ARITMÉTICA GENERAL

MARIANO NÚÑEZ SAMPER, EDITOR

SUCESOR DE JUAN MUÑOZ SÁNCHEZ

ARITMÉTICA GENERAL

POR

EDUARDO BENOT

Io ho meno in mente di persuadere che di far pensare.

CIALDI.

TOMO TERCERO

ADMINISTRACIÓN

CALLE DE DON MARTÍN, NÚM. 13

TELÉFONO NÚM. 3.197

MADRID

IMPRENTA DE PEDRO NÚÑEZ, PLAZA DE SAN JAVIER, 6.—ROLLO, 9.

PARTE SEGUNDA

SECCIÓN PRIMERA

ARITMÉTICA MÓDULAR

ó

ARITMÉTICA DE LOS CUOCIENTES

PRÓLOGO

Esta SEGUNDA PARTE es la más intrincada (no la más difícil) de la Aritmética, y en ella acaso es más necesaria aún que en la PRIMERA la fijeza en los principios, así como la sanidad de criterio para la recta interpretación de los resultados.

La confusión causada por el impropio uso de la llamada «*unidad concreta*» apenas es concebible por quienes no hayan mirado como profesión la enseñanza, ó no hayan tenido que habérselas con las rutinas, hasta de maestros muy eruditos. El enjambre de inadecuadas expresiones, de conceptos falaces y de nociones mal definidas que se encuentra en los libros (1), y que sin criterio fijo prohijan muchos y buenos pro-

(1) Leo en una obra muy estimable, donde, por lo mismo, es más de extrañar la inexactitud:

Para reducir á pesetas el coste de 24 varas de paño á 83 reales una, se multiplican los reales por las varas y se parten por los reales que tiene la peseta.

Pero ¿cómo se multiplican reales por varas? ¿Qué quiere decir repetir 83 reales 24 varas de veces? ¿qué sentido tiene partir varas por reales?

Otro texto del mismo libro:

La raíz cuadrada de 2 ($\sqrt{2}$) aproximada hasta las diezmillonésimas es 1,4142135.

Pero si el 2 carece de $\sqrt{\ }$ ¿cómo la tiene aproximada? ¿cómo no ver que 1,4142135 es la raíz exacta de 1,99999982358225, y no la raíz aproximada de 2?

Ciertamente que el número fraccionario 1,4142135 distaría poco de $\sqrt{2}$ si 2 tuviese raíz: podrá, por esto, en la práctica, considerarse al 1,4142135 como un número que, multiplicado por sí mismo, da casi el 2 (por dar un número que casi es 2; pero el rigor matemático no puede consentir el que se diga que $\sqrt{2}$ es 1,4142... ni aproximada ni exactamente, porque no hay número ninguno que multiplicado por sí mismo dé 2.

Y no vale decir, para exculpar al autor, que sus expresiones deben entenderse como sinécdoques de las verdaderas, á semejanza de cuando decimos *un vaso de agua*, sabiendo que el vaso no está hecho de agua... No; el autor dice en otra parte: «multiplicar por ½ es tomar una cosa *media vez*. (!!!)

fesores, alarma á los que miramos las matemáticas, más que como una de las conquistas prodigiosas de la humanidad, como el medio por excelencia para infundir en las generaciones la aptitud intelectual que espontáneamente aparta de las falacias del error dialéctico á los entendimientos sanos.

La imaginación, facultad de prodigios, que en las regiones del espíritu ve las cosas antes de que aparezcan en la realidad, es sin duda la creadora de todos los progresos; pero sólo cuando va guiada por una inteligencia clara y poderosa. Y nada como la disciplina matemática para escuela de dialéctica (1).

He dicho esto de modo tan absoluto, que debo fijar con la mayor precisión los límites de estas aseveraciones.

Existe una preocupación arraigadísima en muchas personas notables: «no hay cosa (dicen) que más desarrolle la inteligencia que las matemáticas»: ¡craso error!

Lejos de ser favorables á un desarrollo completo, extenso y enérgico de la inteligencia, retienen al que á ellas se entrega EXCLUSIVAMENTE, en un círculo reducidísimo de razonamientos. Nótese que digo «exclusivamente». El matemático exclusivo no dirige su atención sino á consideraciones de *número*, *extensión y cantidad*, y nunca ejercita las potencias más necesarias en la práctica de la vida, tales como la observación, la comparación, la generalización, el análisis, la inducción. Saben mucho cálculo, y desdeñan hasta el saber hablar y escribir. ¡Qué mal redactan algunas obras que tratan de cosas admirables! ¡Con qué sinrazón menosprecian las artes! ¡Y hasta las ciencias naturales!!! ¡A cuán pocos matemáticos es dado el divino don del inventar!!!

«Nada es menos aplicable á la vida que un raciocinio matemático», dice Mad. de Stael.

Dialécticas puramente las verdades matemáticas, y NO CRÍTICAS, simples, universales é invariables, con una precisión de lenguaje pasmosa, sus demostraciones no dan apenas lugar á esos sofismas contra los cuales tiene el sabio que ar-

---

(1) Esta Introducción (como toda la obra), no va dirigida á quien no tenga alguna idea de los quebrados en general. Hoy casi todos la tienen por lo extendido del sistema métrico-decimal; pero quien no estuviese convenientemente preparado puede volver á leer este prólogo terminado este primer Libro.

marse de todos sus conocimientos, escoger, comparar, pesar probabilidades, responder á objeciones, abrirse sendas y caminos nuevos, ser, en fin, ingeniero y obrero á la vez con mente aguda y miembros robustos. Bernhardi, Weiler, Klump, Wolf, Basedow, Niemeyer, Descartes, Pascal, Destutt-Tracy, Dupanloup, Berkeley, Warburton, Walpole, Gibbon, Dugald Stewart, y otros muchos citados en la REVISTA de Edimburgo, número CXXVI, se han declarado contra la supuesta cultura intelectual debida *exclusivamente* á las matemáticas. Las matemáticas, sin embargo, hacen un bien inmenso. Hacen que el ser intelectual no se contente con las apariencias dialécticas de la verdad, sino con la verdad dialéctica misma; y, en este sentido, nada hay que iguale á la disciplina de las matemáticas: ¡nada! ¡absolutamente nada! Pero esto no tiene que ver con el fondo de la cuestión: la cultura y desarrollo de la inteligencia.

