deducimos que $a = 3120^\circ$ » $\frac{a}{2} = 1560^\circ$ » $\cos a = -\frac{1}{2}$, y substituyendo estos valores en las fórmulas que resuelven el problema, se tiene:

$$\operatorname{sen} 1560^\circ = \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos 1560^\circ = \pm\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

que extrayendo raíces y simplificando, resulta:

$$\operatorname{sen} 1560^\circ = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 1560^\circ = \pm \frac{1}{2}$$

Dividiendo por 180° el ángulo 1560 resulta: $\begin{array}{r|l} 1560^\circ & 180^\circ \\ \hline 120 & 8 \\ (60) & \end{array}$ $1560^\circ = 9\pi - 60^\circ$ y por consiguiente

$$\operatorname{sen} 1560^\circ = \operatorname{sen}(\pi - 60^\circ) = + \operatorname{sen} 60^\circ$$
$$\cos 1560^\circ = \cos(\pi - 60^\circ) = - \cos 60^\circ$$

es decir, que el seno debe ser positivo y el coseno negativo, y por consiguiente,

$$\operatorname{sen} 1560^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 1560^\circ = -\frac{1}{2}$$

serán los valores que resolverán la cuestión propuesta.

Problema 2.º Dado el seno de un ángulo hallar el seno y coseno del ángulo mitad.

En las fórmulas $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \\ \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \end{array}\right\}$ se puede substituir $\frac{a}{2}$ en vez de a; haciendo ésta substitución é invirtiendo la segunda, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1 \\ 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \operatorname{sen} a \end{array}\right\}$$

que resuelto se conocerán los valores de sen $\frac{a}{2}$ y cos $\frac{a}{2}$, que resolverán el problema.

Para resolverlo sumaremos y restaremos estas ecuaciones, y nos resultará:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1 - \operatorname{sen} a \end{array}\right\} \text{ ó bien } \left\{\begin{array}{l} \left(\operatorname{sen} \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right)^2 = 1 + \operatorname{sen} a \\ \left(\operatorname{sen} \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} a \end{array}\right.$$

extrayendo raíces $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \\ \operatorname{sen} \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \end{array}\right.$

sumando y restando nuevamente, se tiene: $\left\{\begin{array}{l} 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \\ 2 \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \mp \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \end{array}\right.$

y dividiendo por 2 se obtienen las fórmulas $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \\ \cos \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \end{array}\right.$

que resuelven el problema.

Haciendo la combinación de signos resultan los valores siguientes:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\begin{cases}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & [1]\\ +\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & [2]\\ -\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & [3]\\ -\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & [4]\end{cases}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\begin{cases}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & [1]\\ +\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & [2]\\ -\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & [3]\\ -\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & [4]\end{cases}$$

es decir, cuatro valores para el sen $\frac{a}{2}$ y cuatro para el cos $\frac{a}{2}$, correspondiéndose de estos valores los que tienen el mismo número.

Discusión.—Los cuatro valores hallados para sen $\frac{a}{2}$ y cos $\frac{a}{2}$ provienen de que cuando se da el seno de un ángulo a, dicho ángulo no está determinado, y á este seno corresponderán muchos ángulos cuyas mitades pueden tener senos y cosenos distintos. Nos convenceremos de que el problema tiene cuatro soluciones tomando la mitad de la fórmula de todo los ángulos que tienen el mismo seno y viendo los valores que corresponden á los senos y cosenos de estos ángulos mitad. La fórmula de todos los ángulos que tienen el mismo seno son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 2n\pi + a \\ (2n+1)\pi - a = 2n\pi + \pi - a \end{array}\right\} \text{y sus mitades} \left\{\begin{array}{l} n\pi + \dfrac{a}{2} \\ n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2} \end{array}\right.$$

Veamos qué valores corresponden á los senos y cosenos de estos ángulos:

$$1.^{\text{a}} \text{ fórmula} \quad n\pi + \frac{a}{2} \left\{\begin{array}{ll} n \text{ par} & \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\left(n\pi + \dfrac{a}{2}\right) = + \text{sen}\dfrac{a}{2} \\ \cos\left(n\pi + \dfrac{a}{2}\right) = + \cos\dfrac{a}{2} \end{array}\right. \\ n \text{ impar} & \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\left(n\pi + \dfrac{a}{2}\right) = \text{sen}\left(\pi + \dfrac{a}{2}\right) = - \text{sen}\dfrac{a}{2} \\ \cos\left(n\pi + \dfrac{a}{2}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{a}{2}\right) = - \cos\dfrac{a}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$2.^{\text{a}} \text{ fórmula} \; n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \left\{\begin{array}{ll} n \text{ par} & \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = + \cos\dfrac{a}{2} \\ \cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = + \text{sen}\dfrac{a}{2} \end{array}\right. \\ n \text{ impar} & \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = \text{sen}\left(\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = - \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = - \cos\dfrac{a}{2} \\ \cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = - \text{sen}\dfrac{a}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

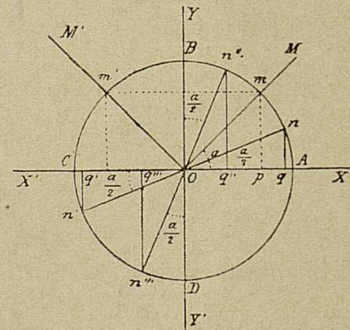
En resumen, resultan los siguientes valores:

$$\text{para el seno} \left\{ \begin{array}{ll} + \operatorname{sen} \dfrac{a}{2} & [1] \\[2ex] - \operatorname{sen} \dfrac{a}{2} & [2] \\[2ex] + \cos \dfrac{a}{2} & [3] \\[2ex] - \cos \dfrac{a}{2} & [4] \end{array} \right. \qquad \text{para el coseno} \left\{ \begin{array}{ll} + \cos \dfrac{a}{2} & [1] \\[2ex] - \cos \dfrac{a}{2} & [2] \\[2ex] + \operatorname{sen} \dfrac{a}{2} & [3] \\[2ex] - \operatorname{sen} \dfrac{a}{2} & [4] \end{array} \right.$$

correspondiéndose los valores de igual numeración, lo que está conforme en un todo con las fórmulas.

Discusión geométrica.—Geométricamente también puede verse que existen cuatro soluciones. Los arcos que tienen el mismo seno terminan en los puntos m y m' simétricos con respecto al eje Y. Los arcos que terminan en m son:

$$\left. \begin{array}{l} a = \text{arco } A\,m \\[2ex] 2\pi + a = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,m \\[2ex] 4\pi + a = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,B\,C\,D\,A\,m \\[2ex] 6\pi + a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array} \right\} \text{cuyas mitades} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,n \\[2ex] \pi + \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,n' \\[2ex] 2\pi + \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,n \\[2ex] 3\pi + \dfrac{a}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array} \right.$$



terminan en los puntos n y n' diametralmente opuestos, que tienen senos y cosenos iguales y de signo contrario, resultando dos soluciones para el seno y dos para el coseno.

Los arcos que terminan en m' son:

$$\left.\begin{array}{l} \pi - a = \text{arco } A\,B\,m' \\ 3\,\pi - a = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,B\,m' \\ 5\,\pi - a = \quad\vdots \\ 7\,\pi - a = \quad\vdots \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array}\right\} \text{cuyas mitades} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,n'' \\ \pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,n''' \\ 2\,\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,n'' \\ 3\,\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2} = \text{arco } A\,B\,C\,D\,A\,B\,C\,n''' \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}\right.$$

terminan en los puntos n'' y n''' que son diametralmente opuestos, teniendo senos y cosenos iguales y de signos contrarios é iguales á los valores obtenidos antes para el coseno y seno respectivamente, todo conforme con las cuatro soluciones que vimos tenía el problema.

Si al mismo tiempo que el seno se diese el ángulo a, su mitad $\frac{a}{2}$ no podrá tener más que un seno y un coseno, por tanto, es necesario saber cómo se desechan las tres soluciones extrañas. Conocidos los signos que han de tener sen $\frac{a}{2}$ y cos $\frac{a}{2}$, para lo cual se operará como en el ejemplo del coseno explicado antes, se pueden desechar dos soluciones, suprimiendo el signo contrario al que deban tener sen $\frac{a}{2}$ y cos $\frac{a}{2}$ en el radical de mayor valor absoluto, que es el que ha de dominar en signo. Para desechar el signo del otro radical, se observará que el valor absoluto del seno es menor, igual ó mayor que el del coseno, según que el ángulo sea menor, igual ó mayor que 45°. Se sabrá de esta manera si el valor absoluto del seno ha de ser menor ó mayor que el del coseno, tomando signos iguales en los dos radicales para el que resulte de mayor valor absoluto, y signos contrarios para el que resulte de menor, se tendrán desechadas las terceras soluciones.

Ejemplo: Sea el ángulo $(11\,\pi + 30) = 2010^{\circ}$.

$$\operatorname{sen}(11\,\pi + 30) = \operatorname{sen}(\pi + 30) = -\operatorname{sen} 30^{\circ} = -\frac{1}{2}$$

Datos $\quad a = 2010^{\circ}$ » $\frac{a}{2} = 1005^{\circ}$ » $\operatorname{sen} a = -\frac{1}{2}$

substituyendo estos valores en las fórmulas, resulta:

$$\operatorname{sen} 1005^{\circ} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\cos 1005^{\circ} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

La segunda raíz es la de mayor valor absoluto. Reduciendo las líneas del ángulo 1005° á las líneas de otro menor que 90°, resulta:

$$1005^{\circ} = 6\,\pi - 75^{\circ} \begin{cases} \operatorname{sen} 1005^{\circ} = \operatorname{sen}(6\,\pi - 75^{\circ}) = -\operatorname{sen} 75^{\circ} \\ \cos 1005^{\circ} = \cos(6\,\pi - 75^{\circ}) = +\cos 75^{\circ} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} 1005 & 180 \\ \hline 106 & 5 \\ (75) & \end{array}$$

El seno debe ser negativo, así es que desecharemos el signo más en el radical de mayor valor absoluto, y al revés en el coseno, que debe ser positivo, resultando las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{sen} 1005^{\circ} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\cos 1005^{\circ} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Como $75^\circ > 45^\circ$ sen $75^\circ >$ cos 75°, luego en el seno deben tomarse signos iguales en los dos radicales, y en el coseno signos contrarios, encontrando, por último, los siguientes valores:

$$\operatorname{sen} 1005^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\cos 1005^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

que son las soluciones del problema que nos ocupa.

Lección 11.

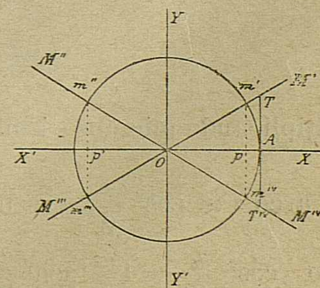
Construcción de tablas trigonométricas.

Demostrar que la diferencia entre el arco y.....

Supongamos $r = 1$.

$m'\,p < m'\,A <$ arco $m'\,A$ ó bien $\qquad$ sen $\alpha <$ arco α [1]

$$\left.\begin{array}{l} \text{área sector } o\,m'\,A < \text{áera trig.}^{\circ}\ o\,T'\,A \\ \dfrac{1}{2}\,o\,A \times \text{arco } A\,m' < \dfrac{1}{2}\,o\,A \times A\,T' \\ \text{arco } A\,m' < A\,T' \end{array}\right\} \text{arco } \alpha < \operatorname{tg} \alpha \qquad [2]$$



De la [1] se deduce, dividiendo por sen α, que $1 < \dfrac{\text{arco } \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$

De la [2] se deduce, arco $\alpha < \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ ó bien $\dfrac{\text{arco } \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} < \dfrac{1}{\cos \alpha}$

y reuniendo las dos desigualdades, se tiene la siguiente limitación:

$$1 < \frac{\text{arco } \alpha}{\text{sen } \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

Cuando α disminuye, $\frac{1}{\cos \alpha}$ tiende hacia 1 llegando á este valor cuando $\alpha = 0$, luego la fracción $\frac{\text{arco } \alpha}{\text{sen } \alpha}$ que está comprendida entre 1 y una cantidad, $\frac{1}{\cos \alpha}$, que se aproxima á 1, á medida que el ángulo disminuya, tendrá 1 por límite, y para que esto ocurra, arco α tiende hacia seno de α. *De aquí se deduce que la diferencia entre un arco y su seno puede ser menor que toda magnitud asignable, por pequeña que sea ésta, dando al arco un valor suficientemente pequeño.*

Diferencia entre un arco y su seno.

