ELEMENTOS

DE

DIBUJO LINEAL Ó DELINEACION,

para uso de las escuelas del Reino, de las Clases de las Universidades, y de los artistas, artesanos, fabricantes y demas personas que profesan cualquier ramo de industria.

COMPUESTOS POR EL ARQUITECTO

D. JUAN BAUTISTA PEYRONNET,

CATEDRÁTICO QUE FUÉ DE GEOMETRÍA, MECÁNICA Y DELINEACION

aplicadas á las artes en la ciudad de Badajoz,

EN VIRTUD DE ENCARGO ESPECIAL DE

D. JOSÉ MARIANO VALLEJO,

Inspector de las Escuelas Normales de ambos sexos, establecidas de Real órden para generalizar y propagar el nuevo método de enseñar á leer publicado en la Teoría de la Lectura, y Editor de esta obrita.

MADRID. AGOSTO: 1837.

IMPRENTA GARRASAYAZA, PROPIA DEL EDITOR,

calle de la Flor Alta.

ADVERTENCIA DEL EDITOR.

En el párrafo 66 de la edicion 2ª del *Modo de poner en ejecucion el nuevo método de leer publicado bajo el título de Teoría de la Lectura*, impreso en Julio de 1834, anuncié que se preparaban unos *elementos de dibujo*, para que, unidos á la *Geometría de Niños*, que en aquella época estaba ya impresa, completasen la *instruccion popular*, que se necesitaba proporcionar á la masa general de los Españoles. Si se echa una mirada por el cuaderno de los exámenes que se celebraron en las Escuelas Normales de ambos sexos el 27 de Abril del mismo año, para solemnizar el fausto y venturoso natalicio de nuestra Excelsa Reina Gobernadora, no se podrá ménos de reconocer la actividad y celo con que procedí en la formacion, sostenimiento y progresos de dichas Escuelas; pues que, á los cinco meses de instaladas, produjeron tan ópimos frutos, mayormente habiéndose tenido que preparar todo de nuevo, y aun componer é imprimir algunos de los libros que sirvieron para la instruccion. Y si se lée el catálogo, que se inserta en la obrita intitulada *Explicacion del mejor uso que tienen en la enseñanza las diferentes obras*, que tengo publicadas, no se me podrá negar el vehemente conato con que procedí para llevar á cabo el perfeccionamiento del importante objeto de la enseñanza primaria, que influye en los diferentes ramos de instruccion, civilizacion y progreso, del modo mas directo, positivo y eficaz. Pero, otras providencias que se tomaron relativas á este punto, paralizaron mi marcha, entorpecieron cuanto en esta parte se había ya establecido; se restringió la enseñanza de dichas escuelas; se las privó de recursos; á mí no se me concedió ni aun lo que por derecho me correspondía, en términos, que hasta mi exitencia peligró; pues por falta de medios, acaso hubiera perecido, si muchas personas, celosas por el bien público, que estaban bien enteradas de mis circunstancias y de la utilidad de mis ocupaciones, no me hubiesen auxiliado para atender á mi subsistencia, en el conflicto en que me pusieron. Por esta causa, se ha retrasado tanto la publicacion de esta obrita.

Yo encargué su composicion á *D. Juan Bautista Peyronnet*, Profesor entónces de Geometría, de Mecánica y Delineacion, aplicadas á las artes en Badajoz. Este apreciabilísimo Profesor, de quien tengo hablado en los párrafos 157 y 390 del libro 6º de mi *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas*, con el laudable celo que le es característico, se prestó gustoso á mis indicaciones; y deseando formar una obra completa, trataba de dar á esta materia mayor ensanche; pero, habiendo reflexionado despues de comun acuerdo los dos, hemos convenido en que para el objeto de las escuelas de primeras letras; para el de las clases de las Universidades; y para los artistas, artesanos, fabricantes, y demas personas que profesan cualquier ramo de industria, es muy suficiente, y basta lo que ahora se publica, reservándose el espresado *Peyronnet* publicar otra obra maestra sobre este particular. Y yo faltaría á todos mis deberes, si desde ahora no le manifestase mi gratitud, por haber accedido á emprender diferentes procedimientos, como de ensayo, hasta fijarnos en lo que nos ha parecido mas conducente.

Como aquí estamos acostumbrados á juzgar por lo que vemos en los Extranjeros, no estará demas advertir que, aunque hemos tenido á la vista lo que se hace fuera de España sobre este asunto, sin embargo, no lo hemos imitado ciegamente; pues estamos íntimamente convencidos, y se citan varios hechos en el *Tratado de las aguas*, de que la mayor parte de nuestros males provienen de haber querido establecer en España, sin exámen y solo por rutina, lo que ha probado bien fuera: no reflexionando, que nuestros usos, nuestras costumbres, nuestras facultades intelectuales, físicas y morales, y aun hasta la misma naturaleza del terreno y de la atmósfera, exigen, que todas las cosas, á que nos dediquemos, estén adaptadas á nuestras circunstancias, descartando ó separando cuanto sea exótico para nuestras inteligencias.

Por esta causa, debemos repetir é inculcar mucho, el que, si los conocimientos que proporciona esta obrita, se divulgan, estienden y generalizan en la masa general de los Españoles, bien pronto se notarán adelantamientos en nuestra prosperidad. Si nos hubiéramos estendido mas, se hubiera restringido el número de personas que hubiese podido sacar utilidad de ella; en lo cual hubiéramos causado gran perjuicio á la Nacion; pues en el estado en que actualmente se halla España, no es lo mas útil, conveniente y necesario el formar pocos sugetos que sepan mucho, sinó el formar muchas personas, que sepan lo suficiente, para ser útiles á sí mismos y á sus compatriotas: ejerciendo y perfeccionando aquellos ramos de industria, que son tan indispensables para promover la felicidad de todas las clases del Estado.

A pesar de lo reducida, que es la presente obrita, contiene sin embargo un conjunto de nociones nuevas, y que no se hallan en obras de objeto mas elevado; y por cuyo medio se facilita el que los niños adquieran con precision y exactitud las verdaderas idéas, que sirven de base general á cuanto han de emprender en lo sucesivo. Y así, encontrarán medios y procedimientos directos, generales y sencillos para resolver cuestiones útiles y de aplicacion necesaria en todas las Artes industriales; y de que hasta el presente no se han ocupado los Autores, llevados sin duda de aquella máxima perniciosa, de que hablo en la pág. X del prólogo de la 2ª edicion del tomo 2.º, parte 2ª de mi *Tratado Elemental de Matemáticas*, que contiene el *Cálculo Diferencial é Integral.*

En efecto, muy perjudicial es el que muchos Autores *prefieren la gloria de poner alguna piedra en lo mas alto del edificio científico, á la de facilitar la entrada*; pues esto perjudica tanto á los progresos de las luces y de la civilizacion, como á la gloria de las ciencias y de las artes. Perjudica á los progresos de las luces y de la civilizacion, porque facilitando á todos el estudio de lo que hay conocido, se les pone en estado de añadir mas y con mas prontitud. Perjudica á la gloria de las ciencias y de las artes, porque, poniendo lo útil al alcance de un mayor número de personas, se procura un mayor número de jueces ilustrados, haciendo al mismo tiempo que el género humano adquiera mas goces y comodidades con ménos sacrificios personales.

Guiados por estos principios, hemos procurado con el mayor esmero, que estos elementos reunan la circunstancia de conciliar cuatro puntos de vista muy esenciales, que son: bajo el aspecto *ideológico*; *bajo* el *científico*, el *artístico* y el *económico*. Lo cual ha exigido muchas y variadas combinaciones.

Efectivamente, es de la mayor importancia: 1º el que las idéas se presenten con el rigor, órden y encadenamiento que sea mas oportuno, á fin de que al mismo tiempo que se vayan adquiriendo, sirvan para facilitar el desarrollo de las facultades intelectuales; 2º que dichas idéas concuerden con los principios de las ciencias, que les sirven de fundamento, á fin de que no se adquieran resabios, que haya en lo sucesivo necesidad de olvidar ó desaprender; 3º que se trate la materia, de modo que sea fácil de aplicar despues á las Artes, para coadyuvar al desarrollo y progreso de todas las industrias; 4º y que todo esto se logre con pocos gastos, á fin de que se ponga no solo al alcance de todas las inteligencias, sinó al de todas las fortunas.

En nuestra primitiva idéa, esta obrita debía constar solo de las tres primeras secciones; pero hemos añadido despues la seccion cuarta, por el feliz incidente, que voy á indicar.

En los años de 1801 al 1804, hice yo mis largos y penosos cálculos para rectificar la circunferencia de círculo, ya por la Geometría elemental con 17 guarismos decimales exactos, segun se ve (tabla del § 505) de mi Geometría; ya con 34 guarismos decimales, tambien exactos, como se ve (tabla del § 647) del volúmen de mi *Cál-*

culo Diferencial é Integral. En aquella época, hice otras investigaciones, sobre tan importante materia, entre las cuales se hallaba todo lo que en la presente obrita se comprende en los párrafos del 126 al 133, y desde entónces los tenía guardados sin saber donde.

Con motivo de la retrogradacion del año de 1823, y persecuciones que sufrí, tuve precision de trasladarme á pais extranjero: viajando por Francia, Inglaterra, Bélgica y Holanda. En París tuve por mi cuenta un establecimiento de educacion, de los conocidos allí bajo el nombre de *Pensiones*; y traje á él, en clase de Profesor, á *Mr. Leblanc*, que lo era del Conservatorio de artes y oficios de París; y reunía la apreciabilísima circunstancia de ser una de las personas mas inteligentes en el dibujo de máquinas. Al ver yo, que en las construcciones que hacía dicho Profesor, para el trazado de la *cicloide*, *epicicloide*, *evolvente del círculo*, y sus aplicaciones luego á la delineacion de los engranes, tomaba la cuerda de los arcos de círculo, por los mismos arcos, le dije, que aquello no era exacto; y que yo en otro tiempo había hecho investigaciones, por las cuales, se podía evitar la espresada inexactitud; me manifestó que sería de la mayor importancia el que yo le facilitase los espresados apuntes; y le prometí que, si los hallaba, le haría participante de ellos.

A mi regreso á Madrid, practiqué varias diligencias para encontrarlos; y con motivo de las vicisitudes de mi casa y familia, no me fué posible hallarlos, hasta que por una casualidad lo verifiqué al tratar de arreglar varios papeles en Noviembre del año próximo pasado de 1836; y como segun me han informado, parece que *Mr. Leblanc* ha muerto, he juzgado conveniente aprovechar esta ocasion para insertar aquí la espresada doctrina, y hacer aplicacion de ella para la delineacion de todos los engranes, evitando el inconveniente de tomar la cuerda por el arco, segun se practica no solo en la obra de *Mr. Leblanc*, sinó en la de *Mr. Hachette*, que se reputa, y con razon, por la mas sublime en tan importante materia.

Sin embargo, lo árduo de la empresa, mayormente en nuestro pais, donde nada existe sobre este particular, nos ha tenido indecisos por algun tiempo; mas reflexionando por una parte, que ninguna materia puede ofrecer objeto mas adecuado para ejemplo de delineacion, que el trazado de los engranes; y atendiendo á su importancia por otra, como principal base para el desarrollo de todas las industrias; y teniendo presente, ademas, que las cosas que nunca se emprenden, jamas se concluyen, nos hemos decidido á publicar la espresada seccion cuarta: esperando, que si, á pesar de todo nuestro esmero, hemos cometido algun descuido en materia que envuelve la parte mas sublime de las ciencias de construccion, de las propiedades físicas de los materiales, y de los procedimientos artísticos, se nos disimulará; y se tendrá en consideracion, que nuestro deséo no es otro que el de cooperar á la propagacion de unos conocimientos, que coadyuvan, del modo mas directo y eficaz, al desarrollo de la prosperidad de los Estados.

Algnnos Autores atribuyen á Mr. *La Hire*, ó al Dr. *Hook*, el descubrimiento de las *epicicloides*; pero su verdadero inventor ha sido el astrónomo *Roemer*, que nació en 1644, y murió en 1710; y á quien se debe el importante descubrimiento de la propagacion sucesiva de la luz; esto es, que, el movimiento de la luz no es instantáneo, sinó que empléa un cierto tiempo para llegar del cuerpo luminoso al ojo del observador. Despues de él, *Varignon*, *La Hire*, *Camus*, *Euler*, *Emerson*, *Kaestner*, *Robison*, *Brewster*, *Buchanan*, *Gregory* y *Hachette* han fijado su consideracion en el trazado de estas curvas, y en su aplicacion á la práctica.

Sin embargo de esto, *Wolfio*, en su tiempo, se lamentaba de que los constructores de máquinas no se aprovechaban de este importante descubrimiento, siguiendo rutinas desnudas de conocimientos científicos. Y en la tercera edicion del tratado de Mecánica de *Olinthus Gregory*, página 431, se manifiesta lo sensible, que es, el que las reglas deducidas por estos célebres matemáticos para la práctica, hayan sido poco seguidas por los constructores de máquinas; pues estos han permanecido mas inclinados á las reglas, que de unos en otros se trasmiten los operarios, aunque destituidas completamente de principios científicos.

Yo encuentro una razon muy poderosa, para que los constructores no hayan admitido y puesto en ejecucion las reglas, que se hallan en dichos Autores; pues las han presentado, de tal modo mezcladas con los principios científicos mas sublimes de la Mecánica, que, para hacer uso de ellas, es preciso tener presentes todos estos conocimientos. En efecto, el trazado de los engranes es puramente geométrico; y los Autores citados, lo han presentado mezclado con los conocimientos mas sublimes y difíciles de la Mecánica, y de un modo que complica y ofusca; pues, al deducir las reglas para formar la curvatura de los dientes de las ruedas, hablan de la doctrina de las fuerzas y velocidades, de la de los momentos, de la friccion ó rozamiento, de la uniformidad de presion, de velocidad, de movimiento, de accion, &c. &c. Y es demasiado exigir, que los constructores, al ejecutar el diente de cada máquina, tengan que repasar todas estas teorías. Por lo cual, no se debe esperar, que aun los constructores, mas dóciles, mas celosos y mas exactos adopten dichas reglas, á ménos que no se les presenten desnudas de todo lujo y aparato científico innecesario, á fin de que no tengan que atender á ninguna otra cosa, mas que á la misma regla.

Por esta causa, nos hemos propuesto el que nuestras reglas no necesiten para ponerse en ejecucion, sinó de los conocimientos sencillísimos de la *Geometría de Niños*, y de los que establecemos en esta obrita. Muchísimo trabajo nos ha costado el descartar todo lo demas; que si es bueno y esencial en las obras teóricas, es no solo inútil, sinó aun perjudicial en las óbras destinadas á operaciones prácticas; pues en estas no debe haber ni una sola palabra que distraiga, ó que no conduzca precisa é indispensablemente á la ejecucion material del asunto de que se trata.

Los esfuerzos, que hemos tenido que hacer por nuestra parte, para vencer las inmensas dificultades que hemos encontrado, han sido los mas estraordinarios; y á no ser por una constancia á toda prueba, hubiéramos acaso desistido de nuestro propósito.

Mucho sentirémos que, á pesar de toda nuestra laboriosidad, no hayamos obtenido el completo resultado que desearíamos; pero nos consuela el que los defectos en que hayamos incurrido se podrán ir corrigiendo, á medida que, por la ejecucion práctica, se vayan descubriendo. Y por nuestra parte, agradecerémos estraordinariamente cualquiera inexactitud ó descuido que se nos advierta, para hacer las modificaciones que convengan en beneficio de todas las clases del Estado.

Si se comparan estos Elementos con las obras de *Mrs. Francoeur*, *Monge*, *Hachette*, *La Vallée*, *Leblanc*, *Normand* &c. se hallará que la nuestra, á pesar de no salir de la esfera de las nociones propias de los niños de las escuelas, y de los artistas, artesanos, menestrales &c., reune la circunstancia de poder emprender luego con su auxilio, los trabajos mas elevados de dichas obras, y los procedimientos generales para dibujar todos los objetos de las artes industriales: sobre cuyo punto no se estienden suficientemente los Autores de las espresadas obras, á pesar de ser mas abultadas, y hacer uso en ellas de mas sublimes conocimientos.

En un principio, tuvimos la idéa de que esta obrita formase un volúmen como el de la *Geometría de Niños*; pero, teniendo presente que los dobleces de las láminas perjudican á las figuras delicadas, hemos resuelto el que las figuras vayan en cuaderno separado, para que no se estropéen; y á fin de que se presenten con la mayor claridad y exactitud, hemos elegido el mejor papel, y procurado el mayor esmero en el grabado y estampado.

Algunas figuras se han hecho de intento con escala pequeña; lo cual produce dos ventajas. La 1ª es que, al principio se verán precisados los discípulos á ejecutarlas en escala mayor; lo cual les proporciona ejercitarse en el trazado directo por la regla, sin atenerse á copiar; y la 2ª que, como el delinear en pequeño, es mas difícil que el delinear en grande, podrán despues verificar el trazado en la magnitud de la figura del tamaño que se les presenta; y comparando su dibujo con el de la espresada figura, podrán examinar si lo han hecho con la exactitud y limpieza que corresponde.

Al mismo tiempo, que hemos procurado desempeñar nuestro objeto, hemos tratado de enlazar, de tal modo las operaciones, con el desarrollo de la inteligencia, que se ponga al principiante en estado de percibir sin interrupcion los eslabones que unen las ciencias con las artes. De este modo, esperamos que la presente obrita, podrá servir de puente de comunicacion entre los hombres que piensan y los que ejecutan, que es á lo que la Inglaterra y la Francia deben su prosperidad. Pero aun hemos tratado de dar otro paso aun mas agigantado; y es el de procurar, que, el que ejecuta reuna en sí la parte necesaria de inteligencia para disminuir todo lo posible la barrera, que suele interponerse entre el pensamiento y la ejecucion; y que, caminando de comun acuerdo la facultad de discurrir y la de operar, resulten mayores ventajas en todas las ramificaciones de nuestras industrias.

NOTA IMPORTANTE.

Mi deséo de que esta obrita comprendiese lo mas esencial conocido en el mundo civilizado, me impelió á encargar, por el conducto del Ministerio de Estado, una coleccion de libros elementales, de los que sirven para las escuelas de Alemania y Prusia; mas no habiendo podido llegar á mis manos hasta el 9 del Agosto del presente año, época en que estaba ya concluida toda la impresion de esta obrita, y solo faltaba este pliego que iba á entrar en prensa, no hemos podido hacer uso de dichos libros para su composicion; y solo nos hemos valido de las obras, datos y noticias que yo he recolectado en mis viages por Francia, Inglaterra, Bélgica y Holanda. Entre los libros que hemos recibido, los que tienen mas analogía con esta obrita son los siguientes.

Doctrina del espacio llamada comunmente Geometría para Maestros y discípulos, por el Dr. HARNISCH, impresa en 1822.

Doctrina de las formas y dibujo elemental ó delineacion &c. por STEIN, impresa en 1823.

Doctrina de las formas con aplicacion al dibujo elemental con el modo de calcular las superficies y capacidades por SICKEL, impresa en 1824.

Doctrina del espacio ó Geometría, para los que enseñan, y para los que aprenden, por el Dr. DIESTERWEG, impresa en 1828.

Rudimentos de la doctrina de las formas, ó elementos de delineacion para instruccion científica y elemental de los Profesores de las Escuelas Nacionales, tanto superiores como inferiores. Por W. HESSE. *Segunda edicion, cuidadosamente revisada*, impresa en Maguncia en 1835.

Y aunque no hemos tenido tiempo sinó para hojearlos rápidamente, y examinar las figuras, hemos visto con placer nuestra coincidencia en varias cosas; y nos hemos convencido de que nuestro método es mas general, de igual ó mayor sencillez, y que comprende materias de mayor trascendencia.

PRÓLOGO DEL AUTOR.

Conociendo las grandes ventajas que resultaban en las Escuelas Normales, creadas en esta Corte para generalizar el método de leer contenido en la *Teoría de la Lectura*, de haber introducido en ellas el estudio de la *Geometría de Niños*, pensó muy sabiamente su digno Inspector, mi amigo y Catedrático de Matemáticas Mixtas el Illmo. Sr. D. José Mariano Vallejo, establecer unos *Elementos de Dibujo lineal ó Delineacion*; y sabiendo dicho Señor que yo estaba componiendo un *Tratado Elemental de Delineacion*, me instó para que formase un *Compendio*, que pudiera esplicarse con utilidad general, no solo en las espresadas Escuelas Normales, sinó en todas las escuelas de primeras letras del Reino; y que sirviesen al mismo tiempo á los artistas, artesanos, fabricantes &c.; y esto ha originado la composicion de esta obrita.

En ella, se dan las reglas para usar los instrumentos de Delineacion, y trazar desde el punto, hasta el caso de copiar el natural. Omito el sombreado, porque no es necesario para estas Escuelas, en que solo deben proporcionarse unos elementos, para que puedan, en cualquier arte ú oficio á que se dediquen sus alumnos, espresar sus conceptos, y verificar sus trazados con precision y rigorismo.

Las sombras en realidad pueden considerarse como un lujo de ciencia, en razon á que, sin ellas puede hacerse una rigorosa y exacta descripcion de los cuerpos, como se verá en la presente obrita; y si bien es cierto, que por un alzado puede venirse en conocimiento de sus vuelos en planta, si se considera sombreado en el supuesto de formar el rayo luminoso un ángulo de 45º, tambien lo es, que la mayor parte de veces sirven para confundir, y ocultar las faltas del delineante.

Están divididos estos Elementos en cuatro secciones. En la 1ª describo los instrumentos mas precisos, y manifiesto el modo de usarlos. En la 2ª enseño la delineacion, desde el punto hasta llegar á concluir todas las figuras de la Geometría elemental, inclusas las demas curvas que tienen aplicacion útil, y que he tomado en gran parte desde el (109 al 124), de las lecciones dadas en el Conservatorio de Artes de Madrid por D. *Antonio José Vallejo*, Catedrático de Aritmética, Geometría y Mecánica, aplicadas á las artes en dicho establecimiento. En la 3ª doy las reglas para la delineacion de los cuerpos, de cualquier naturaleza y figura que sean, concluyendo con los medios de copiar un objeto cualquiera. Y en la 4ª manifiesto el modo de delinear los engranes; ya para presentar una aplicacion bajo todos aspectos la mas ventajosa; ya para aprovechar la feliz casualidad de haber encontrado mi citado Catedrático los apuntes relativos á poder rectificar los arcos circulares; pues de este modo, se evita el gran inconveniente de tomar las cuerdas de los arcos de círculo por los mismos arcos; lo que en mi concepto ha de producir ventajas muy trascendentales en todos los ramos de construccion.

Con lo cual, me parece haber llenado, al ménos en cuanto lo han permitido mis facultades, el objeto que se propone mi mencionado Catedrático; y tendré la mayor satisfaccion, si conduce á sus laudables intenciones, de propagar por todos medios unos conocimientos que tienen tan gran trascendencia en la prosperidad de nuestros conciudadanos.

En punto al método, con que he desempeñado mi objeto, he procurado conciliar dos opiniones que hasta cierto punto son contradictorias. Unos dicen, que, ántes de hacer uso de los instrumentos, se debe acostumbrar á los discípulos á trazar á mano las principales figuras de Geometría; y los otros opinan, que debe principiarse, delineando desde luégo dichas figuras, haciendo uso de la regla y el compas. Los primeros se fundan en que, por este medio, llegan á acostumbrarse á medir á simple vista la magnitud de los objetos; y pretenden que de este modo los Artistas adquieren la facilidad no solo de llegar á formar por sí la idéa de un objeto, sinó á retener sus dimensiones, adquiriendo tal exactitud, que dicen poderse conseguir *el tener el compas en los ojos*.

Los otros se fundan en que los Artistas lo que necesitan es saber trazar, con los instrumentos conocidos, las formas que han de dar á su manufactura, conforme al diseño; que es lo que siempre hacen, y no verificar á mano sus trazados; y asi es, que se suelen ver, en los productos de las artes, objetos deformes por su mal trazado: lo cual dimana de no conocer bastante el uso de la regla y el compas.

Los que sostienen, que todo se debe hacer á ojo, ántes de enseñarles á usar los instrumentos, cometen un *círculo vicioso*; pues no se puede uno cerciorar de que las medidas son iguales, sin hacer uso de los instrumentos; y por esta razon los principiantes, á escondidas de sus mismos Profesores, hacen uso de cartones, de papeles, de hilos, y aun del mismo lapicero, para comparar las dimensiones del dibujo que les presentan, con las del que hacen.

Los que sostienen que se debe empezar por hacer uso de los instrumentos, se fundan en que, para aprender á delinear á mano, tardan mas tiempo, que para aprender el manejo de los instrumentos; y pues que en la mayor parte de las ocasiones, para presentar sus conceptos, necesitan hacer uso de los instrumentos, conviene desde luego empezar por este procedimiento.

Para dar alguna idéa de lo mucho que importa conciliar estas dos opiniones, observaré que en general, el delinear á mano es útil á los que aprenden el dibujo de figura, donde la mano y el buen ojo lo hacen todo; y el delinear, haciendo uso de los instrumentos, es lo que mas necesitan los Artistas para todas las industrias. Ademas, se ve con frecuencia que los Escultores, por grande que sea su mérito en tener el *compas en los ojos*, acuden con frecuencia á usar del compas, de la regla, de la escuadra &c. &c. Los mismos Pintores necesitan hacer uso de los mencionados instrumentos para la degradacion de las figuras, y objetos en perspectiva. Por todo lo cual, es de absoluta necesidad no empeñarse sistemáticamente en llevar adelante, y por capricho, ninguna de estas dos idéas aisladamente; sinó combinar ambos procedimientos, pues cada uno de ellos sirve de auxilio al otro, y con tanta mas razon, cuanto hay casos en que los objetos no se pueden trazar á mano, y es absolutamente indispensable hacer uso de los instrumentos, así como hay tambien ocasiones en que no bastan los instrumentos, y es indispensable hacer los trazados á mano.

Además de todo esto, hay una circunstancia que hasta ahora no ha llamado la atencion, y es de la mayor trascendencia. No se puede formar idéa de la igualdad de dos figuras, sin superponerlas, ó recurrir al compas, ó á alguna otra medida que pueda hacer sus veces, como cinta, papel, carton, &c. En efecto, no hay otro medio exacto de que varias personas convengan en dicha igualdad; pues para esto se necesita tener en consideracion, que se forma idéa de los objetos que nos presenta la vista, por la magnitud del ángulo óptico que forman en la retina las líneas que parten de los estremos del objeto ó cuerpo; y cuando la figura original y el dibujo de ella, no estén á la misma distancia del ojo, las figuras *iguales* aparecerán *desiguales*, y *vice versa*. De esto proviene un hecho, que hemos presenciado en la Academia de San Fernando. Los Profesores del dibujo alternan por meses; y se ha visto repetidas veces, que un dibujo corregido por un Profesor jóven, ha parecido chico á otro Profesor anciano; y al contrario, el dibujo corregido por el anciano ha parecido grande al jóven. Esto proviene del método con que se efetúa la vision. Efectivamente, el cuadro que sirve de original, está fijo verticalmente; el dibujo, que hace el discípulo, está en un plano inclinado, pero inferior al original. Por manera, que, de cualquier modo que se coloque el Profesor que corrige, tiene mas cerca de su vista el original, que el dibujo. El

Profesor anciano, que por lo regular tiene la vista ya cansada, necesita para ver el dibujo de igual tamaño que el original, alargar mas las distancias que lo que necesita el Profesor jóven. Por lo cual, para decidir de la exactitud, no hay otro medio que recurrir á los instrumentos.

Resulta pues de todo lo que acabamos de decir, que conviene acostumbrar simultáneamente á hacer las figuras á ojo, y á compararlas con las que se hagan á compas, por no haber otro medio de formar idéa de la exacta igualdad; y como las figuras trazadas con los instrumentos son las únicas exactas, por ellas es por donde se debe empezar; y trazado un círculo por ejemplo con el compas, el discípulo debe procurar imitarlo á ojo, tantas veces como se necesite, para que llegue á efectuarlo con toda exactitud ó con una aproximacion suficiente; y lo mismo debe practicar respecto de las demas figuras.

Ademas de todo esto, se debe considerar como la idéa mas feliz para acostumbrar el ojo á la exactitud, sin hacer uso de instrumentos, el procedimiento para que los niños aprendan á trazar el mapa de España, sin mas auxilio que un cordoncito; por el cual vienen en conocimiento de si se han equivocado, como se consigue por la obrita intitulada *Nociones Geográficas &c.* de mi citado Catedrático.

Para manifestar su importancia, se debe tener presente, que en el siglo en que vivimos, la preferencia, que se da á los métodos, está en razon de la utilidad que producen; y por lo tanto, de la sagacidad y tino con que se combinan, para que á un mismo tiempo y con unos mismos medios se logren directa ó indirectamente diferentes objetos. Tal sucede al procedimiento que acabamos de espresar; pues se presentan los medios que se empléan para lograr el fin, con tal claridad, destreza y sencillez, que no solo se logra conocer nuestro territorio con la mayor exactitud y sin grandes esfuerzos, familiarizándose con el lenguage de las ciencias, y con otras importantes aplicaciones á los usos comunes de la vida, y aun á las mismas ciencias, que tienen por objeto el estudio del Globo terrestre; sinó lo que es mas, adquieren tal facilidad y equivalencia en el ojo y en la mano, que les conducen á resolver del modo mas sorprendente, sin ningun instrumento los indispensables problemas de Geometría, sobre que se funda la *delineacion ó dibujo geométrico.*

Este importante resultado se ha obtenido en los diferentes Establecimientos donde se ha planteado; en los cuales hemos visto con una dulce emocion á muchos niños de corta edad levantar una perpendicular á una recta por un punto dado; dividir un ángulo en dos partes iguales, tirar paralelas, dividir un arco en un número cualquiera de partes &c. con mas desembarazo, y si cabe mas exactitud á veces que con los instrumentos, que generalmente se empléan para esto: resultando muchas veces, que se acostumbran á vencer dos dificultades á un tiempo, cual es fijar la distancia de un punto determinado, y su situacion con relacion á líneas dadas.

Prescindiendo de las ventajas que produce el formar el ojo con exactitud á todas las artes; pues sin salir de la Agricultura, se nota que los adiestrados de este modo, conocen desde luego cuando los surcos van derechos y paralelos, y cuando las eras son iguales &c.; resultan ventajas muy señaladas para estos principios de dibujo, pues que se acostumbran no solo á tirar líneas rectas en posicion determinada, sinó que sueltan el pulso á ejecutar diferentes rasgos, al señalar luego los límites de la España, y los que separan á unas provincias de otras. En términos que, con esta preparacion, los progresos serán mucho mas rápidos y ventajosos.

Todas las citas se han referido á la *Geometría de Niños*, publicada por mi citado Catedrático y amigo; pues esta obrita se puede considerar como el complemento de aquella, y en un principio caminar juntas.

ADVERTENCIA IMPORTANTE.

Un número dentro de un paréntesis, denota que la operacion en que se funda, lo que se está ejecutando, se halla en el párrafo que lleva dicho número; ademas, se pondrá la señal § cuando las citas correspondan á otras obras.

ÍNDICE

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN ESTA OBRITA.

SECCION TERCERA.

DELINEACION DE LOS CUERPOS Ó VOLÚMENES, Y MÉTODO GENERAL PARA FORMAR EL DISEÑO DE CUALQUIER OBJETO.

SECCION CUARTA.

ERRATAS.

Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe leerse.*
27	6 por abajo.	se tiraráu las	se tirará la
56	7ª nota	brachistro-chrona	brachistochro-na
70	26 por arriba	las partes a..1	las partes A..1
72	6 id.	concéntricas $E'G$	concéntricas $E''G$
id.	11 id.	$e'f'$,$E''L'$	$e'f'$,$E'L'$
73	21 id.	$ixv'c'''$	$ixv'e'''$
103	13 id.	y $d'a''b''c'''$	y $d'a''b''c''$
108	15 id.	$A'B'$	AB
116	10	y P*q*	y P*g*
118	22	*ab*	á *b*
id.	24	son *bc*	son *b*C

CATALOGO
DE LAS OBRAS DEL EDITOR.

OBRAS DE INSTRUCCION PRIMARIA.

1 *Coleccion de la clave y reglas generales para aprender á leer, en los mayores caracteres que se han encontrado en Francia, Inglaterra y Holanda.* Su precio 40 rs.

2 *Coleccion de la clave y reglas generales para aprender á leer, en carácter de gran canon:* su precio 4 rs.

3 *Nueva cartilla para aprender á leer en mucho ménos de la mitad del tiempo que por todos los metodos conocidos:* 1 real.

4 *Clave analítica de la lectura, del tamaño de un pliégo, impresa en cartulina con la instruccion práctica al respaldo:* 10 cuartos.

5 *Reglas generales para aprender á leer, un pliego de cartulina impreso por ambos lados:* 10 cuartos.

6 *Reglas generales para aprender á leer, en forma de libro, á manera de cartilla:* 6 cuartos.

7 *Clave analitica de la lectura en medio pliego de cartulina:* 5 cuartos.

8 *Clave analítica de la lectura en cartulina de á cuartilla:* 3 cuartos.

9 *Clave analitica de la lectura en cuartilla de papel regular* 2 cuartos.

10 *Reglas generales para aprender á leer, un librito en* 16°.: 2 cuartos.

11 *Instruccion práctica para enseñar á leer por el nuevo método contenido en la Teoria de la Lectura:* 4 cuartos,

12 *La misma instruccion práctica en letra tan diminuta que se caracteriza con el nombre de* microscópica: 2 cuartos.

13 *Coleccion, en librito, de la clave y reglas de leer con la instruccion al respaldo de la clave:* 4 cuartos.

14 *Teoria de la Lectura* (segunda edicion): 4 rs.

15 *Modo de poner en ejecucion la Teoría de la Lectura:* 6 rs.

16 *Idéas primarias de los números:* 4 rs.

17 *Descripcion de los nuevos aparatos ensayados á presencia de S. M. Nuestra Escelsa Reina Gobernadora*

y cuatro de los Excelentísimos Sres. Secretarios del Despacho, para facilitar las principales dificultades de la escritura, con las muestras correspondientes á este sistema: 4 rs.

18 *Muestras sueltas para escribir por este sistema:* 2 rs.

19 *Los dos aparatos para vencer las dificultades de la escritura:* 60 *rs.*

20 *Nociones geográficas y astronómicas para comprender la nueva division del territorio español:* 4 *rs.*

21 *Aritmetica de niños escrita para uso de las escuelas del Reino:* 4 rs.

22 *Geometria de niños escrita para uso de las escuelas:* 8 rs.

23 *Exámenes celebrados el dia 27 de abril de 1834, cumpleaños de Nuestra Excelsa Reina Gobernadora, en las Escuelas Normales, etc.* 1 real.

24 *Complemento de la Aritmetica de Niños.* 4 rs.

OBRAS CIENTIFICAS.

25 *Tratado Elemental de Matemáticas, cinco volúmenes en cuarto;* á saber: tomo primero parte primera: Aritmética y Algebra 30 rs.

Tomo primero parte segunda: Geometría, Trigonometría rectilinea y Geometría práctica 30 rs.

Tomo segundo parte primera: Trigonometría Esférica, Aplicacion del Álgebra á la Geometría, Secciones Cónicas y Teoría general de las ecuaciones 30 rs.

Tomo segundo parte segunda: Funciones, Séries, Cálculo de las diferencias, y el Diferencial é Integral 30 rs.

Tomo tercero parte primera: Mecánica dividida en sus cuatro tratados, á saber: Estática, Dinámica, Hidrostática é Hidrodinámica 30 rs.

26 *Compendio de Matemáticas puras y mistas, dos tomos en octavo prolongado:* 40 *rs.*

27 *Compendio de Mecánica práctica para uso de los niños, artistas y artesanos etc.* 14 rs.

28 *El plano de la bahia de Cadiz iluminado:* 6 rs.

29 *Memoria sobre la curvatura de las lineas etc.:* 14 rs.

30 *Tabla sinóptica del Arte militar:* 6 rs.

31 *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas,* tres tomos en 4.° 120 rs.

32 *Explicacion del mejor uso que tienen para la enseñanza cada una de estas obras:* 4 cuartos.

33 *Obligaciones del soldado y de la centinela.* 4 cuartos.

34 *Maximas militares y politicas:* 2 rs.

NOCIONES PRELIMINARES.

1 La *Delineacion* enseña á representar en un plano, como es por ejemplo una hoja de papel, un objeto cualquiera. La delineacion puede ser *teórica ó aplicada.* La teórica espresa los diferentes modos que pueden usarse para representar todos los cuerpos de que se compone el universo. La delineacion aplicada es aquella, que, siendo base de un arte ó ciencia, se concreta solo á los objetos de que trata, como la Arquitectura, Fortificacion, Topografía, Maquinaria &.

2 Cuando se traza la figura humana ú otro objeto cualquiera, solo con el auxilio del lápiz, y á simple vista, se dice que se *dibuja*: llamándose *dibujo de figura*, si representa al cuerpo humano ó alguna de sus partes; y *dibujo de adorno*, si representa una flor ó un objeto que coopere á hermosear algun otro, hecho todo tambien á simple vista, y sin emplear mas instrumentos ni utensilio que el lápiz.

3 La delineacion de planos topográficos exige tener conocimiento en el manejo del lápiz, ya sea en dibujo de figura, ó en el de adorno; pues de lo contrario nunca se hace con propiedad.

4 Si se dibuja un objeto ó un conjunto de ellos, á simple vista, se dice que se hace el *croquis ó bosquejo.* Y cuando se ejecuta con medidas iguales á las del objeto, y con los instrumentos, entónces se llama *sacar un diseño igual á dicho objeto.*

5 Si las medidas, con que se construyó el diseño, son menores que las del objeto, entónces se tiene un *diseño reducido.* Y si son mayores, se obtiene un *diseño en grande.*

6 Si, al formar un diseño, se delinean para mayor inteligencia, algunos detalles en escala mayor que la del diseño, estos dibujos parciales se caracterizan con el nombre de *partes en grande.*

7 El hacer en el papel una figura igual ó semejante á un objeto, se llama *levantar el plano ó formar el diseño del objeto.*

8 Si, por el contrario, hecho un diseño, querémos pasar á la construccion material del objeto, que él representa, entónces se dice, que *se procede á ejecutar el natural*, si se hace con las medidas que marca el diseño; y si se hace con medidas proporcionales, entónces se llama *modelo.*

9 Con el fin de hacer esto bien palpable, observarémos, que si, dado un objeto, por ejemplo, una mesa, la representamos en el papel, tenemos el *diseño.*

10 Si, dado el diseño, con una escala de pies, por ejemplo, construimos una mesa como marca el diseño, y que tenga las mismas dimensiones que él, tomadas en un liston de pies, ó en cualquiera otra medida, tenemos la *construccion del objeto, ó su natural;* y si se hace con una escala igual á la del diseño, ó semejante, pero menor que la del natural, se tendrá el *modelo.*

Previas estas nociones, entrémos en materia.

SECCION PRIMERA.

CAPÍTULO PRIMERO.

Descripcion de los instrumentos mas indispensables para la delineacion.

11 El instrumento mas general, y conocido de todos, es la *regla*; y se comprende bajo esta denominacion, un trozo de madera delgada AB (fig. 1), y cuyas dimensiones son arbitrarias. Pueden ser de laton, fierro, marfil, cristal &; pero las de madera, ademas de ser muy económicas y adecuadas para la delineacion, son tambien muy limpias. Las esenciales

circunstancias, que debe tener una regla, son dos: 1.ª que tenga el menor grueso posible, á fin de que, aunque la madera vicie, esto es, se tuerza, permita ceñirse con poco esfuerzo al papel; y 2.ª que tenga los cantos bien recorridos; y que esté bien acepillada, pero sin pulimentar, pues de lo contrario mancha el papel. Suele tener ademas un agujero C con el objeto de poderla colgar; y un chaflan ó rebajo en uno de sus cantos, para que, al tirar las líneas de tinta, no se manche el papel.

12 Tambien se usa de un instrumento ABCD (fig. 2) llamado *gramil* ó *muleta*, que es una regla CD ensamblada á ángulo recto, en otro trozo de madera AB; y cuya longitud debe ser la mitad de la que tiene la regla, pero con mayor grueso para que forme un resalto, segun se vé en E; que manifiesta su costado.

La regla CD debe ser algo mas gruesa que las comunes, à fin de que no haya necesidad de recorrerla á menudo, esto es, poner sus cantos en línea recta.

13 Tambien es preciso el *cartabon*, llamado de *delineantes*, ABC (fig. 3); que tiene la forma de un triángulo rectángulo en A, y cuyo cateto AC suele ser, ó bien duplo en longitud del AB, ó ambos catetos iguales, en cuyo caso los otros dos ángulos son de 45°. Tiene un agujero D, tanto para colgarle, cuanto para mudarle de posicion con el dedo al usarle.

14 El cartabon debe tener las mismas circunstancias que la regla, escepto que no debe tener chaflan ni rebajo.

15 Otro instrumento, tambien muy necesario, es el que los Franceses llaman *Pistolet* (fig. 4), y que yo denomino *regla acordada ó de curvas*; por servir para el trazado de estas, segun verémos en adelante. La que mas comunmente se usa, es la que tiene dicha figura, aunque para mayor exactitud, hay otras varias. Yo tengo hasta siete con diversas curvaturas, y en la (fig. 5) se ve otra en el acto de hacer uso de ella, segun se esplicará (116).