Si no son posibles en la dialéctica matemática los errores que se deslizan en otras ciencias, esa misma precisión dialéctica la ha hecho caer en ERRORES CRÍTICOS tan formidables que conducen en línea recta á absurdos evidentes. Y, sin embargo, ¡oh ceguedad hacia el método! esos absurdos son devorados sin examen por la mayor parte de los matemáticos ó con una sangre fría y un casi placer que pasma y descorazona. ¡Ah! Huyamos de los hombres que sólo saben sacar científicamente consecuencias, y que, ciegos, creyentes, no aquilatan jamás la solidez de los principios de la ciencia que han abrazado.—«La suma está buena; luego los sumandos son verdaderos.» No: pueden ser falsos los sumandos y la suma estar bien hecha: tendremos entonces una verdad dialéctica, pero no una verdad crítica: para que una operación sea admisible, es preciso que los sumandos sean críticamente exactos y que no haya equivocación en la operación dialéctica del sumar.

Las matemáticas son, por tanto, la más acabada gimnasia de dialéctica; pero nunca escuela de las realidades de la vida.

Porque ¿dónde existen ó pueden existir los objetos de la geometría? ¿dónde hay superficies sin profundidad, líneas sin latitud, puntos sin dimensiones? ¿Dónde existirá jamás una esfera ideal?...

Los hombres de las matemáticas no trabajan con cosas reales, sino con entidades del entendimiento; y, por tanto, el estudio exclusivo de la ciencia del cálculo, no es el más apropósito para el desarrollo íntegro de las facultades intelectuales.

Por otra parte, la índole misma de los módulos de medir acostumbra á los matemáticos á concesiones reñidas con el rigor científico. Por la falibilidad de nuestros sentidos y la imperfección de nuestros pesos y medidas (balanzas, metros, instrumentos de reflexión..., etc.), sabemos que en toda magnitud queda siempre mal medida una porción imperceptible (ya en más, ya en menos); de modo que los números expresivos de nuestras mediciones nunca resultan exactos, por más que así se estimen.

Cuando una longitud nos aparece de 5 centímetros, tenemos perfecta seguridad de que el largo en cuestión estará entre 4,9 y 5,1; ó bien entre 4,99 y 5,01;... ó bien entre 4,9999 y 5,0001;... conforme al esmero y minuciosidad de la operación y á la precisión y finura de los aparatos de medir.

En la Aritmética modular hay que llevar á esa práctica todos los principios de la Aritmética pura, y, además, tener en cuenta las modificaciones que en los principios introducen las propiedades geométricas, físicas y mecánicas... de los módulos.

En la Aritmética pura los números no son susceptibles más que de las dos operaciones fundamentales; á saber:

Las de SUMAR y RESTAR, esto es, las de agregarlos y disgregarlos (1).

Estas dos operaciones pueden abreviarse en las de MULTIPLICAR y PARTIR, y las MULTIPLICACIONES y DIVISIONES pueden presentar los importantes casos especiales llamados INVOLUCIÓN y EVOLUCIÓN.

De modo que la clasificación de los diferentes modos de operar con los números puros es (Libro I, Parte I, Lec. III)

(1) Como la composición por suma de los números puros empieza por la unidad pura, claro es que en la disgregación por resta, en llegando al uno termina la operación de disgregar.

Operaciones fundamentales.	Abreviaciones.	Graduaciones.
Suma.	Multiplicación.	Involución.
Resta.	División.	Evolución.

En Aritmética modular pueden hacerse también todas estas operaciones

Suma.	Resta.
5 varas.	31 varas.
+ 6 varas.	— 20 varas.
+ 20 varas.	= 11 varas.
= 31 varas.	

Suma de sumandos iguales.	Abreviadamente.	Restas sucesivas de sumandos iguales.	Abreviadamente.
5 varas.	5 varas.	15 varas.	15 varas | 5 varas
+ 5 varas.	× 3 núm. puro.	— 5 varas.	.. | = 3
+ 5 varas.	= 15 varas.	= 10 varas.	
= 15 varas.		— 5 varas.	
		= 5 varas.	
		— 5 varas.	
		= cero varas.	

Potencias.	Raíz.
5 varas.	125 varas | 5 núm. puro.
× 5 número puro.	... | = 25 varas. | 5 núm. puro.
= 25 varas.	.. | = 5 varas.
× 5 número puro.	
= 125 varas = 5^3 varas	$\sqrt[3]{125 \text{ varas}} = 5$ varas.

Además pueden hacerse en Aritmética modular

Operaciones con números fraccionarios, y

Operaciones con números aproximados á ciertos límites.

Nada más frecuente que las operaciones con números fraccionarios en la Aritmética modular.

Para medir una cosa continua, siempre los pueblos adelantados han escogido otra conocida de su misma especie: el codo, el pie, el paso, la braza,... módulos destinados á computar longitudes; el día para determinar espacios de tiempo;... el siclo, el óbolo, la peseta, para determinar valores,... etcétera.

Pero tales módulos se encontraron muy pronto inadecuados para medir cantidades menores que ellos: ¿cómo los estatuarios griegos iban á medir por pasos ó por codos las facciones humanas, ojos, boca, nariz, orejas? ¿Quién puede medir por días los latidos del corazón?...