Si en las fórmulas $\left\{\begin{array}{ll} \frac{\text{arco } \alpha}{\text{sen } \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha} \text{ ó} & \text{arco } \alpha \times \cos \alpha < \text{sen } \alpha \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha < \text{sen } 2\alpha \end{array}\right\}$ se pone $\frac{\alpha}{2}$ en vez de α, resultarán:

$$\frac{\text{arco } \alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} < \text{sen } \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \text{ sen } \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} < \text{sen } \alpha$$

Multiplicando miembro á miembro y dividiendo los dos miembros de la igualdad que resulta por sen $\frac{\alpha}{2}$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{arco } \alpha \times \cos^2 \frac{\alpha}{2} < \text{sen } \alpha \\ \text{pero } \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \text{arco } \alpha \left(1 - \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}\right) < \text{sen } \alpha \quad \text{ó bien} \quad \text{arco } \alpha - \text{arco } \alpha \text{ sen}^2 \frac{\alpha}{2} < \text{sen } \alpha$$

pasando sen α al primer miembro y arco α sen$^2 \frac{\alpha}{2}$ al segundo, resulta:

$$\text{arco } \alpha - \text{sen } \alpha < \text{arco } \alpha \text{ sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

pero sen $\alpha <$ arco α » sen $\frac{\alpha}{2} < \frac{\text{arco } \alpha}{2}$ » sen$^2 \frac{\alpha}{2} < \frac{(\text{arco } \alpha)^2}{4}$ $\Big\}$ arco α — sen $\alpha <$ arco $\alpha \frac{(\text{arco } \alpha)^2}{4}$

y, por último,

$$\text{arco } \alpha - \text{sen } \alpha < \frac{(\text{arco } \alpha)^3}{4}$$

fórmula que nos dice *que la diferencia entre el arco y su seno es menor que la cuarta parte del cubo del arco.*

Cálculo de sen 10″ *y error que se comete.*

$$\text{sen } 10'' = \text{longitud de arco } 10'' \quad \text{»} \quad \text{Error } \varepsilon = \text{arco } 10'' - \text{sen } 10'' < \frac{(\text{arco } 10'')^3}{4}$$

$$\text{arco } 10'' = l = \frac{\pi R a}{180^\circ} \left\{ \begin{array}{l} l = \text{longitud del arco} \\ R = \text{radio} = 1 \\ a = \text{valor gradual} = 10'' \\ 180^\circ = 648000'' \end{array} \right\} \text{arco } 10'' = \frac{\pi \times 10''}{648000} = \frac{\pi}{64800} = \frac{3{,}1415\ldots..}{64800}$$

Para $r = 1$ » longitud arco 10″ = 0,000048481.....

luego sen 10″ = 0,000048481.....

$$\begin{array}{l|l} 0'0\,3{,}1\,4\,1\,5\,9\,2\,6\ldots.. & 648(00 \\ \quad\;\; 5\,4\,9\,5 & \overline{0{,}000048481\ldots..} \\ \quad\;\;\; 3\,1\,1\,9 & \\ \quad\;\;\;\; 5\,2\,7\,2 & \\ \quad\;\;\;\;\;\; 8\,8\,6 & \end{array}$$

$$\text{Error } \varepsilon < \frac{(0{,}000048481.....)^3}{4} < \frac{(0{,}00005)^3}{4} = \frac{\left(\frac{5}{100\,000}\right)^3}{4} = \frac{\frac{125}{(100\,000)^3}}{4} = \frac{\frac{125}{(10^5)^3}}{4} = \frac{\frac{125}{4}}{(10^5)^3} =$$

$$= \frac{\frac{125}{4}}{10^{15}} < \frac{32}{10^{15}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,032.$$

Esto nos dice que el error $\varepsilon < \dfrac{1}{10^{13}}$, ó que las 13 primeras cifras son exactas.

Cálculo del coseno 10'' y error cometido.

$$\cos 10'' = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 10''} = \sqrt{1 - (0{,}000048481.....)^2}$$

```
     0,0 0 0 0 4 8 4 8 1.....
     0,0 0 0 0 4 8 4 8 1
                 4 8 4 8 1
               3 8 7 8 4 8
             1 9 3 9 2 4
           3 8 7 8 4 8
         1 9 3 9 2 4
0,0 0 0 0 0 0 0 0 2 3 5 0 4 0 7 3 6 1
```

Efectuando operaciones se tiene:

$$\cos 10'' = \sqrt{0{,}999999997649592639.....}$$

Resultando para coseno de 10'' el siguiente valor:

$$\cos 10'' = 0{,}999999998.....$$

```
√0,9 9 9 9 9 9 9 9 7 6 4 9 5 9 2 6 3 9........ | 0,9 9 9 9 9 9 9 9 8.....
   1 8 9,9                                      | 1 8 9 × 9
     1 9 8 9,9                                  | 1 9 8 9 × 9
       1 9 9 8 9,9                              | 1 9 9 8 9 × 9
         1 9 9 9 8 7 6                          | 1 9 9 9 8 9 × 9
           1 9 9 9 7 5,4,9 5 9 2 6 3 9........  | 1 9 9 9 9 8
             1 9 9 7 7 2 9                      | 9 9 9 8
               1 9 7 7 4 7 5
                 1 7 7 4 9 3 9
                   1 7 4 9 5 5
```

Para calcular el error que se comete, tendremos:

Valor exacto $\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$

Idem aproximado $x^2 = 1 - a^2$

restando estas igualdades tendremos: $\cos^2 a - x^2 = a^2 - \operatorname{sen}^2 a$, y como diferencia de cuadrados es igual á suma por diferencia, resultará:

$$(\cos a + x)(\cos a - x) = (a + \operatorname{sen} a)(a - \operatorname{sen} a)$$

pero $a = 10'' < 60^\circ$ » $\cos a > \frac{1}{2}$ » $x =$ valor aproximado $= 0{,}999999998\ldots\ldots > \frac{1}{2}$; substituyendo estos valores en el primer miembro, se tiene:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(\cos a - x) < (a + \operatorname{sen} a)(a - \operatorname{sen} a) \quad \text{ó bien} \quad (\cos a - x) < (a + \operatorname{sen} a)(a - \operatorname{sen} a)$$

pero $\operatorname{sen} a < a$ » $a - \operatorname{sen} a < \frac{a^3}{4}$, luego

$$\cos a - x < (a + a)\frac{a^3}{4} = 2a \times \frac{a^3}{4} = \frac{a^4}{2},$$

es decir, que

$$\varepsilon = \cos a - x < \frac{a^4}{2}$$

el error cometido es menor que la mitad de la cuarta potencia del arco.

Siendo la longitud del arco de $10''$ » $l = 0{,}00004848\ldots\ldots$, resulta:

$$\varepsilon < \frac{(0{,}00005)^4}{2} = \frac{\left(\frac{5}{10^5}\right)^4}{2} = \frac{5^4}{10^{20} \times 2} = \frac{\frac{5^4}{2}}{10^{20}} = \frac{\frac{625}{2}}{10^{20}} < \frac{313}{10^{20}}$$

lo que nos dice que las diecisiete primeras cifras decimales son exactas. Se calculará con trece cifras decimales para que tenga la misma aproximación que el seno.

Modo de construir unas tablas de líneas trigonométricas.

Hemos encontrado los valores $\begin{cases} \text{sen } 10'' = 0{,}0000484813681 \\ \cos 10'' = 0{,}9999999988248 \end{cases}$

Partiendo de estos datos, hace falta determinar los senos y cosenos, de 10″ en 10″, de todos los ángulos, desde 0° á 45°, con lo que se tendrán los cosenos y senos de todos los ángulos desde 45° á 90°.

Las fórmulas siguientes, sumadas, dan:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cos b + \cos a\ \text{sen}\,b \\ \text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cos b - \cos a\ \text{sen}\,b \end{array}\right\} \text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b) = 2\ \text{sen}\,a \cos b \ \text{»}\ \text{sen}\,(a+b) = 2\ \text{sen}\,a \cos b - \text{sen}\,(a-b)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos (a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\ \text{sen}\,b \\ \cos (a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\,a\ \text{sen}\,b \end{array}\right\} \cos (a+b) + \cos (a-b) = 2 \cos a \cos b \ \text{»}\ \cos (a+b) = 2 \cos a \cos b - \cos (a-b)$$

si en estas últimas hacemos $b = 10''$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,(a + 10'') = 2\ \text{sen}\,a \cos 10'' - \text{sen}\,(a - 10'') \\ \cos (a + 10'') = 2 \cos a \cos 10'' - \cos (a - 10'') \end{array}\right\} [n]$$

de las cuales se deducen las siguientes:

$$\begin{array}{l} a = 10'' \begin{cases} \text{sen}\,20'' = 2\ \text{sen}\,10'' \cos 10'' \\ \cos 20'' = 2 \cos^2 10'' - 1 \end{cases} \\ a = 20'' \begin{cases} \text{sen}\,30'' = 2\ \text{sen}\,20'' \cos 10'' - \text{sen}\,10'' \\ \cos 30'' = 2 \cos 20'' \cos 10'' - \cos 10'' \end{cases} \\ a = 30'' \begin{cases} \text{sen}\,40'' = 2\ \text{sen}\,30'' \cos 10'' - \text{sen}\,20'' \\ \cos 40'' = 2 \cos 30'' \cos 10'' - \cos 20'' \end{cases} \\ \vdots \end{array}$$

Por estas fórmulas pueden calcularse los senos y cosenos de los ángulos de 20″, 30″, 40″...., y, por tanto, construir unas tablas trigonométricas; pero el procedimiento resulta muy pesado en la práctica, por tener que efectuar multiplicaciones con números de trece cifras decimales.

Se puede simplificar el procedimiento haciendo

$$2 - 2 \cos 10'' = k \quad [p]$$

el resultado de esta sustracción será $k = 0{,}0000000023504$.

Despejando en la [p] 2 cos 10″ resulta $2 \cos 10'' = 2 - k$, y substituyendo este valor en las fórmulas [n]

$$\operatorname{sen}(a + 10'') = (2 - k) \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(a - 10'')$$
$$\cos(a + 10'') = (2 - k) \cos a - \cos(a - 10'')$$

y efectuando las multiplicaciones, resultará:

$$\operatorname{sen}(a + 10'') = 2 \operatorname{sen} a - k \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(a - 10'')$$
$$\cos(a + 10'') = 2 \cos a - k \cos a - \cos(a - 10'')$$

pasando á los primeros miembros sen a y cos a de los 2 sen a y 2 cos a que hay en los segundos, con cuya operación quedarán sen a y cos a en los dos miembros, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(a + 10'') - \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(a - 10'') - k \operatorname{sen} a \\ \cos(a + 10'') - \cos a = \cos a - \cos(a - 10'') - k \cos a \end{array}\right\} \quad [q]$$

Si hacemos $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(a + 10'') - \operatorname{sen} a = D^s \\ \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(a - 10'') = d_s \end{array}\right\} \text{para los senos} \\ \left.\begin{array}{l} \cos(a + 10'') - \cos a = D_c \\ \cos a - \cos(a - 10'') = d_c \end{array}\right\} \text{para los cosenos} \end{array}\right\}$ Las fórmulas [q] quedarán reducidas á las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} D_s = d_s - k \operatorname{sen} a \\ D_c = d_c - k \cos a \end{array}\right\} \quad [r]$$

fórmulas que sirven para calcular las diferencias de los senos ó cosenos de los arcos que se diferencian en 10″ en función de las diferencias de los arcos anteriores y de los productos k sen a y k cos a; estos productos son fáciles de ejecutar, puesto que k sólo tiene cuatro cifras decimales significativas, por ser ceros las demás, y si se quiere aún más rapidez en las operaciones, puede formarse una tabla con los productos $k \times 1$, $k \times 2$, $k \times 3$, $k \times 4$.....$k \times 9$, de k por los nueve primeros números, con lo cual podrán obtenerse los productos parciales de la multiplicación con sólo copiar los escritos en la tabla. Procediendo de este modo, las fórmulas [r] nos darán la diferencia de los senos ó cosenos de los ángulos 20'' y 10'', y agregando estas diferencias á los senos y cosenos de 10'' tendremos los senos y cosenos de 20''; en seguida se calcularán por las mismas fórmulas las diferencias de los senos y cosenos de los ángulos 30'' y 20'', y agregando estas diferencias á los senos y cosenos de 20'' se obtendrán los senos y cosenos de 30'', y continuando del mismo modo hasta 45° se formará la tabla trigonométrica.