16 El *compas* es otro instrumento muy usado; y

tanto ó mas necesario que la regla; por lo cual, la regla y el compas son verdaderamente la parte principal ó núcleo de la delineacion.

Aunque hay gran multitud de compases, nosotros solo describirémos los que tienen mas íntima relacion, con nuestro objeto.

17 El que representa la (fig.6) es el *compas* llamado *regular* ú *ordinario*; consta de dos partes que se unen por medio de unas lengüetas, llamadas *charnelas*, que permiten abrirse y cerrarse á voluntad, y quedan sujetas en su estremo C, llamado la *cabeza*. En esta hay un agujero, por el cual entra el pasador FG (fig. 7); unido á una chapa de metal llamada *rodela*, del diámetro de la cabeza del compas, y cuya longitud es el grueso de la espresada cabeza; dicho pasador tiene en su estremo un tornillo G, cuya longitud es del grueso de la chapa H, llamada *rodela de presion*, que tiene su agujero en el centro, con una tuerca que sujeta el compas segun queda dicho y se ve en la (fig. 6).

18 Los compases ingleses, en vez de *rodela*, tienen un tornillo en que la tuerca se halla en la *charnela*, y causan el mismo efecto.

19 El objeto de la *rodela de presion*, en los compases franceses, ó el tornillo y tuerca de las charnelas en los ingleses, es dar un movimiento mas ó ménos suave al compas.

20 Para esto, se usa de otra pieza, denominada *llave del compas*, cual se representa en la (fig. 8); en un estremo tal como M hay dos espiguitas, cuya distancia es la misma que la de los agujeritos de la rodela de presion H (fig. 7); se introducen las espiguitas en dichos agujeros; y haciéndola dar vueltas hácia la bajada de la rosca, comprime la *charnela;* con lo cual, el movimiento de las dos partes del compas se hace mas dificultoso; y dando á la inversa, se afloja la charnela, y el movimiento se ejecuta con mas facilidad. En los compases ingleses, en vez de los dos agujeritos, hay una ranura en la cabeza del tornillo, é

introduciendo en ella un real de plata, una punta de navaja ó cualquier objeto delgado y duro, se consigue apretarlo ó aflojarlo.

21 Las dos partes del compas se suelen llamar *piernas del compas*; y en cada una de estas se consideran tres partes distintas, á saber: la parte CA, que es lo que se llama *charnela*; y unida con la CB, forman la *cabeza del compas*; la parte AD suelen llamarla *brazo del compas*; en lo cual se advierte alguna impropiedad, pero que no causa perjuicio; y la parte DF se llama *punta* del compas. Toda la parte CDE se hace por lo regular de laton; y las dos puntas DF, EF son de acero en forma de pirámide triangular, cuyos cúspides para que el compas sea exacto, deben coincidir en un solo punto F, cuando está cerrado.

22 Ademas, hay dos cavidades M por ambos lados del compas, en donde se introducen las yemas de los dedos para abrirle y cerrarle, como dirémos (57).

23 Tres son las circunstancias que un compas necesita para ser bueno. 1.ª Que la charnela se halle bien construida para que ajusten sus partes entre sí; pero sin hallarse comprimida, para que por medio de las *rodelas*, pueda recibir el grado de presion que convenga. 2.ª Que sus movimientos sean suaves y sin interrupcion; lo que se conoce abriendo el compas, y cerrándole despues poco á poco, pero sin parar; 3ª. Las puntas deben ser iguales y estar muy bien templadas, para que no se doblen ni desgasten con facilidad.

24 El compas, que acabamos de describir, està copiado igual al natural, cuyo tamaño es el mas cómodo.

25 Como para otros usos, segun en adelante verémos, se necesita que una de las puntas sea de quita y pon, hay para este fin el *compas llamado de piezas*, que solo difiere del que acabamos de describir, en que una de sus puntas tiene una espiga, que entra en una acanaladura de los brazos del compas, y se sujeta por medio de un tornillo.

26 Al compas acompañan otras dos piezas; una llamada *tiralíneas* (fig. 9), y otra *lapicero* (fig. 10).

27 El tiralíneas de compas (fig. 9) es una pieza *ab* igual en longitud á la punta de quita y pon del compas; y compuesta de dos partes, una *a*C, y otra *fghb* unida á la *a*C por un tornillo *d*, con el objeto de poderle dar movimiento; la pieza *fghb* se compone de dos lengüetas de acero *fb* y *gh* que por medio de un tornillo *m*, se hace que los estremos *b* y *h* se unan ó separen segun nuestro deséo.

En A se ve esta pieza de frente; y en B, se mira de costado. Últimamente, para sujetarla al brazo del compas, tiene una espiga *n* como la punta movible.

28 El lapicero (fig. 10) es todo de laton; y mas corto que la punta movible, á fin de poder introducir en una caja C compuesta de dos chapas que tiene en su estremo, una punta de lápiz *ee* que se sujeta por el tornillo D segun se ve en la figura. La parte A manifiesta la pieza vista de frente; y la B, vista de costado.

29 Como en muchas ocasiones se necesita un compas muy grande, lo que sería embarazoso, acompaña tambien al compas de piezas, otra llamada *alargadera* (fig. 11), que es una barra con una espiga *m*, que se introduce en el brazo del compas, y se sujeta por el tornillo de presion; y que en el otro estremo tiene una caja *n* donde entran las espigas del tiralíneas ó lapicero segun se necesite, y que se sujetan con otro tornillo de presion *o*.

30 Estas últimas piezas, representadas por las (fig^s. 9, 10 y 11) están puestas mas en grande de lo que debían, con relacion al compas que se describe (fig. 6), para mayor inteligencia, y que puedan verse claramente todas sus partes.

31 El *tiralíneas*, llamado de *mano* (fig. 12) no se diferencia del de compas, sinó en que las lengüetas se hallan unidas á un cilindro hueco *a* con una tuerca en el que entra por la parte superior otra pieza *fe*, que, en su parte inferior, tiene un tornillo *m*, y una

aguja *e*, quedando formada como si fuera una sola pieza. La aguja *e* sirve para copiar figuras iguales, picando sus estremos.

32 El *transportador* tambien es necesario; y se omite su esplicacion, por hallarse en el párrafo 38 de la *Geometría de Niños*, con el nombre de *semicírculo graduado*.

33 Cuando todas estas piezas se colocan en una caja, recibe esta el nombre de *estuche de delineacion*, y que generalmente se denomina *estuche de Matemáticas*.

Un estuche consta por lo regular de tres compases: uno de puntas fijas, ó secas como algunos dicen, que es el que representa la (fig, 6) y del mismo tamaño; otro de piezas, que tiene como unos diez dedos de longitud; y otro mas pequeño tambien de piezas, de cinco á seis dedos de largo; alargadera para el mayor, un tiralíneas de mano, llave para los compases, que una misma sirve para todos, y transportador bien sea de bronce, de asta ó de talco.

34 El *lápiz*, que se usa para delinear (fig. 13), es de *grafito*, introducido ó forrado de madera, formando un cilindro. La barreta *ab* es cuadrada y del mismo grueso que marca la figura.

35 Para dibujar, se hace uso del lapicero (fig. 14); se compone de dos laminitas de laton unidas; y forman en sus estremos dos cavidades *a*, *b*, en las cuales se introducen puntas de lápiz ordinario, que se sujetan por las abrazaderas *m*, *n*, bajándolas hácia la parte saliente *op* que marca dicha (fig. 14).

36 Como en el dibujo se trata de representar los cuerpos en un plano, que en general es un papel, y este por su flexibilidad toma diversas formas, es necesario colocarle sobre un plano lo mas exacto posible. Para lo cual, se usa del aparato llamado *tablero*, que representa la (fig. 15), y debe tener lo ménos un dedo de grueso, tres cuartas de ancho, y cuatro de largo.

Para poder usar del tablero se necesita que la madera sea muy limpia, que esté bien plano, y que los cantos formen ángulos rectos, ó como se dice en las artes, que *estén bien á escuadra.*

Á fin de que no se tuerza, se ponen los barrotes O, P, de madera vieja y ya usada, estando ensamblados, segun se vé, á medias maderas.

37 El papel, de que se ha de hacer uso para el delineado, es necesario que sea propio para el objeto que uno se propone. Así es, que se usa de la mejor calidad de papel para los dibujos en limpio, y de objetos que requieran primor; y para ejercitarse los principiantes, puede hacerse uso de cualquier especie de papel, con tal que no tenga mucho grano, y que sea de alguna consistencia para que las puntas del compas no le rompan.

38 Aunque para los primeros principios se puede delinear en papel suelto, conviene sin embargo acostumbrar desde luego á los discípulos á ejercitarse en la delineacion por medio del tablero; para lo cual se requiere que el papel no forme arrugas, ni se doble. Con este objeto, se adapta al tablero (fig. 15), pegándole del modo siguiente. Se corta la rebaba del papel, y se levantan las orillas hácia la cara, sobre que se ha de delinear, como el canto de dos duros todo al rededor. Hecho esto, se humedece la cara del papel, que ha de reposar sobre el tablero, con una esponja á medio escurrir, pero sin encharcarle: luego, se coloca sobre el tablero naturalmente sin tirar de ningun lado; pues aunque se notarán siempre bolsas, sin embargo, al secarse, queda perfectamente estirado. Despues se aplica á la parte levantada del papel, el canto de una regla, y se unta con un trozo *p* (fig. 15) de *cola de boca* humedecida, poniéndola entre los labios. Cuando se ha untado un canto, se sienta; y poniendo encima un papel cualquiera, se aprieta con un colmillo de javalí ó cuchara &c. en toda su longitud; y haciendo lo mismo con los demas lados, quedará pegado el papel al tablero.

39 Despues, para levantar ó despegar el diseño,

se corta con una navaja lo mas cerca posible de la parte pegada, como por *e* y *g*; *g* y *c* &c.; y quedarán solo en el tablero las orillas que se pegaron. Se humedecen despues estas partes pegadas, y se raspan, quedando el tablero otra vez limpio, y en estado de pegar otro papel para delinear otra cosa.

Es necesario tener mucho cuidado con no dejar entre el papel y el tablero ningun cuerpecillo; porque al pasar luego el lápiz, no trazará la continuacion de la línea, sinó que hará variar su direccion; manchándose ademas, por el rozamiento de la regla, que siempre tiene algo de grasa.

40 La *goma elástica* es un producto de un árbol de América; viene en forma de una esfera hueca á manera de botella, y goza de mucha elasticidad, que es de la que ha tomado su nombre. Para cortarla en pedazos, conviene mojar en agua fria la navaja ó cuchilla con que se ha de cortar; pues de lo contrario, es muy penoso y difícil.

41 *Pincel* es un trocito angosto de pluma, con un conjunto de pelos en un estremo; y sirve para sombrear y cargar los tiralíneas.

42 La *tinta de China* viene en barritas de color negrusco; y desleida, suministra un líquido que es mas ó ménos oscuro, segun se carga mas ó ménos de tinta. La mejor da un color pardusco.

CAPÍTULO II.

Uso de los instrumentos.

42 La regla sirve para trazar líneas rectas; y la muleta para tirar perpendiculares y paralelas.

43 El uso de las *reglas acordadas ó de curvas*, es para trazar estas, cuando se han determinado ya varios de sus puntos con toda exactitud; pues entónces se aplica la regla acordada que mas coincide con ellos; y pasando luego un lápiz por su canto, resulta la curva sin garrotes ni sinuosidades.

44 Con el cartabon se tiran perpendiculares; se comprueban si están bien las ya tiradas, y tambien se trazan paralelas.

45 El compas de puntas fijas sirve para tomar distancias.

46 Los compases de piezas, para trazar círculos, ya de tinta ó de lápiz, segun convenga.

47 Para hacer uso del tiralíneas, se llena de tinta el espacio comprendido entre las lengüetas, cuya operacion se llama *cargar el tiralíneas*. Para esto, se sumerge en la tinta, habiéndolas humedecido ántes con la boca, ó en el agua, y teniendo cuidado de limpiar su esterior. Despues de haber concluido, se abren enteramente las lengüetas, se lavan en agua clara, y se enjugan con un lienzo.

48 Son indispensables dos lapiceros, uno mas duro que otro; lo que se conoce al comprarlos en que hincando un poco la uña en la barreta, el que ofrezca mayor resistencia será el mas duro.

49 Como el lápiz se halla cubierto de madera, es necesario descubrirlo, y ponerlo en disposicion de poder tirar líneas, lo que se llama *afilar el lapicero*. Esto se practica del modo siguiente. En el mas duro, se empieza á descarnar la madera con un cortaplumas, como dedo y medio de longitud, hacia uno de sus estremos; pero de tal modo que vaya aumentando el descarne hácia la punta, hasta que quede descubierto el lápiz, como medio dedo; en cuyo caso, se va afilando por igual, hasta formar punta muy fina, segun se ve en la (fig. 16). Este lápiz mas duro sirve para hacer algun perfil que se necesite ejecutar á mano.

50 De este mismo modo se afilarán los lapiceros para las piezas del compas; mas para tirar líneas, debe practicarse el afilado del lápiz blando, del modo siguiente. Luego que se ha manifestado ó descubierto el lápiz, por el procedimiento anterior, se pone una cualquiera de las aristas de la base en contacto con una lima plana, con la cual se le irá comiendo, has-

ta que llegue como a la mitad de dicha base (fig. 17) segun demuestra A; se hace lo mismo con la arista opuesta de la misma base, y toma la figura que se ve en B; con lo cual queda en disposicion de poder señalar con toda finura las líneas, y resiste mas que si terminase en punta.

51 Para borrar las líneas mal tiradas, ó aquellas que sirven de auxiliares para la construccion, y que despues no son necesarias, se frotan con la goma elástica hasta que desaparezcan.

52 Cuando la goma está muy cansada, lo que se conoce en que se ponen sus estremos blanquizcos y se va resquebrajando, se corta un poco de su canto, y se limpia por él. Muchas veces sucede en el invierno, que contrayéndose por el frio, no borra bien; en este caso se calienta un poco á la lumbre, y se la va estirando, á fin de que vuelva á adquirir su elasticidad y flexibilidad primitivas.

53 Para usar la tinta de China, es necesario desleirla en un platillo ó en cualquier otra vasija plana y lisa; para lo cual, se echa un poquito de agua como media docena de gotas, y se frota en ella un estremo de la barra suavemente, hasta que el líquido tenga el negro que convenga segun el objeto en que se ha de emplear.

54 Es necesario no guardar la tinta de un dia para otro; pues concentrándose el líquido, adquiere al mismo tiempo algo de polvo, y origina globulillos, que despues no permiten correr la tinta por la abertura de las lengüetas de los tiralíneas.

55 Á pesar del gran cuidado que debe tenerse en limpiar los tiralíneas, luego que se han usado, se oxidan ó enmohecen algo con el tiempo. Se ponen otra vez corrientes con la mayor facilidad, solo con frotar el interior de las lengüetas contra una pizarra delgadita, habiendo echado ántes unas gotas de aceite limpio.

56 Para manejar el compas, se deben observar desde luego varias reglas; pues de lo contrario adquie-

ren los principiantes ciertos resabios, que en lo sucesivo les impide hacerlo bien y con soltura; por lo cual, vamos á manifestar el modo de hacer uso de él, en las tres cuestiones que pueden ofrecerse.

57 El compas, se toma con la mano derecha segun espresa la (fig. 18); esto es, la yema del dedo pulgar *a* se coloca en la cavidad esterior del compas; y en la opuesta, la yema del dedo corazon *c*; la del índice *b* sobre la cabeza del compas; el anular *d* y el meñique en la posicion que quedan naturalmente.

58 Como el objeto del compas es *tomar distancias* y *trazar círculos*, trataremos primero del *modo de tomar distancias*.

Teniendo el compas como ya hemos dicho (57), supongamos que se trata de tomar la distancia MN (fig. 19). Se aprietan las yemas de los dedos, que se pusieron en las cavidades de los brazos del compas, y se empuja á las mismas cavidades, una en diferente sentido que la otra; con lo cual quedará abierto el compas, de modo que permita poner la uña del dedo corazon *c* en contacto por el interior con el brazo del compas; entónces se fija una de las puntas por ejemplo en N; y en contacto de este mismo brazo, y por su interior, se pone la yema del anular *d*; y haciendo luego una ligera presion, con el dedo índice *b*, se empuja con el dedo corazon el otro brazo, hasta que la punta del compas se halle en M; en cuyo caso ya se ha tomado la distancia que nos proponíamos.

59 Si, abierto ya el compas, tratásemos de tomar otra distancia, menor que la que indica su abertura, se fija del mismo modo una punta, por ejemplo en N (fig. 20); y cambiando los dedos, esto es, poniendo la uña del anular *d* por fuera, y en contacto del brazo del compas, cuya punta se halla fija, se comprimirá hácia el interior, el otro brazo con la yema del dedo corazon *c* hasta tanto que la punta del compas se halle en el otro punto M, estremo de la distancia que se trataba de tomar.

60 Últimamente, si tratásemos de trazar un cír-

culo (fig. 21), cuyo radio fuese PO, tomaríamos la distancia PO segun acabamos de manifestar; y deberíamos poner la mano en la posicion que marca la figura. Para lo cual, se colocan las yemas de los dedos, pulgar é índice, en los costados de la cabeza del compas, y al testero de dicha cabeza la yema del dedo corazon: luego, con la yema del dedo índice, que está opuesta á la punta del compas, que se halla en el parage que ha de ser centro del círculo, se comprime un poco dicha punta, y se empuja hácia la derecha; con lo cual se hace tomar un movimiento giratorio á la cabeza del compas, apoyada siempre por el pulgar, hasta tanto que las yemas de los dedos se hallen en la cara y testero de la cabeza del compas. En este caso, volviendo la mano á tomar la posicion primera, se continúa del modo anterior, hasta concluir el círculo: teniendo siempre cuidado de que la punta que traza la circunferencia, vaya siempre en contacto con el papel ó plano; pues de lo contrario quedarán puntos de aquella por señalar (*)

61 El tablero debe colocarse de modo que el canto ó lado que mire al delineante, esté siempre en una posicion paralela á él.

62 Terminarémos esta seccion, observando, que el principiante debe poner el mayor esmero en la limpieza de sus dibujos y utensilios; pues nada repugna mas que el ver puercos los diseños, y notar desaliño en los instrumentos.

(*) El círculo que aquí se describe, aparece en la (fig. 21) como si fuese mas largo por uno de sus lados que por el otro, formando una curva, que darémos á conocer (115) con el nombre de *elipse*. Es indispensable hacerlo así; pues de otro modo no podria verse al mismo tiempo el compas abierto, y el círculo en la forma de trazarse.

SECCION SEGUNDA.

CAPÍTULO PRIMERO.

Delineacion del punto, de la linea recta, circunferencia de circulo; y combinacion de rectas con dicha circunferencia.

63 Un punto se construye, señalándole con la punta de un compas, lapicero, pluma &c. sobre el papel.

Se llama *punto de interseccion* el parage donde se cruzan dos líneas, sean rectas ó curvas.

64 *Dados dos puntos* A,B, *tirar por ellos una linea recta* (fig. 22).

Se coloca la regla R separada de dichos puntos, lo que se necesite para que el lápiz venga á caer sobre ellos; se la sujeta con la mano izquierda; y tomando el lapicero con la derecha, teniendo cuidado de fijar siempre la vista en el canto de la regla, de modo que permita ver el punto de partida A, y el estremo B, se llevará el lápiz de A á B, siempre en contacto con el canto de la regla. Al llegar el lápiz al punto B, el rastro ó huella que ha dejado en el papel, será la *línea recta pedida.*

65 Las líneas deben tirarse de izquierda á derecha, á fin de que la mano, en que se lleva el lapicero, no impida ver la línea que se tira.

66 Para comprobar si una regla es buena, se tira con su auxilio una línea recta; despues se coloca la regla en un sentido inverso, esto es, se pone el mismo canto de la regla por el otro lado de la línea tirada, y se vuelve á pasar el lápiz por el canto de dicha regla; y si no se confunden los dos trazados en uno, es señal de que la regla está mal.

67 *Trazar una circunferencia de círculo* (fig. 23).

Determinada la magnitud CR del radio, y el centro C, se coloca una de las puntas del compas en C; y abierta la otra, segun la magnitud del radio, se empieza á trazar por el punto R, y se va dando vuelta al compas al rededor del punto C, conservando siempre fija la punta del centro, hasta que la otra vuelva al punto de donde se partió (*).

68 Las líneas se tiran primero con lápiz, en cuyo caso no hay inconveniente en trazarlas un poco mas largas de lo que deben ser; pero, como el lápiz se borra, es necesario despues pasarlas de tinta por medio del tiralíneas.

69 Para las líneas rectas, se usa, como ya hemos dicho, del tiralíneas de mano, que se lleva del mismo modo que el lapicero. Pero es necesario tener aun mas cuidado; pues si se pasa el tiralíneas mas de lo preciso, la figura se inutiliza casi enteramente; á causa de que, aunque la tinta se puede borrar, ya sea raspando, ya con una esponja humedecida, es muy imperfectamente.

70 Sabiendo ya tirar líneas rectas, y trazar circunferencias de círculo, que son las líneas correspondientes á la *Geometría Elemental*, vamos á resolver las cuestiones que ofrece su combinacion. Y como para la resolucion de las cuestiones, es necesario en muchos casos tirar líneas auxiliares, denominarémos á estas, *líneas de operacion*: marcándolas intermediadas de puntos, como se ve en la (fig. 24). Pero, siendo necesario muchas veces hacer varias operaciones, las que pertenezcan á la primera operacion, se señalarán, interponiendo un solo punto como en A; si pertenecen á la segunda operacion, dos como en B; si á la tercera, tres; y así sucesivamente, como se manifiesta en todas las figuras de esta obrita.

(*) Vease la nota anterior (66)

71 Entendido esto, se pueden resolver ya las cuestiones ó problêmas de la *Geometría de Niños*, que se espresan en los párrafos siguientes, y que deberán hacer los principiantes por sí mismos ántes de pasar á otra cosa.

§ 11 *Construccion mas sencilla de la escala.*

§ 22 *Formar un ángulo igual con otro.*

§ 23 *Dividir un ángulo en dos partes iguales.*

§ 25 *Tirar una perpendicular á una recta.*

§ 27 *Dividir una recta en dos partes iguales.*

§ 30 *Tirar una recta paralela á otra.*

§ 31 *Dividir una recta en las partes iguales que se quiera.*

72 Pasemos ahora á dar á conocer prácticamente el método que se indica al fin del § 30 de la *Geometria de Niños*, por el cual los delineantes trazan líneas paralelas y perpendiculares solo con el auxilio de la regla y el cartabon.

Para esto, supondrémos que sea dada la recta AB (fig. 25), y un punto D, en el cual se ha de levantar una perpendicular á dicha recta. No hay mas que poner la regla, de modo que uno de sus cantos se halle contiguo á dicha recta; y el cartabon, de modo que el vértice del ángulo recto esté contiguo al punto propuesto, y uno de los catetos reposando sobre la regla; y entónces, tirando por el otro cateto la DO, esta será perpendicular á AB. Si se pidiese tirar una paralela á la DO por el punto C de la recta AB, se ejecutaría lo mismo que en el caso anterior, tirando la LC, y será la paralela pedida.

Si, dada una recta EF, quisiéramos tirarle una paralela por G, se pondría el lado mas largo del cartabon en direccion de dicha recta EF; y la regla, contigua á uno de los catetos; se correrá despues el cartabon sobre la regla; y al llegar al punto G, se tirará la GH, y tendrémos que GH será paralela con EF.

La muleta tiene el mismo objeto; pero no puede hacerse mas que en una direccion perpendicular, á causa de que, estando el tablero à escuadra, todas las líneas tiradas serán perpendiculares á los cantos del tablero; puesto que la regla de la muleta se asienta en el plano del tablero, y la cruceta en contacto con el otro canto. De donde resulta, que el uso del cartabon es preferible á la muleta, aunque tambien pueda esta construirse de modo que sirva para el mismo objeto.

73 Despues se resolverán los problemas de la *Geometría de Niños*, que se manifiestan en los párrafos siguientes.

§ 42 *Formar triángulos iguales á otros dados.*

§ 44 *Circunscribir un círculo á un triángulo.*

§ 45 *Inscribir un círculo en un triángulo.*

§ 53 *Hallar líneas que sean cuartas, terceras y medías proporcionales á otras líneas dadas;* formar la *escala de mil partes;* y tirar *por un punto fuera de dos rectas, otra recta que vaya á pasar por el punto de concurso de las dos rectas primitivas.*

§ 56 1.ª *Dividir una recta dada en media y estrema razon.*

2.ª *Dado un polígono regular inscrito en un círculo, inscribir otro de duplo número de lados.*

3.ª *Inscribir el decágono regular en un círculo.*

4.ª *Inscribir en un círculo el polígono de 15 lados, y los de 30, 60, 120 &c.*

5.ª Dado un polígono regular, inscrito en un círculo, circunscribirle otro del mismo número de lados.

6.ª Dado un polígono regular, circunscrito á un círculo, circunscribirle otro de duplo número de lados.

74 Dirijámonos ahora á manifestar algunos métodos particulares, para construir figuras.

Principiarémos por *construir un cuadrado sobre una recta dada* AB (fig. 26).

Desde el punto A y con un radio igual con AB, se trazará un arco indefinido BD; con el mismo radio, se hará igual operacion en B; levántense despues dos perpendiculares á la AB por dichos puntos A y B hasta que corten á los arcos trazados en C y en D; finalmente, únanse los puntos D y C por la DC, y quedará construido el cuadrado ABCD que se pedía.

75 *En el círculo* DAF (fig. 27), *inscribir un* PENTÁGONO REGULAR.

Tírense los dos diámetros DF y OA, que se corten á ángulos rectos; divídase el radio CA en dos partes iguales CB y BA, y tírese la BD; haciendo despues centro en B, y con un radio igual á DB, se traza un arco DLE, y su cuerda DE será el lado del pentágono, que tendrémos trasportado á la circunferencia, haciendo centro en D, trazando el arco EG y tirando la DG; y poniendo despues sobre la circunferencia otras cuatro veces dicha cuerda, se tendrá el pentágono pedido.

76 *Inscribir un* EXÁGONO REGULAR *en un círculo.*

Tómese el radio AC (fig. 28); y poniéndole seis veces como cuerda sobre la circunferencia, quedará trazado el exágono. A un mismo tiempo se pueden determinar dos puntos; porque, haciendo centro en B y con un radio igual al del círculo, se trazaría el arco ACD; y uniendo A y D con B, se tendrán dos lados.

Si se conociese la circunferencia, y el radio en parage diferente, y no se conociese el centro, podría determinarse, haciendo centro en D y con la magnitud del radio, se trazaría el arco BC; y en donde encontrase al ACD, sería el punto céntrico.

77 *Dado un círculo* AOP, *inscribir en él un* EPTÁGONO REGULAR.

Tírese un diámetro del círculo dado, como AB (fig. 29); y divídase en siete partes iguales; despues, con este diámetro tomado como radio, y haciendo centro en los puntos A y B, se trazarán dos arcos que se crucen en C; y luego, se tirará por C y el punto 2, que es el que señala la segunda division, la CD hasta que corte al círculo en un punto tal como D; y tirando la cuerda AD será el lado del *eptágono regular* pedido.

78 Este procedimiento, aunque no está demostrado con todo rigor es sumamente exacto, y muy socorrido en la práctica. Puede estenderse á la construccion de todos los demas polígonos regulares sin mas variacion, que dividir el diámetro en tantas partes iguales como lados ha de tener el polígono, tirando siempre la CD por la segunda division. Por esta construccion resulta, que en el triángulo, cuadrado, pentágono, exágono, eptágono y octógono, se verifica con toda exactitud; pero los polígonos de 9 lados, de 11, de 13 &c. ya no salen tan exactos: verificándose ménos conformidad á proporcion que se aumenta el número de lados.

79 Ya hemos trazado los polígonos regulares, inscribiéndolos en círculos; ahora vamos á construirlos, dado uno de sus lados, así como se ha hecho con el cuadrado (74); y principiarémos por el pentágono.

Supongamos que AB (fig.30) sea el lado del *pentágono propuesto.*

Levántese en uno de sus estremos, tal como A, la perpendicular AC indefinida. Despues, con la distancia AB como radio, se traza un arco tambien indefinido BD; se divide en 5 partes iguales la porcion del arco interceptada entre la perpendicular AC y el punto B; y se pone una mas desde el punto donde la perpendicular corta al arco hasta D; y uniendo este punto D con A, se tiene ya otro lado del pentágono. En seguida, se traza desde B otro arco AE; se hace centro en A, y con una distancia igual á BD, se corta el arco en E; y se tira la BE, que será otro lado del pentágono. Por último, harémos centro en los puntos D y E; y con un radio igual á AB, se trazarán dos arcos que se cortarán en F; y uniendo este punto con los D y E, quedará concluido el pentágono.

80 *Construir un* EXÁGONO, *dado que sea el lado* AB (fig.31).

Por los estremos de esta línea, y con un radio igual á su magnitud, se trazan dos arcos, que se cruzarán en C; haciendo centro en este punto con un radio igual á CB, se trazará un círculo; y poniendo en su circunferencia cinco veces el lado AB, se tendrá un exágono regular.

81 *Dada la línea* AB (fig.32), *construir un* EPTÁGONO REGULAR, *cuyo lado sea igual á dicha línea.*

Tómese una parte cualquiera EB de dicha línea; se hará centro en B; y se trazará un arco EC indefinido, con el radio EB. Hágase centro luego en E; y con el mismo radio se cortará el arco anterior en C; luego, se hará centro en los puntos E y C, y con un radio cualquiera, se trazarán dos arcos que se cruzarán en O; por cuyo punto y el B se tirará una recta; despues, á la AB se levantará en A, una perpendicular indefinida AG, que será cortada en D por la DOB; tómese DG=AD; y haciendo centro en A, y con un radio AG se trazará un arco GI; se hará centro luego en B, y con el mismo radio, se trazará otro arco que cortará al anterior en I; cuyo punto será el centro del círculo en que AB será lado del eptágono, y cuyo radio es IB.

82 *Dada la línea* AB *(fig.33), se pide construir un* OCTÓGONO *cuyo lado sea dicha línea.*

Divídase la espresada línea en 5 partes iguales; y póngase á cada estremo una parte mas AC y BD; y con el total CD como radio, y haciendo centro en los estremos de dicha línea, trácense dos arcos CE y DE, que se cortarán en E, cuyo punto será el centro del círculo, en que se hallará AB como lado del *octógono,* teniendo por radio la distancia EB.

83 *Dado el cuadrado* ABDE (fig.34), *construir un* OCTÓGONO.

Tírense las diagonales AD, BE; tómese en ellas, desde el punto en que se encuentran, las partes CR, CS, CT y CV, iguales con el semilado del cuadrado que se da; y en los puntos R, S, T, V, tírense perpendiculares á las espresadas diagonales; y encontrarán à los lados del cuadrado, de modo que resultará el octógono regular FLMGNOPQ.

84 *Dadas las lineas* AB y AC (fig.35), *construir un rectángulo en que dichas lineas sirvan de lados.*

Fórmese un ángulo recto en A con dichas líneas; por el estremo B, se tira una paralela á la AC; y por C, otra recta, que sea paralela con AB; las cuales se cortarán en D; resultando que la figura ABDC será el rectángulo pedido.

85 *Dado el ángulo a, y las magnitudes* AB y AC (fig.36) *construir un* PARALELOGRAMO.

Con las líneas dadas, fórmese en A un ángulo igual con *a*; por los estremos B, C de los lados de este ángulo, tírense paralelas á dichos lados; las cuales se cortarán en un punto D; y quedará construido el paralelogramo ABDC.

86 *Dado el ángulo a* (fig.37), *y una recta* AB, *construir un* ROMBO, *cuyos lados sean iguales á dicha recta.*

Fórmese un ángulo A igual al propuesto *a*; tómese en cada uno de sus lados una parte igual con AB; por sus estremos, tírenseles paralelas que se cortarán en un punto D, y formarán el rombo pedido ABDC.

87 *Dado un punto* M (fig.38), *en la circunferencia de un círculo, tirar una tangente á dicho círculo.*

Se tira el radio CM, y queda la operacion reducida á levantar una perpendicular en su estremo M; lo cual se ejecuta segun se ha esplicado (§25...1.°G de N.) y que se indica la operacion en la figura, cuando no se puede prolongar el radio CM.

88 *Dado un punto* A (fig.39), *fuera de un círculo* MQN, *tirarle una tangente.*

Únase dicho punto con el centro del círculo, por medio de la recta CA; y considerándola como diámetro, se trazará un círculo, que cortará al dado en dos puntos N y M; por los cuales se tirarán las AN y AM que serán tangentes al círculo propuesto, y se elegirá la que mejor convenga.

89 *Dadas tres rectas* AB, AC *y* CD (fig.40), *que se encuentran en los puntos* A y C, *trazar un círculo al que dichas tres rectas sean tangentes.*

Divídanse los ángulos en C y en A en dos partes iguales (71), y tírense las indefinidas CQ y AP, que se cortarán en el punto O; bájese una perpendicular OM á una de las rectas dadas; la cual será el radio del círculo buscado; y si, haciendo centro en O con el radio OM, trazamos una circunferencia será la que deseamos.

90 *Dado un círculo, cuyo centro es* C (fig. 41), *y sobre su circunferencia un punto* M, *y fuera ó dentro de él otro punto* N; *se pide describir un círculo que pase por dichos dos puntos* M *y* N, *y que sea tangente en* M *al círculo dado.*

Ante todas cosas advertirémos que, se dice de *dos círculos*, que son el *uno tangente al otro*, cuando tienen una tangente comun, ó que tienen un solo punto comun, estando en todo lo demas ó el uno dentro del otro, ó el uno fuera del otro, cuyos dos casos manifiesta la (fig.41).

Entendido esto, sea que el punto N se halle dentro ó fuera del círculo dado, la construccion es la siguiente. Únase el punto M con N por medio de la recta MN; y haciendo centro en M y N, con un radio cualquiera, se trazarán dos arcos que se cortarán en dos puntos P,Q; se tirará por ellos la recta indefinida PQ; se prolonga luego el radio del círculo que pasa por M, hasta encontrar á PQ en un punto tal como O, el cual será el centro del círculo pedido, cuyo radio es OM.

91 Ahora vamos á delinear el perfil de diferentes *molduras* simples, cuyo trazado podemos verificar con el auxilio de las cuestiones ya resueltas.

Describir la moldura ACB (fig. 42), *llamada* GOLA RECTA.

Unánse los puntos A y B que han de ser sus estremos, por medio de la recta AB; divídase esta en dos partes iguales AC y CB; haciendo centro en A y C con un radio igual con AC, descríbanse dos arcos que se cortarán en el punto E, que será centro del arco AC. Se practica luego igual operacion en C y B; y haciendo centro en D, se trazará el otro arco CB; con lo cual quedará descrita la curva ACB que constituye dicha moldura.

92 En la (fig. 43) se ve trazada la *gola reversa* siendo la misma la construccion de ambas.

93 *Dado el estremo* A (fig. 44), *y la altura* AD, *trazar una* MEDIA CAÑA Ó ESGUCIO.

Sobre DA como lado, constrúyase un cuadrado ACBD; y haciendo centro en C, ángulo opuesto al D, trácese el arco de círculo AB, que será la *media caña ó el esgucio* que se pedía; y es un cuadrante de círculo *cóncavo*.

Si se quisiese *convexo*, no habría mas que hacer centro en D (fig. 45); y trazando con un radio DA ó DB el arco AEB, se tendrá la moldura, que se llama BOCEL.

94 *Trazar la moldura* BCA (fig. 46), *llamada* TALON.

Se practica la misma operacion que para el trazado de la gola recta (91), con la diferencia de que el centro que estaba á la derecha de la línea AB, y por la parte superior, ahora se halla á la izquierda.

En la (fig. 47) se presenta el *talon reverso;* y para construirle, se opera como en el caso anterior, pero en un órden inverso.

95 La moldura ADB (fig. 48), que se llama *toro,* es un semicírculo trazado sobre la altura AB como diámetro; y para construirle, se divide AB en dos partes iguales en C; y con una de ellas como radio, se traza desde el centro C la semicircunferencia ADB que es el *toro pedido.*

96 La (fig. 49) representa lo que se llama *baqueta ó junquillo*, que es un *toro muy angosto;* y la (fig. 50) es lo que se llama *filete.*

97 *Dadas las rectas* AM y BN, *trazar la* ESCOCIA ADB (fig. 51).

En los puntos A y B se levantan dos perpendiculares AC, BO, á las AM y BN; y con el duplo de la distancia OC, puesta desde A á C como radio, haciendo centro en C, se trazará el cuadrante AD; y luego, haciendo centro en E, y con el radio ED duplo de CA, se traza el otro arco BD, y queda construida la *escocia.*

En algunos objetos de adorno es muy á propósito este trazado, cuando ha de tener muy poco vuelo el punto B; esto es, cuando B ha de estar poco separado de la prolongacion de la línea AC.

98 La *escocia* que representa la (fig. 52) es la mas elegante; y se traza del modo siguiente.

Dadas las paralelas EA, CB, que marcan la altura que ha de tener la escocia, y el punto A, que suponemos ser el arranque superior, se tira desde dicho punto una perpendicular AC á la CB; se divide la

CA en tres partes iguales C1, 1..2, 2A; se hace centro en C y con un radio CA, se traza el cuadrante AB; y el punto B será el otro arranque de la escocia; se levanta en dicho punto la BS perpendicular á CB, pero indefinida. Por el punto 2 de la CA, se tira una paralela á AE; y haciendo centro en dicho punto 2, con el radio 2A se traza el cuadrante AN; el radio 2N se divide en 4 partes iguales; se pone una de ellas en la prolongacion del radio N2 como se señala en 2O; se hace centro en dicho punto O, y con un radio ON se traza á voluntad un arco NP, y se tira por P y O una recta indefinida PM; se hace centro luego en O, y con un radio O*m* igual á la mitad de 2N, se traza el arco *m*M hasta que encuentre á la PO en un punto tal como M, que será centro del arco PD, cuyo radio es MP. Se pone la misma distancia PM, de B á Q sobre la recta BS, y se unen los puntos M y Q por medio de la recta MQ que se divide en dos partes iguales por una recta, que, prolongada, encontrará á la BS en un punto tal como R.

Últimamente, tomando la distancia RB como radio, y haciendo centro en R, se traza el otro arco BD, que terminará la *escocia*.

CAPÍTULO II.

Construccion de diferentes curvas, que constan solo de arcos de círculo.

99 Principiarémos por el trazado de los *óvalos*, construyendo ante todas cosas el óvalo, que se suele llamar de *dos círculos*, dado el eje AB (fig. 53).

Divídase AB en tres partes iguales AC, CD y DB; y haciendo centro en los puntos D y C con un radio igual á DB, se trazarán dos círculos que se cortarán en dos puntos E y E′; por estos puntos, y el centro de los círculos, se tiran las líneas EDF′, ECF′, E′DF, E′CF, que vayan á terminar en los círculos trazados; se hace centro despues en los puntos E, E′, y con un radio igual á EF′, se trazan los dos arcos FF,F′F′; y queda construido el óvalo mencionado.

100 *Construir el óvalo, llamado de tres círculos* (fig. 54).

Se divide en 4 partes iguales el eje AB; se hace centro en C y E, y con un radio igual á EB, se trazan dos círculos; con el mismo radio y el punto D como centro, se traza otro círculo que cortará á los anteriormente descritos en los puntos F,F,F,F; por estos puntos y los estremos del diámetro CE, se tirarán las FG,FG,FG,FG, que se cortarán en los puntos H,H′, que serán los centros de los dos arcos GG; trazados los cuales, queda construido el *óvalo*.

101 *Construir el óvalo prolongado* (fig. 55).

Se divide el eje AB en 5 partes iguales; desde E y C como centros, y con un radio igual á BE, se trazarán dos círculos; volviendo á hacer centro en los mismos puntos, y con el radio CE, se trazarán dos arcos, que se cortarán en los dos puntos señalados con F. Por estos puntos, y los C y E que sirvieron de centro, se tirarán las FG; finalmente los arcos GG se trazarán, haciendo centro en F con un radio igual á FG. Con lo cual, queda trazado el *óvalo prolongado*.

102 *Describir la curva llamada* ASA DE CESTA, *á la que los Franceses llaman anse de panier*.

Dada su abertura AB, y la altura CE (fig. 56), se trazará sobre la AB como diámetro el semicírculo AOB, y se levantará por C el radio perpendicular CO; la OE se divide en tres partes iguales, y se pone una de ellas por la parte inferior á E como representa *e;* se toma C*e* y se traslada de B á F, y de A á F′; desde los puntos F,F′, como centros, se trazan los arcos BG y AG′; haciendo centro en A y B, se cortarán dichos arcos con los mismos radios en los puntos G,G′; luego se toma GG′ como radio; se hace centro en estos últimos puntos G,G′, y se trazan dos arcos que se cruzarán en H, que es el centro del tercer arco GEG′, cuyo radio es HG.