O se buscaban otros módulos nuevos muy pequeños, ó se dividían en partes iguales los grandes anteriormente escogidos. De estos dos recursos, el segundo, naturalmente, obtuvo la preferencia, por ser mucho más fácil familiarizarse con unos pocos módulos y sus partes, que no con muchos, y ser de conveniencia evidente tener relacionados los módulos menores con los mayores. Así, la vara estaba dividida en 2 medias varas, ó en 3 tercias, ó en 4 cuartas, ó bien en 3 pies; cada pie ó cada tercia en 12 pulgadas y cada cuarta en 9; cada pulgada en 12 líneas;... el día se dividió en 24 horas, la hora en 60 minutos, el minuto en 60 segundos;... el quintal en 4 arrobas, la arroba en 25 libras, la libra en 2 medias libras, ó en 4 cuarterones, ó bien en 16 onzas;... el duro en 2 medios duros ó en 5 pesetas, la peseta en 2 medias pesetas ó en 4 reales, el real en 2 medios reales, ó en 4 cuartillos de real, ó bien en 34 maravedises, etc., etc.

Pero ¡cuán lento es el progreso!

Llegar á tener módulos y submódulos admisibles ha sido obra de siglos. Y ¡cuánto no tardó todavía el desarrollo del sistema gráfico que indicase convenientemente si medíamos con un módulo ó con alguna de sus partes! Al cabo se inventó un modo claro y sencillo de representar las magnitudes pequeñas relacionadas con las grandes adoptadas generalmente para medir.

El número de partes en que se consideraba dividido un módulo se escribió bajo una rayita horizontal;

$$\frac{\ }{2}, \quad \frac{\ }{3}, \quad \frac{\ }{16}, \quad \frac{\ }{100};$$

y sobre la rayita horizontal se anotó el número de veces que la cosa medida contenía al submódulo.

Así la magnitud de media onza de oro se escribió........ $\frac{1}{2}$ onza

la de tres cuartos de real se indicó.................. $\frac{3}{4}$ de real

la de 7 onzas.. $\frac{7}{16}$ (de libra)

la de 30 céntimos de peseta........................ $\frac{30}{100}$ etc.

Llamóse denominador al número escrito bajo la raya; numerador al anotado encima, y quebrado ó fracción á la expresión en conjunto.

Al cabo se observó que los módulos y submódulos convenidos no bastaban para todas las necesidades de la práctica. Por ejemplo, entre miles; para obtener el buen bronce estatuario había que saber dividir la libra en 100 partes, y conocer así las proporciones convenientes de la aleación. La notación de los quebrados se generalizó con esta clase de cuestiones; y las proporciones de la fundición de que se trata encontraron expresión adecuada como sigue:

Cobre.........	$91 \frac{4}{10}$
Zinc...........	$5 \frac{53}{100}$
Estaño........	$1 \frac{7}{10}$
Plomo........	$1 \frac{37}{100}$

Al fin se vió la conveniencia de que las fracciones tuviesen todas denominadores iguales, ó bien denominadores que fácilmente pudieran hacerse iguales unos á otros. De aquí la invención de los quebrados decimales, en que el respectivo módulo se halla siempre subdividido en diez partes, ó en 100, ó en 1000, ó en una potencia conveniente del 10. Como en tal suposición los denominadores son iguales, éstos se suprimen. Y, así, la aleación anterior resulta expresada como sigue:

Cobre.........	91·40	O bien, en virtud de convenios que luego se darán á conocer.........	Cobre.........	91·4
Zinc...........	5·53		Zinc...........	5·53
Estaño........	1·70		Estaño........	1·7
Plomo.........	1·37		Plomo.........	1·37

Con los quebrados pueden, pues, hacerse todas las operaciones de *sumar* y de *restar*, de *multiplicar* y *dividir*, así como las de *involución* y *evolución*.

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{3}{4} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{3}{4} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{3}{4} \\ \hline =2 & =3 \end{array}$$

Pero esto requiere explicaciones detalladas, que más adelante encontrarán sitio oportuno.

A la Aritmética pura no incumbe el efectuar estas operaciones fraccionarias, por ser indivisible el UNO, principio y base de la escala de la pluralidad.

(Véanse Lecciones I y II del Lib. I de la Primera parte.)

Tampoco á la Aritmética pura incumbe el efectuar las operaciones de aproximación, que, si nunca dan los números que se buscan, por imposibilidad intrínseca, producen otros tan inmediatos que casi con los pedidos se confunden.

De esto se tratará en el Libro de los INCONMENSURABLES.

Si alguien pensase que la Aritmética modular era superior á la Aritmética pura por serle dado efectuar cierta clase de operaciones, que no son de la incumbencia de la Aritmética pura, caería en un error semejante al de quien juzgara que en la locomotora la máquina por cuya acción se mueven las ruedas motrices, era superior á la combustión de la hulla, que convierte en vapor el agua de la caldera tubular.

Ante todo ha de observarse que los números modulares no serían nada sin el concepto del número puro. Alguien podrá decir que en una población se comen carnes frescas, ó que un labrador tiene trigo en su granero, ó que un propietario necesita ladrillos para una fabricación especial;... pero de la importancia de la población nadie se formará idea hasta saber el cuánto de las reses diariamente sacrificadas en el matadero, por ejemplo, 32 vacas y 17 carneros; ni se juzgará del trigo hasta conocerse que el grano almacenado asciende á 1400 fanegas, ni del valor de los ladrillos cabrá cálculo alguno hasta averiguarse que hacen falta 35 millares, v. g. Sólo por medio de los números puede formar uno mismo y hacer formar á los demás concepto adecuado del cuánto de las cosas.

Y no digamos nada de que los números modulares se hallan sujetos á las mismas reglas de la numeración de los números puros, y que el sistema de su generación se encuentra en la Aritmética pura, cuyas reglas trascienden así constantemente á la Aritmética modular.

Lo importante y de esencia es hacer ver que la Aritmética modular es una combinación ineludible de las dos Aritméticas.

Pueden sumarse y restarse cantidades modulares solas (aunque obedeciendo á las reglas de la suma y la resta de los números puros).

	5	pesetas.			
+	17	pesetas.		243	pesetas.
+	224	pesetas.	—	224	pesetas.
=	246	pesetas.	=	22	pesetas.