A pesar de haber simplificado el procedimiento, aún resulta muy larga la construcción de unas tablas trigonométricas, porque hemos de efectuar la operación indicada antes, tantas veces como 45° contengan á 10'', ó sea 16200 veces. Conviene calcular los senos y cosenos desde 0° á 30°, y desde 30° á 45° valerse de las siguientes fórmulas, que dan los valores del seno y coseno con una sencilla sustracción de senos y cosenos de ángulos menores que 30°:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{array}\right| \begin{array}{l} a = 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2} \end{array} \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen}(30^\circ+b) + \operatorname{sen}(30^\circ-b) = 2\,\dfrac{1}{2}\cos b \\ \cos(30^\circ+b) - \cos(30^\circ-b) = -2\,\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} b \end{array}\right.$$

y despejando en la primera sen $(30^\circ + b)$ y en la segunda cos $(30^\circ + b)$, resultan:

$$\operatorname{sen}(30^\circ + b) = \cos b - \operatorname{sen}(30^\circ - b)$$
$$\cos(30^\circ + b) = \cos(30^\circ - b) - \operatorname{sen} b$$

fórmulas que permiten calcular los senos y cosenos de los ángulos superiores á 30° en función de los senos y cosenos de los ángulos inferiores ya conocidos por el cálculo anterior.

Para evitar errores se puede calcular directamente el seno y coseno de 3°, que son respectivamente la mitad del lado y la apotema de un polígono regular de 60 lados, que, partiendo del pentedecágono y duplicando el número de lados, se puede obtener por los procedimientos que nos enseña la Geometría. Cuando se conozca el seno y coseno de 3° por las fórmulas sen 2 a, cos 2 a, sen $(a+b)$ y cos $(a+b)$, se podrán calcular los senos y cosenos de los ángulos que forman la siguiente progresión:

$$\div\ 3^{\circ} : 6^{\circ} : 9^{\circ} : 12^{\circ} : 15^{\circ} : 18^{\circ} : 21^{\circ} : 24^{\circ} : 27^{\circ} : 30^{\circ}$$

que nos servirán para comprobar si en el otro procedimiento se han cometido errores.

Para calcular las tangentes y cotangentes se emplean las fórmulas

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \quad \text{y} \quad \cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$$

Las secantes y cosecantes pueden obtenerse tomando las inversas de los senos y cosenos, aunque estas líneas tienen pocas aplicaciones.

Lección 12.

Tablas trigonométricas.

Necesidad de emplear los logaritmos de las líneas trigonométricas.

Descripción de las tablas de Schrön.

Comprenden desde 0° á 90° $\begin{cases} 0^{\circ} \text{ á } 45^{\circ} \text{ parte superior é izquierda.} \\ 45^{\circ} \text{ á } 90^{\circ} \text{ parte inferior y derecha.} \end{cases}$

sen, cos, tg, cot $\left\{\begin{array}{l}\text{parte superior.}\\ \text{parte inferior.}\end{array}\right\}$ Doble entrada. Diferencias. De $\left\{\begin{array}{l}0^{\circ} \text{ á } 3^{\circ}\\ 87^{\circ} \text{ á } 90^{\circ}\end{array}\right\}$ no hay diferencias tabulares.

Tablillas de partes proporcionales *P P.* Excepción $\begin{cases} 0^{\circ} \text{ á } 3^{\circ} \text{ y } 87^{\circ} \text{ á } 90^{\circ}. \\ 3^{\circ} \text{ á } 5^{\circ} \text{ y } 85^{\circ} \text{ á } 87^{\circ}. \end{cases}$

Observaciones sobre las tablas.

1.ª Manera de evitar la característica negativa. $\begin{cases} \text{sen} \\ \text{cos} \\ \text{tg de ángulos} < 45^{\circ} \\ \text{cot de ángulos} > 45^{\circ} \end{cases}$

Ejemplo: Dicen 9,6329233 7,8869677

Se leerá $\bar{1},6329233$ $\bar{3},8869677$

2.ª Error de un logaritmo de las tablas. $\begin{cases} \text{Defecto} \begin{Bmatrix} l \\ l + \frac{1}{2} \end{Bmatrix} l + \frac{1}{4} \\ \text{Exceso} \begin{Bmatrix} L \\ L - \frac{1}{2} \end{Bmatrix} L - \frac{1}{4} \end{cases}$

Modo de encontrar un logaritmo con ocho cifras decimales. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ » 0,20 » 0,30

Ejemplo: Dicen 9,6329233 7,8869677

Se leerá $\bar{1},63292332$ $\bar{3},8869676\bar{7}$

Con esta transformación varían las diferencias.

3.ª Variación de las diferencias tabulares.

De 0° á 3° $\begin{Bmatrix} \text{sen} \\ \text{tg} \\ \text{cot} \end{Bmatrix}$ varían mucho; el coseno muy poco, determinando mal el ángulo.

$$\text{De } 87^\circ \text{ á } 90^\circ \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \cot \\ \mathrm{tg} \end{array} \right\} \text{ varían mucho; el seno muy poco, determinando mal el ángulo.}$$

De 3° á 87° varían las diferencias á lo más en cinco unidades del séptimo orden decimal.
En las líneas las diferencias son positivas, y en las colíneas negativas.
4.ª Diferencia común de tangentes y cotangentes.

$$\left. \begin{array}{ll} \mathrm{tg}\, \alpha = \dfrac{1}{\cot \alpha} \quad » & \log \mathrm{tg}\, \alpha = - \log \cot \alpha \\ \mathrm{tg}\, \alpha' = \dfrac{1}{\cot \alpha'} \quad » & \log \mathrm{tg}\, \alpha' = - \log \cot \alpha' \end{array} \right\} \log \mathrm{tg}\, \alpha - \log \mathrm{tg}\, \alpha' = -(\log \cot \alpha - \log \cot \alpha')$$

Problema directo.

Casos.
1.° Que esté en las tablas el ángulo dado.
2.° Que se halle entre dos de las tablas.
3.° Que sea menor que 3° ó mayor que 87°.

Caso en que los ángulos sean mayores que 90° ó negativos.—Se reducen á otros menores que 90° ó se transforman en otros positivos agregándole un número par de semicircunferencias.

1.er caso. Modo de buscar el logaritmo de una línea ó colínea trigonométrica.

$$\textit{Ejemplo:} \quad a = 34^\circ\, 25'\, 30'' \left\{ \begin{array}{l} \log \operatorname{sen} a = \bar{1},7522997 \\ \log \cos a = \bar{1},9163839 \\ \log \mathrm{tg}\ a = \bar{1},8359158 \\ \log \cot a = 0,1640842 \end{array} \right\} \text{(Página 410 de las tablas de Schrön.)}$$

Otro ejemplo: $b = 68^{\circ}\,53'\,20''$ $\left\{\begin{array}{l} \log \operatorname{sen} b = \bar{1},9698275 \\ \log \cos b = \bar{1},5565169 \\ \log \operatorname{tg} b = 0,4133107 \\ \log \cot b = \bar{1},5866893 \end{array}\right\}$ (Página 330 de las tablas de Schrön.)

2.° caso. División de este caso. $\left\{\begin{array}{l}\text{Líneas.}\\ \text{Colíneas.}\end{array}\right.$

Líneas.

$n < n + d' < n + 10''$ $\left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\}$ Al crecer el ángulo aumenta
$l < l + x < l + \Delta$ el logaritmo línea.

$$\frac{(n + 10'') - n}{(n + d') - n} = \frac{(l + \Delta) - l}{(l + x) - l} \quad \text{ó bien} \quad \frac{10''}{d'} = \frac{\Delta}{x}$$

de donde $x = \dfrac{d'\,\Delta}{10''}$

Colíneas.

$N > N - d' > N - 10''$ Al decrecer el ángulo aumenta
$l < l + x < l + \Delta$ el logaritmo colínea.

$$\frac{(N - 10'') - N}{(N - d') - N} = \frac{(l + \Delta) - l}{(l + x) - l} \quad \text{ó bien} \quad \frac{-10''}{-d'} = \frac{\Delta}{x}$$

de donde $x = \dfrac{d'\,\Delta}{10''}$

En los dos casos el incremento será $x = \dfrac{d'\,\Delta}{10''} = \dfrac{d'}{10''} \times \Delta.$

Si hacemos $d = \dfrac{d'}{10''}$, que equivale á expresar d' en decenas de segundo, se tiene por último

$$x = d \times \Delta$$

que será en la cantidad que se ha de incrementar el logaritmo de la línea correspondiente al menor ángulo, ó de la colínea correspondiente al mayor de los que comprenden al ángulo dado, y d representa la diferencia del ángulo dado con el menor ó con el mayor de los que lo comprenden en las tablas, según sea línea ó colínea.

Ejemplos:

$$\begin{array}{rl|r} \log \operatorname{sen}\,(48^{\circ}\,27'\,32'',76) = & & \bar{1},8741765 \\ d = 0,276 & & \vdots \\ & & 52 \\ \hline & & \bar{1},8741817 \end{array}
\qquad
\left.\begin{array}{r} d = 0,276 \\ \Delta = \quad 187 \\ \hline 1932 \\ 2208 \\ 276 \\ \hline x = d \times \Delta = 51,612 \end{array}\right\}$$

(Página 453 de las tablas de Schrön.)

$$\begin{array}{rl|r} 50\quad 00 & & \\ \log \cot\,(34^{\circ}\,26'\,46'',26) = & & 0,1637230 \\ d = 0,374 & & 169 \\ \hline & & 0,1637399 \end{array}
\qquad
\left.\begin{array}{r} d = 0,374 \\ \Delta = \quad 452 \\ \hline 748 \\ 1870 \\ 1496 \\ \hline x = d \times \Delta = 169,048 \end{array}\right|$$

(Página 410 de las tablas de Schrön).

Para efectuar el producto $d \times \Delta$ se pueden emplear las tablas de *P. P.*

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{rl|r} 20\quad 00 & & \\ \log \cos\,(43^{\circ}\,25'\,17'',34) = & & \bar{1},8611209 \\ d = 0,266 & & 398 \\ & & 119,4 \\ & & 119,4 \\ \hline & & \bar{1},8611262 \end{array}\right\}$$

(Página 464 de las tablas de Schrön.)

$$\left.\begin{array}{rl|r} \log \operatorname{tg}\,(58^{\circ}\,26'\,38'',45) = & & 0,2116887 \\ & & 3776 \\ & & 1888 \\ & & 2360 \\ \hline & & 0,2117286 \end{array}\right\}$$

(Página 393 de las tablas de Schrön.)

Errores que se cometen en estos cálculos.

Número de ellos.
1.° Debido á la proporcionalidad. Despreciable.
2.° Debido á que los logaritmos no son exactos $= \varepsilon_1$.
3.° El que se comete en el producto $d \times \Delta$ al despreciar cifras decimales $= \varepsilon_2$.
4.° El que puede provenir de que d no sea exacto $= \varepsilon_3$.

Límite de error ε_1.

Líneas.	**Colíneas.**
$n < n + d' < n + 10''$ $l + e < l + x < l + \Delta + e'$	$N > N - d' > N - 10''$ $l + e < l + x < l + \Delta + e'$
$\frac{(n + 10'') - n}{(n + d') - n} = \frac{(l + \Delta + e') - (l + e)}{(l + x) - (l + e)}$	$\frac{(N - 10'') - N}{(N - d') - N} = \frac{(l + \Delta + e') - (l - e)}{(l + x) - (l + e)}$
$\frac{10''}{d'} = \frac{\Delta + e' - e}{x - e}$	$\frac{-10''}{-d'} = \frac{\Delta + e' - e}{x - e}$

De estas dos proporciones se deduce el mismo valor para $x - e$, que es el siguiente:

$$x - e = \frac{d'}{10''}(\Delta + e' - e) = d(\Delta + e' - e) \quad \text{de donde} \quad x = d(\Delta + e' - e) + e$$

y efectuando operaciones

$$x = d\,\Delta + d\,e' - d\,e + e = d\,\Delta + e(1 - d) + d\,e'$$

Verdadero valor de x » $x = d\,\Delta + e(1 - d) + d\,e'$
Idem deducido anteriormente $x = d\,\Delta$

Error $\varepsilon_1 = e(1 - d) + d\,e'$

Valores máximos de e y e' $\left\{ \begin{array}{l} e \left\{ \begin{array}{l} +\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \\ e' \left\{ \begin{array}{l} +\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \end{array} \right\}$ $(1 - d)$ y d son positivos; luego ε_1 será máximo cuando e y e' tengan los valores máximos absolutos y estén en el mismo sentido; por tanto, prescindiendo del signo, se tendrá:

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{2}(1-d) + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}$$

es decir, que el límite superior del error ε_1 es menor que media unidad del séptimo orden decimal.

Límite del error ε_2.

En el producto $d \times \Delta$ se desprecia la parte decimal aumentando ó no su última cifra, según que la primera despreciada sea mayor ó menor que 5, luego

$$\varepsilon_2 < 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

es decir, que el límite del error ε_2 es inferior á media unidad del séptimo orden decimal.