Pueden construirse tambien curvas de esta especie compuestas de mayor número de arcos.

103 *Construir otro óvalo mucho mas redondeado que los anteriores.*

Se divide en 5 partes iguales el diámetro AB (fig. 57); se hace centro en D y E, trazando dos círculos cuyo radio sea la distancia BE, los que se cortarán en G; se tiran luego por los puntos G,G y los centros D y E, las rectas GH, que son los radios de los arcos HH, y cuyos centros son G y G.

104 *Construir otro óvalo, que se aproxime bastante á la* ELÍPSE, *de que nos ocuparémos* (113 al 116).

Divídase el eje AB (fig. 58) en 4 partes iguales; en C y E se trazarán dos arcos con el radio BE; con el mismo radio y sobre el punto D como centro, se traza el círculo CFE; se tirará tambien el diámetro perpendicular FF, por cuyos estremos y por los del diámetro CE, se tirarán las FG; y haciendo centro en F con un radio igual á FG, se trazarán los otros dos arcos de círculo GG, y queda concluido el óvalo.

105 *Construir un óvalo, dados los ejes* AB *y* EH′ (fig. 59).

Se toma una parte EG menor que ED; y poniéndola de A á C y de B á C′, se trazan dos círculos desde los centros C y C′; se tira la GC′, y se divide en dos partes iguales por una recta, que, prolongada, cortará al eje menor en H; se tirarán las HC′I, que será el radio del arco IEI. Despues se señala en la DE, otro punto H″, que diste igualmente de D, que el punto H; y tirando la H″CI será el radio del otro arco IH′I que cierra el óvalo.

106 *Construir el arco llamado* DESCENDENTE *ó de*

ARRANQUES DESIGUALES (fig. 60), *á que los Franceses llaman arco* RAMPANT.

Sean A,B los puntos de arranque; se tirará la AB, y por A, la horizontal AC (*); esta se divide en dos partes iguales AD y DC; por D se levanta la perpendicular DE; y haciendo centro en C, con AC como radio se trazará el arco AE; se une el punto E con el B por la recta EB, que se dividirá en dos partes iguales por la RR; últimamente, por B se tira una paralela MB á la AC, y el punto M de concurso con la RR es el centro del arco EB, cuyo radio es MB.

Por el procedimiento que acabamos de dar á conocer, resulta siempre un ángulo en E, que suelen llamar *garrote*, y que en la práctica se suaviza un poco á ojo; pero esto se evita por la siguiente construccion, que, aunque mas complicada, es preferible por salir mas exacta la figura.

Dados los puntos A y B de arranque (fig. 61), se unen por la AB; y por A se tira la horizontal indefinida AC; se divide AB en dos partes iguales en L, y se tira por L, la DLE perpendicular á la horizontal AC; se hace LE=LA; y se tira la EA; esta se divide en dos partes iguales por medio de la ML, que se prolongará hasta que encuentre á la AC en C, que es centro del arco AE y cuyo radio es el CA; se unen del mismo modo los puntos E y C por la recta EC; y por B se tira la BF paralela con AC; y el punto F

(*) La direccion que toma un hilo, del cual cuelga un peso cualquiera como se presenta continuamente á nuestra vista en la *plomada* de que hacen uso los albañiles, se llama *vertical*; toda línea perpendicular á la vertical, se llama *horizontal*; y un plano perpendicular á una línea vertical, se llama plano *horizontal*. La superficie del agua, cualquiera que sea la figura del vaso ó depósito que la contiene, presenta el aspecto de una *superficie horizontal*, aunque no es exactamente una superficie plana, sinó algo *convexa*. (Nota del editor).

es el centro del arco EB, cuyo radio es BF.

Tambien puede trazarse del modo siguiente.

Sean A y B (fig. 62) los arranques del arco; se unirán por medio de la AB; por A se tirará la horizontal AC indefinida; por B se bajará una perpendicular á ella, que la cortará en C; sobre AC como diámetro se traza una semicircunferencia, que se divide en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo en seis; se bajan desde los puntos 1, 2, 3, &c., perpendiculares $1a$, $2b$ &c. al diámetro AC; se prolongan dichas perpendiculares por la parte superior, tomando desde los puntos en que encuentran á la AB las partes $a'1'=a1$; $b'2'=b2$, $c'3'=c3$ &c.; se hace luego pasar un lápiz por los puntos B, 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, A, y este arco será el pedido.

107 *Trazar el arco, que se llama* APUNTADO.

Tómese la abertura AB (fig. 62, como radio; y haciendo centro en A y B se trazan dos arcos que se cruzarán en C; y el arco ACB es el que se llama *apuntado*. Las dos partes AC, CB, de que se compone, resultan ser arcos de 60° (§ 49 8.ª G de N.); y por consiguiente, cuando se nos pida trazar un arco de 60°, harémos la anterior construccion.

En todo arco hay que considerar tres cosas, que son: *su abertura*, ó *vano*, que aquí es AB; su *montéa*, que es OC; y sus *puntos de arranque*, que son los A y B; el punto mas elevado C se llama *corona*.

Sobre la misma abertura AB se pueden trazar diferentes arcos *apuntados*; los que se sitúen fuera del ACB resultan mas puntiagudos, y se denominan *arcos apuntados peraltados*; los que se sitúan por la parte inferior del ACB, resultan ménos puntiagudos, y se llaman *arcos apuntados rebajados*.

Para trazar el *rebajado*, dada su altura OD, no hay mas que hacer centro en un punto cualquiera de la AB, tal como en F (fig. 63); y con el radio FB se trazará un arco BD; luego, se toma la distancia AG igual con la FB, y se describe el otro arco AD; con lo cual queda trazado el arco ADB, que es *apuntado rebajado*.

Para el *peraltado*, los puntos céntricos deben hallarse fuera del vano á igual distancia de O como marcan los puntos H, L; y se procede como en el caso anterior, resultando el arco AEB, que es *apuntado peraltado*.

Los puntos de centro deben siempre estar en la línea AB del vano, ó en su prolongacion; y para determinarlos, cuando se da la altura OD, no hay mas que tirar la recta DA, y dividirla en dos partes iguales por medio de otra recta; la cual prolongada cortará á la AB en un punto tal como G, que será el centro; y tomando GD por radio, se trazará el arco AD que será el pedido.

La misma construccion se hace para obtener el centro L, del *apuntado peraltado*.

108 *Construir la curva que se denomina el* HUEVO.

Se tirará una línea BC (fig. 64), cuyo punto medio esté en A; cada una de las mitades BA, AC, se dividirá en 5 partes iguales; haciendo centro en A con un radio igual á dos de estas partes, se trazará el semicírculo DME. Desde su centro A bájese una perpendicular indefinida; haciendo centro en los puntos B,C y con los radios BE, CD, se trazarán los arcos EF, DF que se cortarán en el punto F; desde los puntos G,H, mitades de los radios AD, AE, bájense las perpendiculares GI, HK, hasta que encuentren á los arcos acabados de trazar; desde el punto F hácia arriba, tómese la distancia FL=AD, ó AE; haciendo centro en L con la distancia LK por radio, trácese el arco IK; el cual cerrará la curva que se pide.

CAPÍTULO III.

Construccion de otras curvas útiles en las artes.

109 Se ha dicho (§ 8 G. de N.) que la línea puede ser

recta y *curva*. Tambien se ha dicho, que, desde un punto á otro no se puede tirar mas de una línea recta; pues cuantas se intentasen trazar, coincidirían todas en una sola; por lo cual no hay mas de una especie de línea recta. No sucede así con las *curvas*; pues pueden ser diferentes de un modo indeterminado, ó como se suele decir, pueden variar *al infinito;* esto es, que por muchas curvas que se hayan considerado, todavía se pueden considerar otras muchas diferentes; de lo cual se convencerá cualquiera, haciendo rasgos arbitrarios sobre un papel con una pluma ó lapicero, sobre una tabla con un carbon ó lápiz, ó en el suelo con un baston; pues por muchos que haya hecho, todavia puede hacer otros muchísimos diversos de aquellos; y cuando por muchas veces que se haga una cosa, se puede hacer aun la cosa otras muchas mas, se dice que se puede hacer *indefinidamente ó sin fin*, que es lo que querémos dar á entender con la palabra *infinito*.

110 Tambien se ha dicho (§13.G. de N.) que la Geometría elemental considera solo una línea curva, que es *la circunferencia de circulo*. Por manera, que del resorte de la Geometría elemental solo son *la linea recta y la circunferencia de circulo*, juntamente con las superficies y cuerpos que ellas pueden terminar, ú originar por su movimiento.

111 La consideracion de las demas líneas curvas, y de las superficies y volúmenes que pueden terminar ú originar por su movimiento, pertenece á la parte de las Matematicas, que se llama *Geometría sublime*. Esta, en el dia, se halla muy adelantada; porque, por una parte se han encontrado procedimientos de cálculo muy generales, que se prestan á cifrar en ecuaciones todas las propiedades, no solo de dichas líneas curvas, sinó de las superficies y volúmenes que originan, en lo que se llama *Geometría analitica*; y por otra, se ha inventado, en estos últimos años, un método general para trazar en el papel, no solo todas las curvas, superficies y volúmenes que se quieran; sinó

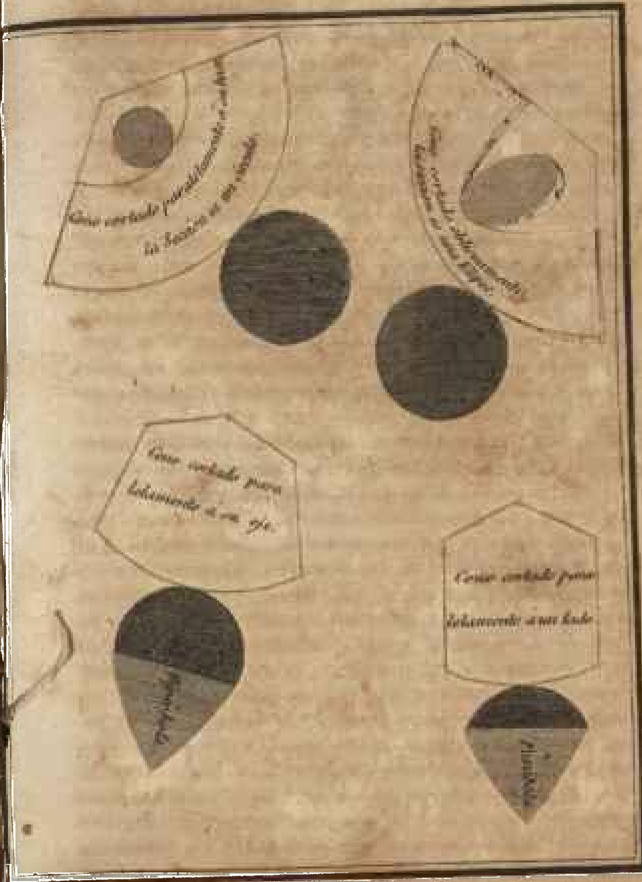
tambien las intersecciones de todas estas líneas, superficies y volúmenes en la parte de las Matemáticas, que se conoce con el nombre de *Geometría Descriptiva.*

112 Todo lo que hasta el presente hemos enseñado á delinear, sirve no solo de base á todas las artes, y tiene inmensas aplicaciones en los usos de la vida, para satisfacer las necesidades y atender á la conveniencia de la especie humana, sinó que los que desde niños se familiaricen con lo que aquí se les enseña, tendrán muchísimo adelantado para progresar en los demas ramos del modo mas prodigioso. Y á fin de facilitar mas estos progresos á los principiantes, les darémos á conocer otras curvas y les enseñarémos los principales métodos que puede haber para trazarlas.

113 Principiarémos por dar á conocer las curvas que resultan de las intersecciones, con un plano, de los *cuerpos redondos ó de revolucion*, considerados en la Geometría. Allí, se ha manifestado lo que se llama *cilindro*; y tambien (§ 97..1.ª G. de N.) *el que una seccion dada paralelamente á la base, ya en un cilindro recto, ya en uno oblicuo, es siempre un círculo.* Pero, si la seccion no fuese paralela á la base, y cortase á todos los lados del cilindro, entónces resultaba una seccion terminada por una línea curva, prolongada mas en un sentido que en otro, á la cual se llama *elipse*; esta es mas ó ménos prolongada, á medida que es menor ó mayor la inclinacion del lado del cilindro con dicho plano, que se llama *plano secante.*

Si consideramos la *esfera*, cortada por un plano, siempre nos dará un *círculo* por seccion; y será tanto mayor ó menor, cuanto el plano secante se halle mas ó ménos cerca del centro de la esfera.

No sucede lo mismo con el *cono;* pues en el recto, segun la diversa posicion del plano secante, da cuatro curvas diferentes que son: *el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola*; la primera se obtiene, haciendo pasar el plano secante de modo que sea paralelo á la base del cono; la *elipse* resulta, haciendo pasar el plano secante de modo que no sea paralelo á la base, pe-



ro que corte á todos los lados del cono, hacia un mismo lado del vértice; la *parábola* haciendo pasar el plano secante paralelamente á uno de los lados del cono; y la *hipérbola*, dando la seccion, de modo que el plano secante corte á las prolongaciones de los lados, ó pase por los dos cascos del cono, prolongado suficientemente. Lo cual podrá hacerse sensible, dando los cortes espresados á una zanahoria ó remolacha. Y con el fin de que se forme una justa idéa, las presentamos en la adjunta lámina recortada.

114 Tambien puede situarse el plano secante, de modo que lo que resulte sea una recta, dos rectas ó un triángulo que se llama *triángulo por el eje*, y un solo *punto*; pero estos resultados no son ya líneas curvas; de modo que de las secciones del cono, solo resultan las cuatro curvas espresadas.

En el cono *oblicuo* se verifica, que *la seccion circular, resulta no solo cuando el plano secante es paralelo á la base*, sinó tambien cuando *se hace pasar el plano secante, de modo que corte un triángulo semejante al que pasa por el eje;* el círculo obtenido de este modo, se llama *seccion subcontraria ó antiparalela.*

115 Por natural que parezca el considerar estas curvas como resultado de secciones dadas al cono, sin embargo, no es esto lo mas útil en las artes; pues estas lo que necesitan son procedimientos para obtenerlas, sin necesidad de presentar el cono de que provienen. Así, pasarémos á dar la definicion de estas curvas independientemente del cono, y á presentar en cada una dos métodos de trazarlas, á saber: uno por el movimiento continuo, que es el aplicable á la ejecucion en grande de las montéas, y construcciones; y otro para ejecutarlo en el papel. Prescindirémos del círculo, cuyas propiedades y trazado ya sabemos (67); y dando principio por la *elipse*, la definirémos diciendo: *ser una curva cerrada, tal que la suma de las distancias de un punto cualquiera de ella, á otros dos que se llaman fócus, es siempre igual á la*

linea en que están colocados dichos fócus, la cual termina por ambos lados en la curva, y *se llama eje mayor de la elipse.*

De la propiedad, que incluye esta definicion, nos valdrémos para trazarla por el movimiento continuo.

Para esto, se fijan en los fócus F,F′ (fig. 65) los estremos de un cordel ó hilo, cuya longitud sea igual al eje mayor de la elipse, que se va á trazar, y teniéndole bien tirante, por medio de un punzon ó lapicero, se hace girar este punzon, de modo que el cordel ó hilo esté siempre bien estendido; con lo cual resulta trazada la curva, cuando el lapicero ó punzon haya dado una vuelta entera.

116 Para construir la misma curva por puntos, debemos observar, que, para determinar una elipse es necesario que se dé el eje mayor y los fócus; ó el eje mayor y el que se llama *eje menor*, que es una recta perpendicular al eje mayor en su medio, terminando en la curva.

Dado el eje mayor BB′ (fig. 66), y los fócus F,F′, se tomará desde el punto B una longitud cualquiera BK sobre el eje BB′; desde el punto F como centro, con el radio BK, se describirá un arco de círculo por arriba y otro por debajo, tales como en M,M; desde el punto F′ como centro, y con un radio B′K, se describirán otros arcos; los puntos en que estos corten á los anteriores, como los M,M′ serán ountos de la *elipse;* continuando de este modo, se pbtendrán todos cuantos se quieran; y pasando despues el lápiz, ó pluma por todos ellos, tendrémos trazada la elipse.

rEn las artes, cuando ocurre trazar una elipse, por lo regular se dan determinados los ejes; en este caso, es peciso de antemano fijar la posicion de los fócus; lo que se hace del modo siguiente. Supongamos que se quiere trazar una *semi-elipse*, en que se nos da el eje mayor AB (fig. 5), y el semi-eje menor CD, que es el caso que ocurre con mas frecuencia al construir las bóvedas; pues entónces se conoce su abertura que es la AB, y su montéa que es la CD. Haciendo centro en D con un radio igual á CB, mitad del eje mayor, se traza un arco FGF′; y los puntos F y F′ serán los fócus. Despues se practicará la construccion anterior, ya para trazar la *semi-elipse*, ya para trazar la elipse entera.

En la espresada (fig. 5) hémos señalado los puntos *m*,*n*,*o*, &c.; y para manifestar el uso de las *reglas acordadas*, presentamos una en la disposicion de trazar la parte de curva que comprenden los cuatro puntos A,*m*,*n*, y *o*, que guardan la misma curvatura que ella por su parte esterior. Para trazar las demas partes de la curva, por medio de las *acordadas*, se traslada una de ellas, la que mas coincida con la posicion de otros tres ó cuatro puntos; y así se continúa hasta su conclusion.

117 *Se llama* PARÁBOLA *una curva, tal que todos sus puntos se hallen equidistantes de otro fijo llamado* FÓCUS, *y de una línea, fija tambien de posicion, llamada* DIRECTRIZ. La línea que, pasando por el fócus, es perpendicular á la directriz, se llama *eje;* el punto en que este eje corta á la curva, se llama *vértice*, y se verifica en ella, que la parte del eje comprendida entre el vértice y la directriz, es igual con la parte de dicho eje, comprendida entre el vértice y el fócus. Á una línea cuádrupla de la distancia del vértice á la directriz ó al fócus, se le llama *parámetro*.

Para construir esta curva por un movimiento continuo (fig. 67), lo que se hace es, poner en contacto con la directriz BL, de modo que se ajuste con ella exactamente, una escuadra móvil EQR: se toma despues un hilo de una longitud igual á QE; se fija uno de sus estremos en E, y el otro en el punto F, que ha de ser el fócus de la parábola; se estenderá despues el hilo por medío de un lapicero, que esté siempre bien unido al lado QE de la escuadra; y haciendo correr la escuadra á lo largo de la directriz, y el lapicero á lo largo de QE, quedará descrita una rama AMN de la parábola; y volviendo la escuadra, se trazará la otra rama, como se ve en dicha (fig. 67).

118 Para construirla por puntos (fig. 68), conocido el parámetro, se toma desde un punto determinado en una recta, una distancia AB igual con dicho parámetro; haciendo luego centro en un punto cualquiera C, tomado en la misma línea, y con un radio igual á CB, se describirá una circunferencia de círculo BDP″; en el punto A, que suponemos ser el vértice de la parábola, se levantará la AQ perpendicular á BC; en el estremo P″ del diámetro, se elevará la perpendicular P″M″ indefinida; se tomará en ella una parte P″M″=Q″A; con lo que se tendrá el punto M″, que será de la *parábola*. Repitiendo la misma operacion por arriba y por abajo del punto C, se tendrá una sucesion de puntos M,M′,M″,M‴ &c.; y pasando por ellos el lápiz, ó pluma, quedará trazada una rama de la parábola; y para trazar la otra, se hará la misma construccion al otro lado segun marca la figura.

119 Se llama ***hipérbola*** una curva, tal que la diferencia *de dos líneas tiradas desde un punto cualquiera de ella á dos puntos fijos, que se llaman* FÓCUS, *siempre es igual al primer eje de dicha curva; las espresadas líneas se llaman* RADIOS VECTORES *de la hipérbola.*

Para trazarla por el movimiento continuo (fig. 69), se fija en el fócus F′ una regla F′MQ que pueda girar al rededor de dicho punto con desahogo. Al estremo Q, y en el otro fócus F, se fijan los estremos de un hilo FMQ, tal que se tenga F′MQ−FMQ=BB′; haciendo despues mover un lapicero á lo largo del hilo, se le obliga á aplicarse siempre contra la regla que gira al rededor del punto F′, y el lapicero traza por este medio la parte BMN de la hipérbola que se deséa. Para trazar la parte BL de la misma rama, se necesita volver la regla, pero estando fija en el mismo punto F′. Para trazar la otra rama N′B′L′ es necesario fijar la regla en el punto F, y proceder de la misma manera.

120 Para trazarla por puntos, se procede del modo siguiente: desde el fócus F como centro, con un radio cualquiera BO (fig. 70), se describirá un arco de círculo en M; desde el otro fócus F′ como centro, con un radio B′O=BB′+BO, se describirá otro arco de círculo; y los puntos como el M, en que corte al precedente, pertenecerán á la hipérbola. Repitiendo la operacion por arriba y por abajo de BB′, por derecha y por izquierda, se obtiene una sucesion de puntos, por los que, pasando el lápiz ó pluma, se tendrá la curva pedida.

121 *Construir la* ESPIRAL.

Se llama *espiral* una curva, cuya forma es enroscada, y no se encuentra á sí misma, ni cierra en punto alguno. Puede ser de diferentes maneras; la construccion, que da nuestro célebre *Juan de Arfe y Villafañe*, es como sigue. Se tira una recta cualquiera indefinida; en esta se elijen hácia el medio dos puntos A,B (fig. 71) mas ó ménos distantes, segun se quiera que las vueltas disten mas ó ménos. Haciendo centro en uno de estos puntos, por ejemplo en A, y con un radio arbitrario AC, trazarémos un semicírculo CMD; haciendo centro en el otro punto B, y con el radio BD, se trazará otro semicírculo DNE; poniendo otra vez la punta del compas en A, y con el radio AE, se trazará el semicírculo EOL; trasladando la punta del compas al punto B, y con un radio BL, se trazará la semicircunferencia LPA, &c.

122 *Trazar la* CONCOIDE DE NICOMÉDES.

Tírese una línea indefinida BAD (fig. 72); y concibamos que se mueva al rededor del punto B, de modo que la parte interceptada por otra línea indefinida HAG y los puntos de la curva, sea siempre igual á una distancia *a*; la curva MDM′, que pase por todos estos puntos sobre HAG, se llama *concoide superior*; la *ma′m′*, *concoide inferior*: el punto B se llama *polo*; y la HAG *directriz*. La *concoide superior* tiene siempre la misma forma que representa la figura; la *inferior* tiene la forma que se presenta en la misma (fig. 72); cuando la línea dada *a* es menor que la distancia BA del polo á la directriz; cuando es igual, tiene la forma que se ve (fig. 73); y cuando mayor, la forma que se presenta (fig. 74).

123 *Construir la* CISOIDE DE DIÓCLES.

Se describirá un círculo APBM (fig. 75); y tirada la tangente indefinida BO, tírense, desde el punto A, á esta tangente, cuantas rectas se quieran AG,AL,AQ &c.; tómese en ellas una parte desde el punto A igual con la parte comprendida entre la circunferencia y la tangente, esto es, hágase AD= GF′,AN=LS, &c.; y la curva, que pase por los puntos A,D,N, &c. será la *cisoide de Diócles*.

Haciendo la misma construccion por la parte inferior del diámetro AB, se formará la rama inferior AV.

124 *Construir la* CUADRATRIZ DE DINOSTRÁTES.

Dado el cuadrante de círculo ADC (fig. 76) y la tangente AH, se concibe que el radio AB da la vuelta al rededor del centro B, andando en tiempos iguales, arcos iguales del cuadrante ADC; si concebimos al mismo tiempo, que la AH baja á lo largo del radio, manteniéndose paralela á sí misma, andando tambien en tiempos iguales, porciones iguales del radio, de modo que en el tiempo en que AH ande la cuarta parte del radio AB, el radio AB corra la cuarta parte del cuadrante ADC; y lleguen la recta AH, y el radio AB á confundirse á un tiempo con BC, la interseccion continua E,E′,E″ &c. de la recta AH, con el radio AB, á medida que este da la vuelta, engendrará la curva que se llama *cuadratriz de Dinostrátes*.

Para trazarla por puntos, se procederá de este modo. El radio AB se dividirá en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo en cuatro, como marca la figura, é igual operacion se hará con el cuadránte ADC. Se tiran los radios BD,BD′,BD″; y las perpendiculares GK,G′K′,G″K″ al radio AB; y los puntos E,E′,E″ &c. en que estas rectas cortan á los radios tirados, serán puntos de la *cuadratriz.*

125 En la prática de las artes, ocurre con frecuencia el *tener necesidad de tomar una linea recta de igual longitud que una circunferencia rectificada, cuyo diámetro es conocido.* Y como se ha visto (§ 57. G. de N.) que esta cuestion no se puede resolver con exactitud, es de la mayor importancia el indagar los métodos prácticos de aproximacion. Por medio de los números consta, en el parage acabado de citar, que la circunferencia equivale á tres diámetros, y á una fraccion decimal del diámetro espresada hasta con *ciento y cuarenta* guarismos decimales (*).

Mas si quisiésemos tomar este valor numérico en una escala, cualquïera que fuese su construccion, no podríamos tomar con su auxilio sinó las centésimas partes, ó lo mas en algun otro caso, las milésimas partes de la unidad. Por esta causa, tanto en la *Geometría de Niños* (§ 61) como en el *Compendio de Matemáticas* (§ 349. T. 1.º), se ha puesto un método *grá-*

(*) En la página 371 del tomo 1.º de la tercera edición de mi *Compendio de Matemáticas*, puse la nota siguiente: « En un manuscrito que se halla en la biblioteca de Ratclif en Oxford, hay una relacion del diámetro á la circunferencia con 155 guarismos decimales »; y deseando algunos amantes del progreso de las luces, que la publique, así como hice con la de 140 guarismos decimales, que doy á conocer en el § 505 del tomo 1.º parte 2.ª de mi *Tratado Elemental de Matemáticas*, que contiene la Geometría, aprovecho esta ocasion para darla á conocer; y es la siguiente.

1:3, 141592653589	793238	462643	383279	502884..
..197169	399375	105820	974944	592307	816406..
..286208	998628	034825	342117	067982	148086..
..513282	306647	093844	609550	582371	725359..

..4081284802 &c. (Nota del Editor).

fico, esto es, susceptible de poderse obtener solo con el auxilio de la regla y el compas, para determinar una línea recta, que sea igual muy próximamente con la circunferencia de círculo; cuando se da conocido el diámetro. Dicho método es el mas exacto de cuantos se conocen; pues que da un valor para la circunferencia, tal que contiene cuatro guarismos decimales exactos, resultando el quinto guarismo decimal, como se ve en el parage citado del Compendio, algo menor de lo que debe ser.

Ahora, vamos á poner aqui otra construccion *gráfica* para el mismo objeto, que aunque no es tan exacta como la que acabamos de citar, de la Geometría de Niños y del Compendio, es sin embargo muy digna de conocerse; no solo porque se obtiene por su medio la circunferencia con mayor exactitud que con el auxilio de una escala por medio de las relaciones numéricas (§ 57. G. de N.), sinó porque, familiarizándose los discípulos con estas construcciones, podrán encontrar por sí mismos, otras que conduzcan al mismo resultado ú otros análogos. La construccion, que vamos á dar, suministra un resultado, que es algo mayor que el de la circunferencia, y este esceso se halla en el cuarto lugar de la fraccion decimal del diámetro que acompaña al número de tres diámetros; es decir, que el error por esceso se halla tambien en las *diezmilésimas* partes del valor del diámetro.

La construccion es la siguiente.

Sea el círculo AGBP (fig. 77), *cuyo diámetro es* AB. *Tírese en el punto* B *la tangente indefinida* aBDR. *Tómese á la izquierda de* B, *una parte* Ba, *igual con la cuarta parte del diámetro* AB; *se coloca tres veces el diámetro* AB *á la derecha del punto* B, *como por ejemplo de* B *á* D; *y á la derecha de* D, *se tomará* DR *igual con el duplo de* aB; *levántese en a la perpendicular am igual con el diámetro* AB; *únase el punto m con el* R *por medio de la* mR, *y por el punto c donde corte al diámetro* AB, *tírese la* cD, *y esta representará la longitud de la* *circunferencia correspondiente al diámetro* AB.

El valor que se obtiene por esta construccion para la circunferencia, cuando el diámetro es igual con 1, resulta ser 3,14183.

El valor que se obtiene, en el mismo supuesto, por la construccion del Compendio, es 3,14153; y como el valor verdadero es 3,14159 &c. resulta que la construccion del Compendio suministra un valor menor que el verdadero, en una cantidad que no llega á ser *una diezmilésima parte del diámetro*; y la construccion, que acabamos de manifestar, da un valor mayor que la circunferencia en unas *dos diezmilésimas* partes del mismo diámetro. Ambas aproximaciones bastan para los usos de las artes; y así, sin temor de incurrir en inexactitudes que merezcan atencion, harémos uso en esta obrita de la que acabamos de dar á conocer.

126 Tambien se puede resolver gráficamente la cuestion inversa, esto es, *dada una linea recta, trazar una circunferencia de círculo que sea igual en longitud á dicha recta.*

Para esto, se practicará lo siguiente. Trácese un círculo cualquiera con un radio arbitrario; hállese gráficamente su circunferencia, por el procedimiento acabado de esplicar (125); y despues hállese una cuarta proporcional á la recta, que se acaba de encontrar igual con la circunferencia, al radio de dicho círculo, y á la recta dada; y la cuarta proporcional que se halle, representará el radio de la circunferencia que se pide; y por consiguiente se podrá describir en virtud de lo espuesto (67).

Para hacer sensible todo esto, supongamos que se quiera encontrar una circunferencia, que, estendida en línea recta, sea igual con la recta dada K (fig. 78). Nos valdrémos de la construccion acabada de practicar, que nos da conocida la cD (fig. 77) para la circunferencia; y la OB para el radio; por lo que la cuarta proporcional, que debemos hallar, es á las tres rectas cD, BO y K.

La operacion se practica del modo siguiente. Se formará un ángulo cualquiera VAZ con dos rectas indefinidas AV,AZ; en uno de los lados, tal como en AV, se tomará una parte AB igual con la cD; en el mismo lado se tomarà otra parte AC, igual con BO; en el otro lado AZ se tomará una parte AE igual con la recta K; se unirá el estremo B de la primera, con el estremo E de la tercera por medio de la BE; y por el estremo C de la segunda, se tirará una recta CF paralela con BE; la cual irá á encontrar al otro lado, de modo que la parte AF, interceptada entre ella y el vértice del ángulo, será el radio; y trazando con él una circunferencia como se ve en la misma (fig. 78), se tendrá la circunferencia FMN que se pedía.

127 *Trazar un cuadrado, que sea igual en superficie casi exactamente con un circulo* (*).

(*) Este es el famoso problema de la *cuadratura del circulo*, que tanto ruido ha metido en el mundo científico, y de que yo hablo en el párrafo 523 del tomo 1.° parte 2.ª de mi *Tratado Elemental de Matemáticas*. Segun espreso allí, depende este problema del de la rectificacion de la circunferencia; pero, como en virtud de lo espuesto (§ 61 G de N), ó (§ 349 T. 1.° del Compendio de Matemáticas), ó por la construccion que se acaba de dar (125 de esta obrita), se puede hallar gráficamente, dado el radio ó diámetro, una recta que sea igual á la circunferencia, con toda la exactitud que se puede apetecer en las artes, resulta que tambien se puede *cuadrar el círculo* por un procedimiento gráfico, con toda la exactitud que las artes pueden necesitar.

Se ha espresado en el texto, que esta solucion es aproximada, para que no se nos confunda con la multitud de personas, que se han empeñado en suponerse inventores de la *cuadratura del círculo*. La mayor parte de los comprendidos en este número, han carecido de conocimientos profundos en Matemáticas; y tambien ha padecido algo su cerebro, segun el empeño con que han tratado de sostener sus soñadas resoluciones. Por este motivo, en las Academias sabias, cuando en la actualidad se les presenta un escrito por alguno de estos pretendidos *cuadradores*, no se lée; y yo

Supongamos que se quiere hallar un cuadrado aproximadamente igual con el círculo de la (fig 77); no hay mas que hallar una media proporcional entre la mitad de cD, que representa la circunferencia de dicho círculo, y el radio BO.

---

mismo he presenciado en el Instituto de París, que, al dar cuenta de alguna de estas pretendidas invenciones, se han echado todos á reir inmediatamente; y sin leer el escrito, lo han arrinconado.

Pero dichas soñadas cuadraturas distan mucho de la que se pone en el texto; pues ésta no se presenta como la resolucion exacta del problema, considerado matemáticamente; sinó como una resolucion, que es tan aproximada como se puede necesitar en las artes; en términos, que si en lo sucesivo se hallase un modo rigorosamente matemático para encontrar un cuadrado, que fuese igual con la superficie de un círculo, no resultarían de ella ventajas considerables á las artes; pues el cuadrado, trazado por el nuevo procedimiento, no se diferenciaría en ninguna cantidad sensible ó apreciable, del cuadrado que se trace con arreglo á la construccion del texto.

Para comprobar hasta qué grado de exactitud se llega por la construccion del texto, hemos trazado un círculo con un radio de tres pulgadas exactas; y hemos hallado gráficamente para el lado del cuadrado, que debe ser igual en superficie al círculo, 5 pulgadas, 3 líneas y unos $\frac{5}{6}$ de línea.

El círculo de tres pulgadas de radio tiene (§ 73..1ª G. de N) por superficie $3{,}14159.3^2 = 3{,}14159.9 = 28{,}27431$ pulgadas cuadradas.

Reduciendo á decimales de pulgada las *tres líneas, y cinco sestos de línea*, que hacen $\frac{23}{6}$ líneas, resulta para el lado del cuadrado, que debe ser igual con el círculo, el valor de 5,31944 pulgadas; cuadrando este valor (§ 227 Ar. de N.), resultan para la superficie del cuadrado construido 28,29644 pulgadas cuadradas; que escede á la superficie del círculo, encontrada por el cálculo, en unas dos centésimas de pulgada cuadrada; lo que es bien insignificante, y proviene de no poder apreciar con una exactitud absoluta los $\frac{5}{6}$ de línea. (Nota del Editor).

La operacion se ejecuta de esta manera. *Tómese* LM (fig. 79) *igual con la mitad de* CD; *colóquese á continuacion de* LM *una parte* MN *igual con el radio* BO *del círculo de la* (fig. 77). *Divídase la* LN *en dos partes iguales en* K; *y con el radio* KL, *se trazará una semicircunferencia* LPN. *En el punto* M *levántese una perpendicular* MQ; *la cual será igual con el lado del cuadrado que se pedia*; y si en un parage cualquiera tiramos una recta QM de la magnitud que acabamos de hallar, levantamos en sus estremos Q y M dos perpendiculares QR y MS, que sean tambien iguales con MQ; y unimos los puntos R y S, tendrémos el cuadrado QRSM, que se aproximará tanto á ser igual con la superficie del círculo de la (fig. 77), que no se hallará diferencia sensible, capaz de influir en la práctica, ni que se pueda apreciar por los instrumentos ni por la vista.

Si en el centro C del cuadrado, con un radio igual al BO del círculo de la (fig. 77), trazamos un círculo, observarémos que los segmentos circulares de la (fig. 79) parecen equivalentes, como corresponde á los espacios triangulares mistilíneos que se forman en los ángulos del cuadrado; lo cual sirve como de comprobacion.

128 Tambien hay una construccion gráfica sumamente fácil y exacta *para encontrar una linea recta que sea igual en longitud á un arco cualquiera de círculo, suponiéndole estendido en linea recta ó rectificado.*

Supongamos 1.° que este arco sea de 60° ó menor que 60°; lo que se conoce muy fácilmente examinando si su cuerda es igual ó menor que el radio (107). En este caso, se practicará lo siguiente. *Se prolongará su cuerda; en la prolongacion de ella, se señalará un punto, tal que la espresada cuerda juntamente con su prolongacion, sea igual con la suma de las cuerdas de las dos mitades del arco dado. A esto, añádase la tercera parte de la espresada pro-*

longacion, ó *del exceso que la suma de las cuerdas de las dos mitades del arco llevan á la cuerda de todo el arco; y el resultado que se obtenga, espresará la longitud del arco dado, estendido en línea recta*; que era lo que se pedía.

Si el arco fuese mayor que 60°, se dividirá en dos, en cuatro, ó en ocho partes iguales por el método espuesto (70), hasta que una de estas partes sea igual ó menor que 60°; hállese por el procedimiento anterior, la línea recta igual con una de estas partes; y el doble de esta espresará la longitud del arco dado, si para hacer la operacion se dividió en dos partes iguales; se tomará el cuádruplo de dicha recta, si para hacer la operacion se dividió en cuatro partes iguales; y el óctuplo de dicha recta, si para practicar la operacion fué necesario dividir el arco en 8 partes iguales.

Sea por ejemplo *acb* (fig. 80) el arco propuesto. Tirarémos su cuerda *ab*. Dividiendo esta cuerda en dos partes iguales por medio de una perpendicular, esta dividirá tambien (§ 32.2.ª.G. de N.) al arco *acb* en dos partes iguales; se tomará con un compas la cuerda *bc*, que se pondrá desde *b* hasta *d*; y se volverá á tomar desde *d* á *e*. Ahora se toma la tercera parte de *ae*, y se colocará á la izquierda de *e* en la misma *ba* prolongada; y resultará que la *bt* será igual en longitud con el arco *acb*, suponiéndole estendido en línea recta.

Esta construccion da la recta igual con el arco, de un modo tan exacto, que habiendo construido un círculo con un radio de 6 pulgadas españolas; y tomado en él un arco de 60° se le aplicó esta construccion, y resultó la linea recta igual con 6 pulgadas, 3 líneas $\frac{1}{3}$ de línea, y un poquito mas; que ni pudimos apreciar con el compas, ni graduar con la vista. Determinado por el cálculo, en virtud de lo espuesto (68), resulta que la longitud del arco de 60° correspondiente á 6 pulgadas de radio, era 6,282 pulgadas, que hacen 6 pulgadas, 3 líneas y 0,384 de línea. Ahora bien, $\frac{1}{3}$ de línea equivale en decimales á o,333; el esceso de o,384, sobre o,333, es o,051 que viene á ser *media décima de línea, ó un veinte avo de linea*, que fué el esceso que no pudimos determínar por el compas, ni graduar á simple vista; pero que el cálculo manifiesta, comprobando del modo mas satisfactorio el resultado *gráfico*.

Cuando el arco es menor que 60°, el método gráfico es tadavia mas exacto.

Supongamos ahora, que el arco sea el *acb* (fig. 81) que ya se acerca á una circunferencia; y que se quiera encontar una línea recta que le sea igual en longitud, suponiéndole rectificado. Se tirará la cuerda *ab*; se dividirá en dos partes iguales, por medio de una perpendicular; con lo cuàl esta dividirá tambien en dos partes iguales *adc, bec*, al arco *acb*. Como estas partes son mayores que 60°, dividirémos uno de estos arcos, por ejemplo el *adc*, en dos partes iguales *afd, dgc*; lo que se consigue dividiendo su cuerda *ac* en dos partes iguales por medio de una perpendicular. Como las mitades *afd,dgc* son todavía mayores que 60°, dividirémos una de ellas *dgc* en dos partes iguales *dhg, gic*; y tendrémos que cada una de ellas será igual con la octava parte del arco total propuesto. Ahora, por el procedimiento acabado de esplicar, de cuando el arco es de 60° ó menor, hallarémos la recta *cp* igual con dicho arco *gic* rectificado; y tomando una recta que contenga ocho veces á la *cp*, se tendrá la recta que sea igual en longitud á todo el arco rectificado *afdgiceb*, que era lo que se pedía.

129 *La cuestion inversa, es decir, dada una línea recta, encontrar un arco de círculo, que, rectificado, le sea igual en longitud, es absolutamante indeterminada;* porque puede haber infinitos arcos de círculos, correspondientes á diversos radios, que tengan la magnitud espresada. Pero, si ademas, se especificase el radio, el diámetro ó la circunferencia del círculo en que se pedía tomar el arco igual á la recta

dada, entónces ya la cuestion era determinada; y solo daba una resolucion, que es la siguiente.

130. Supongamos que se nos diese la rec a K (fig. 82), para representar la longitud del arco; y que la recta C fuese la circunferencia correspondiente á dicho arco. En este caso, formarémos (§ 64 G. de N), la siguiente proporcion.

La recta C, *que espresa la circunferencia: la recta* K, *que espresa la longitud del arco rectificado::* 360, *que son los grados que tiene toda la circunferencia: al número de grados, que corresponden al arco, cuya longitud, despues de rectificado, suponemos debe ser igual con la recta* K.