Pero no pueden hacerse las operaciones de multiplicar ni de dividir números modulares, ni mucho menos las de elevar á potencias ni de extracción de raíces, sin la intervención directa de la Aritmética pura y del número puro.

¿Qué es multiplicar? Sumar sumandos iguales.

	5	huevos.			
+	5	huevos.		5	huevos, número modular.
+	5	huevos.	×	3	número puro.
=	15	huevos.	=	15	huevos.

5 huevos, multiplicando; repetido 3 veces, multiplicador; pero no 3 multiplicado 5 huevos.

En toda multiplicación uno de los dos factores solamente (el multiplicando) puede resultar número modular. El otro factor (el multiplicador) tiene forzosamente que ser (y siempre lo es) número puro, porque representa el número de veces que el otro factor fué repetido como sumando en la correspondiente suma matriz.

El multiplicador, así, no puede ser jamás número que tenga propiedades geométricas, físicas, mecánicas,... porque siempre representa *número de veces*, siempre *repetición*.

Por tanto, en Aritmética modular no es cierto que el multiplicando pueda hacer de multiplicador y el multiplicador de multiplicando. 10 cántaras multiplicadas por 7, esto es, 10 cántaras repetidas 7 veces, son 70 cántaras. Pero carece de sentido repetir el 7 hasta 10 cántaras de veces.

El elemento *número de veces* ó *número de repeticiones*, es el elemento *imprescindible* en toda cuestión de multiplicar, por ser *de esencia* la repetición en toda suma de sumandos iguales.

Y, por tanto también, la repetición es la esencia del número.

$$1+1=\underset{=1\times 2}{2}\ ;\ 1+1+1=\underset{=1\times 3}{3}\ ;\ 1+1+1+1=\underset{=1\times 4}{4}\ ;\ 1+1+1+1+1=\underset{=1\times 5}{5}\ ;\ \text{etc.,}$$

Todos los grados de la escala de la pluralidad se forman, pues, por las repeticiones sucesivas del 1, y el número en sí es en esencia la expresión de tales repeticiones (1).

Si la repetición es de esencia en toda operación de multiplicar, también tiene que serlo en toda cuestión de dividir. En efecto, ¿qué es un cuociente? El número de veces que se repitió un sumando conocido para producir una suma que se nos da.

3 naranjas;	dada la suma 15 y el sumando 5, averiguar el número de veces que fué necesario repetir el 5 para obtener el 15.
+ 3 naranjas;	
+ 3 naranjas;	
+ 3 naranjas;	
+ 3 naranjas;	
= 15 naranjas.	

$$\text{15 naranjas}\ \Big|\ \frac{\text{3 naranjas}}{=\text{5 veces, número puro (2).}}$$

(1) Así tenían razón los que en otros tiempos negaron que el uno fuese número. Y con mayor razón el cero.

(2) El problema se enuncia también en estos términos. (Véase Lec. IV de las PROPORCIONES.) Yo sé que repetido 5 veces un cierto número de co-

Si el número de repeticiones es elemento esencial del multiplicar y el dividir, ¿habrá que detenerse á demostrar que también lo es de la involución y la evolución, ó sea del elevar á potencias y del extraer raíces?

Ahora bien; siendo todo número puro una expresión de las repeticiones del uno necesarias para formarlo;

Siendo la repetición elemento esencial del multiplicar y del dividir;

Siéndolo, con mayor razón, del elevar á potencias y del extraer raíces;

Resulta que la Aritmética pura es el fundamento y la esencia y la sanción de la Aritmética modular, y que ésta es sólo el cuerpo de doctrina de las modificaciones que en los principios primordiales introducen las propiedades geométricas, físicas y mecánicas de los módulos.

(Véase el Apéndice á la Lec. I de los INCONMENSURABLES.)

---

sas (naranjas, por ejemplo), se obtuvo la suma de 15 naranjas: ¿cuál fué el número de naranjas repetido?

15 naranjas	5 veces
	= 3 naranjas.

Aunque parece haber contradicción en partir cosas heterogéneas (naranjas por veces), no la hay en realidad, porque el problema verdaderamente no se resuelve por la Aritmética modular, sino por la Aritmética pura, donde el orden de los factores no altera el producto; y, obtenido el cuociente, se interpreta luego de modo que pueda ser aplicado á la Aritmética modular, dándole el sentido de que carece. Distribuír cosas en grupos de ellas es cosa que no ofrece dificultad; pero ¿qué puede significar, sin comentario previo, distribuír cosas en veces?

PRENOCIONES [1]

Los números expresan:

1.º La repetición (2);

2.º La repetición de objetos discontinuos (3);

---

(1) Repásese antes de estudiar esta Lección la II del Libro I de la Primera parte.

(2) Una vez; 1 vez+1 vez=2 veces=1×2
1 vez+1 vez+1 vez =3 veces=1×3
1 vez+1 vez+1 vez +1 vez =4 veces=1×4
1 vez+1 vez+1 vez +1 vez +1 vez =5 veces=1×5
Etc., etc.

1, principio de la escala de la pluralidad;

$$1+1=2 \quad =1\times2$$
$$1+1+1=3 \quad =1\times3$$
$$1+1+1+1=4=1\times4$$
$$1+1+1+1+1=1\times5 \text{ etc., etc.}$$

La esencia del número puro es, pues, el concepto abstracto de repetición, sin referencia á objeto ni acto ninguno de la realidad.

(3) Un árbol; 1 árbol+1 árbol=2 árboles..... =1 árbol ×2
1 árbol+1 árbol+1 árbol=3 árboles .... =1 árbol ×3
1 árbol+1 árbol+1 árbol+1 árbol=4 árboles.............. =1 árbol ×4, etc.

Una estrella; 1 estrella + 1 estrella = 2 estrellas........................ =1 estrella×2
1 estrella + 1 estrella + 1 estrella=3 estrellas.............. =1 estrella×3
1 estrella+1 estrella+1 estrella +1 estrella=4 estrellas ..... =1 estrella×4, etc.