Límite del error ε_3.

Este error es debido al que pueda cometerse en d cuando tenga muchas cifras decimales y no se tengan en cuenta en el producto $d \times \Delta$ más que las tres, cuatro ó cinco primeras por no tomar partes proporcionales á las demás.

$e =$ error de d » $\varepsilon_3 =$ error de $d.\,\Delta$

$$\left.\begin{array}{ll}
1.^{o}\ \Delta < 5000 & \left\{\begin{array}{l} d \text{ con cinco cifras} \\ e < 0{,}000005 \end{array}\right\} \varepsilon_3 < 0{,}025 \\
2.^{o}\ \Delta < 1000 & \left\{\begin{array}{l} d \text{ con cuatro cifras} \\ e < 0{,}00005 \end{array}\right\} \varepsilon_3 < 0{,}05 \\
3.^{o}\ \Delta < 500 & \left\{\begin{array}{l} d \text{ con cuatro cifras} \\ e < 0{,}00005 \end{array}\right\} \varepsilon_3 < 0{,}025 \\
4.^{o}\ \Delta < 100 & \left\{\begin{array}{l} d \text{ con tres cifras} \\ e < 0{,}0005 \end{array}\right\} \varepsilon_3 < 0{,}05
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Valores límites de } \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 \begin{array}{l} < 0{,}025 \\ < 0{,}05 \end{array} \\ \text{según sea } \Delta \end{array}$$

Error total.—El error total será la suma de los errores que hemos estudiado, representando por ε y considerando que todos los errores tengan el mismo sentido, que es el caso más desfavorable, tendremos:

Si $\varepsilon_3 = 0$, resultará:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

es decir, que el error total es menor que una unidad del séptimo orden decimal.

Si ε_3 no es nulo, se tiene:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} + \varepsilon_2 + 0{,}05 \\ \frac{1}{2} + \varepsilon_2 + 0{,}025 \end{array}\right\} \text{según sea } \Delta$$

para que el error total sea menor que una unidad del séptimo orden hace falta en cada caso que

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_2 + 0{,}05 < 0{,}50 \\ \varepsilon_2 + 0{,}025 < 0{,}50 \end{array}\right\} \text{de donde se deduce} \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_2 < 0{,}45 \\ \varepsilon_2 < 0{,}475 \end{array}\right.$$

y como el error ε_2 proviene de las cifras despreciadas en el producto $d \times \Delta$, resultará:

En el primer caso, las cifras que se pueden despreciar $\begin{cases} < 0{,}45 \text{ defecto.} \\ > 0{,}55 \text{ exceso.} \end{cases}$

En el segundo caso las cifras que se pueden despreciar. $\begin{cases} < 0{,}47 \text{ defecto.} \\ > 0{,}53 \text{ exceso.} \end{cases}$

Si las cifras despreciadas cumplen con estas condiciones, se tendrá:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < 1$$

y en caso contrario se tomará una cifra más en d para disminuir el error y no tener duda de que el total es inferior en una unidad del séptimo orden decimal.

3.er caso. Ángulos menores que 3° ó mayores que 87°.

En este caso no puede seguirse el procedimiento general, porque las diferencias varían mucho y la proporcionalidad entre incrementos de arcos y de logaritmos daría mucho error.

Para evitar estos errores se calculan, en lugar de log sen y log tg del ángulo que deseemos, los valores de $S = \log \dfrac{\operatorname{sen} a}{a''}$ y $T = \log \dfrac{\operatorname{tg} a}{a''}$, en los cuales las diferencias tabulares varían poco y puede admitirse la proporcionalidad para la interpolación.

Descripción de las tablas correspondientes á este caso.

Modo de reducir un número de grados, minutos y segundos á incomplejo de segundos por medio de las tablas.

Ejemplos.

$$\left.\begin{array}{l} 2^\circ\, 16'\, 25'',17 = 8185'',17 \\ 0^\circ\, 13'\, 37'',14 = 817'',14 \end{array}\right\} \text{(Página 149 de las tablas de Schrön.)}$$

Manera de buscar el logaritmo del número de segundos de un ángulo.

Ejemplos.

$\log (2^\circ\ 58'\ 47'',3)'' = 4{,}03049043$ » (Página 200 de las tablas de Schrön.)

$\log (0^\circ\ 15'\ 26'',52)'' = 2{,}9668548$ » (Página 171 de las tablas de Schrön.)

$$\log (1^\circ\ 23'\ 9'',36)'' = \left.\begin{array}{r} 3{,}6980396 \\ 52{,}2 \\ \hline 3{,}6980448 \end{array}\right\}$$ (Página 85 de las tablas de Schrön.)

$$\text{Valores de } S \text{ y } T \left\{ \begin{array}{l} S = \log \dfrac{\text{sen } a}{a''} \\[2ex] T = \log \dfrac{\text{tg } a}{a''} \end{array} \right\} \text{ Diferencias } \left\{ \begin{array}{l} S \text{ negativas.} \\ T \text{ positivas.} \end{array} \right.$$

Manera de calcular los valores de S y T que corresponden á un ángulo dado. Los valores de T se calculan por interpolación como los logaritmos de las líneas, y los de S como los de las colíneas.

Ejemplos: $a = 1^\circ\ 26'\ 32'',16$

$$S = \begin{array}{r} 4{,}68552886 \\ 14 \\ \hline 4{,}68552900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} d = 0{,}784 \\ \Delta = 18 \\ \hline 6272 \\ 784 \\ \hline d \times \Delta = 14{,}112 \end{array}$$

$$T = \begin{array}{r} 4{,}68566653 \\ 8 \\ \hline 4{,}68566661 \end{array} \qquad \begin{array}{r} d = 0{,}216 \\ \Delta = 36 \\ \hline 1296 \\ 648 \\ \hline 7{,}776 \end{array}$$

(Página 89 de las tablas de Schrön).

Manera de calcular el log sen y el log tg de un ángulo menor que 3°.

Por qué no se sigue el procedimiento antes explicado para el caso general.

Variación de las diferencias entre 0° y 3°. No puede admitirse la proporcionalidad sin grandes errores.

Modo de evitar este inconveniente por los valores de S y T correspondientes al ángulo.

$$\left.\begin{aligned} S &= \log\frac{\text{sen } a}{a''} = \log \text{sen } a - \log a'' \\ T &= \log\frac{\text{tg } a}{a''} = \log \text{tg } a - \log a'' \end{aligned}\right\} \text{de donde} \left\{\begin{aligned} \log \text{sen } a &= \log a'' + S \\ \log \text{tg } a &= \log a'' + T \end{aligned}\right.$$

Como los sumandos que componen los segundos miembros sabemos calcularlos, tenemos resuelto el problema que nos proponíamos.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r|rl|l} \log \text{sen } (2^\circ\ 13'\ 17''\ 35) = & 3{,}9029\,4338 & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ \log a''$} & \\ d = 0{,}265 & 27{,}0 & & \\ \Delta = \underline{\quad 27} & 4{,}68546598 & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ S$} & \text{(Página 145 de las tablas de Schrön.)} \\ 1855 & (\bar{1}0) \qquad 7 & & \\ \underline{530\ \ } & \overline{\bar{2},58841213} & & \\ 7{,}155 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rl|l} \log \text{tg } (0^\circ\ 15'\ 29'',48) = & 2{,}96824003 & = \log a'' & \\ d = 0{,}948 & 4{,}68557775 & \multirow{2}{*}{$\Big\}= T$} & \text{(Páginas 170 y 171 de las tablas de Schrön.)} \\ \Delta = \underline{\quad 6} & (\bar{1}0) \qquad 6 & & \\ 5{,}688 & \overline{\bar{3},65381784} & & \end{array}$$

Logaritmos, cosenos y cotangentes de ángulos menores que 3°.

Para los cosenos se tiene:

$$\frac{\text{sen } a}{\cos a} = \text{tg } a \quad » \quad \cos a = \frac{\text{sen } a}{\text{tg } a} \quad » \quad \log \cos a = \log \text{sen } a - \log \text{tg } a$$

$$\text{pero} \left\{ \begin{array}{l} \log \text{sen } a = \log a'' + S \\ \log \text{ tg } a = \log a'' + T \end{array} \right\} \text{luego } \log \cos a = S - T$$

No se emplea el logaritmo de esta línea porque determina mal el ángulo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll|rl|l}
\log \cos (2^{\circ}\ 37'\ 25'',32) = & & 4{,}68542293 & \multirow{3}{*}{$\Big\} = S$} & \\
 & & 15 & & \\
d = 0{,}468 & d' = 0{,}532 & 4{,}68542308 & & \\
\Delta = \phantom{0{,}4}32 & \Delta' = \phantom{0{,}5}65 & 4{,}68587823 & \multirow{3}{*}{$\Big\} = T$} & \text{(Página 175 de las tablas de Schrön.)} \\
\phantom{0{,}}936 & \phantom{0{,}}2660 & 35 & & \\
1404 & 3192 & 4{,}68587858 & & \\
14{,}976 & 34{,}580 & \bar{1}{,}99954450 & \} = S - T & \\
\end{array}$$

Para las cotangentes resulta:

$$\cot a = \frac{1}{\text{tg } a} \quad » \quad \log \cot a = - \log \text{tg } a$$

Luego no hay más que buscar el log tg y cambiarle el signo.

Ejemplo: Vimos antes que log tg $(0^{\circ}\ 15'\ 29'',48) = \bar{3},65381784$

por tanto tendremos: log cot $(0^{\circ}\ 15'\ 29'',48) = 2,34618216$

Logaritmos, cosenos y cotangentes de ángulos mayores que 87°.

$$a > 87° \quad » \quad 90° - a < 3° \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \text{sen}\,(90° - a) \quad » \quad \log\cos a = \log\,\text{sen}\,(90° - a) \\ \cot a = \text{tg}\,(90° - a) \quad » \quad \log\cot a = \log\,\text{tg}\,(90° = a) \end{array} \right.$$

Fórmulas que nos dicen que se buscará el log sen ó log tg del complemento $90° - a$, que es menor que 3°, y ya sabemos hacerlo.

Ejemplo:

$$\log\cos a = 87°\ 46'\ 42'',65$$

$$\log\,\text{sen}\,(90° - a) = 2°\ 13'\ 17'',35 = \bar{2},58841213$$

según hemos deducido antes; luego $\log\cos a = \bar{2},58841213$.

De un modo análogo buscaríamos el log cot.

Logaritmos, senos y tangentes de ángulos mayores que 87°.

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}\,a = \cos\,(90° - a) \\ \text{tg}\,a = \cot\,(90° - a) \end{array} \right\} \quad 90° - a < 3° \quad » \quad \left\{ \begin{array}{l} \log\,\text{sen}\,a = \log\cos\,(90° - a) \\ \log\,\text{tg}\,a = \log\cot\,(90° - a) \end{array} \right.$$

Fórmulas que nos resuelven el problema.

Los logaritmos de estas líneas no se emplean porque el seno determina mal el ángulo y la tangente es la misma cotangente con signo cambiado.

Ejemplo:

$$a = 87°\ 22'\ 34'',68 \quad » \quad 90° - a = 2°\ 37'\ 25'',32$$

$$\log\,\text{sen}\,a = \log\cos\,(90° - a) = \log\cos\,(2°\ 37'\ 25'',32) = \bar{1},99954450$$

Ejemplos del problema directo:

$$a = 35^\circ\ 27'\ 46''\ 35$$

$$\log \sec a = -\log \cos a = -(\bar{1},9108866) = 0,0891134$$

$$\log \operatorname{cosec} a = -\log \operatorname{sen} a = -(\bar{1},7635592) = 0,2364408$$

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{anti} (\bar{1},7635592) = 0,5801752$$

$$\cos a = \operatorname{anti} (\bar{1},9108866) = 0,8144915$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{anti} (\bar{1},8526726) = 0,7123159$$

$$\cot a = \operatorname{anti} (0,1473273) = 1,4038700$$

$$\sec a = \operatorname{anti} (0,0891134) = 1,2277590$$

$$\operatorname{cosec} a = \operatorname{anti} (0,2364408) = 1,7236170$$

$$\text{sen verso } a = 1 - \cos a = 0,1855086$$

$$\text{cos verso } a = 1 - \operatorname{sen} a = 0,4198248$$

$$\text{verso } a = \frac{1 - \cos a}{2} = 0,0927543$$

$$\text{coverso } a = \frac{1 - \operatorname{sen} a}{2} = 0,2099124$$

$$\text{subverso } a = \frac{1 + \cos a}{2} = 0,9072457$$

$$\text{subcoverso } a = \frac{1 + \operatorname{sen} a}{2} = 0,7900876$$

Problema inverso.