Podemos encontrar este cuarto término de dos maneras diferentes; ó por construccion gráfica: ó por cálculo. Cuando se da conocida la circunferencia, y espresada por la línea recta C, entónces es mas adecuada la construccion gráfica: en cuyo caso se procederá para hallar la cuarta proporcional (126), tomando por primera línea AB (fig. 78) la recta C, que espresa la circunferencia; por segunda línea AC, la recta K, que es la longitud dada del arco; para la tercer línea AE, tomarémos en una escala cualquiera el valor de 360 partes de la espresada escala; unirémos el estremo B de la primera, con el estremo E de la tercera; y por el estremo C de la segunda, tirarémos una paralela CF á la BE; y la parte AF que intercepte en la AZ, será la recta que esprese el número de grados del arco que buscamos; y para determinarle, llevarémos dicha recta encontrada, á la misma escala en que se tomaron las 360 partes, para representar los 360° que tiene toda la circunferencia; y averiguado el número de partes, que en dicha escala corresponden á la espresada línea, se tendrá el número de grados del arco que, despues de rectificado, ha de ser igual con la recta K.

Para determinar este arco, si la circunferencia estuviese trazada, ademas de darse rectificada, no habría mas que formar en el centro, con el auxilio del semicírculo graduado ó transportador (32), un ángulo del número de grados, que se hubiese obtenido.

Si la circunferencia no estuviese descrita, necesitaríamos trazarla; á cuyo efecto, emplearíamos la misma construccion (126) para encontrar el radio; determinado este, se trazaría la circunferencia; y formando en su centro con el transportador un ángulo del número de grados que corresponden al cuarto término encontrado, los lados de este ángulo interceptarían en la circunferencia el arco que buscábamos.

131 Si la circunferencia se nos diese espresada en números, esto es, si en vez de darse la línea efectiva C (fig. 82), se nos dijese, que debia tener tantas varas, pies, pulgadas &c., entónces en una escala cualquiera, tomaríamos una línea que espresase la mencionada cantidad; en la misma escala veríamos á cuantas varas, pies &c. correspondía la recta dada K; y entónces, por cálculo, sacaríamos el cuarto término de la proporcion siguiente.

Las varas, pies, pulgadas &c. que se supone contener la circunferencia rectificada: las partes que hemos hallado por la misma escala corresponder á la recta dada K :: 360° : *al número de grados, que contendrá el arco, cuya longitud es* K.

Y obtenido este número de grados, se procederá como en el caso anterior (130).

132 Si, *ademas de la longitud* K *del arco, se diese conocido el radio, para encontrar el número de grados del arco, que, despues de rectificado, fuese igual con la recta* K, *se practicaría lo siguiente.*

Si el radio se diese espresado en un número, como de varas, pies, pulgadas &c., entónces (§ 58, G. de N.) se multiplicaría dicho número por 6,28319; y el producto espresaría la circunferencia en la unidad lineal en que se hubiese dado el radio, esto es, en varas, pies &c.; y conocida la circunferencia, procederíamos en la forma espuesta (131).

Si el radio se diese espresado en una línea recta, se trazaría la circunferencia; por medio de la construccion (125) se hallaría la recta que le fuese igual; y procediendo despues como en el (130), obtendríamos el arco que se deseaba.

Si, ademas de la longitud K del arco, se nos diese el diámetro del círculo á que debia correspoder; tomaríamos la mitad del diámetro, y tendríamos determinado el radio; y procediendo como acabamos de manifestar, obtendríamos el arco que se apetecía.

133 Ocurre con mucha frecuencia en las artes, *el tener que tomar, en un círculo dado, una porcion de circunferencia, tal que sea igual en longitud á un arco determinado de otro segundo círculo de radio diferente, pero tambien dado.* En este caso se averiguará, con el auxilio del transportador (32) el número de grados que corresponde al arco del primer círculo que se considera; y se formará la siguiente proporcion.

El radio del segundo círculo: al radio del primero:: como el número de grados del arco de este primero: al número de grados que ha de tener el arco de igual longitud en el segundo círculo.

El cuarto término de esta proporcion se hallará por los métodos espuestos (130); y con el auxilio del transportador, se formará un ángulo de esta magnitud en el segundo círculo; y los lados prolongados de este ángulo cortarán en la circunferencia del espresado segundo círculo el arco de igual longitud que el dado en el primero.

Como, al apreciar los grados por medio del transportador, se puede cometer un error de ocho á diez minutos, esta operacion se puede efectuar de modo que este error se haga la mitad, cuarta, octava &c. parte menor, procediendo del modo siguiente.

En vez de indagar el número de grados del arco del primer círculo por medio del transportador, se toma el duplo, cuádruplo, óctuplo &c. de este arco; se le aplica el transportador y se ve el número de grados que corresponde á este arco total. Al apreciar este número de grados, podrémos cometer el mismo error de ocho á diez minutos. Pero, dividiendo este número de grados hallado, por 2, por 4, por 8 &c., tendrémos el verdadero valor del número de grados del arco primitivo; y el error cometido, al apreciar el ángulo total, se habrá reducido, en el arco dado, á la mitad, cuarta, octava &c. parte.

134 *Construir la* EVOLVENTE *que trazaria un punto de la circunferencia de círculo, por su desarrollo, considerada dicha circunferencia como* EVOLUTA.

Para fijar bien las idéas de las líneas que se llaman *evolventes* y *evolutas*, supongamos arrollado á la parte convexa de la curva ABCG (fig. 83) un hilo ó línea perfectamente flexible é inextensible, que tenga el un estremo fijo en G, y el otro se halle libre en A; y supongamos, que, manteniéndose bien tirante el hilo, se vaya desarrollando. En este caso, su estremo A irá trazando una curva ADEF, á la cual se le da, por su generacion, el nombre de *evolvente*; á la ABCG, que se desenvuelve, se le llama *evoluta*; y á la parte BD ó CE del hilo que se ha desarrollado, se le llama *radio de la evoluta*. El principio A de la evoluta, se llama su *origen*; y el fin G su *término*.

135 La *evolvente*, que origina el desarrollo de una circunferencia de círculo, tiene aplicaciones muy útiles en las artes; y por lo mismo nos conviene darla á conocer. Sea K (fig. 84) el centro de la circunferencia del círculo, que suponemos se desarrolla, principiando por el punto A. Para construirla, lo primero que harémos será dividir dicha circunferencia en un número cualquiera de partes iguales, pero que sea par; por ejemplo en 8; lo que se consigue tirando un diámetro, con lo cual queda dividida en dos partes iguales; tirando otro diámetro perpendicular á este, quedará dividida la mencionada circunferencia en cuatro partes iguales; dividiendo cada una de estas (71), en dos, lo quedará la circunferencia en las 8 partes iguales espresadas. Por cada uno de los puntos de division, se tirará una tangente indefinida. Hecho esto, determínese por la construccion

(125) la línea recta AA′ que sea igual con la mencionada circunferencia; y divídase tambien en las mismas 8 partes iguales. En la primera tangente, que es la tirada por el punto 1, se señalará un punto 1′ que diste del punto de contacto una parte de las 8 de la recta que espresa la circunferencia rectificada, y se tendrá un punto de la *evolvente* que buscamos. En la 2.ª tangente, que es la tirada por el punto 2, se señalará un punto 2′ que diste del punto de su contacto dos partes de la recta que espresa la circunferencia rectificada, y se tendrá otro punto de la evolvente; y continuando de este modo hasta llegar á la division 8 de la circunferencia, que será el mismo punto de orígen A, y tomando en ella una parte igual á toda la recta AA′, que espresa la circunferencia, se tendrá el punto último de la evolvente, que se pedía. Para trazar la curva definitivamente, no hay mas que hacer uso de la regla acordada, que mas se aproxime á coincidir con tres ó cuatro de los puntos señalados, principiando por el orígen A; y trazando una curva continua, sin garrotes, hasta llegar al último término, se tendrá la curva A 1′2′3′4′5′6′7′A′, que era la que se pedía.

Si despues supusiéramos, que se volvía á desenvolver el mismo círculo, una ó mas veces, resultaría una especie de espiral análoga á la del (121); pero, como esta ya no tiene uso en las artes, pues hasta ahora, no se necesita por lo regular, mas que una pequeña parte de la *evolvente*, no pasarémos mas adelante.

136 Esta construccion es mas exacta que todas las que dan los demas Autores; pues no conociendo sin duda la construccion (125, ni la del § 61 de la G. de N., ni la del § 349 del tomo 1.° del Compendio de Matemáticas), lo que hacen es dividir la circunferencia en partes bastante pequeñas; y toman despues la cuerda de una de estas pequeñas partes, en vez del arco; y esta es la primera parte que toman para señalar el primer punto de la evolvente; despues toman

dos veces esta cuerda para señalar el segundo punto; y asi sucesivamente. Haciendo el arco muy pequeño, discrepa en efecto poco de su cuerda; y por consiguiente, en el primer punto, el error no será de consideracion; pero, por la construccion de dichos Autores, al determinar el segundo punto, ya cometen un error doble del primero; al señalar el tercero, cometen un error triplo; y continuando de este modo, al señalar el último punto, el error es tantas veces mayor que el primero, como fueron las partes en que se dividió la circunferencia: y un error de esta especie, ya es bien sensible, y llega á ser á veces equivalente á una ó mas divisiones.

Es tanto mas interesante hacer esta advertencia, cuanto entre los Autores, que en el Extranjero cometen este descuido, los hay de mucha nombradía; y si no llamásemos la atencion sobre este particular, acaso se podría reputar por ménos exacta la que se acaba de manifestar.

137 *Construir la* CICLOIDE.

Se da el nombre de *cicloide* á una línea curva, que se origina por el movimiento de un punto de una circunferencia de círculo, que gira, sin resbalar, sobre una línea recta; este movimiento se nos presenta muy frecuentemente en el de las ruedas de los coches, carros &c.; pues, suponiendo que el pavimento sobre que gira una de estas ruedas, sea plano, cada clavo de la espresada rueda traza una *cicloide*.

138 Si al mismo tiempo, que gira el círculo, resbalase en el mismo sentido que camina su centro, de modo que su movimiento rectilíneo sea mayor que su movimiento circular, se trazaría una *cicloide*, que se llama *prolongada*; y su base entónces es mayor que la circunferencia del círculo generador; y si al mismo tiempo que gira el círculo, resbalase en sentido contrario al en que camina su centro, en términos que el movimiento rectilíneo del círculo sea menor que su movimiento circular, se trazaría una *cicloide*,

que sería *acortada*; y su base resultaría menor que la circunferencia del círculo generador.

139 *La cicloide ordinaria puede trazarse por un movimiento continuo*, del modo siguiente: se toma un reglon BG (fig. 85); y sobre su canto se hace rodar un cilindro, cuya base representamos por CEH, y de tal modo, que poniendo en uno de los puntos de la circunferencia de dicha base una punta de lápiz I, y que pueda dicho cilindro rodar ó girar por el canto de la regla, el mencionado punto I señalará en el plano LL, sobre que reposa la regla y la base del cilindro, una curva KIN, que será la *cicloide* pedida; y si continúa el movimiento, se originarán otras cicloides iguales, como se indica en la figura el principio de la segunda.

140 *Para trazar por puntos la* CICLOIDE *ordinaria*, supongamos que queremos trazar la *cicloide*, que engendraría el punto A (fig. 86) de un círculo C, que se moviese sobre la recta AB. Para esto, se tirará por dicho punto A el diámetro AD, y la tangente AB, que se hará igual en magnitud con la circunferencia de dicho círculo, por la construccion espresada (125); y para mayor sencillez, supondrémos que el círculo C, generador de la *cicloide*, sea de igual diámetro con el de la (fig. 77). En este caso, tomando la AB de la (fig. 86) igual con la *c*D de la (fig. 77), nos resultará que AB será igual con la circunferencia del círculo generador C. Hecho esto, se dividirá dicha AB en un número cualquiera de partes iguales; pero que sea *par*, tal como en 16; é igual operacion harémos con la circunferencia del círculo C (71), principiando por el punto A. Despues se tirarán por todos los puntos de division de la AB, perpendiculares á ella, é iguales en magnitud con el diámetro AD; y sobre estas perpendiculares como diámetros, se trazarán círculos que serán iguales con el generador; pero, á fin de no confundir la figura, solo tiramos en ella los 1..1′,3..3′,5..5′,8..8′,11..11′,13..13′,15..15′; luego, se toma en el círculo 1. 1′ una parte igual con

una de las divisiones del círculo generador, y se pone, partiendo del punto 1; la cual caerá en un punto 1'', que será punto de la *cicloide*; pues al llegar *a* á 1, el punto A estará en 1'', puesto que Aa=1..1''. Cuando el punto *c* haya llegado al punto 3, A estará en 3''; cuando el punto *e* haya llegado al punto 5, A se hallará en 5''. Cuando el punto D haya llegado al punto 8; en cuyo caso habrá recorrido el círculo generador la mitad de su circunferencia, ó lo que es lo mismo, habrá dado A media vuelta, el punto A estará en 8', del círculo 8..8', que será el punto mas alto de la curva; y luego continuará bajando hasta terminar en B. Despues, con el auxilio de las reglas acordadas, se irá trazando una curva sin garrotes; eligiendo la regla que mas se aproxime á comprender tres ó mas puntos; y pasando un lápiz, quedará trazada la *cicloide* AEB; la cual resulta ser *simétrica*, esto es, se compone de dos partes iguales: AB es igual con 8'B.

Si al llegar el punto A al B, el círculo generador continuase moviéndose del mismo modo, se volvería á originar otra *cicloide* (*); y así sucesivamente, que

---

(*) Las propiedades de esta curva son tantas y tan singulares, que ninguna otra se ha caracterizado con tan diferentes nombres, debidos cada uno á la propiedad notable que se ha considerado en ella. Se le dió el nombre de *cicloide*, atendiendo á que se origina por el movimiento de un círculo; mas como esta curva la traza cualquier punto de la circunferencia de una rueda de un carruage, que gira sobre un plano, se la dió tambien por este motivo el nombre de *trocoide*.

La mencionada curva tiene la singular propiedad, de que, si se considera (134) como *evoluta*, origina una *evolvente* exactamente igual con ella; en términos que la *cicloide es evoluta y evolvente de ella misma*.

Otra de las propiedades notabilísimas de esta curva es que si se dispone en un sentido inverso, desde cualquier parage de ella que se conciba descendiendo un punto ó cuerpo esférico, llega al mismo tiempo al parage mas bajo. Esto es, es lo que se verifica en las ruedas de los carruages.

Hacemos igual advertencia que (136); pues los Autores, sin duda por carecer de método gráfico para encontrar la recta igual con la circunferencia, lo que

---

se verifican en ella *las caidas en tiempos iguales por arcos desiguales de dicha curva*. De donde resulta, que, si en el punto de suspension de un péndulo, se pusiesen dos arcos de cicloide; y sirviese de varilla una cuerda ó hilo flexible, la bola ó lenteja del péndulo trazaría por su desarrollo arcos de *cicloide*; y por la propiedad, que acabamos de espresar, resulta, que, sea grande ó pequeño el arco que trace el péndulo, separándose de la posicion vertical, el tiempo de la *semioscilacion*, que es el que empléa desde un punto cualquiera al punto mas bajo, es igual; y por consiguiente el de la *oscilacion* entera. Esta propiedad le ha hecho dar el nombre de *isochrona;* porque, sean grandes ó pequeñas las oscilaciones, cuando la lenteja ó esfera del péndulo siga el contorno de esta curva, las oscilaciones se verifican en igual tiempo. Esta propiedad fué la que dió origen á la invencion de los relojes de péndola que aun no cuentan dos siglos de antigüedad: y si se atiende á las utilidades que producen en el dia dichos relojes en las poblaciones, en las casas particulares, en los Observatorios astronómicos &c, no se podrá ménos de concebir una respetuosa gratitud hácia los Matemáticos, que por penosas y serias meditaciones han proporcionado á la Sociedad ventajas de tanta consideracion. Esto da márgen tambien á convencerse de las inumerables utilidades que proporcionan las Matemáticas; pues casi todas sus proposiciones puestas en práctica, suministran medios fecundos para satisfacer las necesidades de los hombres y atender á sus conveniencias.

Existe todavía una propiedad, singular á la par que admirable en esta curva, y que le ha grangeado aun otro nombre diferente; y es que, *de todas las líneas que puede correr un móvil desde un punto á otro que esté inferior á el, pero no en la misma vertical, el cuerpo llega del punto mas alto al mas bajo en menor tiempo que por cualquiera otra linea, sea recta ó curva*. Esto causará estrañeza; pues *siendo la línea recta* (§ 9..6.ª G. de N.) el camino mas corto que hay para ir desde un punto á otro, á primera vista parece que debería correrse en el mas breve tiempo; y no es así, pues se verifica lo contrario, esto es, hacen es dividir la circunferencia en un número de partes iguales, de modo que resulten las partes tan pequeñas, que se pueda tomar la cuerda por el arco; lo hacen así para determinar el primer punto, en el cual

---

que, *aunque la línea recta es la mas corta de todas cuantas se pueden tirar desde un punto á otro, no es la que se corre en el menor tiempo por un móvil, que bajase por ella, sometido à las leyes de la gravedad; sinó que, de todas las líneas, inclusa la recta, la que se corre en ménos tiempo, es la cicloide;* y por esta propiedad se le ha caracterizado con el nombre de *brachistrochrona*.

La propiedad de correrse en el mismo tiempo un arco grande de esta curva, que uno pequeño; y la de correrse la cicloide en ménos tiempo que la línea recta, que pasa por sus dos estremos, parecerán increibles: por eso los Matemáticos han ideado medios de hacer sensibles estas propiedades: existiendo aparatos en casi todos los gabinetes de Física, por medio de los cuales se confirman estas verdades por los esperimentos correspondientes.

Con el objeto de manifestar la importancia de que se propaguen los conocimientos matemáticos, para evitar los juicios precipitados, aventurados y erróneos, que por carecer de ellos se pueden formar, no puedo ménos de recordar un hecho, que se ha verificado no hace mucho.

Se ha dicho por un célebre orador en el santuario de las Cortes, como para corroborar sus asertos, que, *la línea recta, siendo la mas corta, que va de un punto à otro, es tambien la que se corre en ménos tiempo;* y como se verifica lo contrario, se deduce, que todo lo que se funde en este símil puede estar tan equivocado y ser tan erróneo como el mismo símil. De aquí pueden nacer tantos errores, tantas incongruencias como hemos visto en los ramos de administracion, y en las medidas económicas, legislativas y políticas: pues todo cuanto se establezca en contra de lo que prescriben las ciencias exactas y de la Naturaleza, no puede tener buen éxito. Lo mas particular de todo, es que este error se reputó como una prueba la mas eminente del saber, y se admiró como un recurso de los talentos oratorios.

No espreso aquí el nombre del orador; porque mi objeto no es criticar, ni trato de incurrir en la tendencia de mordacidad y descrédito nacional; porque esto siempre es perjudicial á la patria; y tambien porque el espresado orador no hay grande inexactitud; pero, en el segundo, tercero, cuarto &c. punto, siendo ya el error doble, triplo, cuádruplo &c. que en el primero, se va haciendo el error cada vez mas sensible; y en el último es ya

---

me ha causado perjuicios de muchísima consideracion; y para que vea la diferencia de procederes, que hay entre los que obran segun lo que inspiran los conocimientos científicos, respecto de los que solo proceden por capricho, arbitrariedad ú otras influencias.

Como nada es mas importante que el facilitar á las grandes masas los medios para que discurran bien, y que sus facultades intelectuales, ni se vicien, ni se sorprendan, no estará demas el que espliquemos de un modo que se presente al alcance de todos, y desnudo de todo aparato científico, las dos propiedades mas notables y sorprendentes de esta curva, á saber: *la de correrse en ella espacios muy desiguales en tiempos iguales*, siendo la misma la causa que influye en su movimiento, que es la fuerza de la gravedad; y el ser la curva en que se verifica *el mas vivo descenso* sin otra causa que la gravedad.

Todo lo cual me parece poderse hacer sensible del modo siguiente.

La naturaleza de la *cicloide* es tal, que el cuerpo que la describe, adquiere mas velocidad á medida que corre un arco mayor, en la razon precisa que se necesita para que el tiempo que gasta en describir este arco, sea siempre el mismo, cualquiera que sea la longitud del arco que el cuerpo corre; y de aquí proviene la igualdad de correrse en el mismo, no obstante la desigualdad de los arcos; porque la velocidad se halla exactamente mayor ó menor en la misma proporcion que el arco es mayor ó menor.

En cuanto á la propiedad *del mas breve descenso*, parece, al primer aspecto, que la línea corrida debe ser una línea recta por ser la mas corta. Pero si se considera que se trata aquí de un movimiento acelerado, y que en una curva cóncava descrita de un punto á otro, el cuerpo desciende al principio en una direccion mas próxima de la perpendicular y por consiguiente adquiere una mayor velocidad que sobre el plano inclinado mas separado de esta perpendicular, se puede comprender, que él puede llegar al punto inferior, empleando ménos tiempo que sobre la línea recta (Nota del Editor) tal, que algunas veces equivale á mas de una parte de la circunferencia.

141 *Construir la* EPICICLOIDE.

Se llama *epicicloide* la curva que describe un punto cualquiera de la circunferencia de un círculo, al girar sobre otro círculo, que permanece fijo ó inmóvil. Cuando los dos círculos se hallen en un mismo plano, la *epicicloide* se llama *plana*; y cuando no, esto es, cuando los círculos se hallan en diverso plano, que justamente corresponden á conos, que tienen un vértice comun, se llama entónces *epicicloide esférica*; por hallarse trazada sobre una esfera, cuyo centro es el vértice comun de los dos conos.

Así es, que si suponemos que un círculo C es fijo, y que otro *c* gira al rededor de su propio centro, recorriendo la circunferencia ABD del círculo fijo, bien por su parte esterior (fig. 87) ó por su interior (fig. 88), un punto cualquiera habrá descrito, en su revolucion total, una curva DEF(fig. 87) ó BEF (fig. 88), á la cual se la denomina *epicicloide plana*; pues se halla trazada sobre un plano, que es el mismo, en que están los dos círculos dados; denominándose *esterior* cuando el círculo móvil camina por fuera del fijo, como se ve en la (fig. 87); é *interior*, cuando dicho círculo móvil camina por dentro del fijo (fig. 88).

142 Si el círculo que se mueve, tiene por diámetro el radio del círculo fijo CB (fig. 89), entónces la *epicicloide* es una línea recta, espresada por el radio CB del círculo fijo, que termina en el punto de contacto de los dos círculos en su primera posicion.

143 La *epicicloide* puede trazarse tambien de dos modos, esto es, por un movimiento continuo y por puntos.

144 Para trazarla por un movimiento continuo, se puede hacer uso del aparato representado en la (fig. 90), el cual consiste en dos planchas circulares C,*c*, que se tocan, y cuyos centros se hallen unidos por medio de una barra Cc, que permite girar á

los círculos al rededor de sus centros, y tambien el uno al rededor del otro; y suponiendo una punta de lápiz en un punto cualquiera tal como I del círculo *c*, y que se efectúa el movimiento, se trazará una ó mas epicicloides, como se ve en dicha (fig. 90).

145 Para trazar la *epicicloide plana por puntos*, se practicará la regla siguiente: *divídase la circunferencia del círculo movible en un número cualquiera de partes iguales, pero que dicho número sea par; determínese por el método espuesto* (133) *en la circunferencia del círculo fijo, un arco, que, despues de rectificado, sea igual en longitud á una de las partes iguales en que se dividió el círculo movible, suponiéndola tambien rectificada.*

Tómense, en el círculo fijo, desde el orígen hácia el lado en que se verifica este movimiento, tantas partes iguales como esta que se acaba de determinar, cuantas fueron las partes en que se dividió la circunferencia del círculo movible. Tírense radios desde el centro del círculo fijo á los puntos que marcan las divisiones señaladas en su circunferencia; en la prolongacion de cada uno de estos radios tómese una parte igual con el radio del círculo movible; y haciendo centro en los estremos de estas prolongaciones, y con un radio igual al del círculo movible, trácese una circunferencia. Tómese en cada una de estas circunferencias, principiando desde el punto en que toca al círculo fijo, un número de partes iguales con las del círculo movible, espresado por el lugar que ocupa dicha circunferencia; esto es, tómese una parte en la primera cirrunferencia, dos en la segunda, tres en la tercera etc.; y los puntos, qùe, por este medio queden señalados, corresponderán á la epicicloide plana que se deséa; y haciendo pasar despues por todos estos puntos, una curva sin garrotes, ya á pulso, ya con el auxilio de las reglas acordadas, se tendrá la curva pedida.

Propongámonos construir, para que sirva de primer ejemplo, una *epicicloide plana* en que sean iguales el círculo fijo y el círculo movible.

Sea C (fig. 91) el centro del círculo fijo, C′ el del movible; y supongamos que el punto de contacto A sea el principio del movimiento, y que este se efectúe desde el punto A hácia la izquierda.

Como suponemos que los círculos son iguales, sus circunferencias tambien lo serán; y moviéndose el círculo C′, estando siempre en contacto su circunferencia con la del círculo fijo C, resulta, que al dar una vuelta completa, el punto A del círculo movible se volverá á confundir con el punto A del círculo fijo. Luego la *epicicloide* principia en A y concluye tambien en A; por lo que esta epicicloide es una de aquellas curvas, que se llaman *cerradas*.

Para ir graduando las dificultades, supondrémos en este ejemplo, que el número de partes en que se divida la circunferencia del círculo movible, sea 6; lo cual se efectúa, colocando (80) el radio C′A seis veces sobre su circunferencia. Y como las circunferencias de ambos círculos son iguales, una parte homóloga de la una será igual con una parte homóloga de la otra; luego, la sesta parte del círculo movible será igual á la sesta parte del círculo fijo; y por lo mismo, si dividimos la circunferencia de este en 6 partes iguales, cada una de estas partes será igual en longitud, á cada una de las del círculo movible.

Para que la misma notacion sirva de guia en el trazado, las partes de la circunferencia del círculo frjo las señalarémos con los números 1,2,3 &c., principiando desde el punto A: por lo que resulta puesto un 1 al fin de la 1.ª division; un 2 al fin de la 2.ª, principiando siempre desde A; un 3 al fin de la 3.ª; un 4 al fin de la 4.ª; un 5 al fin de la 5.ª; y deberíamos poner un 6 al fin de la 6ª. Pero, como este punto se confunde con el punto A, queda bien marcado con la espresada letra.

Las divisiones en el círculo movible se marcarán con los mismos números, pero con un acento. Por lo cual, se ve un 1′ en la primera division del círculo movible cuyo centro es C', contando desde A; un $2'$ en la segunda; un $3'$ en la tercera; un $4'$ en la cuarta; un $5'$ en la quinta; y en A debería ponerse un $6'$ como estremo de la sesta division; pero no hay necesidad, por estar bien determinado el espresado punto por la letra A.

Ahora, tomando en la prolongacion del radio C1 una parte $1C''$ igual con el radio del círculo movible C', que aquí es igual con el del fijo C, y haciendo centro en C'' con dicho radio, se trazará una circunferencia; en ella desde el punto 1, hácia el lado donde se halla el círculo movible primitivo, se tomará una parte, que viene á caer exactamente en el punto $1'$; y este punto $1'$ será punto de la epicicloide. Y como el punto A es su principio, resulta que ya tenemos dos puntos de dicha curva, á saber: el punto A y el punto $1'$.

En la prolongacion del radio C2, tomarémos una parte $2C'''$ igual con $C'A$; y haciendo centro en C''' con un radio igual á $C'A$, se traza otra circunferencia; en ella se toman dos partes desde el punto 2, iguales con las del círculo movible; lo que se consigue sin mas que poner dos veces la cuerda de dicha parte del círculo movible, sobre el trazado con $C'''2$ por radio; y el punto $2''$ será otro punto de la epicicloide.

Tomando en la prolongacion de C3 una parte $3C^{IV}$ igual con $C'A$; y haciendo centro en C^{IV} con dicha distancia por radio, se trazará otra circunferencia; se tomarán en ella tres partes iguales á las del círculo movible, y el punto $3''$ será punto de la epicicloide.

En la prolongacion del radió C4, se tomará una parte $4C^{V}$ igual con $C'A$; haciendo centro en C^{V} con dicha magnitud por radio, se trazará una circunferencia; y tomando en ella 4 partes, el punto $4''$ corresponderá á la epicicloide.

En la prolongacion de C5, tomarémos una parte $5C^{VI}$ igual con $C'A$; haciendo centro en C^{VI} con la espresada distancia por radio, se traza otra circunferencia; y tomando en ella 5 partes iguales á las del círculo movible, el punto que deberíamos señalar por 5'' y que se confunde con el 5', corresponderá á la epicicloide, cuyo fin ó término será el punto A.

Y si ahora se pasa la pluma ó lápiz por los puntos A, 1', 2'', 3'', 4'', 5' y A, bien sea á ojo, bien con el auxilio de las reglas acordadas; y trazamos una curva sin garrotes, tendrémos la A 1' 2'' 3'' 4'' 5' A, que será la epicicloide pedida (*).

(*) Aunque en el objeto de esta obrita no entra el dar la demostracion de todos los procedimientos, sin embargo, como la construccion de estas curvas no es tan conocida como exige su importancia, juzgamos oportuno el dar aquí la razon de por qué, haciendo la construccion del texto, resulta efectivamente la curva que trazaría el punto A del círculo movible, girando al rededor del círculo fijo. Para esto, basta observar, que moviéndose el círculo C' sobre el C en la direccion A..1..2..3. &c., al llegar al punto 1' del círculo C' al punto 1 del círculo fijo C, el punto A habrá llegado á 1'; y por consiguiente, el punto 1' corresponderá á la epicicloide.

Cuando, en virtud del mismo movimiento, el punto 2' del círculo movible C' haya llegado al punto 2 del círculo fijo C, el punto A se hallará en 2''; luego el punto 2'' corresponderá á la epicicloide.

Al llegar el punto 3' al 3, el punto A estará en 3''. Luego el punto 3'' corresponderá á la epicicloide. Del mismo modo, al llegar el punto 4' á confundirse con el 4, el punto A se hallará en 4'', que será punto de la epicicloide.

Al llegar el punto 5' á confundirse con el 5, el punto A se hallará en 5', que será de la epicicloide.

Por último, al acabar de dar una vuelta completa el círculo movible, rodando sobre el círculo fijo, el punto A del movible volverá á confundirse con el A del fijo; por consiguiente, el punto A es el *estremo* ó *término* de la epicicloide.

Los que deséen, que sus facultades intelectuales se desenvuelvan, al mismo tiempo que sus manos se ejercitan en la práctica de la delineacion, deberán procurar contraer este mismo raciocinio á la construccion de las epicicloides de los otros ejemplos. (Nota del editor).

La epicicloide tambien es simétrica; por lo que, habiendo construido la rama $A1'2''3''$, podríamos haber trazado la otra, copiando la parte ya trazada; pero hemos querido construirla toda ella directamente para que se perciba bien el método. Sin embargo, debemos advertir que en las artes solo ocurre el trazar una pequeña parte de la epicicloide.

Nos propondrémos por 2.º ejemplo el construir una epicicloide en que el radio del círculo movible C' (fig. 92) sea la mitad del del círculo fijo C; y que el movimiento empiece por el punto A.

Como el círculo movible tiene por radio la mitad del del círculo fijo, la circunferencia del círculo movible será la mitad (§ 59 G. de N.) de la circunferencia del fijo. Por consiguiente, la circunferencia del movible será igual á la mitad de la circunferencia del fijo. Luego, cuando el movible C' haya rodado, principiando por A, una vez completamente por la circunferencia del fijo C, el punto A del movible se hallará en B, estremo del diámetro AB.

Para construir los puntos intermedios, dividirémos la circunferencia del movible en 12 partes iguales, que señalamos con $1',2',3',4',5',6',7',8',9',10',11'$, cayendo la última division en el punto A. La operacion se practica muy fácilmente; porque, dividida en 6 partes, como en el ejemplo anterior, no hay mas que dividir despues cada una de estas partes en 2. Tambien puede hacerse dividiendo la circunferencia en cuatro cuadrantes; y luego cada uno de estos en tres partes iguales por el método espuesto (71).

Dividirémos igualmente en 12 partes iguales la semicircunferencia del círculo fijo C, que señalarémos con los números 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, cayendo la última division en B. El hacer esta operacion está reducido á dividir en 6 partes iguales la semicircunferencia del círculo fijo, por el procedimiento que acabamos de practicar en el movible; y dividiendo despues cada una de estas partes en dos (71), se tendrá dividida la espresada semicircunferencia en las doce partes iguales que deseábamos. Y como la circunferencia entera del círculo movible era igual con la semicircunferencia del fijo, resulta que cada una de las 12 partes iguales de la circunferencia del círculo movible será igual con cada una de las 12 partes iguales en que tenemos dividida la semicircunferencia del círculo fijo. Tírense desde el centro C, á los puntos 1,2,3, &c. los radios C1,C2,C3 &c.; y prolónguense estos hasta que las prolongaciones $1C''$, $2C'''$, $3C^{IV}$, sean iguales con el radio AC' del círculo movible. Haciendo centro en C'' con el radio $C''1$, trácese una circunferencia. Tómese en ella, principiando desde 1 hácia donde se halla el círculo movible C', una parte igual á una del espresado círculo movible; lo que se consigue, tomando la cuerda de una de dichas partes y colocándola desde 1, en la circunferencia del círculo trazado desde el centro C''; y el punto $1''$ que por este medio quedará marcado, será punto de la epicicloide.

En el círculo trazado desde C''' tomarémos 2 partes iguales de la circunferencia movible, colocando dos veces la cuerda de una de ellas, principiando desde el punto 2; y de este modo tendrémos el punto $2''$.

En el círculo trazado desde el centro C^{IV} tomarémos 3 partes; y tendrémos el punto $3''$ de la epicicloide. Y continuando del mismo modo, al tomar, en el último círculo 12 partes iguales á las del círculo movible, verémos que la punta del compas se aplica exactamente al punto B, que será el término de la epicicloide. Y pasando un lápiz ó pluma por los espresados puntos, quedará construida la epicicloide $A\ 1''2''3''4''5''6''7''8''9''10''11''\ B$, con las circunstancias que apetecíamos.

Para *tercer ejemplo* nos propondrémos *construir una epicicloide en que el círculo movible sea mayor que el círculo fijo*. Supongamos que la relacion del radio del círculo fijo con el del movible sea la de 2 á 3; es decir, que el radio del círculo fijo (fig. 93) tenga dos pulgadas, pies &c., y el radio del círculo movible se halle representado por 3 pulgadas, pies &c.

Como la circunferencia del círculo movible equivaldrá (§ 59 G. de N.) á circunferencia y media del círculo fijo, quiere decir esto, que la epicicloide que empiece en el punto A, acabará ahora tambien en el punto B, estremo del diámetro del círculo fijo C, que pasa por A; pero será despues de haber dado una vuelta completa.

Para trazarla, se dividirá la circunferencia del círculo movible C′ en doce partes iguales; con lo cual, cada una de estas partes (tabla del § 50 G. de N.) equivaldrá á 30°. Necesitamos ahora determinar el arco que, en el círculo fijo C, sea igual en longitud con el arco de una de las divisiones que acabamos de trazar, en el círculo movible. Para esto, en virtud de lo espuesto (133), formarémos la siguiente proporcion.

El radio CA *del círculo fijo, que suponemos representado por el número* 2 : *al radio* C′A *del círculo movible, que suponemos estar representado por el número* 3 :: 30°, *que es el número de grados de una de las divisiones del círculo movible* : *al número de grados que debe tener el arco del círculo fijo, de igual longitud con el arco de una de las divisiones del círculo movible, suponiendo rectificados ambos arcos.*

Esta proporcion, omitiendo las palabras, está reducida á la siguiente numérica

2 : 3 :: 30 : al cuarto término, que (§ 203 Ar. de N.) se halla multiplicando los medios 3 y 30, y dividiendo el producto 90 por el 2. Con lo cual resultan 45° para el cuarto término. Luego, un arco de 45° en el círculo fijo C será igual en longitud á un arco de 30° en el círculo movible. Y doce divisiones de á 45° en el círculo fijo equivaldrán á $45^\circ \times 12 = 540^\circ$; que, como la circunferencia tiene 360°, y la semicircunferencia 180°, y $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$, ; resulta que las doce divisiones del círculo fijo equivaldrán á circunferencia y

media del mismo círculo fijo; lo cual comprueba que la epicicloide principiará en A y terminará en B, pero despues de haber dado la circunferencia del círculo movible una vuelta completa, y media mas de la del fijo.

Concebido esto, divídase la circunferencia del círculo fijo en 8 partes iguales; y resultará que cada una de ellas contendrá los 45^o que necesitamos. Tírense desde el centro C los radios C1, C2, C3, CB, que equivale en el órden numérico á C4, C5, C6, C7, y el que correspondía ser C8, es el primitivo CA. Prolongarémos estos radios una magnitud igual con el radio $C'A$; y haciendo centro en el estremo de cada una de estas prolongaciones, que señalamos en cada uno de los respectivos círculos por C'', C''' &c. y con un radio igual al del círculo movible, trazarémos una circunferencia. En cada una de estas, tomarémos, partiendo de los puntos respectivos de contacto, un número de partes de su circunferencia, espresado por el número que hay en el punto de contacto con el círculo fijo. Así es, que en el primer círculo trazado, que es el que tiene su centro en C'' tomarémos una parte de las del círculo movible desde 1 á $1''$, y tendrémos que $1''$ será punto de la epicicloide.

Despues, en el círculo, cuyo centro es C''', se tomarán dos partes del círculo movible, desde 2 á $2''$; y $2''$ será punto de la epicicloide.

Del mismo modo se continuará, tomando en la circunferencia, cuyo centro es C^{iv} tres partes del círculo movible desde el punto 3; y el punto $3''$ corresponderá á la epicicloide.

En la circunferencia, cuyo centro es C^{v}, tomarémos 4 partes principiando desde el punto B; y tendrémos el punto $4''$ que corresponderá á la epicicloide.

En la circunferencia, cuyo centro es C^{vi}, tomarémos 5 partes, principiando desde el punto 5, y tendrémos el punto $5''$ de la epicicloide.

En la circunferencia, cuyo centro es C^{vii}, tomarémos 6 partes, principiando desde el punto 6; y tendrémos el punto $6''$ de la epicicloide.

En la circunferencia, cuyo centro es C^{viii}, tomarémos 7 partes principiando desde 7; y tendrémos el punto $7''$ de la epicicloide.

En la circunferencia, cuyo centro es C', tomarémos 8 partes, principiando desde A, y tendrémos el punto $8''$ de la epicicloide, que se confunde con el punto $4'$ que es el que únicamente se señala.

En la circunferencia, cuyo centro es C'', tomarémos 9 partes, principiando desde el número 1, y el punto $9''$ será de la epicicloide.

En la circunferencia, cuyo centro es C''', tomarémos 10 partes, principiando desde 2, y tendrémos el punto $10''$ de la epicicloide.

En la circunferencia, cuyo centro es C'^{v}, tomarémos 11 partes, principiando desde el punto 3; y tendrémos el punto $11''$ de la epicicloide.

Y por último, en la circunferencia, cuyo centro es C^{v}, tomarémos 12 partes iguales, principiando desde B; y como estas doce partes componen toda la circunferencia del círculo generador ó movible, resulta que el punto B será el término ó el fin de la epicicloide.

Elegirémos ahora para 4.° *ejemplo*, el caso en que la relacion de los radios no se dé espresada en números, ni sea el uno parte alícuota del otro, sinó que los radios estén en una relacion cualquiera, espresada por las líneas M,N (fig. 94). Es decir, que el radio $C'A$ del círculo movible sea igual con la línea M, y el CA del círculo fijo sea igual con N. Trazarémos con estas rectas como radios dos círculos C,C', que se toquen en el punto A. Se dividirá el círculo movible en 12 partes iguales como ántes, que señalamos con los números $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $8'$, $9'$, $10'$, $11'$, y A. Lo que ante todas cosas debemos hacer es determinar, en la circunferencia del círculo fijo, cuyo centro es C, un arco de igual longitud á una de estas 12 partes iguales del círculo movible, que como hemos visto (tabla del § 50 G. de N.) contiene 30°.

Para esto, deberémos formar una proporcion del modo esplicado (133), en la forma siguiente.

La longitud de la línea N *ó el radio del círculo fijo : la longitud de la línea* M, *que es el radio del círculo movible* :: 30°, *que son los grados que corresponden á una de las* 12 *partes del círculo movible : al número de grados que corresponde al arco, que en el círculo fijo cuyo centro es* C, *tiene igual longitud, despues de rectificado, que una de las* 12 *partes del círculo movible.*

El 4°. *término* de esta proporcion lo hallarémos por el método esplicado (126), en la forma siguiente.

Tirarémos dos líneas AV, AZ, que formen un ángulo cualquiera. En la AV se tomará una parte AB igual con la línea N; en la misma AV se tomará una parte AC igual con la recta M; despues, en una escala cualquiera, como la que señalamos en la misma figura, tomarémos 30 partes; y esta magnitud la colocarémos en AZ desde A hasta E; unirémos el estremo B de la primera con el estremo E de la tercera; y por el estremo C de la segunda, tirarémos la CF paralela à la BE; y tendrémos que la parte AF, interceptada en la AZ representará el cuarto término de la proporcion de arriba.