La esencia de los números expresivos de conjuntos naturales es la repetición de objetos discontinuos.

3.° La repetición de objetos continuos, elegidos para módulos de medir (1).

(Véase el EPÍLOGO de toda esta obra, donde el número se estudia en todos sus conceptos.)

Luego todos los números son SUMAS DE SUMANDOS IGUALES;

O bien del 1, principio de la escala de pluralidad,

O bien de un objeto discontinuo (v. gr., una estrella),

O bien de un módulo (por ejemplo, un kilogramo).

Luego todos los números son PRODUCTOS.

El 1, principio de la escala de la pluralidad, es indivisible. No tiene sentido el decir: «he hecho una cosa media vez, una cuarta parte de vez.» Ninguna propiedad externa de largo, ancho ó grueso, ni de olor, sabor, color ó sonido, ni la del tiempo invertido, ni las circunstancias del acto ó de los actos necesarios para ejecutar algo una vez, dos veces, tres, cuatro... ni ninguna clase de condiciones físicas, mecánicas,... etcétera, se tienen en cuenta en el concepto de repetición. Por ejemplo: en la expresión

Yo no he hecho versos franceses más que tres veces en mi vida,

el concepto de repetición no abarca ni la idea de verso, ni la de lengua francesa, ni la de ninguna otra circunstancia de tiempo, ni lugar, etc.

Los objetos *naturalmente* numerables no son iguales casi nunca (2).

---

(1) Un kilogramo es un peso artificialmente elegido para medir objetos pesados;

Un minuto es una duración artificialmente elegida para medir otras duraciones;

Un metro es una longitud artificialmente elegida para medir longitudes; etc., etc.

1 metro + 1 metro + 1 metro + 1 metro + 1 metro + 1 metro = 1 metro × 6, etc.

La esencia de los números expresivos de mensuras es la repetición de los módulos de medir.

(2) Los unos naturales discontinuos sólo son análogos por sus funciones ú otras cualidades no aritméticas. Es lo contrario precisamente de lo que pasa con los unos artificiales de mensura: todos son iguales en sus cualidades aritméticas, largo, ó largo y ancho,... ó peso,... etc. Un decímetro puede ser de madera, ó de marfil, ó de vidrio,... pero no puede diferir de los demás en largo. Un kilogramo puede ser de hierro ó de cobre, ó de oro,... pero todos los kilogramos han de pesar lo que cierto volúmen de agua en ciertas condiciones; todas las pesetas son iguales, etc.

Los dedos de las manos (que nos han enseñado á contar) son patentemente desiguales. Las estrellas brillan con diferente intensidad y diferente color. ¿Qué árbol hay igual á otro? ¿En qué regimiento son iguales los soldados? Esta página tiene muchos renglones y ninguno iguala al otro; sus letras y sus claros son, en todo caso, diferentes. Pues ¿en qué se parece una letra cualquiera á la letra expresiva de otro sonido? ¡Y, sin embargo, letras son todas! Los objetos discontinuos son fraccionables: *media manzana*, *medio melón*. Pero con frecuencia no se toman como tales. ¿Qué podría significar la frase: «en el cielo brillaba media estrella»? ¿Qué significaría «medio soldado», «medio marinero»?...

Por el contrario, los módulos de medir (inventados por el hombre) han de ser todos iguales; y, si no lo son enteramente, no hay que culpar al designio, sino á las imperfecciones de la ejecución. Cuando se dice que un cuerpo pesa tantas libras, se entiende que todas las libras son idénticas. Cuando recibo 11 pesetas, es porque las estimo iguales: de cierto que todos rechazarían á la que resultase falta de peso, ó falta de ley. Todos los módulos se dividen y subdividen en partes iguales. La hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos: el metro en 10 decímetros, en 100 centímetros y en 1000 milímetros. A veces se perciben las divisiones y subdivisiones del módulo, otras no. En una vara de medir se ve la vara, y además se ven los pies, y las pulgadas: en un kilogramo no hay manera de percibir separadamente cada uno de los gramos.

Así, pues, el concepto puro de 1 es indivisible.

Los unos discontinuos no son iguales. Ni aun necesitan ser de la misma especie, como *las flores de un jardín*. A veces ni aun se los estima como fraccionables.

Los módulos de medir son siempre fraccionables y siempre enteramente iguales entre sí.

Han de ser, además, de la misma especie que los objetos medidos. El largo de un paseo no se mide por kilogramos... (1).

(1) Indirectamente cabe medir cantidades heterogéneas con los módulos del sistema métrico decimal. Si se conoce el volúmen del agua contenida en un decímetro cúbico se conoce también su peso: un kilogramo. Si se sabe que varias *perras grandes* pesan medio kilogramo, se conoce su

La idea de unidad pura es idéntica para todos los hombres á quienes es dado llegar al sublime concepto del número puro, independiente de toda propiedad geométrica, física, química ó mecánica; y no conoce razas ni nacionalidades. Lo mismo el europeo que el americano,... el blanco que el negro,... los hombres de la generación próxima á desaparecer que los de la generación que se acaba de encargar de los negocios de la vida,... todos saben igualmente lo que es hacer algo una vez, dos veces, diez, ciento, mil, un millón de veces.

Los objetos discontinuos tienen partes, pero para contarlos hay que mirarlos como individualidades indivisibles. No tendría sentido el decir: desde aquí se ven cinco medias estrellas en el cielo. Las individualidades discontinuas dan los mismos números para todos los hombres que saben contar.

Pero las ideas de MÓDULO VARÍAN de pueblo á pueblo y de hombre á hombre. Los españoles no saben lo que es una wersta ó un kreutzer, así como los rusos y los alemanes ignoran lo que es nuestra *legua* ó nuestra *fanega* ó nuestra antigua *vara de medir*.

Y tanto ellos, como nosotros, ignoramos las medidas de que se servían los antiguos.

Aun ahora, á pesar de los esfuerzos de tantos gobiernos asociados no es universal el sistema decimal de pesas y medidas. Aún no existe un meridiano universal.