Casos:
- 1.º Que el logaritmo dado esté en las tablas.
- 2.º Que se encuentre entre dos de las tablas.
- 3.º Que corresponda á ángulos menores que 3º ó mayores que 87.

1.er caso. Modo de buscar el ángulo que corresponde al logaritmo de una línea trigonométrica.

Ejemplo:

$\log \operatorname{sen} a = \bar{1},3829144$ » $a = 13^\circ\ 58'\ 30''$ (Página 287 de las tablas de Schrön.)

$\log \cos b = \bar{1},4727631$ » $b = 72^\circ\ 43'\ 20''$ (Página 307 de las tablas de Schrön.)

$\log \operatorname{tg} c = 0,4728973$ » $c = 71^\circ\ 23'\ 50''$ (Página 315 de las tablas de Schrön.)

$\log \cot d = \bar{1},7716879$ » $d = 59^\circ\ 24'\ 40''$ (Página 387 de las tablas de Schrön.)

2.° *caso.* División. $\begin{cases}\text{Líneas.}\\ \text{Colíneas.}\end{cases}$

Líneas.

$$n < n + x' < n + 10''$$
$$l < l + d < l + \Delta$$

$$\frac{(n+10'')-n}{(n+x')-n} = \frac{(l+\Delta)-l}{(l+d)-l} \quad » \quad \frac{10''}{x'} = \frac{\Delta}{d}$$

Colíneas.

$$n < n + x' < n + 10''$$
$$L > L - d > L - \Delta$$

$$\frac{(n+10'')-n}{(n+x')-n} = \frac{(L-\Delta)-L}{(L-d)-L} \quad » \quad \frac{10''}{x'} = \frac{-\Delta}{-d}$$

y en los dos casos se deduce que

$$x' = \frac{d \times 10''}{\Delta}$$

y representando por x á $\frac{x'}{10''}$, que equivale á expresar el incremento en decena de segundo, se tiene:

$$x = \frac{d}{\Delta}$$

que es el incremento que se ha de dar al ángulo que corresponda al menor logaritmo línea ó el mayor logaritmo colínea de las dos que comprenden al buscado. Este incremento, reducido á fracción decimal, nos representará decenas de segundo, y para que exprese unidades de segundo hemos de multiplicar por 10.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l} \log \text{sen}\,(17^\circ\, 18'\, 33'',\, 24) = \bar{1},4735289 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 5070 \\ \Delta = 676 \quad 219{,}0 \;|\; 676 \qquad\qquad \overline{} \\ \qquad\qquad\;\; 1620 \quad 0{,}324 \qquad d = 219 \\ \qquad\qquad\quad\; 2680 \end{array}\right\}$$ (Página 307 de las tablas de Schrön.)

$$\left.\begin{array}{r}
5649 \\
\log \cot (22^{\circ}\ 25'\ 6'',\ 31) = 0{,}3845272 \\
\hline
377
\end{array}\right\}\ \text{(Página 338 de las tablas de Schrön.)}$$

$$\Delta = 597 \qquad \begin{array}{r|l}
377{,}0 & 597 \\
\hline
1880 & 0{,}631 \\
890 &
\end{array}$$

Pueden emplearse las tablillas de *P. P.* para hacer la división.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{r}
2592 \\
\log \cos (43^{\circ}\ 57'\ 24'',67) = \bar{1},8572497 \\
\hline
95 \\
81{,}2 \\
\hline
138 \\
1218 \\
\hline
162
\end{array}\right\}\ \text{(Página 467 de las tablas de Schrön.)}$$

$$\left.\begin{array}{r}
\log \operatorname{tg} (41^{\circ}\ 56'\ 1'',702) = \bar{1},9534283 \\
4211 \\
\hline
72 \\
42{,}3 \\
\hline
297 \\
2961 \\
\hline
90
\end{array}\right\}\ \text{(Página 455 de las tablas de Schrön.)}$$

Errores que se cometen en estos cálculos.

Número de ellos.
- 1.° Proporcionalidad. » Despreciable.
- 2.° Debido á que los logaritmos no son exactos $= \varepsilon_1$.
- 3.° El que proviene del cociente $\dfrac{d}{\Delta}$, que será $= \varepsilon_2$.

Límite del error ε_1.

Líneas.	**Colíneas.**
$n < n + x' < n + 10''$	$n < n + x' < n + 10''$
$l + e < l + d < l + \Delta + e'$	$L - e > L - d > L - \Delta - e'$
$\dfrac{(n + 10'') - n}{(n + x') - n} = \dfrac{(l + \Delta + e') - (l + e)}{(l + d) - (l + e)}$	$\dfrac{(n + 10'') - n}{(n + x') - n} = \dfrac{(L - \Delta - e') - (L - e)}{(L - d) - (L - e)}$
$\dfrac{10''}{x'} = \dfrac{\Delta + e' - e}{d - e}$	$\dfrac{10''}{x'} = \dfrac{-(\Delta + e' - e)}{-(d - e)}$

Resultando en los dos casos $x' = 10'' \dfrac{d - e}{\Delta + e' - e}$ y si tomamos por unidad la decena de segundo y expresamos x' en esta unidad será

$$x = \frac{x'}{10''}; \text{ luego } x = \frac{d - e}{\Delta + e' - e}$$

Esta fracción tiene que ser menor que la unidad porque el incremento no puede valer una docena de segundo.

Las cantidades $\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}+e & \text{»} & \frac{1}{2}-e \\ \frac{1}{2}+e' & \text{»} & \frac{1}{2}-e' \end{matrix}\right\}$ son mayores que cero y, por tanto, positivas.

$$\frac{d-e}{\Delta+e'-e} < \frac{d-e+\left(\frac{1}{2}+e\right)}{\Delta+e'-e+\left(\frac{1}{2}+e\right)} = \frac{d+\frac{1}{2}}{\Delta+e'+\frac{1}{2}} < \frac{d+\frac{1}{2}}{\Delta+e'+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+e'\right)} = \frac{d+\frac{1}{2}}{\Delta} = \frac{d}{\Delta}+\frac{1}{2\,\Delta}$$

$$\frac{d-e}{\Delta+e'-e} > \frac{d-e-\left(\frac{1}{2}-e\right)}{\Delta+e'-e-\left(\frac{1}{2}-e\right)} = \frac{d-\frac{1}{2}}{\Delta+e'-\frac{1}{2}} > \frac{d-\frac{1}{2}}{\Delta+e'-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-e'\right)} = \frac{d-\frac{1}{2}}{\Delta} = \frac{d}{\Delta}-\frac{1}{2\,\Delta}$$

Por consiguiente, si el incremento que se debe agregar al ángulo que dan las tablas es $x \begin{matrix} > \frac{d}{\Delta}-\frac{1}{2\,\Delta} \\ < \frac{d}{\Delta}+\frac{1}{2\,\Delta} \end{matrix}$

y hemos agregado en los ejemplos anteriores $x=\frac{d}{\Delta}$ le faltará agregar ó será menester restarle una cantidad que no llegará á valer $\frac{1}{2\,\Delta}$; luego el error cometido será:

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{2\,\Delta}$$

aunque ignoraremos su sentido.

Límite del error ε_2.

El límite de ε_2 es menor que media unidad de la última cifra del cociente, que si suponemos que se ha calculado con n cifras, será:

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{1}{2.10^n}$$

Error total.

Para ponernos en el caso más desfavorable, supondremos que ε_1 y ε_2 sean del mismo signo, y entonces el error total será.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2.\Delta} \\ \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2.10^n} \end{array} \right. \qquad \text{luego} \quad \varepsilon < \frac{1}{2\,\Delta} + \frac{1}{2.10^n}$$

Para que este error no influya en la última cifra decimal, hace falta que ε sea menor que $\frac{1}{10^n}$, lo que se conseguirá si $\frac{1}{2\,\Delta} + \frac{1}{2.10^n} < \frac{1}{10^n}$, de donde $\frac{1}{2\,\Delta} < \frac{1}{10^n} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^n} = \frac{1}{2\;10^n}$ » $2\,\Delta > 2.10^n$ » $\Delta > 10^n$, y para que se verifique esta última desigualdad, hace falta que n sea inferior al número de cifras que tenga Δ; luego se podrá continuar la división hasta obtener en el cociente tantas cifras decimales como cifras menos una tenga Δ.

Ejemplo: Si Δ tiene tres cifras, x se podrá obtener con dos cifras decimales y los segundos con una.

3.^{er} *caso.* Descripción de las tablas auxiliares de logaritmos, senos ó tangentes.

Se conoce que el logaritmo de una línea ó colínea dada corresponde á un ángulo menor que 3° ó mayor que 87° cuando buscando el arco que le corresponde por el procedimiento general nos encontramos en la parte de las tablas que no tienen diferencias tabulares. Por este procedimiento podemos encontrar los grados, minutos y decenas de segundo, y para encontrar las unidades, décimas, etc. de segundo, se seguirá el siguiente procedimiento:

Manera de calcular los ángulos cuando se da log sen ó log tg de ángulos menores que 3º.

De las fórmulas $\left\{\begin{array}{l} S = \log \operatorname{sen} a - \log a'' \\ T = \log \operatorname{tg} a - \log a'' \end{array}\right\}$ resulta $\left\{\begin{array}{l} \log a'' = \log \operatorname{sen} a - S \\ \log a'' = \log \operatorname{tg} a - T \end{array}\right.$

Si se conocieran S y T estaría resuelto el problema, porque se conocería log a'', y tomando el antilogaritmo, tendríamos a'', que reducido á complejo, nos daría el ángulo buscado.

Como primera aproximación, y valiéndose de las tablillas auxiliares, se tomará para S y T los valores que correspondan á la línea más próxima, y el error cometido lo indican las tablas en $\Delta\, a''$ en la parte inferior

Ejemplos.

$$\left.\begin{array}{lr} \log \operatorname{sen} (1^{\circ}\ 21'\ 4'',147) = & \bar{2},37254135 \\ & 4,68553468 \\ \hline \Delta\, a'' = 0'',001 & 3,68700667 \\ & 0025 \\ \hline & 41,7 \\ & 356 \\ \hline & 61 \end{array}\right\} \text{(Página 83 de las tablas de Schrön.)}$$

$$\left.\begin{array}{lr} \log \operatorname{tg} (0^{\circ}\ 6'\ 40'',237) = & \bar{3},28789358 \\ & 4,68557541 \\ \hline \Delta\, a'' = 0'',001 & 2,60231817 \\ & 3096 \\ \hline & 85,7 \end{array}\right\} \text{(Página 66 de las tablas de Schrön.)}$$

Si deseáramos más aproximación se repetiría el mismo cálculo, tomando para valores de S y T los que corresponden á los ángulos antes determinados.

Manera de buscar un ángulo mayor que 87° dado por un log, cos ó cot.

Las fórmulas $\left\{\begin{array}{l}\log\cos a = \log\operatorname{sen}(90^\circ - a)\\ \log\cot a = \log\operatorname{tg}(90^\circ - a)\end{array}\right\}$, en las que $(90^\circ - a)$ es menor que 3°, reducen este caso al anterior. Calculado el ángulo $(90^\circ - a)$, se tomará su complemento, y tendremos resuelto el problema.

Cuando el dato sea otra línea ó colínea.

Si el dato fuera log tg de un ángulo mayor que 87° ó log cot de un ángulo menor que 3°, las fórmulas $\left\{\begin{array}{l}\log\operatorname{tg} a = -\log\cot a\\ \log\cot a = -\log\operatorname{tg} a\end{array}\right\}$ nos dicen que variando los signos nos encontraremos en el caso anterior.

Los log cos de ángulos menores que 3° y los log sen de ángulos mayores que 87°, no deben tomarse como datos porque determinan mal el ángulo.

Ejemplos del problema inverso:

$\operatorname{sen} a = \frac{425}{732}$	$\log\operatorname{sen} a = \bar{1},7638778$		$a = 35^\circ\ 29'\ 34'',01$
$\sec b = \frac{342}{234}$	$\log\cos b = \bar{1},8351898$		$b = 46^\circ\ 49'\ 35'',20$
$\operatorname{cosec} c = -\frac{75}{30}$	$\log\operatorname{sen}(c - \pi) = \bar{1},6020600$	$c - \pi = 23^\circ\ 34'\ 41'',44$	$c = 203^\circ\ 34'\ 41'',44$
$\operatorname{tg} d = -3$	$\log\operatorname{tg}(\pi - d) = 0,4771213$	$\pi - d = 71^\circ\ 33'\ 54'',18$	$d = 108^\circ\ 26'\ 5'',82$
$\cot e = -0,735$	$\log\operatorname{con}(\pi - e) = \bar{1},8662873$	$\pi - e = 53^\circ\ 41'\ 2'',81$	$e = 126^\circ\ 18'\ 57'',19$
$\text{sen-vr}\ f = 0,35$	$\cos f = 1 - \text{sen-vr}\ f = 0,65$	$\log\cos f = \bar{1},8129134$	$f = 49^\circ\ 27'\ 30'',20$
$\text{subcov}\ g = 0,74$	$\operatorname{sen} g = 2\ \text{subcov}\ g - 1 = 0,48$	$\log\operatorname{sen} g = \bar{1},6812412$	$g = 28^\circ\ 41'\ 7'',42$

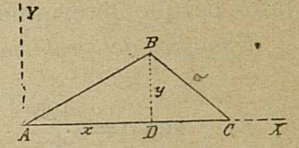
Lección 13.