Tomarémos esta distancia AF con el compas, la colocarémos en la misma escala, y hallarémos que equivale á *doce partes y media*, que serán los grados que correspondan en el círculo fijo C, al arco que ha de ser igual en longitud á una de las doce partes iguales del círculo movible. Por consiguiente, si en el centro C del círculo fijo, con el auxilio del transportador formamos un àngulo AC1 de doce grados y medio, tendrémos que el arco A1 del círculo fijo será igual en longitud á una de las doce partes iguales del círculo movible.

Por consiguiente, en la circunferencia del círculo fijo C, tomarémos las partes A 1, 1..2, 2..3, 3..4, 4..5, 5..6; y esto nos basta; pues construirémos solo la mitad de la epicicloide; que, practicando la operacion de ántes, resultará construida la $A1''2''3''4''5''6''$; cuyo punto mas alto es el punto $6''$.

Propongámonos por 5.° *ejemplo*. construir una *epicicloide interior*; y supongamos que la relacion de los radios sea la misma que la del precedente ejemplo; es decir, supondrémos que el radio del círculo movible sea el $C'A$ (fig. 95) igual con $C'A$ de la (fig. 94); y que el radio del círculo fijo sea CA (fig. 95) igual con el CA de la (fig. 94), sin mas diferencia que el efectuarse el movimiento del círculo C' por lo interior del círculo fijo C, pero siempre en contacto la circunferencia del uno con la circunferencia del otro.

Para esto, dividirémos la circunferencia del círculo movible en 12 partes iguales, de las que señalamos seis en la figura con los números $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ y $6'$; pues solo construirémos su mitad. El procedimiento del trazado es el mismo exactamente que en el caso anterior. Es decir, se procede á determinar en la circunferencia del círculo fijo un arco que, estendido en línea recta, sea igual con una de las doce partes iguales de la circunferencia movible, tambien rectificada dicha parte. Y hallarémos ser el arco A1 de 12 grados y medio; y se pondrán seis de estas partes desde A, pues que solo tratamos de trazar la mitad, y señalarémos los puntos de division con los números 1, 2, 3, 4, 5, y 6. Tirarémos los radios C1, C2, C3, C4, C5 y C6. En el radio C1, desde el punto 1, tomarémos una parte igual con el radio del círculo movible; y haciendo centro en dicho punto, trazarémos una semicircunferencia; y en ella tomarémos una parte desde 1, y tendrémos el punto $1''$. Harémos la misma construccion en los demas radios, y tomarémos dos partes en el de la semicircunferencia que pasa por 2; 3 en la que pasa por 3; 4 en la que pasa por 4; 5 en la que pasa por 5; y 6 en la que pasa por 6; y tendrémos los respectivos puntos de la semiepicicloide interior que termina en $6''$.

Debemos hacer aquí la misma observacion que (136 y 140), de ser esta construccion mas exacta que la de otros Autores; pues estos toman la cuerda por el arco, y repetida esta operacion muchas veces, resultan inexactitudes bien sensibles. Y para que se vea lo mucho que importa el construir exactamente la epicicloide, y que es cierto el que las construcciones de los demas Autores son inexactas, insertarémos aquí lo que dice *Mr. Christian*, Director del Conservatorio de Artes de París, en la página 421 del tomo 2.º de su MECÁNICA INDUSTRIAL, y es: "mas como esta curva (la *epicicloide*) nunca es materialmente rigorosa en su ejecucion..." Por lo cual se ve confirmada la importancia de nuestro método.

146 Mientras que el círculo movible gira sobre el círculo fijo, su centro D (fig. 96) describe un círculo, cuyo radio es igual con la suma de los radios CB, y BD de los círculos fijo y movible. Si, en la primera posicion de este círculo, se aumenta ó disminuye el radio del círculo movible, una cantidad cualquiera BE,B*e*, al mismo tiempo que el punto B describe una *epicicloide ordinaria* BMN; los puntos E, *e*, con los radios DE,D*e*, describen otras dos epicicloides, llamadas *prolongada*, á la E*l* m'M$'$N$'$, que traza el punto E; y *acortada*, á la *emn* que traza el punto *e*.

147 Para trazar la *prolongada*, se toman (fig. 97) las partes *a*..1,1..2,2..3 &c. sobre la circunferencia del círculo fijo AB, iguales con las del círculo movible, que engendra la epicicloide ordinaria, por el método esplicado (145); y se trazan las circunferencias DE,MN que engendran el estremo O del radio del círculo generador OPL, y el centro C$'$ del mismo círculo; luego, por los puntos de division 1$'$,2$'$,3$'$, &c. del círculo movible que engendra á la epicicloide ordinaria, se tirarán radios C$'$*n* &c.; con lo cual, quedará dividido el círculo LPO, que ha de trazar á la *epicicloide prolongada*, en tantas partes iguales como se dividió el círculo de la *epicicloide ordinaria*. Despues, se tirarán radios por los puntos 1,2,3, &c.; de los cuales solo señalamos con letras los CC$'$,CC$''$,

$CC^{v''}$ para menor confusion; y por los puntos en que dichos radios cortan á la circunferencia DE, se trazarán circunferencias cuyos radios sean iguales con el C′O; y al partir de los puntos en que dichos radios cortan á la circunferencia MN, de los que ponemos solo los O y O′′′, se tomarán tantas partes del círculo movible OPL cuantas sean las que le antecedan en el círculo fijo, y se tendrá la OQR, que será la *epicicloide prolongada*.

148 La misma construccion se verifica para trazar la *epicicloide acortada* como marca la (fig. 98). En ella, el círculo fijo es el que tiene su centro en C; el móvil, el que tiene su centro en C′, y cuyo radio es el C′A; y el círculo que engendra á la epicicloide ordinaria, es el que tiene por radio C′A; y el que traza á la epicicloide acortada, es el que tiene por radio al C′O. Para facilitar mas la inteligencia, señalamos con las mismas letras las partes homólogas á las de la *epicicloide prolongada*; y resulta la OQR (fig. 98), que es la *epicicloide acortada*, que se pedía.

149 En lo que acabamos de manifestar, se nota la necesidad de considerar la circunferencia del círculo que engendra á la epicicloide ordinaria; y esto nos suministra el medio de poder trazar á un tiempo las tres epicicloides; esto es, la *ordinaria*, *la prolongada*, y la *acortada*. Para lo cual, no hay mas que trazar por el centro del círculo de cada punto de la *epicicloide ordinaria*, dos círculos con los radios DE y D*e* (fig. 96); y por el punto que corresponda en el de la *epicicloide ordinaria*, se tirará un radio prolongado, que cortará al círculo mayor en un punto, que será de la *epicicloide prolongada*; y al menor, le cortará este mismo radio en un punto, que pertenecerá á la *epicicloide acortada*.

Para manifestar el modo de practicar esto, nos contraerémos á la construccion de uno cualquiera de sus puntos; y para evitar confusion, supondrémos sea el que corresponde al punto 3; esto es, suponemos que el círculo generador ha llegado al punto 3, y querémos determinar donde se halla el punto B de la *epicicloide ordinaria*; el E de la *epicicloide prolongada*, y el *e* de la *epicicloide acortada*. Para esto, observarémos, que como al girar el círculo movible, describe su centro una circunferencia, tambien describen los puntos E,*e*, circunferencias concéntricas E′G, HY á la del círculo fijo, en las que se hallarán tambien las circunferencias EL, y *ef* que se trazan con los radios DE,D*e*. Resulta de esto, que si se tira por dicho punto 3 el radio CD′, y desde D′ se describen los círculos *e′f′*,E″L′ que serán iguales á los *ef*, y EL en el movible, se toma el arco 3..3′ igual con 3 partes, que corresponden tomar en él, para trazar la epicicloide ordinaria, y por él se tira el radio D′3′ hasta que encuentre al círculo mayor E′L′ en *m′*; tendrémos que el punto 3′ corresponderá á la *epicicloide ordinaria*; el *m′* á la *epicicloide prolongada*; y el *m* á la *acortada*; y haciendo igual construccion por los puntos 1,2,4 &c. se tendrán determinados los puntos de dichas curvas; y con el auxilio de las reglas acordadas, se pasará un lápiz, y quedarán trazadas las espresadas curvas.

150 Observando la figura, vemos que se halla hecha la construccion en los puntos de orígen; lo cual se ha ejecutado, á fin de hacer observar: 1.° Que en la epicicloide ordinaria, cuando el círculo gira en ambos sentidos, esto es, á derecha é izquierda del punto de orígen, las dos curvas descritas por dicho punto concurren en él; tales son las BMN y B*o*. 2.° Que en la *epicicloide prolongada*, se cruzan como en D, formando un lazo D*r*E*l*D, compuesto de las dos ramas E*l*DM′N′, y E*r*DS. 3.° Y que, en la *acortada*, forma una continuidad en el punto de orígen *e*, siendo la rama de la izquierda la *cmn*, y la de la derecha la *co′*.

151 Todo cuanto acabamos de manifestar sirve muy estraordinariamente en las artes; pues en ello se funda la construccion de los engranes, que son indispensables en casi todas las máquinas, y que enseñarémos á delinear en la seccion cuarta.

152 Tambien tiene aplicacion el tirar una tangente á la *epicicloide plana*. Sea AM (fig 99) dicha *epicicloide*; y supongamos que por el punto M, que se halla sobre el círculo movible C′, se quiere tirar una tangente. Para esto, se unirá el centro C′ del círculo movible con el C del fijo; y se prolongará hasta que encuentre á la circunferencia del círculo movible en *d*; únase el punto *d* con el M por medio de la *d*MT, y esta será la tangente pedida.

153 Cuando dos conos rectos ASB y ASC (fig. 100) tienen un mismo vértice S, y el uno de ellos CSA gira continuamente sobre la superficie del otro ASB, entónces este vértice comun es el centro de una esfera, que corta á dichos dos conos en dos círculos; y un punto cualquiera M del cono movible engendra la curva que se denomina *epicicloide esférica*, pues efectivamente se halla trazada sobre una esfera. En la (fig. 101) que ponemos al fin de la lámina 5.ª se halla la *epicicloide esférica*, originada por el movimiento de un punto del cono movible CSD al rededor del cono fijo CSZ, y es la $ixv'c''$; y su trazado lo reservamos para el párrafo (271); pues aun no tenemos los conocimientos necesarios.

CAPÍTULO IV.

Modo de construir las figuras iguales.

154 A solas dos cuestiones se puede reducir el objeto de la delineacion; á saber: *construir figuras iguales*, ó *construir figuras semejantes*; y lo que nos proponemos en este capítulo, es *construir figuras iguales*. Lo cual se puede efectuar de tres modos diferentes: 1.° *Por medio de rectas bajadas perpendicularmente á otra elegida á arbitrio*: 2.° *Por intersecciones de arcos de círculo*: 3.° *Por cuadrícula.*

155 Para manifestar el modo de construir una figura igual á otra, por el primer procedimiento, supongamos que se nos da la figura ABCDEFGH (fig. 102); y que se nos pide *construir otra igual.*

Se tirará por un ángulo cualquiera de la figura dada, que debe ser el mas saliente, una recta QR, de modo que se halle colocada en el sentido de la mayor longitud de la figura; desde los demas ángulos A,C,D,E,F,G,H, se bajarán las AQ,HL,GM,CN,FO &c., perpendiculares á dicha recta. Ahora, para trazar la otra figura igual, se tirará una recta cualquiera *qr* (fig. 103); y desde un punto tal como *q*, se tomará una parte *qb* igual con QB de la (fig. 102); á continuacion, se tomará otra parte *bl* igual con BL; del mismo modo se tomarán las *lm* igual á LM; *mn* igual á MN; *no* igual á NO; *op* igual á OP; y *pr* igual á PR; por todos estos puntos *q,l,m* &c. se levantarán perpendiculares, con la circunstancia de ser iguales en longitud y posicion á cada una de las perpendiculares tiradas en la figura dada; esto es, $aq = AQ$; $hl = HL$ &c.; despues, se unen los puntos *a* y *b*; los *b* y *c*; los *c* y *d*; los *d* y *e*; los *e* y *f*; los *f* y *g*; los *g* y *h*; los *h* y *a*; con lo cual queda trazada una figura *abcdefgha* enteramente igual á la dada.

156 Si la figura no fuese rectilínea, tal como la LORTVZXUSQPMYNJ (fig. 104), se bajarán perpendiculares desde los puntos entrantes y salientes á una recta, tirada de un modo cualquiera, como es la AB; advirtiendo, que es mas breve y seguro bajar estas perpendiculares, de modo que convengan á dos ó mas puntos; pues en este caso, con una sola línea podemos determinar dos, ó mas; cuando de otro modo serían necesarias tantas líneas como puntos, segun se observa en ls figura.

Bajadas ya las perpendiculares, se tirará, como en el ejemplo anterior, la *ab* (fig. 105), y se trazarán del mismo modo las *lc,od,ep*, &c., y determinados, ó lo que es lo mismo, bien marcados los puntos mas entrantes y salientes de las sinuosidades, se señalan las partes curvas, bien sea á mano, ó haciendo uso de las reglas acordadas.

157 Pasemos á manifestar el segundo procedimiento.

Sea dado el polígono irregular ABCDEFGHA (fig. 106); *y supongamos que se pide construir otro igual.*

Tirarémos las diagonales AC,AD,AE,AF,AG y BH; luego, se tira (fig. 107) una recta ab=AB.; se toma la distancia AH como radio, y haciendo centro en *a*, se traza un arco *op;* en seguida se hace centro en *b*, y con la diagonal BH, se traza otro arco *mn*, que cortará al anterior en un punto *h;* se unirá el punto *h* con el *a;* y se tendrá que el lado ha=HA. Se vuelve despues á hacer centro en *a*; y con la diagonal AC como radio se traza un arco. Despues, se toma el lado BC; y haciendo centro en *b*, se trazará otro arco que cortará al anterior en el punto *c*; se unirá este punto *c* con el *b;* y la línea *cb* será otro lado. Se vuelve despues á hacer centro en *a;* y con la distancia AD, se practica lo mismo que en el caso anterior. Luego, se hace centro en *c*, y con un radio igual á DC, se trazará un arco que cortará al anterior en *d;* se une el punto *d* con el *c*, y quedará trazado el lado *dc;* y continuando del mismo modo, se tendrá lo que nos proponíamos.

158 El tercer método solo se empléa para la copia de figuras, que no se compongan de líneas rectas; y principalmente para medallas, paisages y adornos; pues en los demas casos es preferible, y tambien mas exacto, el primer procedimiento.

Supongamos que queremos copiar el busto representado en la (fig. 108). Se tiran de un modo cualquiera una porcion de líneas paralelas equidistantes; y luego, otra porcion de líneas paralelas, y que disten entre sí, lo mismo que las anteriores, y que corten á las primeras en ángulos rectos; con lo cual, queda formada una serie de cuadrados iguales, que se llama *cuadrícula.* Hecho esto, se numera, para mayor comodidad, segun marca la figura; luego, se construye en el parage donde quiera copiarse el objeto, una cuadrícula igual á la construida sobre el original; y se va viendo en que puntos de la cuadrícula del original se hallan las partes del objeto que queremos copiar; y se hacen otras iguales en la copia.

159 Del mismo modo se operaría, si se quisiera copiar un paisage ó cuadro, como el que representa la (fig. 109).

CAPÍTULO V.

Construccion de figuras semejantes.

160 Los mismos tres métodos pueden ponerse en práctica para la *construccion de figuras semejantes*, que los empleados (154) para la construccion de figuras iguales.

Supongamos que queremos construir una figura semejante á la (fig. 104).

Para esto, es necesario determinar de antemano la escala, segun el tamaño que queremos tenga la que debemos construir. Supongamos que la escala (fig. 110) es la de la figura dada; lo que ante todas cosas necesitamos ejecutar, es formar la escala á que debe referirse la de la figura semejante que tratamos de construir. Supongamos que la escala, que representa la (fig. 111), sea la de la espresada nueva figura; en la cual cada parte tiene con la de la escala (fig. 110) *la relacion de tres á cuatro.*

Construida la escala, se sigue el mismo procedimiento (155) que hemos establecido para el caso en que queremos construir una figura igual á otra dada; esto es, bajaríamos las perpendiculares CL, DO, EP &c. desde los puntos mas notables, como se ve en la (fig. 104); luego, se tira una línea $a'b'$ (fig. 112); y se toma en la escala (fig. 111) una parte $c'd'$ que contenga las mismas partes que la CD tiene de la escala (fig. 110), que aquí son 7 partes; á continuacion, la $d'e'$ igual con las partes que á DE corresponden en su escala, que aquí son 5 partes y un cuarto; luego, la $e'f'$, y así las demas; se levantarán por c', d', e', &c. las perpendiculares indefinidas $c'l'$, $d'o'$, &c.; se tomará luego en $c'i'$, por medio de la escala (fig. 111), una parte $c'y'$ igual á las partes que CY tiene en la escala (fig. 110), que aquí son 12; á continuacion la $i'j'$, que contenga tantas partes de la escala (fig. 111) como partes tiene la YJ en la de la (fig. 110), que son $15^1/_2$; despues, se hace lo mismo con la parte $j'l'$: con lo cual tendrémos determinados los puntos y', j', l'. Continuaríamos despues del mismo modo determinando las distancias $d'm'$, $m'n'$, $n'o'$ como hemos hecho con las anteriores; y ya estarán determinados los puntos m', n', o'; y haciendo lo mismo con los demas, señalaríamos á mano, ó con las reglas *curvilíneas* ó *acordadas* las mismas sinuosidades por todos los puntos determinados, y tendríamos construida una figura semejante á la propuesta (*).

161 Vamos á *construir, dado el polígono irregular* ABCDEFGH (fig. 106), *otro semejante con arreglo á la escala* (fig. 111).

Tirarémos la línea $a'b'$ (fig. 113) de 26 partes y media, que tiene la línea AB en la escala (fig. 110); y tomadas estas partes en la escala (fig. 111), se hará centro luego en b', y con una distancia $b'h'$ de $39^1/_2$ partes, que tiene la BH en la escala (fig. 110), se trazará un arco; y haciendo centro en a', se trazará otro arco, que tenga por radio 20 partes y $^3/_4$, que son las que tiene el lado AH de la escala (fig. 110); y el punto h' donde se cortan los dos arcos trazados, será otro vértice de los ángulos del polígono; luego, se hará centro en a'; y tomando por radio una distancia de $28^1/_2$ partes, que son las que tiene la AG en la escala (fig. 110) se traza un arco; y luego, haciendo centro en h', se trazará otro arco, cuyo radio

(*) Esta operacion se simplifica, usando de un compas, que se llama *de proporcion;* pero, como es muy difícil que estos salgan exactos, y por otra parte, los principiantes tardan mucho en saberlos manejar bien, es preferible el método del texto.

sea de 20 partes y $^3/_4$, que son las que tiene el lado HG en la escala (fig. 110); y se tendrá determinado otro punto g' del polígono; y continuando del mismo modo hasta construir todos sus ángulos, queda concluida la figura $a'b'c'd'e'f'g'h'a'$; que será un polígono semejante al dado.

162 Últimamente, tambien por medio de la cuadrícula se construyen figuras semejantes; para lo cual, supongamos que se nos da el busto (fig. 108) para que hagamos otro semejante (fig. 114), que al mismo tiempo supondrémos sea mas pequeño.

Construida la cuadrícula en el busto dado, se pasa á la construccion de la que ha de servir para la de la figura semejante de la magnitud que se quiera; se numeran ambas homólogamente, y se procede del mismo modo que hemos dicho, cuando queríamos sacar una copia igual, haciendo que cada punto de la figura del busto, caiga en su respectivo cuadrado, guardando la misma posicion.

163 Si fuese un paisage ó cuadro (fig. 109); se procedería del mismo modo, y se obtendría la (fig 115) semejante á la dada.

164 Los tres métodos, que se acaban de espresar, son los que se empléan generalmente; y por lo acabado de manifestar, se ve que toda la dificultad para construir figuras semejantes, está reducida á encontrar la magnitud, que ha de tener la escala. Sobre este punto, se debe fijar mucho la consideracion; pues se suelen cometer grandes errores en la práctica.

165 En efecto, cuando á un dibujante se le dice que haga una figura doble de otra, lo suele ejecutar, dando á la nueva, dimensiones dobles de las de la figura propuesta; y entónces ejecuta una figura que *ocupa una superficie cuatro veces mayor que la dada ó propuesta;* porque las superficies semejantes guardan *la relacion de los cuadrados de las líneas ó lados homólogos.* Si se les dijese, por ejemplo, que hagan una figura reducida al tercio de la superficie

que ocupa otra, es bastante frecuente el dar á sus líneas la tercera parte de las de la figura propuesta; y en este caso, resulta una figura que ocupa una superficie nueve veces menor que la dada; por la misma causa de que, siendo las superficies como los cuadrados de los lados homólogos, estarán en la razon $(^1/_3)^2 : (1)^2$, que es la de $1/_9 : 1$, ó de 1 á 9.

Para evitar estas equivocaciones, vamos á proponer otro método, que reune por otra parte la circunstancia de ser mas general y sencillo.

Al dibujante se le ha de dar la relacion que deba tener la figura, que se haga, con la que se le da conocida. Y si no se le exige que tenga relacion determinada, él ante todas cosas debe proponérsela, fijàndose en las condiciones que le han dado, en la magnitud del papel en que la ha de dibujar, para que ni falte ni sobre espacio, y demas circunstancias, como son las de que todas las partes resulten bien distintas, marcadas &c., &c.

Determinada ya la relacion, que han de tener estas figuras, se espresará dicha relacion por dos líneas; como por ejemplo la M y N (fig. 116), y si la relacion se le diese en números, tomaría en una escala cualquiera dos magnitudes M y N que espresasen dicha relacion.

166 Entendido esto, se ponen dichas dos líneas, una á continuacion de otra, por ejemplo AB (fig. 117) igual con N; y BC igual con M. Sobre toda la línea AC, se trazará una semicircunferencia ADC; por B se levantará una perpendicular BD; y desde el punto D, en que corte á la semicircunferencia, y por los estremos A y C del diámetro, se tirarán dos rectas indefinidas DV, DZ; y las partes homólogas de estas líneas servirán de escala, una para la figura propuesta, y otra para la que se busca; no habiendo que practicar para construir la nueva figura, mas que lo siguiente.

Si la figura que se ha de formar, ha de ser mayor que la propuesta, que suponemos ser la *abcdef* (fig. 118), la linea mas corta DC prolongada, será la que corresponda servir de escala á la figura dada; y la DA prolongada á la que se trata de construir. En este caso se toma en DZ una parte cualquiera Db' igual con ab; por b' se tira una paralela $b'b''$ á la AC; y la parte Db'' que corte en la DV, espresará el lado $a'''b'''$ de la nueva (fig. 119). Despues, tomarémos en la DZ una parte Dc' igual con bc; por c', se tirará la $c'c''$ paralela con AC; y cortará en la DV una parte Dc'' que será el lado $b'''c'''$, que corresponde en la nueva figura al lado bc de la propuesta (fig. 118).

En seguida, tomaríamos la diagonal ac de la figura propuesta, y señalaríamos en la DZ una parte Dc^{IV} igual con ac; por c^{IV} tiraríamos una paralela $c^{IV}c^{V}$ al diámetro AC; y la parte Dc^{V} que cortase en la DV, será la diagonal $a'''c'''$ de la nueva figura. Teniendo ya trazada la $a'''b'''$; y conocidas las $b'''c'''$ y $a'''c'''$, queda fijado el punto c''' sin mas que trazar desde a''' un arco con la diagonal Dc^{V} por radio; y haciendo centro en b''' y con un radio igual con Dc'', se trazará otro arco que cortará al anterior en un punto que será el c'''. Procediendo del mismo modo, se fijarán todos los puntos notables de la figura, y quedará esta construida con arreglo á las condiciones que se nos daban (*).

(*) Como este procedimiento no es bastante conocido, no será inoportuno el que demostremos, que, operando de este modo, se obtiene la figura que guarde la relacion espresada con la propuesta. Con este objeto recordarémos que *las superficies de las figuras semejantes guardan la relacion de los cuadrados de las lineas homólogas*. Luego se tendrá que $abcdef$ (fig. 118): $a'''b'''c'''d'''e'''f'''$ (fig. 119) :: $(ab)^2 : (a'''b''')^2$. (a)

Pero, en virtud de que la paralela á la base en un triángulo, divide (§ 55..2.ª G. de N.), sus lados en partes proporcionales, tendrémos $Db' : Db'' :: DC : DA$.

Pero $Db'=ab$, y $Db''=a'''b'''$; luego si sustituimos estos valores en la proporcion anterior, tendrémos $ab : a'''b''' :: DC : DA$.

En la práctica, este método es sumamente sencillo, haciendo uso del cartabon, para tirar las paralelas (72).

SECCION TERCERA.

DELINEACION DE LOS CUERPOS Ó VOLÚMENES, Y MÉTODO GENERAL PARA FORMAR EL DISEÑO DE CUALQUIER OBJETO.

CAPÍTULO PRIMERO.

Indicaciones acerca del modo con que vemos los cuerpos, ó cómo se adquiere la idéa del tamaño, forma y dimension de los objetos por el sentido de la vista.

167 Cuando miramos un objeto cualquiera, lo

Elevando al cuadrado todos los términos de esta proporcion, resulta $(ab)^2 : (a'''b''')^2 :: DC : DA^2$ (b).

Y como, en virtud de lo espuesto (§ 55..22ª..2ª y 3.ª G. de N.), las DC y DA son cuerdas tiradas por los estremos de un diámetro, resulta que sus cuadrados guardan la misma relacion que los segmentos que en el diámetro causa la perpendicular bajada desde el punto de concurso de dichas cuerdas; luego se tendrá

$$DC^2 : DA^2 :: BC : BA \ (c).$$

Esta proporcion y la (b) tienen comun la razon $DC^2 : DA^2$; luego con las otras dos podrémos formar proporcion, y será $(ab)^2 : (a'''b''')^2 :: BC : BA$ (d).

Esta proporcion, y la (a) tienen comun la razon $(ab)^2 : (a'''b''')^2$; y por lo mismo podrémos formar proporcion con las otras dos y tendrémos

$abcdef$ (fig. 118) : $a'''b'''c'''d'''e'''f'''$ (fig. 119) :: BC : BA; pero BC = M y AB = N; luego, sustituyendo estos valores en la proporcion anterior, se nos convertirá en

$abcdef$ (fig. 118) : $a'''b'''c'''d'''e'''f'''$ (fig. 119) :: M : N.

Luego queda demostrada la exactitud de este importante procedimiento (Nota del Editor).

vemos de diferentes maneras, segun la posicion en que nos hallemos respecto de él. Fijemos la consideracion, por ejemplo, en una mesa; y supongamos que esta sea de las que mas comunmente se presentan en todas partes, como en las casas particulares, cafés &c., constando solo de cuatro pies, de la armadura con cajon, y su tablero ó tapa. Si el observador es mas alto que la mesa, y estando próximo á ella, dirije su vista por la parte superior de la espresada mesa, entónces solo ve el tablero; si se coloca en frente de la mesa, á una distancia cualquiera, y de tal modo que fije su ojo precisamente en medio del tirador del cajon, solo verá la cara de este, la parte de armadura donde descansa el espresado cajon, y dos pies; pues los otros dos los ocultan los primeros. Si el observador se colocase, de tal suerte que su ojo estuviese en el medio de la armadura de uno de los costados, entónces vería el canto mas pequeño de la mesa, la armadura de dicho costado y dos pies; y si se coloca en otras diversas posiciones, en cada una la verá de diversa forma. Este modo de ver los objetos constituye lo que se denomina *vista en real* de los cuerpos.

Si nos colocamos en la prolongacion de la recta, que pase por la parte superior de uno de los pies, y por la mitad del lado mayor del tablero opuesto al parage donde nos colocamos, se nota ú observa lo siguiente. Si nos ponemos á una distancia igual con la altura de la mesa, dirigiendo la vista al parage donde está, entónces vemos todo el tablero, tres pies, dos armaduras contiguas y el cajon; y si nos separamos una distancia mayor que la altura de la mesa, alcanzamos tambien á ver parte del cuarto pie; y conforme nos vamos poniendo á mayor distancia, pero en la misma línea, vamos viendo mayor parte del cuarto pie, apareciendo toda la mesa disminuida á nuestra vista; y á proporcion que la distancia sea mayor, llega el caso de que se confunden todos los puntos y no se ve la mesa.

168 Por manera, que, cualquiera que sea la po-

sicion que elijamos en la naturaleza, no podemos ver de una sola vez todo un objeto; pero el saber humano ha conseguido, auxiliado de las Matemáticas, espresar por medio del diseño un objeto cualquiera, en que se ve todo él de un solo golpe de vista; por lo que, se deduce: que *el arte, fundado en la ciencia, supera á la naturaleza*. Es de la mayor importancia el fijar la consideracion en esto, que acabamos de manifestar; y así, conviene que los discípulos principien este capítulo, colocándose delante de una mesa en las diversas posiciones que acabamos de espresar, y que por este medio se convenzan real y positivamente, de que, en ningun parage que se coloquen, pueden ver al mismo tiempo toda la mesa.

169 Cuando ya estén convencidos de esto, tomarán otro cuerpo ú objeto cualquiera, por ejemplo un pan; y observarán, que cuando el pan está en su postura natural sobre una mesa, que es como estaba en el horno, entónces no vemos la parte contigua al suelo; y si se toma en la mano, para ver la parte que estaba en contacto con la mesa ó con el suelo del horno, entónces no vemos la parte que veíamos cuando estaba sobre la mesa. Del mismo modo, tomando otro cuerpo ú objeto cualquiera, notarán que nunca pueden verlo al mismo tiempo por todos sus lados; sinó que se necesita darle vuelta si es movible; ó volverse el sugeto, para colocarse en diversas posiciones, si es inmóvil ó está fijo. Resulta, pues, de todo lo que acabamos de manifestar, que, *por los procedimientos naturales no podemos jamas ver de una vez ningun cuerpo, á no ser trasparente*. Pero, por medio de los principios de la delineacion, que vamos á manifestar, *se consigue de una mirada ver todas las partes de los cuerpos, como si fuesen trasparentes*. Luego, *no podemos ménos de concebir la mas respetuosa admiracion hácia los que han encontrado métodos tan portentosos, que superan á los medios naturales*.

170 Previas estas indicaciones, volvamos á ocu-

parnos de los diferentes modos con que se nos presenta la mesa. Si nos colocamos en un balcon, y miramos á la mesa que esté en la calle por ejemplo, entónces no vemos absolutamente mas que la parte superior de su tablero. Pero, en la (fig. 120), que está construida en este mismo supuesto, vemos no solo la parte superior del tablero ABCD, sinó que tambien vemos señalada la colocacion y número de sus pies, que son cuatro, y se espresan con los números 1, 2, 3, y 4. En los 1 y 2 señalamos con puntos el grueso superior de los pies; y como estos son pirámides truncadas, el grueso de la parte inferior es menor; por lo que en los pies números 3 y 4, el cuadrado interior de puntos espresa el grueso del pie en la parte inferior.

Vemos tambien en dicha figura, la armadura de la mesa, que la representamos por el rectángulo de puntos *mmmm*, espresándose el grueso por las dos líneas paralelas. Tambien se ve la magnitud del cajon, el grueso de sus tablas y el tirador; de modo, que por medio del arte, formamos de una sola mirada, una idéa mas completa que la que podíamos adquirir en la naturaleza. Por lo que, la (fig. 120) nos presenta mas de lo que vemos al mirar el objeto. Pero ella, por sí sola, no basta para representar todo el objeto; pues nos falta determinar todavía la longitud de los pies, el alto de la armadura y el del cajon.

171 Si nos colocamos en frente del tirador del cajon de la mesa, entónces la vemos en los términos que espresa la (fig. 121); en la cual, no se ve mas que en la naturaleza; pero ya vemos lo que nos faltaba en la figura anterior, como es la longitud de los pies, el alto de la armadura, y el del cajon. Mas, si nos colocamos en frente de un costado, la vemos como representa la (fig. 122), que ya en este caso se puede señalar la magnitud del cajon en el sentido de su profundidad, y se percibe tambien mas que en la naturaleza, que solo se verían los dos pies y la armadura.

172 Pero, si nos situamos del modo que hemos dicho (167), y cuya posicion se halla representada en la (fig. 123), entónces por medio del dibujo, se distingue completamente el objeto; pues la parte del cuarto pie E, que no se veía en la naturaleza, se halla representada por puntos; tambien se ve representada por puntos la situacion del cajon; viendo su fondo y demas partes: lo mismo sucede con el parage donde los pies se unen al tablero. Tambien se distinguen las armaduras, los costados, y su grueso; de modo, que en dicha (fig. 123) vemos todas las partes de la mesa, como si ella fuese trasparente; cosa que no podemos ejecutar de una vez con la vista natural; luego, queda completamente demostrado, que *las artes fundadas en las ciencias, suministran medios para superar á la naturaleza.*

173 Segun los modos de representar los cuerpos ú objetos, reciben diferentes nombres; así, cuando se ve un objeto como en la (fig. 120), entónces se dice que se presenta á *vista de pájaro;* porque los pájaros, cuando vuelan, ven de este modo los objetos terrestres. Si se representan como en la (fig. 121), se dice que el objeto *se ve de frente;* y si, como en la (fig. 122), entónces se dice que se halla *vista de costado;* y finalmente, cuando se presenta del modo que espresa la (fig. 123), se dice que está puesta *en perspectiva;* en cuyo caso se ven todas sus partes, como si fuese la mesa trasparente.

174 Hemos observado, que poniendo un objeto en perspectiva, se consigue verle de un solo golpe de vista con todas sus partes; luego, para ver los objetos, ó formar idéa de ellos, es mas conveniente ponerlos en perspectiva. Mas la perspectiva no da una idéa exacta de la forma del objeto y de sus partes; pues los ángulos del tablero y del cajon, que en la mesa todos son rectos, en el dibujo en perspectiva (fig. 123) no lo son, apareciendo unos agudos, y otros obtusos; los pies de la mesa, que son perpendiculares al tablero, aparecen oblícuos &c.; y así, para

formar la verdadera y exacta idéa, necesitamos representarlos *en real*, como se consigue por medio de las tres (figs. 120, 121, y 122); pues en la perspectiva no puede juzgarse de su exacta magnitud como en el real, á causa de que el tamaño de la figura en perspectiva, depende de la mayor ó menor distancia del punto de vista al objeto. Ademas, por el diseño en real puede pasarse á la construccion material del objeto con la mayor sencillez, cuando por la perspectiva solo podría conseguirse con muchísima complicacion; por lo cual se han ideado para la representacion en real, á que se llama *diseño geométrico*, medios sencillos, pero fundados en la ciencia de las Matemáticas, y que vamos á dar á conocer en los capítulos siguientes.

CAPÍTULO II.

Teoria de las proyecciones, y medios de representar en un plano una superficie cualquiera.

175 Uno de los ramos de las Matemáticas mas interesante, y fecundo en todo género de aplicaciones, es el que se ha caracterizado en estos últimos tiempos, con el nombre de *Geometria Descriptiva*; cuyo objeto es la representacion en un plano de todos los cuerpos del universo. Mas, como todo cuerpo (§ 2 G. de N.) consta de tres dimensiones, á saber; *longitud*, *latitud*, y *profundidad* ó *grueso*, debemos formar desde luego una idéa muy sublime de este ramo de las Matemáticas; pues no teniendo un plano mas de dos dimensiones, cuales son *longitud* y *latitud*, es una prueba del poderoso influjo de la inteligencia humana el representar, en un solo plano, las tres dimensiones, no solo de un cuerpo, sinó de muchos á la vez, que pueden tener posiciones muy diferentes y cruzarse de muchas maneras.

176 La *Geometria Descriptiva* comprende en toda su estension el *dibujo lineal ó delineacion*; y por.

lo mismo debemos esponer ahora el principio fecundo, que sirve de base á dicha ciencia, que es la doctrina de las *proyecciones;* y despues deducirémos las reglas que han de conducirnos al objeto que nos proponemos.

177 Se llama, en general, *proyeccion de un punto* sobre un plano dado, al parage en que le encuentra una línea tirada de un modo determinado, por dicho punto al espresado plano. Si la línea que se tira por el mencionado punto, es perpendicular al plano, la proyeccion se llama *ortogonal*; y si es *oblicua* al plano, la proyeccion se llama *oblicua*. En lo que vamos á manifestar solo necesitamos considerar la primera; y así dirémos, que *se llama proyeccion ortogonal de un punto, al pie de la perpendicular tirada desde dicho punto á un plano;* y la perpendicular recibe en este caso el nombre de *recta ó línea proyectante*. En general, se omite la palabra *ortogonal* para simplificar el lenguage; porque son las proyecciones de que se hace mas uso; y cuando no, se espresa que es *proyeccion oblicua.*

Por lo que, si desde el punto A (fig. 124) bajamos una perpendicular al plano PQ, el pie B de dicha perpendicular es la *proyeccion ortogonal* del punto A; y la línea AB es la *recta proyectante;* luego, *para proyectar perpendicular ú ortogonalmente un punto en un plano, bastará tirar desde dicho punto una perpendicular al espresado plano.*

178 Como dos puntos bastan para determinar la posicion de una recta, resulta que tambien serán suficientes las proyecciones de dos de sus puntos para obtener la proyeccion de una recta; luego, si tratásemos de proyectar la AB (fig. 125) en un plano PQ, proyectando dos puntos cualesquiera, tales como los A y B; ó lo que es lo mismo, bajando las perpendiculares A*a* y B*b*, y uniendo el punto *a* con el *b*, la recta *ab* será la proyeccion de AB.

179 Si la línea dada hubiera sido una curva, tal como la ABCDE (fig. 126), proyectaríamos los pun-

tos entrantes y salientes de ella, tales como los A,B,C,D,E, cuyas proyecciones son *a,b,c,d,e;* y pasando por ellos un lápiz, de modo que no forme garrotes, ni ángulos, la curva *abcde* será la proyeccion de la curva dada.

180 La proyeccion de una línea recta varía segun la posicion que ella tenga respecto del plano sobre que se proyecta. Así es (§ 78 G. de N.), que si la recta AB (fig. 127) fuese perpendicular al plano PQ, su proyeccion sería un punto C; porque todas las perpendiculares que se tirasen desde todos los puntos de la AB al plano PQ, se confundirían en una sola, y encontrarían al plano solo en el punto C. *Si la recta* AB (fig. 128) *fuese paralela al plano* PQ, su proyeccion *ab* será una línea recta paralela con la misma AB é igual en longitud con ella; de donde resulta, que *cualquiera que sea la posicion de una recta con relacion á un plano, su proyeccion sobre este plano, podrá variar desde un punto, esto es, no tener ninguna longitud, ó lo que es lo mismo, tener* CERO *de longitud, hasta llegar á ser la proyeccion igual en longitud con la misma recta.*

Todo esto lo podemos hacer sensible por medio de la (fig. 129). En efecto, cuando la AB tiene la posicion vertical, su proyeccion es el punto C. Si suponemos ahora, que la AB gira al rededor del punto B, trazando una vuelta completa, resultará que, cuando el punto A llegue á A′, la proyeccion de la BA′, que es igual con la BA, estará representada por CC′. Cuando la BA llegue á tener la posicion BA″, que señalamos paralela al plano PQ, la proyeccíon CC″ es igual con la misma BA″ que es igual con BA. Cuando la BA llegue á caer por la parte inferior de la BA″, su proyeccion será menor que la CC″, en términos que cuando llegue á tener la posicion de BA‴ que señalamos el punto A‴ en la direccion de la A′C′ para que la figura no resulte tan confusa, la proyeccion de la BA‴ será la CC′, que es la misma que la de BA′. Cuando la BA llegue á la posicion BA^{IV}, entónces su proyeccion se reduce al solo punto C, siendo dicho punto C, la proyeccion no solo de la BA, sinó tambien de la BA^{iv}.

Cuando la BA llegue á tomar la posicion de BA^{v}, la proyeccion será la CC'''.

Cuando la BA llegue á tomar la posicion $BA^{v'}$, su proyeccion será la CC'^{v}, igual con la $BA^{v'}$.

Cuando la BA llegue á tener la posicion de $BA^{v''}$, hallándose el punto $A^{v''}$ en la prolongacion de $A^{v}C'''$ para menor confusion, la proyeccion de la $BA^{v''}$ será la CC'''.

Y finalmente, llegando la $BA^{v''}$, en su movimiento á volver á tomar la posicion primitiva BA, resulta otra vez, que la proyeccion se reducirá al solo punto C.

181 Acabamos de ver, que el punto C es la proyeccion no solo de la recta BA, sinó tambien de la BA'^{v}; y debemos añadir, que *el mismo punto* C, *es la proyeccion de toda la recta* BA *prolongada indefinidamente tanto por un lado como por otro; y por debajo del mismo plano* PQ; *y el mismo punto* C *es la proyeccion de cualquiera de los puntos de la mencionada recta* BA *prolongada indefinidamente, tanto por arriba como por abajo, aunque sea por la parte inferior de dicho plano.*

182 Tambien acabamos de ver, que tanto la BA' como la BA''' tienen por proyeccion á la CC'; y tambien resulta que CC' es la proyeccion de todas las rectas, que tuviesen sus estremos en la recta ABA'^{v} prolongada indefinidamente por ambos estremos, y aun por la parte inferior del plano PQ, y la recta $A'C'$ indefinidamente prolongada. De donde inferimos, *que una misma proyeccion corresponde á un número indefinido de rectas, que tuviesen sus estremos en las perpendiculares tiradas al plano* PQ, *por los puntos* C *y* C', *prolongadas indefinidamente en ambos sentidos.*

183 Esto, que acabamos de manifestar, se puede hacer sensible del modo siguiente. Supongamos que

AB (fig. 130) sea paralela al plano PQ; sabemos que su proyeccion *ab* es igual y paralela con la AB; pues ahora, lo que nos proponemos hacer ver, es que la *ab* es no solo la proyeccion de la AB, sinó que lo es de otra infinidad de rectas que se diferencian mucho de la AB tanto en posicion como en magnitud. En efecto, si suponemos prolongadas las A*a* y B*b* indefinidamente por ambos lados, todas las rectas que señalamos por *mn*, cualquiera que sea su posicion, con tal que terminen en las A*a* y B*b* indefinidamente prolongadas, tendrán por proyeccion á la recta *ab*.