Los paralogismos, pues, de la Aritmética, dependen de la indistinción con que están domiciliadas en la ciencia las ideas de *unidad* y de *módulo*.

Lo que nos sirve para medir es un pedazo, una parte de la cantidad que nos ocupa, con todas sus propiedades; ópticas si es un rayo de luz, dinámicas si es una fuerza, geométricas si es una longitud... Pero *el-número-de-veces* que la cantidad contiene á la unidad no es cosa real: es un CONCEPTO MENTAL de relaciones, por medio del cual recorremos la

---

número y su valor: 50 piezas y 5 pesetas... Pero esta no es propiedad de los módulos, sino propiedad admirable del sistema de pesas y medidas.

O bien otra maravilla del artificio humano: el cronómetro mide á diario la longitud geográfica en la navegación...

escala de la pluralidad. De modo que la UNIDAD EN ESTE SENTIDO es cosa muy distinta de la también llamada UNIDAD QUE NOS SIRVE PARA MEDIR: esta *tiene* siempre propiedades ópticas, dinámicas, geométricas, acústicas, etc., etc., y aquella *carece* absolutamente de propiedades de esta especie; su significación, COMPLETAMENTE ABSTRACTA, es el primer grado de la serie de los números ó el principio de la escala de la pluralidad: en una palabra, la llamada unidad que sirve para medir está siempre en la región de lo CONCRETO: y la unidad que sirve para contar nunca sale de la región de lo ABSTRACTO.

¿No se vé ahora claramente que desde *el punto de vista abstracto* los números no pueden ser más que ENTEROS? ¿No se observa que es incomprensible un cuarto de signo, medio ruído, un décimo de vida, que NO PUEDE HABER NADA MENOR QUE LA UNIDAD, que es ininteligible para nuestra razón la frase una cosa repetida menos una vez, una moneda repetida menos tres veces, y que es ESENCIAL á la idea de número puro el que sea número entero? ¿No se vé ahora claro que desde el momento en que se diga número fraccionario, número negativo, se hace uso de una expresión incorrecta y contradictoria, como blanco negro, ruidoso silencio, cuadratura del círculo, realización de lo infinito en lo finito, puesto que lo que puede fraccionarse no es el número sino el módulo, que lo que puede variar de dirección no es el grado en la escala de la pluralidad, sino la dirección en que llevamos el módulo? ¿No es patente que las expresiones de *número abstracto negativo*, *número abstracto fraccionario*, *número abstracto irracional*, *número abstracto imaginario*, corresponden á imposibilidades lógicas? ¿No es claro que los símbolos escritos ó hablados del sistema de numeración no sirven para otra cosa más que para precisar á qué grado de la escala de la pluralidad corresponde una colección cualquiera de cosas?

Por una especie de sinécdoque muy natural, pero CONTRARIA ENTERAMENTE AL RIGOR DE LA LÓGICA Y FATAL PARA LA EXACTITUD INTRANSIGENTE DE LAS MATEMÁTICAS, los números, SÍMBOLOS REPRESENTATIVOS DE LA OPERACIÓN DE CONTAR se encuentran de hecho en la parte de la ciencia del cálculo que se designa con el nombre de álgebra, constituídos, por los autores, EN SIGNOS INDICATIVOS DE LA MAGNI-

TUD DE LAS CANTIDADES, cuyo tipo son los módulos y además EN CARACTERES DE LA POSICION, Ó LA EXISTENCIA, Ó LA ACCIÓN DE ESAS CANTIDADES.

Y ¿no se sospecha ya, no se concibe ahora claramente que, empleado el número en tres usos tan distintos, sea tal propiedad, lógica en uno de esos usos, absurda cuando se trate de EXTENDERLA á alguno de los otros dos; ó que sea IMPOSIBLE su aplicación cuando, CESANDO DE SER el mismo, sea reemplazado por los otros?

Los autores, cuando definen el número, definen la CANTIDAD. Se define ordinariamente á las Matemáticas como la ciencia de las magnitudes en general ó la ciencia de las cantidades (1), y no se considera al número en sí mismo, abstraído de las magnitudes. Hé aquí por qué implica contradicción la idea aislada de positivo y negativo, puesto que si los números fuesen ESENCIALMENTE POSITIVOS nunca podrían ser negativos, so pena de dejar de ser números, por serles esencial lo positivo: y hé aquí también por qué lo que no puede hacerse con el número abstracto es ejecutable sobre el módulo: porque aquello á que se resiste la unidad de numeración, INVARIABLE É INDIVISIBLE, es posible sobre la llamada unidad módulo, tipo representativo de una cantidad, CONCRETO, VARIABLE Y DIVISIBLE, según el deseo de cada cual, y cuya grandeza ó pequeñez nadie limita.

Por tanto, las expresiones

$$N \times 1;\ N \times 0$$

no son multiplicación, y

$$1 \times N;\ 0 \times N$$

son multiplicaciones, puesto que el 1 y el 0 están repetidos N veces.

Es esencial á la mayor parte de las cosas reales el poder ser repetidas, y, por consiguiente, el multiplicando puede ser concreto y fraccionario.

(1) No hay cosa más común que oír decir: *«Escriba usted tal cantidad»*, como si las cantidades (esto es, las longitudes, superficies, sólidos, fuerzas, pesos, etc.) pudieran escribirse, y como si el sistema de numeración (que está destinado á designar la pluralidad y no las cantidades) fuese el representante de esas mismas cantidades.

Pero en todos los casos, en todos, el multiplicador tiene que ser abstracto y entero.

Y si desde el punto de vista numérico puro la ley de que el orden de los factores no altera el producto debe admitirse como verdadera, no sucede lo mismo en las aplicaciones de la multiplicación á las cuestiones concretas, porque la naturaleza de un factor no es TRANSMISIBLE á otro.