Trigonometría.

Relaciones entre los elementos de un triángulo rectilíneo.

Objeto de la trigonometría.

Necesidad de fórmulas entre lados y ángulos.



$$\left.\begin{matrix} BC=a \\ AC=b \\ AB=c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} CAB=A \\ CBA=B \\ BCA=C \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} AD=x \\ BD=y \end{matrix}\right\} DC=AC-AD=b-x$$

Trig.º rec.º BCD da $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2$, substituyendo los valores anteriores se tiene:

$$\left.\begin{matrix} a^2=y^2+(b-x)^2 \\ (b-x)^2=b^2-2bx+x^2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} a^2=y^2+b^2-2bx+x^2 \\ \text{Trig.º rect.º } ABD \;\text{»}\; x^2+y^2=c^2 \end{matrix}\right\} a^2=b^2+c^2-2bx,$$

pero como x es la proyección de c sobre el lado b, se tendrá $x=c\cos A$, lo mismo cuando el ángulo es menor que cuando es mayor que 90º; luego sustituyendo resulta:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

Traducción de esta fórmula al lenguaje vulgar.

Aplicando esta fórmula á los tres lados del triángulo, resultan las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos C \end{array}\right\} [1]$$

En estas tres fórmulas entran las seis cantidades a, b, c, cos A, cos B y cos C; conociendo tres de ellas el sistema [1] estará formado por tres ecuaciones con tres incógnitas, que, según sabemos por el Álgebra, es determinado en general.

Ejemplo: Si se nos dieran dos lados y el ángulo comprendido (a, b, C), conoceríamos a, b, cos C, y en el sistema [1] consideraríamos como incógnita c, cos A y cos B; resuelto dicho sistema, conoceríamos los valores de las incógnitas, y, por tanto, los de c, A y B que resolverían el problema trigonométrico.

Las fórmulas [1] resuelven el problema en todos los casos, y con ellas se consigue el principal objeto de la Trigonometría.

Como cos A, cos B y cos C tenemos que calcularlos con 13 cifras decimales para obtener la necesaria exactitud, la eliminación para resolver el sistema [1] se hace muy penosa, casi impracticable, por lo larga. Conviene, por tanto, aplicar el cálculo logarítmico, y como no es posible esta aplicación á las fórmulas [1] por estar compuestas de sumas y restas, necesitamos transformar dicho sistema en otro equivalente en que las cantidades, datos é incógnitas entren sólo bajo las operaciones de productos, cocientes, potencias ó raíces.

Veamos cómo se hacen estas transformaciones: el Álgebra nos enseña que en un sistema de ecuaciones puede substituirse una de ellas por la que resulta de sumarla ó restarla con otra del sistema; sumando las dos primeras del sistema [1] resulta:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B \end{array}\right\} \; a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2\, c^2 - 2\, b\, c \cos A - 2\, a\, c \cos B;$$

restando $a^2 + b^2$ de ambos miembros y pasando los términos negativos al primero, se tiene:

$$2\, b\, c \cos A + 2\, a\, c \cos B = 2\, c^2$$

y dividiendo por 2 c é invirtiendo tendremos:

$$c = b \cos A + a \cos B$$

Repitiendo iguales operaciones con la primera y tercera y con la segunda y tercera de las ecuaciones del sistema [1] se transforma este sistema en el

$$\left.\begin{array}{l} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = a \cos B + b \cos A \end{array}\right\} \quad [2]$$

que le es equivalente.

Estas ecuaciones nos dicen que *un lado de un triángulo es igual á la suma algebraica de las proyecciones de los otros dos lados sobre él,* puesto que en la primera fórmula del sistema [2], por ejemplo, $b \cos C$ y $c \cos B$ son las proyecciones de los lados b y c sobre el lado a.

Las fórmulas [2] son más sencillas que las [1], puesto que son de primer grado respecto á los lados, pero tampoco puede aplicárseles el cálculo logarítmico.

Restando las dos primeras ecuaciones del sistema [1], tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B \end{array}\right\} \quad a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2\, b\, c \cos A + 2\, a\, c \cos B$$

y pasando a^2 y b^2 al primer miembro

$$2\, a^2 - 2\, b^2 = 2\, a\, c \cos B - 2\, b\, c \cos A \quad \text{ó bien} \quad a^2 - b^2 = a\, c \cos B - b\, c \cos A$$

y sacando c factor común, $a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A)$; pero según las fórmulas [2], $c = a \cos B + b \cos A$, luego substituyendo resulta:

$$a^2 - b^2 = (a \cos B + b \cos A)\,(a \cos B - b \cos A)$$

y teniendo en cuenta que suma por diferencia es diferencia de cuadrados,

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A$$

pasando los términos que contengan a^2 al primer miembro, y los que contengan b^2 al segundo, resultará:

$$a^2 - a^2 \cos^2 B = b^2 - b^2 \cos^2 A \quad \text{ó bien} \quad a^2 (1 - \cos^2 B) = b^2 (1 - \cos^2 A)$$

$$\text{pero} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos^2 B = \operatorname{sen}^2 B \\ 1 - \cos^2 A = \operatorname{sen}^2 A \end{array} \right\} \quad \text{luego} \quad a^2 \operatorname{sen}^2 B = b^2 \operatorname{sen}^2 A.$$

Se puede extraer la raíz cuadrada de los dos miembros de esta última ecuación sin que se pierdan soluciones, puesto que el signo menos no se le puede aplicar al segundo miembro por ser $b > 0$ y $\operatorname{sen} A > 0$, luego

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A \quad \text{ó} \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$$

fórmula que puede substituir á la primera del sistema [1] sin que varíen sus soluciones.

Haciendo análogos cálculos con la primera y tercera, y con la segunda y tercera de las ecuaciones del sistema [1], se transforma en el siguiente sistema:

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c} \end{array} \right\} \quad \text{ó bien} \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

que le es equivalente.

Estas fórmulas nos dicen que *los senos de los ángulos de un triángulo son proporcionales á los lados opuestos.*

Cambiando medios en la primera de las ecuaciones del sistema [3], resultará:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{b} \quad \text{ó bien} \quad \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

y aplicando el teorema que dice que la suma de antecedente y consecuente de la primera razón es á su diferencia, como la suma, etc., se tendrá:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}$$

pero sabemos que

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}$$

y substituyendo se tiene la fórmula

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}$$

que puede substituir á la primera del sistema [3], pues las transformaciones aisladas que hemos hecho en ella no modifican las soluciones de aquel sistema. Haciendo análogas operaciones con la segunda y tercera y con la primera y tercera de las ecuaciones del sistema [3], se transformará en el

$$[4]\left\{\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)} \\ \frac{b+c}{b-c} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)} \\ \frac{a+c}{a-c} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-C)} \end{aligned}\right.$$

que se traducen al lenguaje vulgar diciendo: *que la suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es á la tangente de la semidiferencia de los mismos.*

Los sistemas [1], [2], [3] y [4] son equivalentes. Siendo A, B y C ángulos de un triángulo, se tiene que verificar $A + B + C = 180^o$, ó $C = 180^o - (A + B)$; si substituímos el valor de C, dado por esta última ecuación, en todos los sistemas quedarán sus ecuaciones funciones de las siguientes cantidades: a, b, c, A y B, puesto que C habrá desaparecido. Conocidas tres de estas cantidades, podemos determinar las otras dos por las dos primeras ecuaciones de cualquiera de los sistemas, y los valores de aquellos datos y estas incógnitas deben satisfacer á las terceras ecuaciones, siendo estas terceras ecuaciones una consecuencia de las otras dos y de la $A + B + C = 180^o$, según puede verse en el sistema [3], en que la última ecuación es consecuencia de las otras dos. Estos razonamientos nos hacen ver que podemos substituir una cualquiera de las ecuaciones por la $A + B + C = 180^\circ$, y los sistemas anteriores se transformarán en los siguientes:

$$\left.\begin{array}{c} c = a \cos B + b \cos A \\ b = a \cos C + c \cos A \\ A + B + C = 180^\circ \end{array}\right\} [2'] \qquad \left.\begin{array}{c} \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c} \\ A + B + C = 180^\circ \end{array}\right\} [3'] \qquad \left.\begin{array}{c} \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} \\ \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C)} \\ A + B + C = 180^\circ \end{array}\right\} [4']$$

Dadas tres de las seis cantidades a, b, c, A, B y C se puede resolver el triángulo por cualquiera de los sistemas [2'], [3'] y [4']; pero en el caso que los datos sean los tres ángulos, las terceras ecuaciones se verificarían y quedaría un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, que sabemos es indeterminado; para encontrar los valores de las incógnitas a, b y c, habrá que dar un valor arbitrario á una de ellas, c por ejemplo, y resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a y b, resultando para estas incógnitas una infinidad de valores, según los que se den á c; á pesar de esta multiplicidad de valores, la relación $\frac{a}{b}$ es constante, según nos dice el sistema [3'], cuya primera ecuación puede ponerse bajo la forma $\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$, y el segundo miembro es constante porque está en función de los datos; luego los lados de los infinitos triángulos que resultan como soluciones, serán proporcionales. Esto nos comprueba lo dicho en Geometría; pues sabemos que, dados los tres ángulos, se pueden construir infinitos triángulos, que serán semejantes, y que, por tanto, tendrán sus lados proporcionales. A las mismas consecuencias se llega resolviendo uno de los sistemas [1], [2], [3] y [4]. Propongámonos, por ejemplo, resolver el sistema [2], suponiendo que los datos sean cos A, cos B y cos C, y las incógnitas a, b y c; eliminaremos c por substitución, y resultarán los sistemas equivalentes:

$$\left.\begin{array}{l} c = a\cos B + b\cos A \\ b = a\cos C + c\cos A \\ a = b\cos C + c\cos B \end{array}\right\} \times\!\!\!\!\times \left\{\begin{array}{l} c = a\cos B + b\cos A \\ b = a\cos C + (a\cos B + b\cos A)\cos A \\ a = b\cos C + (a\cos B + b\cos A)\cos B \end{array}\right.$$

En la segunda de las ecuaciones de este último sistema se pueden hacer las siguientes transformaciones aisladas:

$$b = a\cos C + (a\cos B + b\cos A)\cos A = a\cos C + a\cos B\cos A + b\cos^2 A$$

y pasando $b\cos^2 A$ al primer miembro, $b - b\cos^2 A = a\cos C + a\cos B\cos A$; sacando factor común b y a en el primero y segundo miembro $b\,(1 - \cos^2 A) = a\,(\cos C + \cos B\cos A)$; pero $(1 - \cos^2 A) = \operatorname{sen}^2 A$, de donde $b\operatorname{sen}^2 A = a\,(\cos C + \cos B\cos A)$, dividiendo por a los dos miembros, resulta:

$$\frac{b\operatorname{sen}^2 A}{a} = \cos C + \cos B\cos A;$$

haciendo iguales transformaciones aisladas en la tercera del sistema, se tendrá:

$$\frac{a\operatorname{sen}^2 B}{b} = \cos C + \cos B\cos A;$$

y substituyendo estas ecuaciones, resulta la equivalencia de los sistemas siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} c = a\cos B + b\cos A \\[2ex] b = a\cos C + c\cos A \\[2ex] a = b\cos C + c\cos B \end{array}\right\} \times\!\!\!\!\times \left\{\begin{array}{l} c = a\cos B + b\cos A \\ \dfrac{b\operatorname{sen}^2 A}{a} = \cos C + \cos B\cos A \\ \dfrac{a\operatorname{sen}^2 B}{b} = \cos C + \cos B\cos A \end{array}\right.$$

Las dos últimas ecuaciones del segundo sistema tienen los segundos miembros idénticos y los primeros son iguales, puesto que de la igualdad $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$ resulta $\frac{\operatorname{sen}^2 A}{a^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{b^2}$, y multiplicando por $a\,b$ y simplificando, $\frac{b \operatorname{sen}^2 A}{a} = \frac{a \operatorname{sen}^2 B}{b}$, luego las dos últimas ecuaciones son idénticas, y el sistema será de dos ecuaciones con tres incógnitas, y los sistemas equivalentes se reducirán á los siguientes:

$$\left.\begin{aligned} c &= a \cos B + b \cos A \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ a &= b \cos C + c \cos B \end{aligned}\right\} \times \times \left\{\begin{aligned} & c = a \cos B + b \cos A \\ & \frac{b}{a} = \frac{\cos C + \cos B \cos A}{\operatorname{sen}^2 A} \end{aligned}\right.$$

que nos dicen que el sistema es indeterminado; pero que la relación $\frac{b}{a}$ es constante, que son las mismas condiciones sacadas anteriormente.