184 De todo lo que acabamos de esponer, resulta que, *un punto no puede tener mas de una proyeccion sobre un plano; pero que esta proyeccion corresponde á infinitos puntos*. Y que *una recta no tiene mas de una proyeccion sobre un plano, pero que, esta misma proyeccion puede corresponder á infinitas líneas rectas*.

Por lo cual se deduce, que *para fijar la posicion de un punto en el espacio, no basta referirlo y tener su proyeccion en un plano*; *pero si se proyecta este punto con relacion á dos planos, y se tienen las dos proyecciones que causa un punto, una en cada plano, entónces se tiene ya fija en el espacio la posicion de dicho punto, y no corresponde á ningun otro, como vamos á manifestar*,

185 Los dos planos sobre que podemos proyectar el punto para fijar su posicion, pueden tener una inclinacion cualquiera; mas para mayor sencillez y claridad, se supone que dichos planos sean perpendiculares entre sí; y ademas que el uno sea horizontal, y el otro vertical (106 nota).

Si los suponemos representados por ABCD y ABEF (fig. 131), y suponemos que el punto dado sea el P, bajando desde él una perpendicular PP′ al plano ABCD, resulta que P′ será la proyeccion de P en el espresado plano. Y tirando desde P una perpendicular PP″ al plano ABEF, tendrémos que P″ será la proyeccion de P sobre dicho plano. Y lo que ahora nos proponemos hacer ver, es, que determinadas las dos proyecciones P′ y P″, ya estas no corresponden mas que á un solo punto P del espacio.

En efecto, si por P′ levantamos una perpendicular P′P indefinida, resulta que el punto P se hallará en esta recta. Si en el punto P″ concebimos una perpendicular P″P, indefinidamente prolongada, al plano ABEF, el punto P se hallará tambien en esta recta P″P; y como dos rectas solo pueden encontrarse en un punto (§ 9..4ª. G. de N.), resulta que el punto de interseccion de estas dos rectas, será el punto P que se deseaba. Luego quedamos convencidos de que, *dadas dos proyecciones de un punto, una en cada plano, queda determinado el espresado punto, de modo que no pueda corresponder á ningun otro del espacio.*

Lo mismo sucede con las líneas, superficies y volúmenes.

186 Así como las perpendiculares que determinan las proyecciones, tienen un nombre particular, que es el de *proyectantes*, tambien lo tienen los planos que sirven para el mismo efecto. El plano ABCD, que suponemos horizontal, recibe el nombre de *plano de proyeccion horizontal*; el ABEF *plano de proyeccion vertical;* y la línea AB donde se cortan, *comun interseccion ó linea de tierra*; y á los dos juntos *planos de proyeccion*; pero á fin de simplificar, se nombran simplemente, al ABCD, *plano horizontal;* al ABEF, *plano vertical; é interseccion*, á la AB.

187 Si por las proyecciones P′,P″, tiramos perpendiculares á la interseccion AB, ellas se cortarán en P‴; y formarán un rectángulo PP′P‴P″ en que P′P‴ será igual á PP″, y por consiguiente (§ 77..7.ª G. de N.) medirá la distancia á que dicho punto P está del plano vertical; y la P″P‴ medirá la distancia á que dicho punto P está del plano horizontal.

Para que estos planos puedan contener las proyecciones de todos los puntos del espacio, se conciben indefinidamente prolongadas por ambos lados de la línea de interseccion, como representa la (fig. 132). Cuando el punto propuesto es el P, que se halla en el ángulo de los dos planos ABCD, ABEF, sus proyecciones son los puntos m y n; y las líneas proyectantes las Pm y Pn. Cuando el punto se halla en P' dentro del ángulo que forma el plano ABCD con el ABLY, que es la prolongacion de ABEF, entónces las proyecciones son, sobre el ABCD el punto m'; y sobre el ABLY el punto n'; y las líneas proyectantes son en este caso las $P'm'$ y $P'n'$.

Cuando el punto se halla en P'', esto es, dentro del ángulo formado por el plano ABEF y el ABGH, que es prolongacion del ABCD, entónces las proyecciones son las m'' y n''; y las líneas proyectantes, las $P''m''$ y $P''n''$.

Cuando el punto se hálla en P''', esto es; dentro del ángulo formado por los planos ABGH y ABLY, que son las prolongaciones de los ABCD y ABEF, entónces, las proyecciones son m''',n'''; y las líneas proyectantes, las $P'''m'''$ y $P'''n'''$.

Y como *estos planos, indefinidamente prolongados, abrazan todo el espacio*, *resulta que nos pueden servir para fijar todos los puntos y cuerpos que en él se encuentran sin escepcion alguna.*

188 Conviene que los principiantes se acostumbren á formar idéa de todo esto que hemos manifestado respecto de la (fig. 132); porqué de este modo, sus facultades intelectuales se desarrollarán convenientemente para formar las verdaderas idéas de los cuerpos en el espacio,

Nosotros tratamos de que se haga un modelo en que los planos sean de cristal, y las líneas de alambre, á fin de que todo se perciba intuitivamente. Pero, sea con el auxilio de este modelo, ó sea que poniéndose los mismos discípulos ó Profesor delante de dos planos que se crucen, y coloquen un punto en cada ángulo, ó que por sí mismo, á fuerza de meditacion, el discípulo se forme una verdadera idéa de lo que representa dicha figura, este discípulo se puede lisongear ya de que en lo sucesivo verá en el espacio cuanto se le represente en el papel.

189 Previa esta indicacion, debemos advertir que en lo que vamos á manifestar, no necesitarémos de ningun modo considerar la prolongacion de estos planos; pues como su eleccion es arbitraria, podemos siempre colocarlos de modo, que los objetos que querémos representar, se hallen en el ángulo que forman.

190 Tenemos ya fijado el punto P (fig. 131) con relacion á los dos planos ABCD y ABEF; pero la ciencia simplifica mas, y es que en un solo plano podemos señalar las dos proyeciones; lo cual se consigue con suma facilidad por medio de la siguiente consideracion. Si concebimos indefinidamente prolongado el plano ABCD (fig. 131), y que el plano ABEF gira sobre la interseccion AB, de manera que venga á confundirse con dicha prolongacion, entónces quedará formado un solo plano CD*fe*; y notarémos, que en virtud del movimiento giratorio, al llegar á superponerse el plano ABEF, sobre la prolongacion del plano ABCD, la proyeccion P′ del punto P ha permanecido la misma, mientras que la proyeccion vertical P″ ha girado tambien con el plano vertical, y tomado una posicion p'', resultando que ambas proyecciones las tenemos ya en un solo plano; y colocadas sobre una línea perpendicular á la interseccion; y de este modo queda fijado ya el punto P con relacion á dicho plano.

Efectivamente, sabemos que la distancia P′P‴, que mide la que hay desde el punto dado al plano vertical, ha permanecido inmóvil, mientras que la P″P‴, que mide la que hay al plano horizontal, ha girado al rededor de la interseccion; luego habrá descrito un cuadrante de círculo; y como en el círculo los radios son iguales, la línea P‴p'' será igual á la P‴P″; lo cual nos manifiesta lo mismo que acabamos de enunciar.

191 Pasemos á demostrar, que *estas proyecciones deben corresponderse*, ó lo que es lo mismo, que *deben hallarse en una misma recta perpendicular á la interseccion*. Como las dos rectas proyectantes PP′, PP″

tienen comun el punto P, resulta (§ 77..2.ª G. de N.) que se hallan en un mismo plano; que es al mismo tiempo perpendicular (§ 77..23.ª G. de N.) á los planos de proyeccion ABCD y ABEF; siendo la interseccion de dicho plano de las proyectantes con el ABCD, la $P'P'''$; y con el ABEF la $P''P'''$; y verificándose que $P'P'''$ es perpendicular á AB en el plano ABCD, y $P''P'''$ perpendicular tambien á la AB en el plano ABEF, estas dos rectas $P'P'''$, $P''P'''$ tendrán comun el punto P'''; y por consiguiente las $P''P'''$ y $P'''P'$ se hallarán en el mismo plano de las proyectantes; pues tienen ademas comunes los puntos P' y P'' con las PP' y PP''; luego en virtud de haber girado la $P''P'''$ al rededor de P''' como centro, la $P'''P'$ será la prolongacion del radio $p''P'''$, y por lo mismo la $P'P'''p''$ será una sola y misma línea recta.

192 Hemos visto (184), que, aunque una recta no tiene mas de una proyeccion sobre un plano, *esta proyeccion corresponde á una infinidad de rectas*; por lo cual, *para fijar la posicion de una recta en el espacio, se necesita referir su proyeccion á dos planos; y cuando tengamos conocidas las proyecciones de una recta sobre cada uno de los planos proyectantes, que suponemos tener las condiciones espresadas* (185), *entónces ya estas dos proyecciones pueden servirnos para determinar la posicion y magnitud de la recta propuesta, sin que se confundan con ninguna otra del espacio.*

En efecto, sea MN (fig. 133) la recta propuesta, y sean ABCD y ABEF los planos proyectantes. Bajando por los estremos M, N de esta recta, perpendiculares á los planos de proyeccion, tales como las Mm, Nn, Mm', Nn', si se unen estos puntos por medio de las rectas mn, $m'n'$, resulta que estas serán las proyecciones de dicha recta; verificándose que mn es la proyeccion horizontal, y $m'n'$ la vertical.

193 Pasemos á obtener en un solo plano, las proyecciones de dicha recta MN, que hemos hallado anteriormente ser las mn y $m'n'$. Para esto, considera-

rémos que, con las mismas circunstancias anteriores, gira el plano vertical ABEF hasta formar uno solo con ABCD; en cuyo caso, la proyeccion vertical habrá tomado la posicion $m''n''$, y en que $n''n'''$ será igual con $n'''n'$, y $m'''m''$ será igual con $m'''m'$ segun hemos visto (187); luego, las proyecciones de la recta MN las tenemos ya referidas á un solo plano.

194 Ya hemos visto (180), que las proyecciones de una recta varían segun la posicion que ella tenga respecto de los planos de proyeccion. Así es, que si la recta MN (fig. 134) fuese perpendicular al plano horizontal, entónces ella sería paralela al plano vertical; y por consiguiente la proyeccion horizontal (180) será un punto, y la vertical será una recta igual con la dada. Todos los puntos de la recta MN se hallarán en la misma direccion de la proyectante Nn, formando una sola línea Mn, y cuya interseccion con el plano horizontal será el punto n, ahora bien, por ser MN perpendicular al plano ABCD, será paralela al plano ABEF; y la $m'n'$ será paralela á la recta MN; y como las Mm',Nn', tambien lo son, resultará que la figura MN$n'm'$ será un paralelogramo; y en virtud de lo espuesto (§ 47..6.ª G. de N.) las MN y $m'n'$ serán iguales. *Luego siempre que una recta sea perpendicular á uno de los planos de proyeccion, la proyeccion en el plano, á que ella sea perpendicular, será un punto; y la otra proyeccion será una línea igual en magnitud á la dada.*

195 Si la recta MN fuese paralela á uno de los planos de proyeccion, y oblicua respecto del otro, como representa la (fig. 135), entónces se verifica, que la proyeccion sobre el plano, á que ella es paralela, es igual con ella (180); y la proyeccion sobre el otro plano será una recta de la longitud que determinen sus líneas proyectantes (178).

196 *Las proyecciones de una recta paralela á la comun interseccion, son tambien paralelas á dicha interseccion, y á la recta dada, y son iguales en magnitud con la misma recta.*

Sea MN (fig. 136) la recta dada, que la suponemos paralela á la comun interseccion AB; en este caso, se verifica: 1.º que sus proyecciones son paralelas á dicha interseccion; y 2.º que dichas proyecciones son iguales en magnitud á la recta propuesta.

Efectivamente, las perpendiculares Mm'', Nn'', bajadas á la interseccion AB serán paralelas, por ser ambas perpendiculares á la interseccion; é iguales, como lados opuestos del paralelogramo $MNn''m''$. Si bajamos las proyectantes Mm, Mm'; Nn, Nn', y tiramos por sus estremos las mm'' y $m'm''$, y las nn'' y $n'n''$, tendrémos dos rectángulos $Mmm''m'$, $Nnn''n'$, cuyas diagonales serán las Mm'', Nn'' que acabamos de ver son iguales; luego tambien lo serán los rectángulos, y de consiguiente se tendrá $Mm=Nn$; $Mm'=Nn'$; luego se verificará (180) que será paralela á los planos de proyeccion; y por lo mismo, sus proyecciones serán iguales con ella.

197 Pasemos á encontrar las proyecciones de una superficie. Para esto, no habrá mas que bajar proyectantes á los planos de proyeccion, desde todos los puntos entrantes y salientes de la superficie, y únir los pies de ellas por medio de rectas ó curvas, segun la naturaleza de la figura dada; y si fuese una figura curvilínea, entónces se dividiría su perímetro en un número cualquiera de partes; se proyectarían estos puntos en los planos de proyeccion; y se obtendría la proyeccion de la figura, haciendo pasar por ellos un lápiz &c.

198 Para dar un ejemplo de esto, propongámonos hallar las proyecciones de un círculo *abcd*, suponiéndole que sea paralelo al plano horizontal (fig. 137) (*),

(*) Siendo el circulo paralelo al plano horizontal, no debería aparecer á nuestra vista mas que una línea recta, igual al diámetro; mas para hacer palpable la construccion ponemos este circulo en perspectiva por medio de la elipse *abcd*.

cuyos diámetros *ac*,*bd*, le dividen en 4 partes iguales; tiremos las proyectantes al plano horizontal, y tendrémos la proyeccion $a'b'c'a'$; que será un círculo igual al propuesto. Para obtener la proyeccion vertical, observarémos que las proyecciones de los puntos *a* y *c* son las a'' y c''; y las de los puntos d'' y *b* se confunden en el punto d''; y que los tres puntos a'',d'',c'', están en una misma recta paralela á la interseccion; luego la proyeccion vertical es una línea recta.

Recíprocamente, por las proyecciones podemos venir en conocimiento de la posicion de la figura. En efecto, el ser la proyeccion vertical una línea recta paralela á la interseccion, indica que la figura es paralela al plano horizontal; y por ser un círculo la proyeccion horizontal, indica que la figura propuesta es un círculo igual con la proyeccion; lo cual nos manifiesta que el círculo dado es perpendicular al plano vertical; y por lo mismo la proyeccion horizontal será (180) tambien un círculo que representamos como elipse por la razon dada en la nota anterior.

Si tratásemos de obtener en un solo plano ambas proyecciones, consideraríamos que giraba el plano vertical; y al confundirse con la prolongacion del horizontal, tendrémos $c'''d'''a'''$ que representará la proyeccion vertical.

199 En la (fig. 138) *se pide obtener sus proyecciones, suponiendo el círculo paralelo al plano vertical;* y se verifica lo contrario que en el caso anterior; pues la proyeccion horizontal tiene los puntos b',a',d', en una sola línea recta, que es paralela tambien á la interseccion; y la proyeccion $a''b''c''d''$ sobre el plano vertical será un círculo igual al propuesto, y que aparece elipse, por las razones dadas en la nota anterior. Si tratamos de obtener ambas proyecciones en un solo plano, resultará que $a'''b'''c'''d'''$ representará la proyeccion vertical.

Tambien aquí se verifica, que, dadas las proyecciones, podemos venir en conocimiento de la posicion y magnitud de la figura proyectada. En efecto, la proyeccion horizontal $d'b'$, que es una línea recta paralela á la interseccion, nos indica que la figura propuesta es paralela al plano vertical; y el ser la proyeccion vertical un círculo, nos indica que la figura propuesta es tambien un círculo igual con él.

200 Si el círculo no fuese paralelo á ninguno de los planos, lo que no obsta para que sea perpendicular á cualquiera de ellos, entónces resulta que la proyeccion en el plano, á que es perpendicular, será una recta igual con el diámetro del círculo; y la otra proyeccion no resultará ya círculo, sinó que será una elipse.

Cuando el círculo propuesto no sea paraleló, ni perpendicular á ninguno de los planos, entóncesn inguna de las proyecciones será línea recta, sinó que estará representada por una elipse.

201 Debemos observar que, pues el plano vertical, al girar al rededor de la interseccion, se coloca por la parte superior de ella, se verifica del mismo modo que las proyecciones verticales se hallarán tambien colocadas por la parte superior de dicha interseccion, y correspondiéndose con las horizontales segun marcan las figuras.

202 En lo que llevamos espuesto, hemos visto á un mismo tiempo las proyecciones y el objeto, que las origina, en atencion á hallarse dibujadas en perspectiva, para facilitar su inteligencia, por ser las primeras nociones acerca de este particular; pero ahora vamos á manifesıar los medios que hay para representar los objetos en real, sin necesidad de ponerlos á la vista, ni aun los planos de proyeccion.

Supongamos, que *se deséa obtener la proyeccion de un círculo paralelo al plano horizontal.*

Tiraremos la línea de tierra, que es la comun interseccion AB (fig. 139); pero á fin de que se haga bien sensible, y no se confunda con las demas de la figura, se señala por una recta mas gruesa que las otras. Hecho esto, tírese una perpendicular indefinida cc' á la línea de tierra, que la cortará en *d* ; tómese una parte dc igual á la distancia que hay desde dicho centro al plano horizontal; y por c se tirará una paralela con AB; despues, se toma la distancia dc' que hay desde el centro del círculo al plano vertical; y haciendo centro en dicho punto c' y con un radio igual al que tenga el círculo dado, se trazará una circunferencia $a'b'$, y por los puntos a',b', estremos de un diámetro paralelo á la comun interseccion, se tirarán las $a'a$,$b'b$, que determinarán en la paralela tirada por c, la magnitud ab, que será la proyeccion vertical de dicho círculo.

203 Si por el contrario, el círculo fuese paralelo al plano vertical (fig. 140), verificaríamos la misma construccion que en el caso anterior; pero inversa, esto es, trazaríamos el círculo ab por la parte superior á la interseccion, puesto que el círculo dado es perpendicular al plano horizontal; y por debajo, la proyeccion horizontal, que es la recta $a'c'b'$ (*).

En la (fig. 140) hemos señalado la comun interseccion ó línea de tierra por dos rectas, una gruesa y otra delgada, muy próximas una á otra, porque tambien se suele representar de este modo; pero, en general, usarémos aquí de una sola mas gruesa que las otras.

204 Tambien pudiera considerarse el círculo tocando á los planos, como marcan las (figs. 141 y 142).

En la (fig. 141) se supone que el círculo es per-

(*) De este modo es como el delineante se debe acostumbrar á trabajar; esto es, no presentándosele el objeto, sinó solamente sus proyecciones; y conviene que por la presencia de estas, él mismo, en su interior, se forme la idéa del objeto y de su posicion. Al principio conviene presentar el objeto, como lo hemos hecho; pero no continuar luego despues; porque de este modo el entendimiento se hace perezoso, y la esperiencia tiene acreditado, que cuando se hace uso de los objetos para cada caso en particular, esto limita las facultades intelectuales de los discípulos, y no les es fácil progresar.

pendicular al plano vertical, y por consiguiente toca á la interseccion por la parte de abajo; y en la (fig. 142) se supone que el circulo toca y es perpendicular al plano horizontal, y por lo mismo deberá situarse por la parte de arriba y tocando á la interseccion.

205 Del mismo modo nos valdrémos para encontrar las proyecciones de cualquiera otra superficie; y como los cuerpos se componen de superficies y de puntos intermedios, resulta, que con lo ya manifestado, tenemos lo necesario para poder pasar á representar cualesquiera cuerpos; pues no se necesitará mas que conocer las distancias respectivas de cada punto á los planos de proyeccion, para poder verificarlo. Y puesto que ya hemos dado á conocer los medios para representar los puntos, líneas y las superficies, vamos á manifestar los que se empléan para la representacion de los cuerpos.

CAPÍTULO III.

Representacion de los cuerpos.

206 Como los cuerpos constan de varias caras, es necesario, al tratar de representar un cuerpo, fijarnos por cual de ellas queremos verle, á fin de situar la proyeccion horizontal.

Supongamos que tenemos un prisma recto, cuya base sea un cuadrado, y que queremos tener sus proyecciones, como si le viéramos, estando colocados en frente de uno de sus ángulos, pero no en la direccion de la recta que divide al espresado ángulo en dos partes iguales.

Sea AB (fig. 143) la línea de tierra. Construirémos por la parte inferior de ella, la base del prisma, que será su proyeccion horizontal; de modo que el ángulo por el cual queremos verle, caiga por la parte inferior, tal como en b'. Hecho esto, tírense á la interseccion, las perpendiculares $a'a, b'b, c'c, d'd$; y prolónguense hasta que su altura, tomada desde la interseccion hácia arriba, sea igual con la altura del prisma, que es la de sus aristas, tales como aS, bS'', cS''', y señalamos de puntos la dS', porque se halla oculta y no se ve; despues tirarémos la SS'''; con lo cual tendrémos representada la proyeccion vertical del prisma, que nos proponíamos en $aSS'S''S'''c$; en que $SS'S''S'''$ será una línea recta; y como ya teníamos la proyeccion horizontal $a'b'c'd'$, resulta que hemos conseguido lo que nos proponíamos.

Aquí observamos: 1.° que, siendo iguales las caras del prisma, la $abS''S$ es mayor que la $S''bcS'''$; y 2.° que cada una de ellas es menor que la del prisma. Lo primero consiste en que el ángulo b' no está en situacion tal que la línea, que le dividiese en dos partes iguales, fuese perpendicular á la recta AB; ó lo que es lo mismo, por no haberse colocado el observador en frente del vértice del ángulo b', sinó mas hácia la izquierda; de lo cual resulta descubrirse mas la cara $a'b'$, y ménos la $b'c'$. En cuanto á lo segundo, debe ser así; pues hemos visto (180), que una proyeccion no es igual con la figura que la origina, sinó cuando ella es paralela al plano de proyeccion; y como aqui ninguna de las $a'b'$ y $b'c'$ es paralela al plano de proyeccion vertical, resulta lo que acabamos de manifestar.

De aquí se deduce, que la cara que mas se aproxime á ser paralela, será la que mas se descubra, y ménos la que no tenga esta circunstancia. Lo cual vemos comprobado en este mismo caso; pues la cara $a'b'$ que tiene mas tendencia á ser paralela con la línea de tierra AB, se descubre mas en la proyeccion vertical.

La $S'd$, que representa la otra arista, como que la oculta la cara $aSS''b$, debe representarse punteada como ya hemos dicho que lo está, para completar la proyeccion de todas las aristas.

207 Aquí advertimos, y se comprueba lo espuesto (182), que si se presentase únicamente la proyec-

cion horizontal $a'b'c'd'$, solo indica una superficie; y no podrémos determinar la proyeccion vertical, en virtud de que ella puede ser base de una multitud de figuras ó cuerpos; y si se nos diese únicamente la proyeccion vertical $aSS''c$, tampoco podríamos determinar por ella la proyeccion horizontal; pues las mismas proyecciones podrían convenir á un cuadrilátero, en que la magnitud de sus lados y ángulos fuese muy variada.

208 Para manifestar la necesidad, que hay de las dos proyecciones, vamos á demostrar: 1.° que *una proyeccion horizontal puede corresponder á una multitud de proyecciones verticales diferentes; y* 2.° que *una misma proyeccion vertical puede corresponder á una multitud de proyecciones horizontales diferentes.*

Supongamos que se nos da la proyeccion horizontal $a'b'c'd'$ (fig. 144), que es correspondiente al prisma, cuyas caras son $abS''S, bcS'''S'', dcS'''S', adS'S$; vamos á probar que esta misma proyeccion horizontal puede corresponder á otras diferentes verticales, y cuya altura puede ser tan indefinida como se quiera.

Efectivamente, si á una altura cualquiera aa'' igual con $a'b'$, se tira una recta paralela con ac, el cuerpo, cuya proyeccion horizontal sea la $a'b'c'd'$, y cuyas caras sean las $abb''a'', bcc''b'', cdd''c''$ y $add''a''$, será un *cubo*, que es un cuerpo diferente del prisma. Si consideramos prolongadas las aristas aS, dS', bS'' y cS''' hasta s, s', s'', s'''; y se tira por ellas una paralela ss''', tendrémos un prisma mas alto que el primero, y cuya proyeccion horizontal es la misma $a'b'c'd'$ que la del dado. Si prolongamos aun estas aristas ó proyecciones una distancia cualquiera sA, y por A se tira una recta AC paralela con ac, y en su medio P se levanta una perpendicular PO de una magnitud cualquiera, y por el estremo O se tiran líneas á los puntos A, B, C, D, tendrémos en este caso trazada ó representada una pirámide recta; la cual tiene por proyeccion horizontal la misma del prisma primitivo. Ademas, tanto estos prismas como las pirámides podrían ser oblícuos, y ser una misma la proyeccion horizontal de la base. Luego, queda demostrado, que *una misma proyeccion horizontal puede corresponder á diferentes cuerpos, y por consiguiente á diversas proyecciones verticales.*

Para demostrar lo 2.°, supongamos, que se nos da la proyeccion vertical (fig. 145), que está representada por las caras $abS''S, bcS'''S'', dcS'''S', adS'S$, que son las mismas que las de la (fig. 144), y cuya proyeccion horizontal vimos era la $a'b'c'd'$. Ahora bien, las mismas proyectantes $a'a, b'b, c'c, d'd$, corresponden á las figuras $a'b'''c'd'''$ y $d'a''b''c'''$, que son enteramente distintas de la primitiva, y corresponden á una misma proyeccion vertical. Y como son muchos y muy variados los cuadriláteros, que se pueden trazar, cuyos ángulos insistan en las mismas proyectantes, de los que únicamente señalamos dos, para no confundir la figura, queda comprobado cuanto hemos espuesto.

209 Si se nos pidiese representar un prisma oblícuo, cuya base fuese la misma que la del recto de la (fig. 143), no podría verificarse como no se nos diese la inclinacion de sus aristas.

Supongamos que la dd'' (fig. 146) representa la inclinacion y magnitud de una de las aristas; tirarémos desde los ángulos a', b', c', d' de la base, perpendiculares á la interseccion $a'a, b'b, c'c, d'd$; y por los puntos a, c, b, tirarémos paralelas á la dd'' é iguales con ella; y últimamente, tirando por d'' una paralela $d''b''$ á la db, tendrémos representada la proyeccion vertical del espresado prisma oblícuo.

210 Pero aun esto no es suficiente para poder representar con toda exactitud su forma y posicion; pues debemos representar en la proyeccion horizontal, la proyeccion de la base superior del prisma, y la de sus aristas; porque siendo el prisma oblícuo, la proyeccion de la base superior no se confunde con la de la inferior, ni la proyeccion de las aristas puede re-

ducirse á un solo punto, como se verifica cuando el prisma es recto; y esto es lo que se llama *completar la proyeccion horizontal*, y representar el cuerpo como si se viese á *vista de pájaro.*

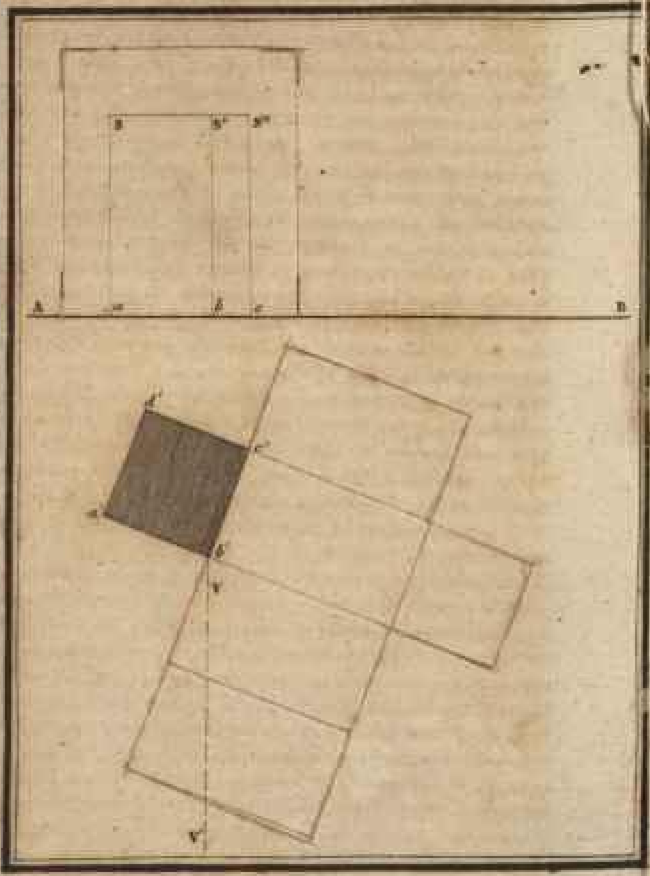
Para manifestar la necesidad de completar la proyeccion horizontal, debemos observar, que la misma proyeccion $a'b'c'd'$ (fig. 146), ha podido convenir á los dos prismas de las (fig. 147 y 148); en los cuales ni la proyeccion vertical, ni la horizontal ha variado; por lo cual se hace indispensable el fijar en la proyeccion horizontal la base superior del prisma ó la proyeccion de una de sus aristas.

Con el fin de aclarar esto, supongamos que se nos pide completar la proyeccion horizontal $a'b'c'd'$ (figura 147), en el supuesto de que la proyeccion de una de las aristas es $d'd'''$. Para esto, se bajarán desde los puntos a'',b'',c'',d'', las verticales $a''a''',b''b'''$, $c''c''',d''d'''$, y por los puntos a',b',c', se tirarán paralelas á la $d'd'''$, hasta que encuentren á las verticales tiradas por los referidos puntos a'',b'',c'',d'', que las cortarán en a''',b''',c'''; y uniendo estos puntos por medio de rectas, se tendrá la proyeccion $a'''b'''c'''d'''$ de la base opuesta á la $a'b'c'd'$, que es sobre la que reposa el espresado prisma, y las $a'a'''$, $b'b''',c'c'''$, serán las proyecciones de las demas aristas.

En la (fig. 148) se pide lo mismo que en la anterior, con la circunstancia de que se supone que la proyeccion horizontal de una de las aristas, tal como la dd'' es la $d'd'''$ paralela al plano vertical; ó lo que es lo mismo, paralela al ojo del observador; y completando su proyeccion horizontal, por el procedimiento anterior, se tendrá que $a'''b'''c'''d'''$ será la proyeccion de la base superior; y las $a'a''',b'b''',c'c'''$, $d'd'''$, serán las proyecciones de las aristas.

Luego, en general, cuando el políedro es oblícuo, es necesario que la proyeccion horizontal se halle *completada;* esto es, que se proyecten horizontalmente todas las aristas, y tambien la base superior.

211 Por las razones espuestas (203 nota), de que


A
V

no conviene que se hagan perezosas las facultades intelectuales de los discípulos, hemos esplicado el trazado de las proyecciones del prisma sin presentar el objeto; pues conviene que el discípulo se adiestre mucho en concebir en su interior las figuras y sus proyecciones. Mas ahora, tanto con el fin de que comprueben si son exactas las idéas que han adquirido, como para rectificarlas, si no lo son, hemos ideado el medio de presentarles el objeto en la misma disposicion en que se representan sus proyecciones en la (fig. 143). En efecto, en la lámina recortada que presentamos aquí adjunta, si se forma el prisma recto, doblándole por sus aristas, que están medio recortadas por el lado opuesto, y ponemos nuestro ojo en la direccion de la línea $V'V$, entónces se presenta á nuestra vista, de la misma manera que en la (fig. 143) se señala por las dos caras $abS''S$,$bcS'''S''$; y de ningun modo se ve la arista dS'; ni por consiguiente las caras $adS'S$,$dcS'''S'$. Lo cual comprueba que, por medio del arte, vemos mas que naturalmente. En cuanto á la proyeccion horizontal es la misma que la base sombreada del prisma.

Debemos aun insistir mas acerca de la superioridad que da el arte sobre el modo de ver naturalmente. Cuando colocamos nuestra vista en la direccion de la recta $V'V$, vemos solamente dos de sus caras, que son las que en la proyeccion vertical están representadas por $abS''S$,$bcS'''S''$; y de ningun modo vemos las otras dos, ni tampoco la base del prisma. Pero, por el sistema propuesto ó establecido, si deshacemos el prisma, poniendo su desarrollo en plano, entónces vemos la base, y ademas las cuatro caras, y señalada con la línea de puntos dS' la arista que no se puede ver al natural. Si doblamos el carton por la parte AB, que está medio recortada por el lado opuesto, se nos representa en real el plano vertical; y cuando la estendemos otra vez en plano, vemos las dos proyecciones, horizontal y vertical, en un solo plano. Este mecanismo juzgamos que aclarará mucho la doctrina espuesta hasta aquí; y contribuirá para facilitar lo demas que sigue.

212 Si tratásemos de representar una pirámide triangular, con la circunstancia de que uno de los lados de la base fuese paralelo á la línea de tierra AB (fig. 149), no habría mas que situarle paralelamente á esta; por lo que, si se pidiese que fuese tal como la $a'c'$ paralela á la AB; y que S represente la proyeccion vertical del cúspide de la pirámide, despues de tirada la $a'c'$ paralela con AB, se tirarán las $a'a$, $b'b$, $c'c$, perpendiculares á la AB; y por los puntos a, b, c, las aS, bS, cS; y quedaría representada la pirámide propuesta.

213 Las proyecciones tienen un nombre particular en las artes. Supongamos que la (fig. 150) representa un *guarda rueda* ó *hito*, cuya proyeccion horizontal es G$'$, y G la vertical. A la proyeccion horizontal G$'$ de su base, se la denomina *planta;* y á la vertical G, *alzado ó elevacion*.

Si se considera dada una seccion al mismo cuerpo con un plano perpendicular á la planta, tal como AB (fig. 151), en cuyo caso solo se ven los perfiles del guarda rueda, y su macizo, se llama *seccion ó corte vertical*.

214 Si la seccion se hace por un plano CD (figura 152) paralelo á la base, bien para representar la parte superior á ella, ó la inferior, se la denomina *seccion ó corte horizontal*.

Este género de seccion se usa en las artes, particularmente en la Arquitectura; pues con su auxilio se representan no solo los diferentes pisos de un edificio, sinó que se particularizan los huecos de ventana &c., que se hallan superiores al pavimento, y por lo mismo se hace indispensable adquirir mucha práctica sobre esto.

215 Tambien se dan nombres particulares á las caras de los objetos, respecto á su posicion; llamando *fachada ó cara principal* á la cara, que se presenta á nuestra vista; *costado ó lateral* á los lados

adyacentes; y *testero* al opuesto á la cara principal; *vista de ángulo*, cuando lo que se presenta á nuestros ojos mas cerca es un ángulo, y las caras adyacentes, como se verifica en las (figs. 143 y 149). Finalmente, la diminucion, que esperimentan las caras, en virtud del sistema de proyecciones, se llaman *escorzos ó movimientos;* y el ángulo que mas se aproxima á nuestra vista, *ángulo movido*. Así, en la (fig. 143), los rectángulos $SabS'', S''bcS'''$, son los *escorzos ó movimientos*, y el ángulo b' es el *movido;* pues es el mas próximo á nuestra vista, y está formado por las caras escorzadas.

216 El uso de las secciones ó cortes es de la mayor importancia y trascendencia; pues por su medio representamos la vista interior de los cuerpos, su estructura en los naturales, y la construccion en los artificiales. Son indispensables en ciertos ramos, como en la Arquitectura y en la maquinaria, y reunen la circunstancia de ser los mas difíciles, porque es necesario el estudio de su construccion, enlace de las partes &c.; en lo cual no nos detendrémos, tanto por no permitirlo el objeto de esta obrita, como porque para el ramo á que cada uno se dedique, debe formar un estudio especial, aunque el método es general; y así, pasarémos á dar las reglas que se deben seguir para sacar el diseño de un objeto.

CAPÍTULO IV.

Modo de formar el croquis ó bosquejo de un objeto.

217 Lo primero que debe hacerse, para formar el diseño de un objeto, es un reconocimiento minucioso de las partes que le componen; y luego se pasa á dibujar en un papel, y á simple vista, el conjunto de él, esto es, dibujando por separado cada una de sus caras si son desiguales, y la planta, en la disposicion que mas convenga. Luego, se miden con una vara, cinta, cuerda &c. sus dimensiones: y se van

anotando en las ya dibujadas para el fin que luego espresarémos.

Supongamos, que querémos hacer el croquis de una mesa (figs. 120, 121 y 122). Para esto, nos colocarémos en su frente, y lo mas en medio posible, para dibujar en seguida sus diferentes partes, que aquí son los pies, el grueso del tablero y el cajon, con lo cual, tendríamos su fachada (fig. 153); mas como esto no es suficiente para hacer la descripcion de la mesa, segun vimos anteriormente (168 al 173), dibujarémos su planta, señalando en ella el cajon segun marca la (fig. 154); luego, pasarémos á medir sus diferentes partes, y las anotarémos en el dibujo segun acabamos de indicar. Supongamos que la dimension A′B′ del tablero, por su fachada principal, es de 5 pies; anotarémos en el croquis (figs. 153 y 154) un 5 en la cara *a′b′*; luego, tomarémos el ancho del tablero, que será el BC de la (fig. 120), que supondrémos sea *dos* pies y *nueve* dedos, y se anotará en el lado correspondiente *b′c′* de la (fig. 154); y así se continuará, tomando las demas partes, y anotándolas en los lados ó caras homólogas del croquis.

218 En las artes regularmente se considera dividida la unidad lineal, de que se hace uso para la medida, que es el pie, en 16 partes iguales llamadas *dedos*; y como al medir, suele haber pies y dedos, si hubiéramos de acompañar á cada dimension en el *croquis*, la especie á que pertenecia sería sumamente confuso; y así, si tuviéramos, como en el caso anterior, pies y dedos, se escribiría primeramente el guarismo que esprese los pies; luego se pondrían dos rayitas, y despues el guarismo que espresase los dedos; así es, que en el caso de que hablamos, hubiéramos escrito 2,,9, que leerémos 2 pies y 9 dedos. Y cuando no hay pies, se anteponen las dos rayitas al número que espresa los dedos.

219 Cuando los cuerpos se componen de caras planas, y son regulares, entónces es fácil no solo hacer el bosquejo, sinó tambien tomar sus dimensio-

nes &c. No sucede así cuando se componen de partes curvas é irregulares; pues entónces es necesario atender en su medida á la determinacion de ellas.

En este caso, se halla comprendido el instrumento de agricultura, llamado *arado* (*) que representan

---

(*) El Ilustrísimo Sr. D. *Antonio Sandalio de Arias*, Presidente de la Academia de Ciencias Naturales de esta Corte, me dirigió la palabra, en junta celebrada por dicha Corporacion el 28 de Febrero del presente año, manifestándome que tenía noticia de que yo iba á esplicar en el Ateneo la *teoría matemática de la noria;* que, con este motivo, no podía ménos de escitarme á que me ocupase de la *teoría matemática del arado*, que es tanto mas importante y necesario, cuanto podía asegurarse, que de él dependía la existencia de las Naciones; que, cuando esplicaba Agricultura en el Jardin Botánico, había manifestado constantemente à todos los Discípulos cuan interesante sería el aplicar al arado los principios de Mecánica; y que no habiéndolo podido conseguir, me exhortaba con el motivo indicado á que me ocupase de tan importante materia.

Añadió que » se debía considerar como una fatalidad incomprensible el que los Españoles se hayan olvidado de tratar seriamente del arado, que tenemos en uso, y esplicar la teoría matemática de la primera, mas general y mas útil de las máquinas; la que mas ha contribuido á la felicidad de la especié humana, y la que en todos tiempos ha sido mirada como el sosten de los imperios. Porque, en efecto, sin el arado, no era posibe obtener la superabundancia de granos frumenticios y otros muchísimos productos de la tierra con que atiende la Agricultura á tantos hombres como son los que se entregan à otras profesiones, destinos, y trabajos, sin temor de que les falte la subsistencia.

»Convencidos de esta verdad los antiguos, y penetrados de la importancia del instrumento que labra la tierra con tanta economía, no dudaron en conceder la apoteosis á cuantos se ocuparon del arado. Esta conducta de la antigüedad; los premios y consideraciones que han merecido en tiempos msa cercanos y aun en nuestra edad los que han mejorado el instrumento que tanto aumenta la labor, economizando el tiempo, los gastos, el número y la fuerza de los hombres y ganados, acusan con tanta severidad como justicia nuestra indolencia en este punto; y nuestras escasas cosechas castigan las figs. 155 y 156), y que es el objeto que reune las circunstancias de ser por una parte el que mas nos interesa conocer; y por otra, de los mas difíciles de delinear.