Un módulo puede dividirse y subdividirse y volverse á dividir. Si el módulo primitivo es λ, cada una de sus divisiones se expresará por λ', λ'', λ'''... pero de aquí no se deducirá más sino que el módulo secundario es menor respecto del primitivo, y que cuando tomemos una fracción de λ, no haremos más que tomar un NÚMERO ENTERO DE VECES alguno de los módulos secundarios λ', λ'', λ'''... Multiplicar quebrados es, pues, repetir un número entero de veces un módulo menor, relacionado con el módulo primitivo; y, así, multiplicar será siempre, conforme á su etimología, repetir y aumentar.

En vista de todo esto, ¿quién es quien se atrevería á decir que entre los que han cultivado con éxito la ciencia, se hallará uno solo que durante un tiempo bastante largo no se haya visto obligado á admitir como verdades probadas lo que no era aún para él más que *verba magistri*? ¿Quién sabe si hasta el término de su carrera, nuestros más grandes geómetras no han estado más bien PERSUADIDOS que CONVENCIDOS de la verdad de ciertos principios pasados en autoridad de cosa juzgada?

Mientras que no se haga la distinción debida entre unidad, módulo y dirección...;

Mientras que los signos de la pluralidad sean representantes de módulos y direcciones;

Mientras que no se proclame en principio que todo número fraccionario es concreto;

Mientras que se continúe haciendo diariamente uso, sin dar explicación ninguna, de cantidades ó de expresiones imaginarias...;

Nunca se tendrá derecho para criticar á los que rehusen comprender, en su conjunto, la exposición de los principios de la ciencia, *y nunca se podrá reprender á los que exijan que las Matemáticas* entren en el terreno de que se han separado los autores al sentar sus bases y al exponer sus principios.

De lo expuesto se deducen los dos importantes principios siguientes:

Los números puros, como independientes de toda propiedad externa, son siempre números enteros.

Los números expresivos de los módulos, como resultado de una medición, son esencialmente fraccionables y con suma frecuencia fraccionarios. Todo hombre regular tiene siempre más de 1 metro de estatura y menos de 2. Luego la estatura media tiene que estar representada por 1 metro y una fracción.

Las cosas discontinuas forman multitudes, muchedumbres: su fondo es la pluralidad.

Las cosas continuas son extensiones, masas, magnitudes; su fondo es una relación entre la magnitud del módulo y la cantidad medida.

Lo que no puede medirse ni exacta ni aproximadamente con una magnitud conocida, no es numerable ni objeto de la Aritmética. No hay módulo ninguno ni existe patrón conocido que pueda medir los dolores, ni los placeres, ni las virtudes, ni los vicios... ni la firmeza de las intenciones, ni la intensidad de los propósitos... y, por tanto, estas afecciones... no pueden sujetarse al cálculo. Sólo cabe decir de ellas vagamente que son mayores ó menores, según apreciaciones opinables, sin ningún valor numérico.

> ¿Qué balanza pesar ha podido
> las lágrimas mudas de oculta aflicción?
> ¿Qué retorta destila el convulso rugido
> de celos que estallan en ronca explosión?

Si los módulos siempre resultasen comprendidos un número exacto de veces en las cantidades medidas (sin sobrar nunca ni en ningún caso faltar nada), entonces apenas habría motivo para hacer una ciencia de la Aritmética modular. Pero la hace necesaria el hecho de que, aplicado un módulo á una cantidad, siempre, ó casi siempre, sobra ó falta alguna cosa, que es preciso expresar por medio de un quebrado ó que no es posible expresar por medio de ninguno, cuando resultan lo que se llama *inconmensurables* la cantidad que se trata de medir y el módulo escogido para medirla.

Los quebrados y los inconmensurables dan, pues, lugar á la Aritmética de los módulos, y á su estudio está destinada esta Segunda Parte.

La Aritmética modular es, pues, la ciencia de las mediciones en que el módulo empleado no cabe exactamente en la cantidad medida.

Es, por tanto, la Aritmética de los quebrados y de los inconmensurables.

LIBRO I

FRACCIONES ORDINARIAS

FRACCIONES ORDINARIAS

LECCIÓN I

La Aritmética fraccionaria es la ciencia de los cuocientes.

Sabemos que todo cuociente representa:

1.º O bien las veces que un número ó una magnitud entra como sumando en una suma,

2.º O bien el sumando que entró varias veces en la suma.

En la primera disyuntiva se conocen

La suma y el sumando repetido,

Y en la segunda disyuntiva

La suma y el número de veces.

1.ª DISYUNTIVA. Dada la suma y el sumando repetido hallar el número de veces de la repetición.

Núms. puros.	Discontinuos.	Continuos.
3	3 espadas	3 kilogramos
+ 3	+ 3 espadas	+ 3 kilogramos
+ 3	+ 3 espadas	+ 3 kilogramos
+ 3	+ 3 espadas	+ 3 kilogramos
+ 3	+ 3 espadas	+ 3 kilogramos
= 15	= 15 espadas	= 15 kilogramos

15 | 3
= 5 veces: n.º puro

15 espadas | 3 espadas
= 5 veces

15 kilogs. | 3 kilogramos
= 5 veces

Los sumandos anteriores han entrado en cada suma (respectivamente) cinco veces. El número de repeticiones es, pues, cinco en cada suma. Por consiguiente, cinco es el número puro que resulta en cada uno de los tres cuocientes.

2.ª DISYUNTIVA. Dada la suma y el número de las repeticiones, hallar el sumando repetido.

Núms. puros.	Discontinuos.	Continuos.
3	3 espadas	3 kilogramos
+ 3	+ 3 espadas	+ 3 kilogramos
+ 3	+ 3 espadas	+ 3 kilogramos
+ 3	+ 3 espadas	+ 3 kilogramos
+ 3	+ 3 espadas	+ 3 kilogramos
= 15	= 15 espadas	= 15 kilogramos

15 | 5 veces, n.° puro.
= 3, n.° puro.

15 espadas | 5 veces
= 3 espadas, n.° discont.

15 kilogs. | 5 veces
= 3 kilogs., n.° modular.