Fórmulas para los triángulos rectángulos.

Haciendo $A = 90^\circ$ en el sistema [1], y teniendo en cuenta que $\cos A = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} & a^2 = b^2 + c^2 \\ & b^2 = (b^2 + c^2) + c^2 - 2\,a\,c \cos B \quad » \quad 2\,c^2 = 2\,a\,c \cos B \quad » \quad c = a \cos B \\ & c^2 = (b^2 + c^2) + b^2 - 2\,a\,b \cos C \quad » \quad 2\,b^2 = 2\,a\,b \cos C \quad » \quad b = a \cos C \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $B + C = 90^\circ$, resulta $\cos B = \operatorname{sen} C$ y $\cos C = \operatorname{sen} B$, luego substituyendo tendremos:

$$c = a \operatorname{sen} C$$
$$b = a \operatorname{sen} B$$

Dividiendo miembro á miembro las del mismo ángulo se tiene:

$$\frac{c}{b} = \frac{a \operatorname{sen} C}{a \cos C} \quad \text{ó bien} \quad \frac{c}{b} = \operatorname{tg} C, \quad \text{y por último,} \quad c = b \operatorname{tg} C$$

$$\frac{b}{c} = \frac{a \operatorname{sen} B}{a \cos B} \quad \text{»} \quad \frac{b}{c} = \operatorname{tg} B \quad \text{»} \quad b = c \operatorname{tg} B$$

pero $\operatorname{tg} B = \cot C$ y $\operatorname{tg} C = \cot B$, luego substituyendo resulta:

$$b = c \cot C \quad \text{y} \quad c = b \cot B$$

Las fórmulas para los triángulos rectángulos son las siguientes:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = a \cos B \quad \text{»} \quad c = a \operatorname{sen} C \quad \text{»} \quad c = b \operatorname{tg} C \quad \text{»} \quad c = b \cot B$$

$$b = a \cos C \quad \text{»} \quad b = a \operatorname{sen} B \quad \text{»} \quad b = c \operatorname{tg} B \quad \text{»} \quad b = c \cot C$$

Estas fórmulas nos dicen: que *el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos; un cateto es igual á la hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido ó por el seno del ángalo opuesto; y un cateto es igual al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero ó por la cotangente del ányulo opuesto al segundo.*

La primera de estas fórmulas es consecuencia de las otras dos, puesto que

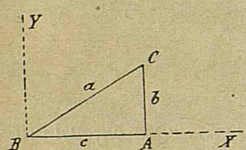
$$\left.\begin{array}{l} c = a \cos B \\ b = a \cos C \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c^2 = a^2 \cos^2 B \\ b^2 = a^2 \cos^2 C \end{array}\right\} c^2 + b^2 = a^2 (\cos^2 B + \cos^2 C) = a^2 (\cos^2 B + \operatorname{sen}^2 B) = a^2$$

y como las demás se han deducido de la segunda y tercera, son consecuencias de ellas; resulta, por tanto, que no hay más que dos fórmulas distintas, que combinadas con la $B + C = 90^\circ$, formarán el sistema que resuelve los triángulos rectángulos.

Este sistema puede deducirse de los [2'] y [3'], pues haciendo en ellos $A = 90^o$ se reducen á

$$\left.\begin{array}{l} c = a \cos B \\ b = a \cos C \\ B + C = 90^o \end{array}\right\} [2'']
\qquad
\left.\begin{array}{lcr} \dfrac{1}{a} = \dfrac{\text{sen } B}{b} & » & b = a \text{ sen } B \\ \dfrac{1}{a} = \dfrac{\text{sen } C}{c} & » & c = a \text{ sen } C \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & B + C = 90^o \end{array}\right\} [3'']$$

Las fórmulas de los triángulos rectángulos podían haberse obtenido directamente sin pasar por las fórmulas de los oblicuángulos, del siguiente modo:



$$\left.\begin{array}{lcl} \text{sen } B = \dfrac{b}{a} & » & b = a \text{ sen } B \\ \cos B = \dfrac{c}{a} & » & c = a \cos B \\ \text{tg } B = \dfrac{b}{c} & » & b = c \text{ tg } B \\ \cot B = \dfrac{c}{b} & » & c = b \cot B \end{array}\right\} \text{ y substituyendo } B = 90^o - C \text{ se tendrán las restantes.}$$

Manera de hacer calculables por logaritmos las sumas y diferencias.

1.º Logaritmo de una suma

$$\left.\begin{array}{l} a + b = a\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) \\ \text{tg } \varphi = \sqrt{\dfrac{b}{a}} \quad » \quad \text{tg}^2 \varphi = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} a + b = a(1 + \text{tg}^2 \varphi) = a\left(1 + \frac{\text{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}\right) = a \, \frac{\cos^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$$

y tomando logaritmos, $\log(a+b) = \log a - 2\log\cos\varphi$

$$\log\ \mathrm{tg}\ \varphi = \frac{\log b - \log a}{2}$$

por la segunda se calcularía el ángulo φ, y conocido este ángulo se puede aplicar la primera.

2.° Logaritmo de una diferencia. $a - b$.

Si $a > b$, se tiene:
$$\left\{\begin{array}{l} a - b = a\left(1 - \dfrac{b}{a}\right) \\ \mathrm{sen}\,\varphi = \sqrt{\dfrac{b}{a}} \quad \text{»} \quad \mathrm{sen}^2\varphi = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} a - b = a(1 - \mathrm{sen}^2\varphi) = a\cos^2\varphi$$

y tomando logaritmos $\log(a-b) = \log a + 2\log\cos\varphi$

$$\log\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{\log b - \log a}{2}$$

Se puede hacer otra hipótesis.

$$\left.\begin{array}{l} a - b = a\left(1 - \dfrac{b}{a}\right) \\ \cos\varphi = \sqrt{\dfrac{b}{a}} \quad \text{»} \quad \cos^2\varphi = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} a - b = a(1 - \cos^2\varphi) = a\,\mathrm{sen}^2\varphi \left\{\begin{array}{l} \log(a-b) = \log a + 2\log\mathrm{sen}\,\varphi \\ \log\cos\varphi = \dfrac{\log b - \log a}{2} \end{array}\right.$$

Si $a < b$ no se puede tomar logaritmos por ser $a - b < 0$, y sabemos que los números negativos no tienen logaritmos. Si quisiéramos transformar $a - b$ en producto, puede hacerse del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} a - b = a\left(1 - \dfrac{b}{a}\right) \\ \mathrm{tg}\ \varphi = \sqrt{\dfrac{b}{a}} \quad \text{»} \quad \mathrm{tg}^2\varphi = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} a - b = a(1 - \mathrm{tg}^2\varphi) = a\left(1 - \frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right) = a\,\frac{\cos^2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{a\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

pero no es posible tomar logaritmos, porque

$$\frac{b}{a} > 1 \quad » \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}} > 1 \quad » \quad \varphi > 45^\circ \quad » \quad 2\varphi > 90^\circ \quad » \quad \cos 2\varphi < 0$$

que no tiene logaritmo.

Tratemos, por último, de calcular por logaritmos el binomio $A \cos \alpha \pm B \operatorname{sen} \alpha$, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} A \cos \alpha \pm B \operatorname{sen} \alpha &= A \left(\cos \alpha \pm \frac{B}{A} \operatorname{sen} \alpha\right) \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{B}{A} \end{aligned}\right\} A \cos \alpha \pm B \operatorname{sen} \alpha = A (\cos \alpha \pm \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \alpha) = A \left(\cos \alpha \pm \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \operatorname{sen} \alpha\right)$$

y sumando los términos dentro del paréntesis, se tiene:

$$A \cos \alpha \pm B \operatorname{sen} \alpha = A \frac{\cos \alpha \cos \varphi \pm \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = A \frac{\cos (\varphi \mp \alpha)}{\cos \varphi}$$

y tomando logaritmos

$$\log (A \cos \alpha \pm B \operatorname{sen} \alpha) = \log A + \log \cos (\varphi \mp \alpha) - \log \cos \varphi$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log B - \log A$$

Se puede hacer otra hipótesis:

$$\left.\begin{aligned} A \cos \alpha \pm B \operatorname{sen} \alpha &= A \left(\cos \alpha \pm \frac{B}{A} \operatorname{sen} \alpha\right) \\ \cot \varphi &= \frac{B}{A} \end{aligned}\right\} A \cos \alpha \pm B \operatorname{sen} \alpha = A \frac{\operatorname{sen} (\varphi \pm \alpha)}{\operatorname{sen} \varphi}$$

y tomando logaritmos

$$\log (A \cos \alpha \pm B \operatorname{sen} \alpha) = \log A + \log \operatorname{sen} (\varphi \pm \alpha) - \log \operatorname{sen} \varphi$$
$$\log \cot \varphi = \log B - \log A$$

Lección 14.

Resolución de triángulos.

Triángulos rectángulos.

Casos.	Datos.	Incógnitas.	Sistema de ecuaciones.	Fórmulas.
1.°	a, B	C, b, c	$\begin{cases} B + C = 90^\circ \\ b = a \operatorname{sen} B \\ c = a \cos B \end{cases}$	$\begin{cases} C = 90^\circ - B \\ b = a \operatorname{sen} B = a \cos C. \\ c = a \cos B = a \operatorname{sen} C \end{cases}$
2.°	a, b	B, C, c	$\begin{cases} b = a \operatorname{sen} B \\ B + C = 90^\circ \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \\ C = 90^\circ - B, \Rightarrow \cos C = \dfrac{b}{a} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)} \end{cases}$
3.°	b, B	C, a, c	$\begin{cases} B + C = 90^\circ \\ b = a \operatorname{sen} B \\ b = c \operatorname{tg} B \end{cases}$	$\begin{cases} C = 90^\circ - B \\ a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{b}{\cos C} \\ c = \dfrac{b}{\operatorname{tg} B} = b \cdot \cot B = b \operatorname{tg} C \end{cases}$
4.°	b, c	B, C, a	$\begin{cases} b = c \operatorname{tg} B \\ B + C = 90^\circ \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c} \quad \cot B = \dfrac{c}{b} \\ C = 90^\circ - B \quad \cot C = \dfrac{b}{c} \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad » \quad a = \dfrac{c}{\cos B} \end{cases}$

Como todos estos casos se resuelven de un modo análogo, explicaremos solamente el 4.º, que puede tener algunas dificultades.

Combinando cada incógnita con los datos, nos resultarán los tres grupos siguientes: b, c, B » b, c, C y b, c, a. En el primero de estos grupos entran los *dos catetos y el ángulo opuesto al primero;* luego la igualdad función de estas cantidades será $b = c \operatorname{tg} B$; en el segundo grupo entran los *dos catetos y el ángulo opuesto al segundo,* y, por tanto, su igualdad correspondiente será $b = c \cot C$, y al último grupo, que está formado por los tres lados, le corresponderá la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$, siendo la reunión de estas tres igualdades el sistema que resolverá el triángulo; pero de las dos primeras se deduce, $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ y $\cot C = \frac{b}{c}$; por consiguiente, $\operatorname{tg} B = \cot C$, y los ángulos B y C serán complementarios, y como el mismo cálculo habría que hacer para determinar cualquiera de ellos, nos resultarán con el mismo error, y, por tanto, que una vez determinado B puede calcularse C por la igualdad $B + C = 90^\circ$, igualdad que, reunida á las otras dos, formará el sistema que hemos indicado en el cuadro. De este sistema de ecuaciones se deducen los valores de las incógnitas, que serán las fórmulas para resolver los triángulos rectángulos en el caso que nos ocupa.