Principiarémos dibujándole, aunque á ojo como lo

---

el descuido con que por tantos siglos hemos mirado la imperfecta construccion del arado *timonero*, que empleamos en nuestras labranzas. Él es, con muy pocas variaciones ó reformas el mismo que dispusieron los hombres, cuando por primera vez fué tirado por los bueyes; el que dejaron los Griegos en sus buenos tiempos; el que usaron los Romanos; y por fin el que ha pasado de edad en edad entre nosotros, sin que se haya variado su forma, mejorado la labor que ejecuta, ni arreglado sus piezas de un modo conveniente y exacto, para que produzca los buenos efectos que se deséan y debe siempre producir.

»El arado timonero, tal como le usamos los Españoles no labra, ni puede labrar y volcar la tierra como conviene, para formar un buen barbecho; no destruye ni puede destruir las raices de las plantas perennes, que como mala yerva se apoderan de los terrenos; no da ni puede dar á la tierra aquella esponjosidad y soltura que es necesario darla para que absorva las emanaciones atmosféricas que tanto la benefician, y permita fácilmente la estension progresiva de las raices de los vejetales, que en ella se cultivan; y en una palabra, no satisface ni puede satisfacer de un modo completo las necesidades de la labranza.

»Bien penetrados de estas verdades los maquinistas, los labradores y los sabios de otras naciones han procurado á toda costa mejorar los instrumentos agronómicos, y perfeccionar sus labranzas; y no han sido pocos los paises en que, para lograr este objeto con toda seguridad, han dispuesto que se diese á conocer el arado á los niños en la primera educacion, enseñándoles á que lo describiesen y dibujasen con exactitud y por principios. Mas entre nosotros, ¿ cuando se ha pensado así? ¡Cuantos, de los que se han tenido por sabios, han salido de los colegios y de las Universidades sin saber lo que es un *arado*, qué piezas le forman, y qué efectos produce para el bien del género humano! Si lo han sabido ¿como han mirado con tanta indiferencia, y como cosa de poco momento, la primera y mas importante de las máquinas, que provée de subsistencias, aumenta la poblacion y aserepresentamos en la (fig. 157). Para verificar su medicion, á fin de dibujarle despues en un plano, es necesario fijar sus diferentes estremos por medio de diagonales; y cuyos puntos de partida deberán ser los estremos de la mayor porcion recta que contenga, que

---

gura la felicidad é independencia de los Estados?

»En Suecia, Dinamarca, Sajonia, Rusia, Ynglaterra, Francia, Suiza, y en otros muchos paises y provincias de Europa y América se han ofrecido grandes premios á los que presentasen mejor la teoría y práctica del arado, demostrando precisamente en sus escritos, en los modelos y en los arados mismos con que habian de verificarse los ensayos, los medios y modos de enmendar los defectos que se notaban, y aun se notan en sus respectivos arados. Nosotros, por el contrario, no hemos ocupado nunca un solo momento en averiguar siquiera en qué puntos se ejerce la compresion contra la tierra; dónde hace su mayor esfuerzo la reja; cuanto debe caminar por minuto un arado, que con un solo par de bueyes haga la buena labor que se necesita; cuanto debe profundizar de una vez en el terreno; qué anchura debe tener la faja de tierra que el arado ha de cortar; qué fuerza de tiro se necesitará para todo esto en las labores comunes y en los terrenos compactos; y cómo ha de lograrse que el arado mismo vuelque la tierra que levanta, y no la ruede como lo hace el nuestro, dejándola casi en el mismo sitio que estaba. Así el arado bueno será aquel que desprenda y separe vertical y horizontalmente, con mas facilidad y ménos esfuerzo, una faja de tierra paralela á la superficie; el que la vuelque ó voltée hacia lo labrado como sucede cuando se cava ó laya á brazo el terreno; el que por medio del vuelco referido coloque la tierra del fondo en la superficie, corte y esponga las raices y la tierra misma á la accion de la atmósfera y al influjo de los temporales; y por fin, el que despues de satisfacer todas estas necesidades, reuna la mayor sencillez y duracion al poco coste y fácil manejo. De todo lo cual se deduce: que, cualesquiera que se supongan las utilidades y ventajas que resulten de la aplicacisn de las Matemáticas, ya á las artes industriales, ya á las demas ciencias, ningunas pueden equivaler á las que producirían una buena combinacion de los principios matemáticos, para que el arado reuniese las circunstancías que se acaban de espresar; y en su consecuencia no podía ménos de escitarme á emprender tan útil aquí es la AB (fig. 155), que hemos hallado ser de 9 pies; y la anotarémos en el mismo parage *ab* del croquis (fig. 157); luego, con una cuerda ó cinta de medidas, se tomará la distancia que hay desde A hasta E, que es 11 pies y 13 dedos; despues, haríamos igual

---

investigacion.»

Yo le contesté, manifestando que era muy cierto y positivo el laudable celo y vehemente conato con que había promovido el que se tratase de tan interesante materia; que yo mismo le oí en varias ocasiones, escitar para el objeto indicado; y que si yo, al oirle su primera escitacion, no hubiera tenido elegido asunto para disertar, como discípulo de dicho establecimiento, acaso hubiera sido este el objeto de mi disertacion; y en prueba de lo importante, que yo conceptuaba el tratar este asunto, induje a mi hermano á que lo adoptase para objeto de la suya. Mas, no habiéndoselo permitido sus ocupaciones militares, no se había podido realizar. Pero que esta escitacion era en la actualidad muy oportuna; pues estando para publicarse estos *elementos de delineacion*, y habiendo elegido para el primer ejemplo el diseño del arado, por ser este el instrumento, máquina ó apero mas necesario y útil de cuantos se conocen, estaba yo indeciso acerca de si pondría ó no una nota, relativa á él, que contuviese el fruto de mis taréas é investigaciones tanto dentro como fuera de España, sobre un objeto agronómico tan importante; que por una parte me retraía la dificultad que presentaba la materia, y el que quizá parecería que en una obra de delineacion acaso no se reputaría ser el lugar mas apropósito; pero, que por otra, la utilidad que esto podría originar, parecía deber superar cuantos inconvenientes ofreciese su realizacion; pues mientras mas se propaguen, estiendan, y vulgaricen esta clase de noticias y conocimientos, resultan mayores ventajas para el fomento de la pública y particular prosperidad. Y en cuanto á sí era propio de dicha obra la espresada nota, militaban en favor de su insercion, las circunstancias de que, hallándose destinada para toda clase de personas, siempre resulta utilidad de que se propaguen en las grandes masas estas idéas y conocimientos, cuyo desarrollo y progreso tiene el mas íntimo enlace con la pública prosperidad.

Varios Señores Académicos manifestaron sus deséos de que se llevase á efecto; y en su consecuencia, me ofrecí á realizarlo: bien persuadido de que las inexactitudes que yo co-operacion en el otro estremo B, tomando la distancia de B á E, que resulta ser de $4{,}{,}9$; con lo cual tendrémos ya sujeto el punto E; despues, haríamos lo mismo con el punto N, tomando como en el caso anterior las BN, y AN; del mismo modo, sujetaríamos el

---

meta, podrán corregirse por otras personas de mayores luces sobre tan importante objeto; y de este modo se adelantaría progresivamente, acercándose cada vez mas á la perfeccion.

El fin que yo me proponía en un principio, era el reunir el fruto de mis investigaciones acerca del arado y labranza, durante mis viajes por Francia, Ynglaterra, Bélgica y Holanda; y manifestar una idéa que me es propia, relativa á que no se ha considerado una circunstancia de las mas esenciales en uno de los elementos de la vejetacion, para que otras personas de mas conocimientos en la materia, ó que tuviesen ménos dividida su atencion, se ocupasen de este asunto en grande; mas en virtud de la precedente escitacion por la persona que mas conato ha puesto en promover el bien de la Agricultura, y la prosperidad de los Labradores, me decidí á trabajar con todo el esmero y vehemencia posible; y me sucedió una cosa semejante á lo que se verificó al ocuparme de la teoría matemática de la noria, y de que hablo (§ 178) del Libro 6.° de mi *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas.*

En efecto, los pocos libros en que están algun tanto aplicados los principios matemáticos al arado, contienen esta doctrina, de tal modo espuesta, que resulta todo lo contrario de lo que en mi concepto se verifica. Y como los libros en que se hallan estas inexactitudes, son de los que corren con mas crédito, es indispensable examinarlo todo con el mayor detenimiento, pulso é imparcialidad. Lo cual por una parte exige el que me deba estender mas de lo que podria permitir una nota, y por otra el que necesite para coordinar las idéas en asunto de tanta complicacion, mas tiempo de lo que permitía la impresion de esta obrita; por lo que me ocuparé de tan importante materia en el escrito, que por separado publicaré á la mayor brevedad posible, bajo el título de *Investigaciones acerca de la teoría matemática del arado; manifestacion de una circunstancia que no se ha considerado al esplicar los elementos que contribuyen á la vejetacion; y modo de conciliar esta nueva doctrina* punto M por medio de las NM y MB, cuyas medidas anotaríamos en las homólogas del croquis; y así continuaríamos midiendo todas las demas partes.

Ahora, para determinar las curvas, como por ejemplo la FQE, mediríamos la distancia de la parte mas elevada de ella á la cuerda puesta en sus estremos, tal es Qq; y se anotarían sus medidas como marca el croquis (fig. 157). Para determinar la BoM, mediríamos la distancia To y la anotaríamos en el croquis; y practicando lo mismo con las demas, tendríamos completo el croquis, que nos proponíamos: poniendo cuidado en medir los gruesos de maderas y demas partes, como vemos anotado en el mismo croquis. Luego, pa-

---

son la forma del arado, y sistema de labores, para obtener con menos gasto, fatigas y penalidades, mas abundantes cosechas. Y así, únicamente pondré aquí lo que ha producido las modificaciones que estaban ya hechas en las figuras.

1.° He añadido en la (fig. 155), la *telera*, que no tenía el arado que sirvió de modelo; porque la mayor parte de los arados que carecen de ella, se destruyen por esta razon; y el coste de diez rs. que puede ocasionar la telera, es nada si se atiende á la mayor duracion que la telera le proporciona; pues las raices, que se llaman *quebranta arados*, de las cuales una es la de la colleja, que originan tanto perjuicio en los arados sin telera, casi no produce ninguno en los que la tienen.

2.° He añadido la cuchilla, que va señalada de puntos en la figura; porque en varias ocasiones podrá ser útil para vencer la resistencia con diminucion de fuerza en el tiro de la yunta; sobre cuyo punto nos detendrémos á manifestar en la obra citada sus ventajas é inconvenientes.

3.° Conviene que la reja sea mas ancha que el dental; y por lo mismo la represento en la (fig. 158) con la forma *media* que convendría darle.

4.° Habiendo dado á conocer la esperiencia, que los rozamientos, que sufre el dental, son menores, cuando su superficie inferior es algo cóncava, presento en la misma (fig. 158) el corte del dental con la curvatura que podrá tener en su parte inferior.

ra determinar su ancho, dibujaríamos su planta, y pondríamos en ella las medidas de los anchos ó gruesos de maderas &c., como se observa en la misma (fig. 157).

220 Como nuestra mira es hacer la descripcion del objeto, nunca está demas, aunque el diseño lo indique todo, el espresar los nombres de sus diversas partes; lo cual se hace por medio de letras ó de números, y poniendo por separado el nombre con que cada parte se esprese.

Como este caso es uno de los mas desventajosos, por tener muy pocas partes rectas, y estas ser de formas muy variadas, resulta que si se ha comprendido bien, ya no costará dificultad el verificar los croquis de los objetos que nos propongamos.

221 Ahora nos dirigirémos á obtener el croquis de un objeto algo mas regularizado. Suponemos que es el de un jarron de adorno, cuya base sea cuadrada y el resto circular. Dibujarémos como en los casos anteriores ambas proyecciones, ó sea la planta y alzado como representa la (fig. 159). Aquí vemos, que toda la dificultad en su medicion consiste en que las partes salientes impiden el tomar en sentidos verticales sus alturas, asi como tambien sus vuelos con relacion á un plano. Para esto, el método mas simple, y que mas conviene, es el siguiente. Se fija un reglon R verticalmente sobre el plano en que insiste el jarron, y próximo á él tanto como se quiera: luego, se toma una escuadra E; y colocando uno de sus brazos sobre el estremo del jarron, si no tiene tapa, ó sobre el reglon si la tuviese, se determinará la altura *ah* del jarron; la cual se medirá y anotará en el croquis. Despues se va corriendo un brazo de la escuadra en contacto con el canto del reglon R; y se van determinando las demas partes, y anotando sus alturas: así, la altura que tiene el collarino *ab* que es de 6 dedos, la anotaríamos como espresa la figura, y lo mismo las *cd*,*de*;*ef*,*fg*, y *gh*.

Ahora, para determinar su perfil, mediriamos las distancias que hay desde el reglon á los puntos entrantes y salientes; en cuyo caso, los tendríamos ya fijos con relacion á la línea *ah* que es el canto del reglon, y anotaríamos sus medidas en las horizontales, que suponemos trazaría el brazo de la escuadra que determinaba las alturas de sus diferentes partes, en el mismo sentido en el croquis; con lo cual, tendríamos ya las distancias; L*a de dos pies;* M*c de un pie y un dedo;* N*d de dos pies y dos dedos;* O*f de un pie y doce y medio dedos*, y P*q de un pie y diez y medio dedos*. Con lo cual, ya solo nos resta determinar el centro ó eje del jarron, y la curvatura de las partes LM, MN, y NO.

Determinemos primero la distancia del eje al reglon. Para esto, se toma la distancia *aL* que hay desde el reglon al collarino; y á ella se añade la mitad del diámetro AL de la boca del jarron. Con lo cual, quedará ya determinada la distancia del eje al reglon.

Ahora, para determinar el perfil de las curvas, tal como la MN, se practicará lo siguiente. Divídase en el reglon la altura *cd* en un número cualquiera de partes iguales, que supondrémos sean 4; y por ellas, y contiguo al reglon, póngase la escuadra, de modo que el estremo de uno de sus brazos vaya tocando á la curva; luego, se medirán sus distancias al reglon, y anotarémos en cada una su respectiva medida, como marca la figura; con lo cual, tendrémos determinada la curvatura de la curva MN. Del mismo modo, hallaríamos las de las LM y NO; pero generalmente estas curvas entrantes se hallan trazadas del modo siguiente.

Sean L y M (fig. 160) los puntos de arranque de la curva; se unen por medio de la recta LM; y sobre ella como diámetro se traza un semicírculo; el cual, se divide en un número cualquiera de partes iguales que supondrémos ser 4; y por los puntos de division 1,2,3, se bajan perpendiculares á la LM; por los puntos 4, 5 y 6 donde la cortan, se tiran las horizontales 4..7; 5..8; y 6..9; con la circunstancia de ser 1..4 igual con 4..7;5..8 igual con 5..2; y 6..9 igual con 6..3; se pasa un lápiz por los estremos L,7,8,9 y M, y tendrémos trazada la curva.

222 No siempre puede hacerse uso del reglon; bien sea por no haber donde fijarle, ó bien por la demasiada altura del objeto. Tal sería el sacar los vuelos de una cornisa (fig. 161). Entónces, lo que se hace es fijar desde su mayor vuelo O un peso P suspendido de un cordel; con lo cual, tendrémos una línea vertical; y hallarémos con relacion á ella, como en el caso anterior del reglon, los vuelos &c.; solo con la diferencia de que la escuadra habrá de colocarse, de modo que uno de sus brazos se halle en los planos del perfil; en cuyo caso el otro irá recorriendo la vertical OP.

Si el objeto fuese tan grande que no pudiera practicarse la operacion con una sola vertical, se hace con varias; y refiriéndose unas á otras, obtendríamos del mismo modo lo que nos proponiamos, segun hemos visto en los casos anteriores.

CAPÍTULO V.

Cómo, por medio del croquis de un cuerpo, se obtiene su dibujo geométrico.

223 En el capítulo anterior nos hemos propuesto la cuestion, de *dado un objeto, construir su croquis ó bosquejo*; y ahora lo que nos proponemos es *dado el croquis, construir el diseño*, ó *formar su dibujo geométrico.*

Principiarémos por el arado, cuyo croquis está representado por la (fig. 157); y supongamos que deseamos dibujarle con exactitud. Para esto, lo primero que harémos será determinar la escala con relacion á la estension del papel, y construirla de modo que una de las partes, que represente el pie, se halle dividida en 16 partes iguales para representar los dedos que tiene el pie.

Hecho esto, tirarémos una recta AB (fig. 155), igual en magnitud á la que espresa el dato anotado en el croquis, que suponemos es 9 pies; y cuya distancia se tomará en la escala; luego, tomaríamos los gruesos *ii,qq* segun marca el croquis, tomando en la escala la medida que espresa, y haciendo la parte curva que remata en B. En seguida, tomaríamos en la escala la distancia BN de dos pies que marca la *bn* de la (fig. 157); y haciendo centro en B y con esta distancia como radio, se trazará un arco; y ejecutando igual operacion, desde el punto A como centro, y con un radio de 9 pies y 2 dedos, tomados en la escala, trazaríamos otro arco que cortaría al anterior en un punto N, que sería el estremo *n* del croquis. Del mismo modo determinaríamos los puntos D y E. Ahora, para determinar la curvatura B*o*M no habría mas que tomar en el medio de la BM, y sobre una perpendicular tirada sobre ella, una parte TO de 1/4 de pie, ó sean 4 dedos de la escala; y pasando un lápiz por los puntos B,*o*,M, se formará una curvatura semejante á la que espresa el croquis; luego, tomaríamos en la escala una parte *op* de 4 dedos que marca el croquis, y formaríamos su curvatura paralela á la anterior; pero, como al llegar *ab* encima de B, empieza á disminuir hasta C, fijaríamos el punto C, por los datos del croquis, que son *bc* de *catorce dedos*, y el grueso, de 2 1/2 dedos; y desde *b* iríamos formando á ojo ó con la regla acordada, la espresada curvatura. Despues, trazaríamos el barron $b''b''$ con las dimensiones y forma que manifiesta el croquis; y lo mismo haríamos con las demas partes.

224 Ahora bien, como en la elevacion ó alzado no se pueden representar los gruesos de madera, se construirá la planta á vista de pájaro; para lo cual, no habría mas que tirar una horizontal OP; bajar sobre ella perpendiculares desde los puntos superiores A,C,B,D,O,E; y determinando en cada parte el grueso obtenido por la medida, por ejemplo en el estremo O, que es de tres dedos, tendrémos ya la planta y elevacion del *arado*, que es el cuerpo que nos hemos propuesto.

225 Para completar la descripcion del objeto, dijimos anteriormente, que se podía acompañar una descripcion ó esplicacion con los nombres de cada parte, que constituye el cuerpo; la cual, con referencia al arado, podría ponerse, bien con letras ó números, del modo siguiente.

EXPLICACION.

Por medio de letras.	*Por medio de números.*	*Nombres de las partes.*
AB.	1. . . .	Timon.
CD.	2. . . .	Cama de fierro, en la cual el fierro se embute en la madera.
ME.	3. . . .	Esteva ó manilla.
NR.	4. . . .	Reja.
D′D′.	5. . . .	Dental
O.	6. . . .	Orejera.
P.	7. . . .	Pescuño ó cuña de madera.

Algunos arados tienen un barron de fierro que pasa por el dental y cama; el cual se sujeta por una tuerca segun se ve en 8 (fig. 155) con líneas punteadas, en razon á que el arado, de que ha sido sacado este diseño, no le tenía, y este barron se denomina *telera.*

226 Para obtener el dibujo geométrico ó diseño del jarron, cuyo croquis tenemos representado en la (fig. 159), practicaríamos lo mismo que hemos hecho en el caso anterior; con lo cual, obtendríamos la (fig. 160) en planta y alzado.

227 Hemos recomendado (216) el uso de las secciones; y por lo mismo vamos ahora á verificar la construccion de la figura que resultaría, si se diese una seccion con un plano XZ (fig. 160), que pasase

por el centro ó eje del jarron; la cual le dividirá en dos partes iguales.

Para esto, tiraríamos una recta cualquiera AH (fig. 162) perpendicular á la que representa el plano sobre que insiste; se tomará en ella una parte AH igual con 6 pies y 5$^1/_6$ dedos, tomados en la escala, segun denota el croquis; y por A se tirará la horizontal AO de tres pies, que marca el croquis (fig. 159); pues es la suma de todas las partes de la *ah;* y bajando la perpendicular OP á la línea que representa el plano horizontal, la OP será el eje del jarron, y por ella pasará el plano que origina la seccion. Hecho esto, hállese el perfil esterior, que será el mismo del jarron; para lo cual, se tomarán en la escala las partes *hg*,*gf*,*fe*,*ed*, &c. que marca el croquis, y se pondrán de H á G, de G á F, de F á E, de E á D, de D á C, de C á B, y de B á A. Por los puntos G,F,E, &c. tírense las GP″,FO′,DN′ &c., con la misma circunstancia que las anteriores, esto es, tomando de la escala partes iguales á las que manifiesta el croquis, y tendrémos los puntos P′,L′,M′,N′,O′,P″ de su perfil; el cual quedará concluido, determinando las curvas L′M′, M′N′ y N′O′. Para determinar la M′N′, se dividirá la CD en tantas partes iguales como se hizo en el modelo para obtener el croquis, que fué en 4; y levantando por 1,2,3, perpendiculares iguales con las magnitudes tomadas en la escala, á las que espresa el croquis, tendrémos determinada la curva propuesta; y haciendo lo mismo con las demas, resultará trazado el perfil esterior.

Supongamos que su grueso, en el cuerpo del jarron, es de dos dedos, y que termina su concavidad al nivel del punto N′. Entónces, no habrá mas que trazar una curva QR de la misma naturaleza que M′N′, páralela con ella; y tendrémos representado su grueso. Practicando lo mismo con el cuello OP′, quedará reprensentada la seccion del jarron; pues OQR espresa su parte hueca; y el resto, los gruesos ó macizos.

228 Para distinguir la parte *seccionada*, de la

que no lo es, se tira en la seccionada, una serie de paralelas iguales, con alguna inclinacion, como marca la misma (fig. 162).

229 Tanto en este ejemplo, como en los anteriores, vemos completamente comprobado cuanto hemos dicho acerca de la delineacion; esto es, que por medio de ella, se logra hacer una descripcion tan exacta del cuerpo que nos proponemos, que uno cualquiera que no le haya visto, y se le presente el diseño, puede formar una exactísima idéa, tanto de su forma cuanto de su magnitud; pues, concretándonos á esta misma figura, vemos que esto se consigue, observando, en virtud de ser redonda su *planta,* que el cuerpo es redondo; su altura y figura, se conocen por su *elevacion;* su estructura, por el *corte* ó *seccion;* y la magnitud del todo y de sus partes, por medio de la escala.

CAPÍTULO VI.

Reglas que deben seguirse para poner un dibujo en limpio, y proceder del diseño á la ejecucion del modelo.

230 Algunas veces se hacen los diseños en limpio, sin atender á la magnitud del papel; de lo cual resulta que no queda márgen, ni campéa el diseño lo que debiera: infiriéndose de aquí mezquindez ó poco esmero en el dibujante. De lo cual resulta, que no hay suficiente papel para hacer la márgen y el recorte. Con el fin de evitar esto, debe arreglarse ántes la escala del diseño, de modo que, despues de ejecutado, haya el suficiente papel para lo que llevamos espresado; y se procederá del modo siguiente. Por los ángulos opuestos del papel, que suponemos pegado en el tablero AB (fig. 15, lám. 1.ª), se tirarán dos líneas *ce,gt*, de las cuales solo ponemos el punto *s* de interseccion, para no confundir la figura, y se tendrá que el punto *s* será el centro del papel; por él se tirará una línea *msn* paralela á uno cualquiera de los

cantos como *eg*; y esta será la línea que pase por medio del diseño ó su eje; despues, se construye un rectángulo *abdh* con la circunstancia de que dos de sus lados sean paralelos á la *msn*, y que disten un par de dedos de los cantos del papel; á cuyo rectángulo se le llama *márgen ó cuadro*. Despues, se pasa á determinar la magnitud de la escala; para lo cual debe atenderse á la dimension que ocupa, ó tiene el croquis ó borrador; y al mayor ó menor espacio que querémos nos sobre en el papel.

Supongamos que querémos representar la fachada de un obelisco, cuya altura es de 50 pies, y su frente ó máxima salida de 20; como la mayor dimension es su altura, deberá dividirse el lado *ah* en noventa ó cien partes; y la unidad lineal que resulte será la magnitud que deberá tener el pie de la escala. Pero la mayor parte de veces, como es operacion embarazosa, se toma por unidad lineal cada diez pies &c. segun la especie de medida con que se ha de hacer el diseño, que en nuestro caso se hubiera dividido al tantéo dicho lado *ah* en diez partes iguales; y luego, una de ellas en otras diez, y sería la magnitud del pie. Despues se compartirían de este modo; 50 para dibujar el objeto; 30 ó 40 para la distancia á que debe hallarse la línea de tierra del lado *ab* de la márgen, para colocar en el espacio que quede, la escala y letrero que esprese la dedicatoria ó significado del objeto &c.; y el resto, para que campée el diseño; y verificando despues su delineacion, segun queda ya dicho, tendrémos el obelisco *qorn*.

En el espacio *mo* se coloca la escala &c., y se debe tener presente, que si hubiere que representar varias vistas en un mismo papel, será necesario contar con el espacio que debe haber entre cada una de ellas y demas partes.

Asimismo, debe tenerse entendido, que las líneas que tiramos para determinar el centro *s* (fig. 15), deben ser de lápiz, y que, despues de determinado dicho punto y el eje, deben borrarse.

La márgen se hace tirando las rectas *ab,bd,dh,ha*, bien señalándolas con una sola línea gruesa ó con dos, una gruesa y otra delgada, como se ve en las láminas de esta obra.

Como el manejo de la regla y demas instrumentos ennegrece el papel, se pasará por todo él muy suavemente una miga de pan, y no la goma, porque esta levanta la pelusilla del papel, y por consiguiente las líneas aparecen interrumpidas.

231 Poco tenemos que advertir respecto del modo de pasar á la ejecucion material de un objeto, teniendo su diseño; pues con el conocimiento de la escala, se tiene lo suficiente.

En efecto, no hay mas que tomar con un compas, cualquiera de las dimensiones del diseño; y colocándola sobre la escala, nos dará á conocer el número de varas, pies, dedos &c. que debe tener dicha parte; y luego, con la vara, pie &c. natural, no hay mas que marcar en el objeto la misma distancia que hallamos en la escala, y así, sucesivamente.

Aun cuando esta operacion es de suyo tan sencilla, y parece no se necesita saber delinear para practicarla, ofrece algunas dificultades al obrero, cuando ignora la delineacion; pues no entendiendo bien el diseño, no puede sin ayuda de esplicacion de otro, que sepa la delineacion, proceder á la ejecucion de cada una de sus partes.

232 Últimamente, terminarémos este asunto, manifestando la necesidad de generalizar por todos los medios posibles los conocimientos de *Geometría* y *Delineacion*; pues de ello resultarán ventajas incalculables, y saldrá del abatimiento y languidez en que yace nuestra industria, tan atrasada por falta de los espresados conocimientos.

En efecto, se sabe que, para hacer una cornisa de yesería, es necesario valerse de una terraja, que corriéndola por dos reglones, fijos al parage en que se ha de hacer, y relleno este de yeso, luego llevándola de izquierda á derecha, y *vice-versa*, queda construida la cornisa que nos proponíamos; y si tratamos de dar á un cerrajero el perfil delineado en un papel con su escala para hacer dicha terraja, resulta que, si este no entiende el uso de la escala, no conoce la magnitud de sus partes: si la conoce, logra saber sus dimensiones; mas no puede trazarla sobre la plancha para hacer la terraja, sinó sabe delinear. Pero si sabe la delineacion, entónces mira el diseño; toma sus partes en la escala, y luego, en la plancha con la medida natural, traza el perfil; y despues con la tijera y lima, lo ejecuta dejando el vacío correspondiente para que el albañil corra la moldura que el Arquitecto ó Ingeniero tenía concebida.

Por este medio, el Ingeniero ó Director de cualquier obra no se hallará en la necesidad de hacer los replantéos aun de las partes mas pequeñas; se establecerá un lengnage directo entre el que dirige y el que ejecuta, sin necesidad de hacerse esplicaciones tan minuciosas, que á veces llegan á ser confusas, resultando de aquí la mala ejecucion, y por consiguiente el no poderse llevar á cabo los proyectos mejor ideados.

SECCION CUARTA.

APLICACION DE TODO LO ESPLICADO, PARA DELINEAR LOS ENGRANES, QUE CONTRIBUYEN DEL MODO MAS DIRECTO Y EFICAZ EN EL PROGRESO DE LAS ARTES Y DESARROLLO DE TODAS LAS INDUSTRIAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Idéas generales acerca de los engranes, y enumeracion y clasificacion de sus diferentes especies.

233 Por corta que sea la edad de los niños, al ocuparse del importante ejercicio de la *Delineacion*,

y por escasos que sean sus conocimientos, se podrá suponer, que ya habrán visto un reloj, sea de torre, sea casero, de los que suelen llamar de *campana*, ó sea de *faltriquera*; y si no lo han visto, podrémos suponer que el que los dirige en la Delineacion, al llegar al contenido de este capítulo, podrá enseñarles un reloj cualquiera de los mencionados; y presentándoles la parte interior, por ejemplo, de uno de faltriquera, les hará observar, que las diferentes ruedas, que allí se ven, contienen en su disco, circunferencia, ó contorno, unas partes pequeñas salientes, que entre una y otra dejan un espacio hueco ó vacío; y entónces les dirá: que aquellas partes que sobresalen, se llaman *dientes*. Les hará notar, que en dicho reloj, se hallan dispuestas las ruedas, de modo que los dientes de las unas entran en los espacíos vacíos que dejan los dientes de las otras; y de este modo, al moverse una de las ruedas, hace que se mueva tambien la otra, como se podrá observar en el mismo reloj. Y entónces les dirá: pues *un conjunto de ruedas, con dientes, que se hallan de tal modo dispuestas, que los dientes de las unas encajan ó engargantan en los huecos que dejan los dientes de las otras*, **es** *lo que se llama* ENGRANAGE Ó ENGRANE.

234 Si por alguna casualidad el que principia á delinear, no hubiese visto reloj por su interior, y no se le pudiese manifestar, bastaría para el objeto el enseñarle una *carraca*, de las que hay en las iglesias para que sirvan en la semana santa, ó de las que los muchachos tienen para sus juegos; y se les hará observar, que su mecanismo se reduce á una rueda, que, en su esterior, tiene unas partes salientes, que dejan entre sí un hueco ó un espacio vacío; y entónces les dirá, que aquellas partes salientes reciben el nombre de *dientes* de la rueda á que están fijos; y que el espresado mecanismo se reduce á que, haciendo girar la rueda, al pasar cada diente en contacto con la tablita que está fija al estremo del cuerpo de la carraca, se eleva; y cuando acaba de pasar el diente, y el

estremo de la tablita se halla en el hueco que hay entre diente y diente, se baja con precipitacion, y el golpe que dá en el diente inmediato, y la vibracion que se verifica en el aire de sus inmediaciones, causan aquel ruido, que se repite con mas ó ménos continuidad, segun se haga que las vueltas, bien sea de la rueda, quedando inmóvil el cuerpo de la carraca, ó del cuerpo de esta al rededor de la rueda, se verifiquen mas ó ménos de prisa.

Despues les dirá, que, si en vez de la tablita que se halla en contacto con los dientes de la rueda, hubiese otra rueda con dientes, de tal modo dispuesta, que los dientes de la una encajasen ó se introdujesen en los huecos, que dejan los dientes de la otra, entónces aquel conjunto de ruedas se llama *engranage* ó *engrane*; y forma un mecanísmo tal, que, girando una rueda al rededor de su eje, la otra rueda gira tambien al rededor del suyo.

235 Percibida ya intuitivamente por cualquiera de estos dos medios, ó de otro que se pueda tener á la mano, lo que se llama *engranage*, ó *engrane*, se les dirá: *no se necesita precisamente el que sean dos ruedas con dientes las que formen el engrane*; basta que sean dos piezas diferentes, tales que, en los huecos que unas tengan, puedan introducirse las partes salientes de otra pieza, y que causen el efecto de que, moviéndose una de estas piezas, haga mover á la otra; y *que pueden disponerse no solo dos piezas con estas circunstancias*, *sinó un número cualquiera de ellas*; por lo cual, se dice, en general, que *se llama engranage ó engrane á un conjunto de piezas*, *dispuestas de tal modo*, *que las partes salientes de las unas se introducen ó encajan en los huecos ó espacios vacios que hay en las otras*: verificándose que, poniendo en movimiento una de ellas, se mueven tambien al mismo tiempo todas las demas.

236 Adquirida ya esta idéa, con generalidad y exactitud, vamos á considerar las diferentes especies de engranes que hoy se conocen; y despues

enseñarémos á delinear cada uno de por sí.

237 Cuando dos ruedas dentadas, cuyos diámetros son desiguales, engranan una en otra, la mayor de ellas recibe el nombre de *rueda;* y la menor el de *piñon*. Así, en la (fig. 163), á la rueda A, se la denomina simplemente *rueda;* y á la B, se le llama *piñon*, que por lo general es de una sola pieza. Los dientes del piñon se llaman *alas*.

238 En las grandes máquinas, en vez de piñones de una sola pieza, se colocan paralelamente y á distancias iguales, unos cilindros que se sujetan ó hallan empotrados en dos platillos redondos, llamados *cabezas;* estas se sostienen por los mismos cilindros, que reciben el nombre de *usillos;* y entónces esta pieza, recibe el nombre de *linterna;* tal es la B de la (fig. 164) que la representa en planta, y la B′ la representa en el alzado.

239 Cuando los dientes forman un solo cuerpo con la rueda, se les denomina propiamente *dientes*, como se ve en la (fig. 163); y cuando forman cuerpo aparte ó son de otra pieza, como los M (fig. 165), se suelen denominar *puntos* por los prácticos; pero, como la palabra punto tiene en Geometría un sentido diverso, llamarémos *diente* á toda parte que sobresalga en una rueda.

240 Los dientes pueden hallarse colocados en el canto ó en el plano de la rueda. Cuando se hallan colocados en su canto, como en la (fig. 163), la rueda recibe el nombre de *erizo;* y cuando se hallan en su plano, como en A (fig. 165), se denomina *rueda coronada*.

241 Los engranes pueden ser de dos especies; ó bien *esteriores* ó *interiores*. Se llama *esterior*, cuando los dientes se hallan colocados en la parte ó canto esterior de las ruedas (fig. 163); é *interior*, cuando están por la parte de adentro, como en la rueda A (fig. 166). En uno y otro caso, el diente se halla terminado por dos superficies simétricas con relacion á un plano que pasa por el eje de la rueda, y el medio del diente.

La superficie de la mitad de un diente se compone, ó está determinada por dos partes, una plana, y otra curva. La parte plana se llama *flanco;* la curva es á lo que se denomina propiamente *diente;* y la parte comprendida entre dos dientes consecutivos se espresa con el nombre de *hueco* ó *vacio;* y en general á su totalidad, esto es, á todo lo que sobresale, se la denomina tambien *diente.*

Así, en la (fig. 163) toda la parte *cbad*, se llama en general *diente;* pero la parte *ab* es á la que propiamente se debe llamar *diente;* la parte *cb* es el *flanco;* y la *ce* el *hueco* ó *vacio.*

A toda rueda, cualquiera que sea su especie, que conduce á otra ó á otras, se la denomina *rueda conductriz* ó *de movimiento.*

242 Todos los engranes, que existen en el dia, están reducidos á ocho clases, y son las siguientes:

1.ª El de dos ó mas ruedas de igual diámetro, como el que manifiesta la (fig. 167), en la cual, una rueda conduce á la otra.

2.ª El de una rueda A (fig. 164) conducida por una linterna B, por medio de los usillos que señalamos con *o.*

3.ª Una rueda A conducida por un piñon B (fig. 163).

4.ª Una barra dentada A (fig. 168) conducida por una linterna B.

5.ª Una barra dentada A (fig. 169), conducida por un piñon B.

6.ª Una rueda A (fig. 170), conducida por una rosca ó tornillo sin fin B, á cuyo engrane se le denomina *engrane sin fin.*

7.ª El de una rueda coronada A (fig. 165), conducida por una linterna B.

La 8.ª especie se denomina *engrane de ángulo ó cónico;* en razon á que los cantos esteriores de las ruedas son superficies cónicas: tal es el formado por las dos ruedas A y B (fig. 171), y los dientes en este caso se denominan *dientes cónicos.*

243 Cuando en el engrane cónico, las ruedas son iguales, y sus planos son perpendiculares, entónces se denomina *engrane á 45 grados*; tal es el de la (fig. 172).

Si las dos ruedas son desiguales, y el ángulo que forman sus planos, es recto, como el de la (fig. 171), se denomina *engrane cónico recto*.

Si el plano de las ruedas forma un ángulo obtuso como el de la (fig. 173), se llama *engrane cónico obtuso*; y si el ángulo formado es agudo, se caracteriza con el nombre de *cónico agudo*. En estos dos últimos casos, las ruedas pueden tambien ser iguales, que es lo que sucede generalmente.

CAPÍTULO II.

Construccion del engrane de una rueda y un piñon.

244 Al delineante se le deben dar conocidos los radios ó diámetros que han de tener dichas ruedas, y el número de dientes de que cada una debe constar (*).

(*) La determinacion de dichos radios, y del número de dientes de cada rueda, corresponde al Ingeniero, Maquinista ó Director del mecanismo, máquina ó aparato á que se ha de aplicar: sobre cuya materia podrá verse el § 146 de mi *Compendio de Mecánica Práctica;* los §§ 252,253,254 y 255 del tomo 3.° parte 1.ª de mi *Tratado de Matemáticas*, que contiene la *Mecànica*; y el cap. 2.° del libro 5.° de mi *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas.*

Ademas, no será inoportuno hacer aquí algunas indicaciones útiles, que yo he deducido, viendo en ejercicio las máquinas, durante mis viages por Fráncia, Inglaterra, Bélgica y Holanda.

La perfeccion de los engranes consiste en determinar de tal modo las partes que los constituyen, que el movimiento se trasmita sin interrupcion, con suavidad, sin choques, uniformemente, y con el menor rozamiento posible.

Esto se consigue, en general, dando á las ruedas diámetros grandes, procurando que nunca engrane una rueda muy grande con un piñon muy chico: lo cual se evita, po-

Sean BC y AC los radios de dichas ruedas (fig. 174), que queramos engranen una con otra, y que el nú-

---

niendo una rueda intermedia, si la necesidad lo exige.

Cuando una rueda grande engrana en una linterna, es conveniente dar á los *usillos* ó *bolillos* de la linterna, mas solidez que á los dientes de la rueda; porque, trabajando con mas frecuencia, se desgastan mas. Lo cual se consigue ó haciendo mas gruesos los *bolillos* si son de la misma materia que los dientes de la rueda; ó usando de materia mas dura y resistente para el bolillo, que para el diente de la rueda. Para disminuir el rozamiento, conviene disponer el *bolillo* de la linterna, de modo que gire al rededor de un eje de fierro, que le atraviesa, y que está fijo en las cabezas de la linterna.

Los últimos adelantamientos, que se han hecho en Inglaterra con relacion á los engranes, consisten en que sean muchos los dientes y de poco grueso, á fin de que habiendo siempre muchos engranados á la vez, disminuya la presion que se ejerce sobre cada uno, y sea menor por consiguiente el rozamiento. A las grandes máquinas, que se construyen ahora en Inglaterra, no se dan ya mas de unas 26 líneas españolas para el intérvalo de dos dientes, haciendo que el espesor de las ruedas tenga de 15 á 16 pulgadas españolas.

Se ha reconocido tambien, que el movimiento de las máquinas, es mas uniforme, suave y ventojoso, cuando los dientes de las grandes ruedas son de madera dura, y de fierro fundido los de los piñones.

Por último, terminarémos esta nota, indicando que en España tenemos maderas muy duras y de mucha resistencia para los engranes; y aunque no se tienen hechos esperimentos sobre la resistencia absoluta de nuestras maderas, podemos asegurar, por el testimonio de práticos ilustrados, que nuestra madera de *boj* es la mas resistente de todas, siendo muy adecuada para dientes que han de resistir mucho. Despues, sigue la *encina*, que es muy dura y resistente, y sirve para todo. Luego, sigue la *acacia*, que es muy buena para dientes. El *roble* resiste ménos que la acacia; pero, si ha de servir en el agua, es la madera que mas resiste de todas. Despues del roble y acacia, la madera que mas resiste es el *acebuche*; luego, el *olivo* y el *peral*; y despues el *olmo*, que no es bueno para dientes, porque hace estopa; pero es muy adecuado para camones de las ruedas de las máquinas, y la madera mejor de todas para ejes de carros, coches, &c. &c.

mero de dientes de la B sea 36 y el del piñon 12.

Para trazar su engrane, lo primero que se hará es dividir cada una de las circunferencias de dichas ruedas en tantas partes iguales, cuantos sean el número de dientes de que cada una debe constar; y por lo mismo dividirémos la circunferencia de B en 36 partes iguales, y la de A en 12. Supongamos que la *st* es una de las 36 partes en que se ha dividido la circunferencia de la rueda B; y que *xo* es una de las 12 en que se ha dividido la de la rueda A. Despues se divide cada una de estas porciones en otras cuatro partes iguales; se toma una á cada lado de los puntos de division primitivos; esto es, *sb* y *sa*; y el conjunto *ba* de estas dos partes será el grueso de los dientes; y las otras dos partes que componen la *bv* serán los *vacios ó huecos*.

Ahora, para determinar la curvatura del diente, por ejemplo en la rueda B, se toma el radio AC de la rueda ó piñon A como diámetro, y se traza una circunferencia CTA; la cual se considera que gira sobre la circunferencia de la rueda B; en cuyo caso se traza la epicicloide C*dp* por lo espuesto (145). Para conocer la longitud del diente, basta tirar por la primera division *n*, contigua al orígen de la epicicloide C*dp*, un radio B*n*, prolongado hasta que la encuentre en un punto que será el *d*; con lo que *nd* espresará la longitud de los dientes de la citada rueda B; y la parte C*d*, de la epicicloide C*dp* espresará la curvatura del diente. Luego, se hará centro en B, y con el radio B*d* se trazará una circunferencia D*d*E, en la cual se hallarán los estremos de todos los dientes; despues, se coloca la acordada que mas coincida con la parte C*d* que forma dicha curvatura del diente, y se señalan sus puntos estremos en la misma acordada; se va colocando esta parte señalada en la acordada, para que determine las dos curvaturas de cada diente. Ahora, á fin de formar la curvatura *ac*, se coloca la acordada, de modo que el punto que correspondía al punto C, coincida con el punto *a*, y el punto señalado en la acordada, correspondiente al punto *d*, coincida con el punto *c*. Para trazar la otra parte *cb*, se pone la acordada á la inversa, esto es, la parte que se hallaba en contacto con el papel, se coloca á nuestra vista teniendo cuidado ántes ,de señalar los puntos estremos en el canto opuesto de la acordada; y despues se señalará en el lado que debe reposar sobre el papel; y ejecutando lo mismo en todas las demas subdivisiones de los dientes, quedarán trazados todos los dientes de dicha rueda.

El trazado de la curvatura de las alas del piñon A, se practica, ejecutando la misma operacion; esto es, se considera el radio BC como diámetro, y se traza una circunferencia BMC, que originará, al girar al rededor de la circunferencia del piñon, una epicicloide C*mq*; y tirando el radio A*om*, la parte *om* será la longitud de los dientes del piñon, y la parte C*m*, la curvatura correspondiente á dichos dientes: y operando como en el caso anterior, se tomará la curvatura del diente con la acordada, y se trazarán las de todos los demas dientes.

245 Los círculos de las ruedas, cuyos radios hemos visto son los BC y AC, en cuya circunferencia hemos trazado los dientes, se denominan *círculos primitivos*, cuyas circunferencias son KI,*ki*. Los radios BC,AC correspondientes á estos círculos, se llaman *radios primitivos*; las distancias B*d*,A*m*, de los centros de los círculos primitivos á los estremos de los dientes de la rueda, y alas del piñon, se llaman *los radios verdaderos*.

246 Para trazar los flancos de los dientes, se practicará lo que sígue. Supongamos que se quieran determinar los flancos de la rueda B. Se tomará por radio la B*z*, distancia del centro B al punto en que la circunferencia BMC corta á la D′RE′, que es la circunferencia en que se hallan los estremos de los dientes del piñon, y se trazará una circunferencia P*z*Q; y tirando por los puntos *a* y *b*, que marcan el ancho de los dientes, los radios *a*B,*b*B&c. la parte *bb′* intercep-

tada en estos radios por la circunferencia primitiva KI y la PzQ, espresará la longitud de los flancos.

Para trazar los del piñon, se hace centro en A, y tomando por radio la Av distancia del centro A al punto en que la circunferencia ATC corta á la DdE, se trazará una circunferencia NvO que determinará la longitud Cr de los flancos en todos los dientes.

247 Solo falta ya el determinar la profundidad del *hueco ó vacio*, á fin de que los dientes encajen completamente.

Para esto, propongámonos trazar los de la rueda B. Tómese en el radio CB una parte CR igual con la longitud *om* del diente ó ala del piñon; y haciendo centro en B, con la distancia BR por radio se trazará la circunferencia HRL; la cual determinará el *vértice* ó estremo de la profundidad de los *huecos ó vacíos*.

Para determinar la profundidad de los *huecos ó vacíos* del piñon, tomarémos desde C en el radio CA, una distancia igual con la longitud *nd* de los dientes de la rueda B; y haciendo centro en A, con lo que quede del espresado radio AC, se trazará la circunferencia $H'lL'$; en la cual se hallarán todos los vértices de los *huecos* ó *vacíos* del piñon.

Tenemos ya los principios de los *huecos ó vacíos*, y tambien su *vértice*. Esto es, conocemos los puntos b' y v', que son los estremos de un *hueco ó vacio* de la rueda B; y conocemos tambien su punto medio *e*, que es á lo que hemos llamado *vértice*; y nos falta determinar la forma de la curva $b'ev'$. Con este objeto, trazarémos una epicicloide prolongada por el método espuesto (147), considerando como círculo fijo al que tiene BG por radio, y como círculo movible al que tiene por radio á la línea AR; y tomando desde el origen, una parte de esta epicicloide, igual en altura á la comprendida entre las circunferencias que determinan las longitudes de los flancos y la de las profundidades de los huecos, quedará determinada su forma. Esto es, se pondrá la parte que se tomó de la espresada curva, y se llevará desde *e* á b' y de *e* á *v*; y haciendo lo mismo con todos los demas huecos, quedará concluido el trazado de la rueda.

Para determinar los huecos ó vacíos del piñon, se traza una epicicloide prolongada, en que la circunferencia kCi, es la del circulo fijo, y la circunferencia, cuyo radio fuese la línea $C''y$ sería la del círculo movible; y tomando desde el origen una parte igual en altura con ry, y poniéndola de l á r, y de l á s', la curvatura rls' sería la del *vacío* del espresado piñon; y haciendo lo mismo con todos los demas, quedará trazado todo el engrane.

248 Por el procedimiento que acabamos de manifestar, resultan los vacíos exactamente iguales con los dientes; y con el objeto de disminuir los rozamientos aconsejan varios Autores, que se desgasten un poquito los dientes por cada lado, de modo que no esceda todo lo que se desgasta por ambos lados á un *diez y seisavo* del grueso del diente; con lo cual se obtiene un movimiento seguido, lográndose que no haya sacudimientos bruscos, que siempre causan perjuicio á la máquina. Pero, en nuestro concepto, sería mas adecuado el armar la máquina y hacerla mover sola, esto es, ántes de que empiece á ejercer ningun trabajo, para que el roce de unas partes con otras haga desaparecer las pequeñas desigualdades, y resulte que, ya por la presion de las partes, ya por desprenderse las moléculas que estén de mas, tome todo el engrane la forma correspondiente al movimiento. Podrá suceder que, despues de construido el engrane con toda la exactitud que permitan las artes de construccion, resulte todavia en algunos parages, que haya entorpecimientos; lo cual podrá provenir, ya de no estar bien centrada la máquina, ó ya de haber tomado vicio alguna de sus partes. En este caso, deberá irse examinando sucesivamente el movimiento; y donde se halle tropiezo, desgastar algo con la lima, lija &c.

249 Este engrane se ha trazado con arreglo al rigor matemático, ó que suministra la teoría; mas en la práctica, se suele prescindir de la curvatura de la

profundidad del *hueco* ó *vacío* de los dientes: se truncan estos y se prolongan los flancos cuanto se necesita para que los dientes ya truncados, entren con desahogo; con lo cual resulta ménos peso en las ruedas; y al propio tiempo, se evita la esposicion á que se rompan las puntas ó estremos de los espresados dientes. Esto no causa perjuicios de consideracion; pero lo que sí los causa, es el trazar arcos de círculo en vez de epicicloides; pues en los dientes trazados con arcos de círculo no dura tanto el contacto, y ademas se verifica mayor rozamiento. Por esta causa, la construccion de los engranes, que se hallan en la obra de *Mr. Leblanc*, que es una de las que corren con mayor aceptacion, es defectuosa bajo dos aspectos: 1.° porque en los casos en que hace uso de las epicicloides, toma para su construccion el arco de circulo por la cuerda; lo cual hemos advertido (136, 140...) que no es exacto: incurriendo en la misma inexactitud los demas Autores; 2.° porque, en los casos en que no hace uso de las epicicloides, se vale de arcos de círculo, que no suministran un movimiento tan uniforme como corresponde.

250 Habiendo ya manifestado el modo de construir el engrane de una rueda con un piñon (244), con arreglo á todo el rigor matemático; y acabando de manifestar (249) las inexactitudes con que se procede por los demas Autores, nos dirigimos ahora á construir este mismo engrane, por el procedimiento de truncar los dientes; en lo cual se obtiene sencillez y economía de gasto y tiempo, sin perjuicios de consideracion; y el modo de conseguirlo es como sigue.

Se practicará exactamente cuanto se ha prevenido en los párrafos 244, 245 y 246; y despues, para truncar los dientes de la rueda B, se traza sobre el radio AC como diámetro, una circunferencia; y tirando por C y por E, punto en que dicha circunferencia corta al flanco del diente inmediato al punto C, una recta CE, el punto en que dicha recta corte al diente de la rueda, será por el cual deba truncarse; pero, en la práctica, se ejecuta por un poco mas arriba, como se ve en la figura, donde se señala igual operacion en todos los demas.

Para truncar los del piñon, sobre BC como diámetro, se traza una circunferencia que cortará en F al diente del piñon contiguo al punto C; y truncando por un poco mas arriba del punto F al espresado diente; y practicando lo mismo con los demas, queda trazado el engrane.

251 Si el engrane fuese interior, como el que se vé en la (fig. 176), se trazarían del mismo modo todas sus partes por el citado procedimiento de los párrafos 244 y 245. En esta figura, los círculos primitivos son el que tiene por radio la línea BC el de la rueda, y el que tiene á AC por radio, es el del piñon. La curvatura de los dientes de la rueda es una epicicloide, en que el círculo AGC es el movible, y el MCN el fijo; y la de los dientes del piñon es tambien una epicicloide en que el círculo CBH es el movible, y el FCE′ el fijo. Los flancos están determinados del mismo modo que lo hemos hecho en el caso anterior (246); y tendrémos que CQ será la longitud del flanco del piñon, y QZ será la profundidad. Los flancos de la rueda B serán la recta CR.

252 Como la recta CR y la curva CM están situadas de un mismo lado, resulta que si la rueda B lleva dientes, no podrá tener flancos; y si se hacen los flancos, no podrá llevar dientes. Asimismo, en cualquiera de estas ruedas que lleve dientes, y que conduzca á la otra por sus flancos, será necesario que estos flancos estén dispuestos de tal modo, que el vacío ó hueco entre dos dientes consecutivos, tenga tal forma, que permita al diente empujarle, y que tenga la suficiente cabida porá poder introducirse libremente.

253 La profundidad del vacío en el piñon, quedará trazada, verificando el procedimiento esplicado (247); resultando ser el trozo de epicicloide prolongada *m*QZ. Por el mismo procedimiento, se obtendría para los de la rueda, el R′Z′R″; en donde se ve que

el diente del piñon es mayor que el vacío donde debe introducirse; por lo cual, no puede verificarse el movimiento. Mas esto se evita colocando los dientes sobre la rueda esterior; y los cóncavos y los flancos sobre la interior; y haciendo conducir la segunda de estas ruedas por la primera.

254 Este engrane interior tiene poco uso; y en la práctica siempre se hace como se vé en la (fig. 177), que se traza del modo siguiente. Se determinan las curvaturas de los dientes segun lo espuesto en el anterior (252); y se truncan los dientes en virtud de lo espuesto (250). Luego, se trazan los flancos del mismo modo que hemos hecho en los casos anteriores, dándoles una longitud un poco mayor que la de los dientes, y se trazan circunferencias para terminar los flancos.

CAPÍTULO III.

Engrane de una rueda y una linterna.

255 Ante todas cosas deben darse conocidos los radios de los círculos primitivos, y el número de dientes de la rueda, y el de los usillos ó bolillos de la linterna.

256 Para verificar su trazado, supongamos que BC (fig. 178) sea el radio del círculo primitivo de la rueda, y AC el de la linterna; se divide la circunferencia de la rueda en tantas partes iguales NO,OF, FG, &c. cuantos sean los dientes de que ha de constar; se señala en la circunferencia de la linterna dada C, una porcion de la circunferencia, que sea igual en longitud con las partes NO,OF &c. por el procedimiento espuesto (133), y se tendrán las divisiones CD′,D′E′, &c.; y los puntos C,D′,E′ &c. serán los centros ó ejes de los usillos; luego, se subdivide cada una de las partes de la rueda en otras cuatro; y tomando una de estas por radio, se trazan en la linterna sobre los puntos C,D′,E′, como centros, circunferencias que representarán la proyeccion de la su-

perficie de los usillos. Para trazar el contorno de los dientes, se concibe que el círculo primitivo de la linterna gira sobre el de la rueda; en cuyo caso, un punto cualquiera de la circunferencia de la linterna engendra una epicicloide, que sería la curvatura del diente, y cuya magnitud estará determinada por la prolongacion del radio de la rueda. Para no confundir la figura, suponemos el trazado de la curvatura del diente en el punto D; es decir, que en el referido punto D se traza una circunferencia, cuyo radio sea igual con el CA de la linterna, y cuyo centro se halle en la prolongacion del radio que pase por D; se hace girar hácia la izquierda sobre el círculo primitivo de la rueda, y entónces el punto D engendra la epicicloide DM, cuya magnitud queda determinada por el parage en que corta á dicha epicicloide el radio BN prolongado.

Despues, bien sea haciendo una plantilla, ó con las reglas acordadas, se toma dicha porcion DM de epicicloide, y se pone de E á M; en seguida, con un radio un poquito mayor que el de los usillos, se hace centro en todos los puntos de la curva MD, y se trazan arcos de círculo; por cada uno de los centros de dichos círculos se tira una tangente á la epicicloide; y en cada uno de los puntos de contacto, una perpendicular á dicha tangente; y el punto en que esta perpendicular corte el arco trazado, será un punto verdadero de la curva del diente; y haciendo la misma construccion en varios puntos de la MD, se tendrán varios puntos de la curvatura verdadera del diente; y por medio de la regla acordada se trazará la curva *dm*, que será la que representa la curvatura del semidiente; se pone luego de *c* á *m*, y se tendrá el diente *cmd*. Practicando lo mismo en todos los demas, se tendrán ya trazados los dientes; y por último, haciendo centro en los puntos E,D &c. y con el radio E*c* se trazarán semicircunferencias que serán los cóncavos donde deben entrar los usillos.

La truncadura de los dientes podría verificarse por un poco mas arriba del punto de contacto *e*, como se ve en la figura.

257 La (fig. 179) es el engrane interior, el cual no se diferencia en nada del esterior que acabamos de trazar, como manifiesta dicha figura.

CAPÍTULO IV.

Engrane de una barra dentada y un piñon.

258 Sea BCK (fig. 180) la circunferencia primitiva del piñon, y EF la recta primitiva de la barra dentada; se divide la circunferencia primitiva del piñon en tantas partes iguales cuantos dientes ha de tener el espresado piñon; y se pone una de estas distancias rectificada (128) sobre la recta EF tantas veces, cuantos dientes ha de tener la barra; y levantando por los puntos de division *a*,*b*,N &c. perpendiculares á la recta EF, estas serán los ejes de los dientes de la barra. Luego, se subdividen las *ab*,*b*N &c. en dos partes iguales como en *c*, que serán los medios de los vacíos; y despues, cada una de estas partes *ac*, *cb* en otras dos, como en *n*; con lo cual quedarán determinados los vacíos, y espesores de los dientes. El contorno de estos quedará determinado por la curva CM, que es la parte de *cicloide* que engendraría el punto C del círculo primitivo del piñon, al girar sobre la recta EF; y su longitud, por la perpendicular NM que la corta en dicho punto M; y tirando por M la recta LMO paralela con EF, todos los estremos de los dientes se hallarán en la espresada recta; y poniendo á uno y otro lado de los ejes de los dientes, dicha curva CM, se tendrán trazados los dientes de la barra.

Para trazar el contorno D*d* de las alas del piñon, se desarrollará una parte de la circunferencia BCK, por lo espuesto (135), esto es, se hallará la *evolvente* que corresponde á una de las partes del arco BCK, y la longitud *d'd* del diente quedará determinada por el radio Ad' prolongado. Para fijar la magnitud de los flancos del piñon, se trazará sobre la AC como diámetro una circunferencia ASC; la cual cortará á la recta LO en dos puntos, de los cuales señalamos el uno con S: y tomando AS como radio, y desde el centro A, se trazará una circunferencia SQ, que determinará la magnitud CQ de los flancos.

Para determinar la profundidad y forma de los vacíos, se trazará una semielipse YV*l*, tomando la cuerda Y*l* como eje menor, y la distancia V*o* como semieje mayor.

Para trazar los vacíos de la barra dentada, pues esta no lleva flancos, se traza una semielipse *npo* en que la distancia *on* es el eje menor, y la distancia *cp* el semieje mayor. Con lo cual queda terminado este engrane (*).

En comprobacion de lo espuesto (249), pondrémos aquí en uno de los dientes trazados por nuestro método, la curvatura que *Mr. Leblanc* da á los suyos; y aunque su esplicacion es bien confusa, lo que hace se reduce á lo siguiente. Para trazar la curvatura del diente *mrn*, hace centro en *c*, punto medio del hueco inmediato; y con la distancia C*m* como radio traza el arco de círculo *mr* que señalamos de puntos; el cual

---

(*) Mr. *Hachette*, página 202 de su *Tratado Elemental de Máquinas*, dice: que *la curva* RQZX *que corresponde á los vacíos del piñon, es una epicicloide prolongada; y que la npo es una cicloidé prolongada.* Pero, no manifestando las circunstancias de la construccion de estas curvas, nos hemos visto precisados á examinar la forma que deben tener estos vacíos por las consideraciones del movimiento en este caso particular; y nuestaas investigaciones no están acordes con las de Mr *Hachette*; pues las nuestras son las espresadas en el texto. Y habiendo comparado la forma de nuestro resultado, con la figura que pone Mr. *Hachette*, hemos hallado, que las curvas de que él usa, son tambien semielipses como las nuestras. Todo lo que advertimos para que esto se examine con la escrupulosidad que requiere su importancia.

dista bien sensiblemente de la curvatura que corresponde y va señalada con la línea efectiva *mr*. Por manera, que la forma, que corresponde al diente, es la que se halla espresada por las dos líneas efectivas *mr*, y *nr*; y las que pone *Mr. Leblanc* son los arcos de círculo que señalamos de puntos de *m* á *r*, y de *n* á *r*.

259 Por último, si se quisieran truncar los dientes, lo verificaríamos primero con los del piñon: para lo cual, bastaría observar el punto de contacto *e* del diente contiguo al radio primitivo AC con el de la barra dentada; y haciendo centro en A, y con un radio un poco mayor que A*e*, se trazaría una circunferencia; la cual truncaría los dientes del piñon. Para truncar los de la barra, observaríamos que el punto de contacto del diente de la barra con el del piñon, se halla en *i*; y tirando por un poco mas arriba de *i*, una paralela á EF, se tendrian truncados todos los dientes de la barra, en cuyo caso el engrane tendría la forma que se ve en la (fig. 181).

Mr. Leblanc, despues de manifestar el modo de truncar los dientes, análogo á lo que acabamos de hacer, dice por nota, que *el trazado de estos dientes, se puede hacer tambien, describiendo un semicírculo abc* (fig. 181) *sobre el ancho del diente, y despues lo trunca por la línea mn.*

CAPÍTULO V.

Engrane de una barra dentada con una linterna.

260 Habiendo determinado el número de usillos ó bolillos de la linterna, verificaríamos el trazado de los mencionados usillos del mismo modo que lo hemos hecho (256); despues se determinarán por el método esplicado (258) los *centros*, *vacíos* y *espesor de los dientes.* Para determinar la curvatura y magnitud de ellos, se traza la *cicloide*, que engendra el círculo A al girar sobre la recta EF, que sería la DM, cuya longitud quedará determinada por su concurso

con la prolongacion *im* del eje del diente; despues, se haría centro en varios puntos de la DM; y con un radio igual con el de los usillos se trazarán arcos por lo interior, segun lo espuesto (256). Los puntos en que estos arcos sean cortados por las perpendiculares á la tangente tirada á la curva DM, serán puntos de la curva del verdadero diente; despues, por medio de la acordada, se traslada la curva *dm* al otro lado del eje del diente *im*; y se tiene, que *dmc* representa la curva verdadera del diente de la barra. Y si se quisiera truncarlos, se procedería segun lo hemos hecho (259).

CAPÍTULO VI.

Engrane de una rueda y un tornillo sin fin.

261 Ante todas cosas, debemos conocer el número de dientes de que ha de constar la rueda, y la distancia del centro de esta al eje de la rosca ó tornillo sin fin. Sea MN (fig. 183) el eje de la rosca; CL la distancia del centro de la rueda al eje de la rosca, y C*a* el radio del círculo primitivo. Tírese por *a* una recta EF paralela al eje MN de la rosca; y tomando L*o* igual con L*a*, se tirará la G*o*H tambien paralela con la espresada MN; y estas dos líneas EF y GH representarán el cilindro recto primitivo de la rosca. Para trazar la forma de los dientes de la rueda, y el filete de la rosca, se supone, que un plano pasa perpendicularmente por el eje de la rosca, y el plano de la rueda; en cuyo caso, queda reducida la cuestion á construir el engrane de una barra dentada con una rueda; por consiguiente, la curvatura del diente de la rueda será una parte de la *evolvente* del círculo primitivo; y la de los dientes de la rosca, la cicloide que engendra el círculo B*a*D.

262 El grueso ó costado de los dientes no está, como en los engranes anteriores, en planos perpendiculares al del círculo primitivo, sinó que forman una superficie *torcida* (*gaucha*) en direccion de los file-

tes de la rosca, á fin de que presenten el mayor contacto posible, y cuya construccion exige el mayor cuidado en la práctica.

Para manifestar el trazado de los filetes de la rosca, debemos enseñar ántes el modo de trazar la curva llamada *hélice*, que es la que la forma.

Se da el nombre de *hélice* á la curva ACDE (fig. 184) trazada sobre la superficie de un cilindro recto. La distancia AD comprendida entre el punto de orígen, y el en que termina, al haber dado una vuelta completa por la superficie del cilindro, se llama *altura* ó paso de la *hélice*; y como la altura del cilindro puede ser de una magnitud cualquiera, así como el número de vueltas que puede dar la hélice, resulta que dicha curva es *indefinida*.

Para verificar su trazado, se divide la altura ó paso AD en un número cualquiera de partes iguales, pero que sea par, tal como en 16; se divide tambien la circunferencia de la base del cilindro, en el mismo número de partes iguales; y como la mitad AC será la que se presente á nuestra vista, y es igual á la CD, solo harémos el trazado de dicha mitad AC. Para esto, desde cada uno de los puntos de division, comprendidos entre B y C, se tirarán paralelas á la AB; y por los puntos 1,2,3,4,5,6,7 de la semicircuferencia de la base, se tirarán paralelas al eje OC del cilindro; las cuales cortarán á las anteriormente tiradas en los puntos 1′,2′,3′,4′, &c. que serán puntos de la *hélice*; y pasando por ellos un lápiz, ó haciendo uso de las acordadas, quedará trazada la curva AC, que será una *semihélice*; la otra mitad se podría tomar con la acordada; pero, ponemos la construccion en la figura, para mayor claridad.

263 La *rosca* ó *tornillo* puede ser *angular* ó *cuadrada*. Se llama *rosca angular*, cuando sus filetes terminan en ángulo ó arista, como la de la (fig. 185); y *cuadrada* cuando forman plano, como la de la (fig. 183). Se denomina *paso* ó *altura de la rosca* en la angular, á la distancia EC (fig. 185), comprendi-

da entre dos filetes; y en la *cuadrada*, á la *ab* (fig. 183).

264 Para trazar la *rosca angular*, se procede del modo siguiente. Conocido el cilindro primitivo *liil*; y el paso ó altura EC, se divide este en dos partes iguales, y una de ellas será la salida ó vuelo *l*C de la rosca; y se tirarán las CC′, y BB′; en cuyo caso, tenemos dos cilindros CBB′C′,*liil*; y por consiguiente dos diferentes hélices; una C*d* del filete *esterior*, y otra *eo* del *interior*; las cuales se trazan segun lo espuesto en el párrafo precedente: siendo la C*abcd*, la esterior; y la $ea''b''c''o$, la interior; y continuando del mismo modo, obtendríamos una rosca de la longitud que se pueda necesitar.

A fin de que no quede duda alguna en el trazado de esta figura, hemos indicado en ella la construccion de la *hélice*, y señalado con letras homólogas los puntos de correspondencia para mayor claridad.

265 Los filetes de la *rosca cuadrada* se trazan de la misma manera, con la diferencia de que hay *dos filetes esteriores, y otros dos interiores*; y como se hallan en una misma superficie cilíndrica, y son paralelas las hélices, resulta que su trazado es el mismo que el anteriormente descrito, y que indicamos punteado en la (fig. 183), en virtud de hallarse seccionado el tornillo: con lo cual queda completamente trazado el espresado engrane.

CAPÍTULO VII.

Engrane de una rueda coronada y una linterna.

266 Conocido el número de dientes, de que ha de constar la rueda, su diámetro y el de la linterna, como tambien el número de usillos de esta, se procede del modo siguiente.

Sea CA (fig. 186) el radio del círculo primitivo de la rueda coronada, y C′A′ (fig. 187) el de la linterna; trácese con CA una circunferencia MN′ (fig. 186), y con $C'A'$otra $BA'D'$ (fig. 187) para la linterna; y tírese por A' la tangente MN, que será la proyeccion vertical de la circunferencia MN (fig. 186). Verificado esto, trácense los usillos como se ha manifestado (256), y estos determinarán los huecos y espesor de los dientes de la rueda coronada; despues se fijan los centros de dichos dientes en la circunferencia MN de la (fig. 186), y se divide el arco A*b* en 14 partes iguales.

Para trazar la forma de los dientes en proyeccion horizontal, se toman 3 y $^1/_2$ de estas partes, y se colocan á uno y otro lado del centro A: con lo cual tendrémos ya la magnitud *cd*, que será el espesor del diente. Despues, se toman 5 y $^1/_2$ partes; y se colocan en el radio CA, y en su prolongacion, á saber de A á *p*, y de A á *e*; con lo cual, tendrémos el ancho *ep* del diente; se levantan luego las perpendiculares *ei*,*pi*, que cortarán á los radios C*c*,C*d*, en los puntos *i*. Despues se tirará por *b*, una recta *bo*, paralela con CA, y se describirá, haciendo centro en *b*, y con un radio igual al de los usillos, un arco *g*, que cortará á la recta *ho*, en el punto *h*; tómese en seguida el arco *hg*, comprendido entre el punto *h*, y el radio *cb*; y despues de rectificado por lo espuesto (128), póngase de *i* á *j*: y haciendo pasar dos arcos de círculo por los puntos *j*,*c*,*j*, y *j*,*d*,*j*; quedará determinado el contorno del diente. Para obtener su proyeccion vertical, se trazará la cicloide *kl*, que engendra el centro del usillo *k*, al girar la circunferencia $BA'D'$ sobre la recta MN; y trazando con el radio del usillo, y desde todos los puntos de la *kl*, arcos de círculos, se tendrá trazada la curvatura $d'm'$, que debe tener el diente, y la pondríamos desde c' á n', habiendo tirado por *c* y *d*, las paralelas cc',dd', á la CC'. Luego, se tirarían del mismo modo las jj',jj', y se trazarían las mismas curvas. Para truncar los dientes, se vería el parage en que el diente D cortaría á la circunferencia $BA'D'$; y por él se tirará la EF paralela con MN; y quedará concluido el engrane.

CAPÍTULO VIII.

De los engranes de ángulo ó cónicos.

267 El engrane de *ángulo* se denomina tambien *cónico*, en razon á que se considera como compuesto de dos conos que, teniendo un vértice comun, gira uno al rededor del otro, del mismo modo que hemos visto, se verificaba para engendrar la *epicicloide esférica* (153).

268 Para trazar el engrane de *ángulo* ó *cónico*, es necesario conocer el eje de cada una de las dos ruedas, y el diámetro ó radio del círculo primitivo de la una, para poder determinar el de la otra.

269 Sean AS y BS (fig. 188) los ejes de las ruedas y *mn*,*op*, sus radios; se tirarán por *e* y por *n*, perpendiculares á dichos radios, que se cortarán en E; y luego, se tirará la SE. Hecho esto, se tirarán por E perpendiculares prolongadas CE y EO á los ejes SA y SB; y haciendo CD= CE, y OF=OE, y uniendo los puntos D y F con el S, los triángulos SDE, y SEF representarán los conos primitivos, en cuyas bases DE y EF, se trazarán los dientes de las ruedas. En la figura, se representan cortadas las ruedas, á fin de poder hacer sensibles, la magnitud de los dientes y demas partes. Para construir los dientes, supongamos que DH ha de ser su longitud; por los puntos D y H se levantarán á la SD las perpendiculares HK y DA hasta que encuentren al eje SA; desde los puntos A y K se bajarán á la SE las perpendiculares AE y KG; y se prolongarán hasta que encuentren á la SB en L y B: desde estos puntos se levantarán tambien las perpendiculares LI,BF, á SF; con lo cual quedará fija la magnitud de los dientes. Los triángulos HKG,DEA, GLI,EBF comprenderán ó contendrán todos los dientes, cuya altura haya de determinarse. Para lo cual es necesario trazar las *epicicloides esféricas*, que engendrarían un punto cualquiera de los bases de los conos

primitivos, girando respectivamente uno sobre el otro; y ya en este caso, la operacion quedará reducida, á escepcion de la forma de la curva, á lo espuesto en el capítulo segundo.

270 Hemos dicho (153), que en virtud de no tener los conocimientos necesarios, no podíamos entónces verificar el trazado de la *epicicloide esférica*; y como ya los tenemos, y por otra parte necesitamos considerarla para la construccion de este engrane, vamos á esponer el medio de trazarla.

271 Esta curva se origina en el espacio; y por lo mismo es necesario referirla á un plano por medio de sus proyecciones; lo cual se consigue del modo siguiente. Sea CSZ (fig. 101) el cono fijo, y CSD el movible. Prolongarémos el plano de la base CO, con lo cual, tendrémos el ángulo que el plano de la base del cono movible, forma con el del cono fijo; y si haciendo centro en C, y con los radios CD y C*o*, trazamos los arcos AD y oo''', ya tendrémos proyectados en el plano de la base del cono fijo, los estremos y centro de la del cono movible. Si prolongamos la SO, y haciendo centro en O con un radio igual á OC, trazamos un semicírculo, este será la semibase del cono fijo, ó lo que es lo mismo, su proyeccion horizontal; y si volvemos á hacer centro en dicho punto O, y con los radios OC, Oo'', OA, se trazan los arcos $o'''o'$, y A*e*, ya tendrémos la proyeccion de la parte de esfera comprendida entre el diametro del cono movible, y cuya proyeccion contendrá la epicicloide que vamos á trazar.

Supongamos el punto mas alto de orígen en *e*; desde o' y con el radio $o'e$, se trazará un círculo que será el generador; el cual se dividirá, como en la cicloide plana, en un número cualquiera de partes iguales que supondrémos ser 12: y se pondrán dichas partes sobre el arco BG; luego, por B, se tira una tangente y por un punto cualquiera tal como E', se forma un ángulo A'E'D' igual con el ACD, con la circunstancia de ser perpendicular A'E' á la tangente BE'. Despues, se tiran por e, y los puntos de division, tal como 2 del círculo generador, perpendiculares á $E'A'$, tales como ee', $2s$&c.; y se trasladan á la $E'D'$, por medio de los arcos $e'e''$, ss',&c. y por dichos puntos e'', s', se bajarán perpendiculares al diámetro Be; y teniendo cuidado de hacer igual operacion con el centro o', el cual dará el punto m, despues de hecha la construccion anterior; y por m y desde O como centro se describirá un arco. El punto e'' hemos visto que es correspondiente al estremo del diámetro del círculo generador en el punto B, que es el mas elevado de la curva, de lo cual resulta que su proyeccion e''' será el punto mas elevado de la curva.

272 A fin de evitar confusion, harémos la construccion de dos puntos, y sean los correspondientes al punto 2 y 5 del arco BC; por ellos se tirarán los radios O2,O5, prolongados hasta que encuentren al arco mq; hecho esto, por el punto 2 del círculo generador, tírese una paralela al diámetro Be, hasta que encuentre á la línea $s'v$, proyeccion correspondiente al punto s' en un punto tal como v; y por él, se tirarán líneas á la proyeccion del centro del círculo generador y punto del contacto de dicho círculo con el Be, ; con lo cual quedará formado un triángulo Bvm. Hecho esto, se construirá un triángulo igual al descrito sobre $2q$, que es igual con Bm, por ser paralelos estos arcos; y haciendo $qv'=mv$, y $2v'=Bv$, el punto v' será un punto de la epicicloide esférica. Haciendo lo mismo por los demas puntos 1, 3,4,&c. y pasando por ellos un lápiz &c.se tendrá trazada la curva $iz'xv'e'''$, que es la epicicloide esférica. El punto z, que corresponde á la quinta division del círculo generador Be''',como cae tan próximo al arco, no se distingue la paralela tirada por dicho punto; pero se percibe bien el triángulo, y á fin de no faltar á la claridad, hemos construido tambien el correspondiente al punto 1, como se ve en la figura.

273 La epicicloide esférica tambien puede ser *prolongada y acortada*, si se verifican las mismas cir-

cunstancias que en la epicicloide plana. Sea el círculo dQ el correspondiente á la *prolongada*; y co' el de la *acortada*. Para trazar la prolongada, lo primero que harémos será determinar su punto mas alto: lo cual conseguirémos proyectando el punto Q en D', y despues en D''; con lo cual quedará ya determinado el punto D'' que será el mas alto de la curva. Luego, se divide el círculo dQ en las mismas partes, y homólogamente colocadas que en el círculo Bc. Despues, para determinar ó construir sus puntos, supongamos que queremos construir un punto cualquiera tal como $2'$; se tirará la $2n$ perpendicular á $A'C'$, y se trasladará á r; luego, desde r, se bajará la rr', perpendicular á Bc; se prolongará el lado mv del triángulo Bvm, que se trazó para construir el punto homólogo 2 de la epicicloide ordinaria, hasta que corte á la rr' en un punto tal como r', y se tirará la $r'B$: despues se prolongará igualmente en el triángulo $qv'2$, el lado qv', hasta que sea igual con mr', y $2r''$ igual con Br', y el punto r'' será un punto de la epicicloide prolongada; y construyendo los demas del mismo modo, obtendríamos la construccion de la epicicloide prolongada HGPD$''$.

274 Para construir la *acortada*, haríamos la misma aperacion; con lo cual resultaría, que los triángulos que determinan su construccion, serían menores que los de la ordinaria, y cuya construccion no verificamos á fin de no confundir la figura; y porque no tiene una aplicacion tan inmediata como las anteriormente descritas.

275 Obtenida ya la curvatura del diente, se opera como en el engrane de una rueda y un piñon (fig. 174); sustituyendo en vez de la curva Cq', la epicicloide esférica, que engendraría el cono SDE (fig. 188) al girar sobre el cono SEF; y por la Cdp (fig. 174), la que engendraría el cono SEF (fig. 188) al girar sobre el SDE; y tomando por radios para la circunferencia B (fig. 174) al CE (fig. 188); y para la del círculo A (fig. 174), al OE de la (fig. 188); y

despues de trazado el engrane, se truncarían los dientes segun lo hicimos en la (fig. 175); y se transportarían al canto de las ruedas, segun queda dicho (269). Despues, se tomará la altura del diente del piñon, y se pondrá de E á *a*, y de F á *d*; y uniendo dichos puntos *a* y *d* con el S, la magnitud y forma del diente del piñon quedará determinada. Del mismo modo, se toma la altura que se haya encontrado para el diente de la rueda; y se pondrá de D á *b*, y de E á *e*; y se unirán estos puntos con el S. Luego, se tomarán las profundidades que deberán ser un poco mayor que los dientes, y se obtendrá la Ec para la rueda, y la E*i* para el piñon; con lo cual, el engrane quedará concluido.

276 En la práctica dice *Mr. Leblanc, se sustituye, en vez de la epicicloide esférica, por lo embarazoso de su trazado* (que él omite), *la epicicloide plana que engendraría el círculo trazado sobre* BE *como diámetro al girar sobre el círculo cuyo radio fuese el* AE, *y vice-versa*. Pero, aun cuando esto no difiriese mucho de la verdadera forma, de ningun modo aconsejamos se ejecute sinó cuando las ruedas hayan de ser sumamente pequeñas.

CAPÍTULO IX.

Engrane de los mazos y álabes.

277 Cuando una rueda cilíndrica mueve los mangos de los mazos, con un movimiento rectilíneo alternativo, entónces los dientes de la rueda toman el nombre de *álabes*.

En la (fig. 189) se representa un mazo AB visto de frente; el cual tiene un espacio hueco *abcd*, para que por él se introduzca la parte que lo ha de levantar. Supongamos, que teniendo un mazo de esta forma, querémos imprimirle un movimiento de abajo hácia arriba en la direccion de AB, para que luego, al caer, machaque ó macere lo que se ponga en su parte inferior.

En la (fig. 190) se representa el mazo AB de la (fig. 189) por A'B'; y por *abcdef* un árbol, que tiene los álabes A,B,C,D,E,F, cuyos centros ó ejes son las líneas O*a*,O*b*,O*c*,O*d*,O*e*,O*f* y PQ el eje del mazo; desde el punto O se bajará una perpendicular O*o* á la línea PQ; y con el radio O*o* se trazará una circunferencia *osto*; y por el punto *r*, en que el radio O'*a* corta á la recta PQ, haciendo centro en O, y con un radio O*r* se trazará otra circunferencia que determinará la longitud de los *álabes*. Para determinar la curvatura ó forma que deban tener los álabes, es necesario fijar de antemano su grueso, segun el peso que han de levantar, ó esfuerzo que han de hacer. Supongamos que *gl* sea dicho grueso en su parte mayor; para trazar la curva, se desarrolla una parte de la circunferencia *osto*; y se pone desde *g* á *l*, la parte de evolvente *ghl* hasta que encuentre en *x* á la circunferencia MNS, y dicha porcion *ghl* espresará la curvatura del álabe, que llevada sobre los demas álabes, se tendrán las de todos ellos. Despues, por el punto *l*, y el centro O, se tirará el radio O*l*, prolongado hasta que encuentre á la circunferencia MNS en un punto tal como *x*; luego, se une el punto *l* con el *x*, por una curva *xil* que se suaviza sin garrotes por la parte esterior de dicha circunferencia, formando una curva continua con la *ghl*. Despues, se tirará por un punto *m* distante un poco de *g* la recta O*m*; se une el punto *m* con el *g* por medio de otra curva, procurando que no forme garrote con la *ghl*; y el engrane queda terminado.

Cuando se han de poner en movimiento muchos mazos, como se verifica en los batanes, molinos de pólvora &c., los álabes se colocan en un cilindro, formando una hélice para que ejerzan su esfuerzo con uniformidad.

CONCLUSION.

278 Terminarémos esta seccion y esta obrita, dando á conocer la necesidad é importancia de que el

engrane sea lo mas justo posible, sin que el desengrane halle obstáculos; pues ántes de que se separen los dientes que obran, es indispensable que ya otros hayan engranado, para que el movimiento de las ruedas se efectúe uniformemente y con toda la suavidad que sea posible.

En efecto, supongamos que se tengan dos ruedas R y *r* (fig. 191), y que en el instante en que el diente D de la rueda R, empujando al diente *d* de la rueda *r*, se escapa, el diente D′ no haya alcanzado todavía al diente *d′* de la rueda *r*. Entónces, resulta que la rueda *r* queda libre; y toma un movimiento retrógrado hasta que el diente *d′* encuentre al D′: verificándose un choque, y por consiguiente pérdida de fuerza motriz, y detrimento en la máquina.

Del mismo modo se verificaría en las (figs. 192, 193 y 194), donde se observa que, al desengranar un diente, no tiene otro que esté ya empezando á obrar; lo cual es sumamente perjudicial á la máquina. Por este motivo aconsejamos el mayor esmero en la delineacion y construccion de los engranes; y esta es la razon que nos ha estimulado á no omitir diligencia que pueda conducir á perfeccionarlos. ¡Ojalá que las utilidades que produzca esta obrita sean proporcionadas al conato y esmero que hemos puesto en su composicion y publicacion!

FIN.