La última fórmula indicada en el cuadro $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ no es calculable por logaritmos. Para poder emplear este procedimiento conviene emplear la igualdad $c = a \cos B$, de donde $a = \frac{c}{\cos B}$, la cual ya es calculable; pero tiene el inconveniente de determinar a en función de B, que lo hemos determinado con los errores correspondientes á los logaritmos, y, por consiguiente, en a se acumularán estos errores más los correspondientes á su cálculo. Tratemos de determinar a directamente en función de los datos, para lo cual habrá que hacer calculable por logaritmos la fórmula $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{c^2\left(1 + \dfrac{b^2}{c^2}\right)} \\ \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}} = \dfrac{b}{c} \end{array}\right\} \quad a = \sqrt{c^2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = \sqrt{\frac{c^2}{\cos^2 \varphi}} = \frac{c}{\cos \varphi}$$

esto nos dice que se puede calcular a por logaritmos empleando las fórmulas

$$a = \frac{c}{\cos \varphi} \text{ siendo } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{c}$$

pero esta última nos hace ver que $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} B$; luego $\varphi = B$ y el cálculo y los errores son los mismos que anteriormente; por tanto, la fórmula conveniente para calcular a será $a = \dfrac{c}{\cos B}$, según indica el cuadro anterior.

Resolución de los triángulos oblicuángulos.

1.er caso. Datos a, B, C. » Incógnitas A, b, c.

Sistema de ecuaciones. $\begin{cases} A + B + C = 180^\circ \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c} \end{cases}$ *Fórmulas.* $\begin{cases} A = 180^\circ - (B + C) \\ b = \dfrac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \\ c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \end{cases}$

La primera fórmula nos da el valor de A sin errores, porque no se necesita el cálculo logarítmico para aplicarla. Conociendo A exactamente podremos aplicar las otras dos fórmulas por medio de los logaritmos.

2.º caso. Datos a, b, A. » Incógnitas B, C, c.

Sistema de ecuaciones. $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} \\ A + B + C = 180^\circ \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c} \end{cases}$ *Fórmulas.* $\begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a} \\ C = 180^\circ - (A + B) \\ c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \end{cases}$

Cálculo de B.—De la primera de las ecuaciones del sistema se deduce el valor de $\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$, pero como á un mismo seno corresponden dos ángulos menores que 180°, que pueden ser ángulos de triángulos, resulta que el problema podrá tener dos soluciones; una $B' < 90^\circ$, que darán las tablas, después de haber aplicado los logaritmos, y otra $B'' = 180^\circ - B' > 90^\circ$, suplemento de B', y, por consiguiente, con el mismo seno que dicho ángulo. Puesto que el problema puede tener dos soluciones, hace falta discutirlo.

Discusión.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a}\ [1] \\ 1.^{\text{a}}\quad A + B + C = 180^\circ \\ 2.^{\text{a}}\quad a \geqq b \operatorname{sen} A \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \begin{array}{l} A \geqq 90^\circ \\ B' \end{array} \left\{\begin{array}{l} a > b \ \text{»}\ B < A \ \text{»}\ a > b \operatorname{sen} A \ldots\ldots \quad 1 \\ a = b \ \text{»}\ B = A \ \text{»}\ \text{imposible} \ldots\ldots \quad 0 \\ a < b \ \text{»}\ B > A \ \text{»}\quad \text{»} \ldots\ldots \quad 0 \end{array}\right. \\ \\ \begin{array}{l} A < 90^\circ \\ B' \text{ y } B'' \end{array} \left\{\begin{array}{l} a > b \ \text{»}\ B < A \ \text{»}\ B' \ \text{»}\ a > b \operatorname{sen} A \ldots\ldots \quad 1 \\ a = b \ \text{»}\ B = A \ \text{»}\ B' \ \text{»}\ a > b \operatorname{sen} A \ldots\ldots \quad 1 \\ a < b \ \text{»}\ B > A \left\{\begin{array}{l} B' \\ B'' \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a > b \operatorname{sen} A \ldots\ldots \quad 2 \\ a = b \operatorname{sen} A \ldots\ldots \quad 1 \\ a < b \operatorname{sen} A \ldots\ldots \quad 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\text{Soluciones.}\end{array}$$

Para que el problema sea posible hace falta que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1.ª Que $A + B + C = 180^\circ$, pues en caso contrario no puede haber triángulo.

2.ª Que $a \geqq b$ sen A, porque si $a < b$ sen A, la fórmula [1] daría: sen $B > 1$, que sabemos es imposible.

Cuando $A \geqq 90^\circ$, B tiene que ser un ángulo agudo para que pueda cumplirse la 1.ª condición; luego en este caso no puede haber más solución que el ángulo B'. Si $a > b$ los ángulos opuestos estarán en las mismas condiciones, y B será menor que A, desigualdad posible por ser $A \geqq 90^\circ$ y $B = B' < 90^\circ$, y que, por tanto, no se opone á que se cumpla la 1.ª condición; como $a > b$, con mayor razón se tendrá $a > b$ sen A, por ser sen $A < 1$, luego se cumple la 2.ª, y el problema tendrá una solución. Si $a \overline{\gtrless} b$ será $B \overline{\gtrless} A$; pero como $A \overline{\gtrless} 90^\circ$ el triángulo no puede existir por no cumplirse la 1.ª condición, y, por consiguiente, en estos casos hay cero soluciones.

Cuando $A < 90^\circ$, puede haber las dos soluciones, B' y B'', por no oponerse á ello la 1.ª condición; en el caso de que $a \geqq b$, se deduce que $B \leqq A$, y como $A < 90^\circ$, resultará $B < 90^\circ$, y no podrá existir más solución que la B'; además, de $a \geqq b$ se deduce que $a > b$ sen A, por ser sen $A < 1$; por tanto, el problema tendrá una solución. Si $a < b$, resultará $B > A$, y las dos soluciones B' y B'' pueden existir, por no oponerse á ello la 1.ª condición; pero como $a < b$, al multiplicar b por sen A, que es menor que la unidad, puede resultar el producto menor, igual ó mayor que a, en el primer caso habrá dos soluciones por cumplirse la 1.ª y 2.ª condición; en el segundo, de $a = b$ sen A, también se cumplen las dos condiciones; pero la fórmula da sen $B = 1$, y, por tanto, $B' = 90^\circ$ y $B'' = 90^\circ$, y las dos soluciones de este caso son iguales, luego distintas no hay más que una; por último, en el tercer caso, $a < b$ sen A, no se cumple la 2.ª y, por consiguiente, no hay solución.

Resumen. $\begin{cases} \text{Si } A \geqq 90^\circ \text{ no hay solución más que cuando } a > b. \\ \text{Si } A < 90^\circ \text{ siempre hay una solución, excepto en el caso de } a<b, \text{ que puede haber dos, una ó ninguna.} \end{cases}$

Cálculo de C.

Si sólo hay una solución $C = 180^\circ - (A + B')$.

Si hay dos soluciones. $\begin{cases} C' = 180^\circ - (A + B') \\ C'' = 180^\circ - (A + 180^\circ - B') = B' - A \end{cases}$

Cálculo de c.

Si sólo hay una solución $c = \dfrac{a \operatorname{sen} C'}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{a \operatorname{sen} (A + B')}{\operatorname{sen} A}$

Si hay dos soluciones. $\left\{ \begin{aligned} c' &= \frac{a \operatorname{sen} (B' + A)}{\operatorname{sen} A} \\ c'' &= \frac{a \operatorname{sen} (B' - A)}{\operatorname{sen} A} \end{aligned} \right\} c = \dfrac{a \operatorname{sen} (B' \pm A)}{\operatorname{sen} A} \qquad [2]$

Cálculo de c *directamente.*—El objeto de este cálculo es evitar los errores acumulados.

Ecuación para despejar á c.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$$

que ordenada con relación á c resulta la siguiente:

$$c^2 - 2\,b \cos A \times c - (a^2 - b^2) = 0$$

que es de segundo grado en c y que resuelta da para la incógnita el siguiente valor:

$$c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 \cos^2 A + (a^2 - b^2)} = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - (b^2 - b^2 \cos^2 A)} = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 (1 - \cos^2 A)}$$

y colocando $\operatorname{sen}^2 A$ en vez de $1 - \cos^2 A$, resulta, por último

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A} \qquad [4]$$

fórmula que resuelve el problema de calcular á c directamente.

Discutamos la fórmula [4]. El valor de c no puede ser imaginario; luego $a^2 \geqq b^2 \operatorname{sen}^2 A$, y extrayendo raíces $a \geqq b \operatorname{sen} A$. Supongamos que esta condición se cumple y tendremos el siguiente cálculo:

$$a \geqq b \operatorname{sen} A \left\{ \begin{array}{l} A \overline{\gtrless} 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \cos A \overline{\lessgtr} 0 \quad \text{»} \quad b \cos A \overline{\lessgtr} 0 \quad \text{»} \quad c' = b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A} > 0 \\ \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A} > b \cos A \quad \text{»} \quad a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A > b^2 \cos^2 A \quad \text{»} \quad a^2 > b^2 \operatorname{sen}^2 A + b^2 \cos^2 A \\ a^2 > b^2 (\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A) \quad \text{»} \quad a^2 > b^2 \quad \text{»} \quad a > b \end{array} \right. \\ A < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \cos A > 0 \quad \text{»} \quad b \cos A > 0 \quad \text{»} \quad c' \text{ existe siempre.} \\ \text{Para que exista } c'' \text{ hace falta que } c'' = b \cos A - \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A} > 0 \\ \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A} < b \cos A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; a < b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Vemos que esta discusión está conforme con la anterior.

Hacer calculable por logaritmos la fórmula [4].

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{sen}^2 A} = b\cos A \pm \sqrt{a^2\left(1 - \frac{b^2\,\mathrm{sen}^2 A}{a^2}\right)}$$

Hipótesis $\mathrm{sen}\,\varphi = \sqrt{\frac{b^2\,\mathrm{sen}^2 A}{a^2}} = \frac{b\,\mathrm{sen}\,A}{a}$ [5]

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2(1 - \mathrm{sen}^2\varphi)}$$

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi} = b\cos A \pm a\cos\varphi$$

de la [5] resulta $b = \frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{sen}\,A}$

$$c = \frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{sen}\,A}\cos A \pm a\cos\varphi = \frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos A \pm a\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,A}{\mathrm{sen}\,A}$$

ó bien $c = a\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos A \pm \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,A}{\mathrm{sen}\,A} = a\,\frac{\mathrm{sen}\,(\varphi \pm A)}{\mathrm{sen}\,A}$

la fórmula

$$c = \frac{a\,\mathrm{sen}\,(\varphi \pm A)}{\mathrm{sen}\,A} \quad [6]$$

resuelve el problema; pero teniendo en cuenta que las [1] y [5] son iguales y que, por tanto, $\varphi = B'$; si comparamos las [6] y [2], veremos que también son iguales, y, por consiguiente, se cometen por este procedimiento los mismos errores que en el primero explicado.

Lección 15.

Resolución de triángulos (continuación).

3.er caso. Datos a, b y C. Incógnitas A, B y c.
Supondremos que a es el mayor lado.

Sistema de ecuaciones. [1] $\begin{cases} A + B + C = 180^\circ \\ \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c} \end{cases}$

Fórmulas. $\begin{cases} A = m^0 + n^0 \\ B = m^0 - n^0 \\ c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \end{cases}$

De la primera ecuación del sistema [1] se deduce $A + B = 180^\circ - C$, y tomando mitades

$$\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2} C \ [2]$$

luego $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) = \cot \frac{1}{2} C$, y substituyendo este valor en la segunda, resulta: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\cot \frac{1}{2} C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}$, de la cual podemos despejar tg $\frac{1}{2}(A - B)$ y tendremos:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \cot \frac{1}{2} C \, \frac{a - b}{a + b}$$

y tomando logaritmo resulta:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \log \cot \frac{1}{2} C + \log (a - b) - \log (a + b)$$

y como el segundo miembro es conocido, se reducirá á un valor numérico, y por medio de las tablas podemos buscar el arco $\frac{1}{2}(A - B)$, que supongamos sea de n grados; la fórmula [2] nos da el valor de $\frac{1}{2}(A + B)$, y lo representaremos por m grados, de este modo tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(A + B) = m^{0} \\ \frac{1}{2}(A - B) = n^{0} \end{array}\right\} \text{ sumando y restando resulta } \left\{\begin{array}{l} A = m^{0} + n^{0} \\ B = m^{0} - n^{0} \end{array}\right.$$

El valor de c se calcula por la fórmula $c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$, que tiene el inconveniente de ser función de A, que está calculado con errores.

Cálculo de c *directamente.*

El objeto de este cálculo es suprimir la acumulación de errores;

Ecuación: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos C$. Inconveniente de no ser calculable por logaritmos.

Manera de hacer esta fórmula calculable por logaritmos:

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos 2\, C = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 C \quad » \quad \cos C = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C \end{array}\right\} c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b\, (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C)$$