Las repeticiones de sumandos han sido cinco en las sumas anteriores, y tres el sumando repetido en cada suma: 3, número puro en la primera: 3 espadas, número discontinuo en la segunda: y 3 kilogramos, número modular en la tercera (1).

Y, como todo guarismo es el 1 repetido tantas veces como su grado indica, resulta que las anteriores expresiones son iguales á las siguientes:

1 repetido 3 veces
\+ 1 repetido 3 veces
\+ 1 repetido 3 veces
\+ 1 repetido 3 veces
\+ 1 repetido 3 veces
= 5 repetido 3 veces
=15

3 repetido 5 veces | 1 repetido 3 veces
= 5 veces, n.° puro.

3 repetido 5 veces | 5 veces
= 1 repetido 3 veces

1 espada rep. 3 veces
\+ 1 espada rep. 3 veces
\+ 1 espada rep. 3 veces
\+ 1 espada rep. 3 veces
\+ 1 espada rep. 3 veces
= 5 espadas rep. 3 veces
=15 espadas

5 espadas rep. 3 veces | 1 espada rep. 3 veces
= 5 veces, n.° puro.

5 espadas rep. 3 veces | 5 veces
= 1 espada rep. 3 veces

(1) Véase PROPORCIONES, Lección IV.

1 kilogramo × 3 + 1 kilogramo × 3 + 1 kilogramo × 3 + 1 kilogramo × 3 + 1 kilogramo × 3 = 5 kilogramos × 3 =15 kilogramos	5 kilogs. rep. 3 veces | 1 kilogr. rep. 3 veces = 5 veces, n.º puro. 5 kilogs. rep. 3 veces | 5 veces 1 kilogr. rep. 3 veces.

Ahora bien. Todos los módulos de medir son divisibles en el número de partes iguales que se quiera. En rigor de verdad, sería imposible dividir *materialmente* un centímetro en un quinquillón de partes; pero con la imaginación podemos concebirlo dividido lo mismo en dos partes, que en quinquillones de quinquillones... Esto por un lado: por otro, es de gran conveniencia no dividir *ad libitum* ni caprichosamente los módulos usuales; porque, para poder computar sus magnitudes, es preciso siempre referirlas á partes iguales entre sí. Si en un tonel se hubiesen echado sin orden ni concierto fracciones de cuartillo, fracciones de litro, de cántara y de botella,... ¿quién, sin una medición especial, podría luego averiguar la cantidad de vino recogida?

Así, pues, en la práctica resultan los módulos comunes divididos artificialmente, no en el número de partes que se quiera, sino en un corto número de partes conocido. Sólo en el cálculo superior es donde no se pone más límite á las divisiones de los módulos que el de la conveniencia, especialmente en las operaciones por aproximación (de que más adelante se hablará) (1).

Tenemos, pues, que todos los módulos de medir son divisibles en partes iguales, pero que esta posibilidad no pasa de ciertos límites en la práctica.

Supongamos, pues, un módulo cualquiera dividido en partes; por ejemplo, la antigua vara castellana en 3 pies. ¿Qué es, en esencia, dividir un módulo? Hallar otro módulo menor, relacionado de un modo conocido con el mayor. Y, siendo esto así, todas las operaciones que se hacían con la vara pueden hacerse con sus pies. O con los quebrados expresivos de los pies.

(1) Véase INCONMENSURABLES y LOGARITMOS.

$$\begin{array}{r} 5 \text{ pies.} \\ +\ 5 \text{ pies.} \\ +\ 5 \text{ pies.} \\ \hline = 15 \text{ pies.} \\ = \ 5 \text{ varas.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ \ 1 \text{ vara y } 2 \text{ pies.} \\ +\ 1 \text{ vara y } 2 \text{ pies.} \\ +\ 1 \text{ vara y } 2 \text{ pies.} \\ \hline = 3 \text{ varas y } 6 \text{ pies.} \\ = 5 \text{ varas.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ \ 1\ \ {}^{2}/_{3} \\ +\ 1\ \ {}^{2}/_{3} \\ +\ 1\ \ {}^{2}/_{3} \\ \hline = 3 + {}^{6}/_{3} \\ = 5 \end{array}$$

$$15 \text{ pies} \ \Big|\ \begin{array}{l} 5 \text{ pies} \\ \hline = 3 \text{ veces.} \end{array} \qquad 5 \text{ varas} \ \Big|\ \begin{array}{l} 1\ {}^{2}/_{3} \text{ vara.} \\ \hline = 3 \text{ veces.} \end{array} \qquad 3 + {}^{6}/_{3} \ \Big|\ \begin{array}{l} 1 + {}^{2}/_{3} \\ \hline = 3 \text{ veces.} \end{array}$$

$$\frac{15}{5} = 3 \text{ veces.} \qquad \frac{5}{1\ {}^{2}/_{3}} = 3 \qquad \frac{3\ {}^{6}/_{3}}{1\ {}^{2}/_{3}} = 3$$

$$15 \text{ pie} \ \Big|\ \begin{array}{l} 3 \text{ veces.} \\ \hline = 5 \text{ pies.} \end{array} \qquad 5 \text{ varas} \ \Big|\ \begin{array}{l} 3 \text{ veces.} \\ \hline = 1\ {}^{2}/_{3} \text{ vs.} \end{array} \qquad 3 + {}^{6}/_{3} \ \Big|\ \begin{array}{l} 3 \text{ veces.} \\ \hline = 1\ {}^{2}/_{3} \end{array}$$

$$\frac{15}{3} = \text{al sumando } 5. \qquad \frac{5}{3} = \text{al sumando } 1\ {}^{2}/_{3} \qquad \frac{3 + {}^{6}/_{3}}{3} = 1\ {}^{2}/_{3}$$

Los quebrados son, pues, números concretos, de igual naturaleza que los demás concretos;

O bien son cuocientes que representan el sumando repetido.

Son, pues, números concretos cuando representan un submódulo, una cosa material tomada para medir.

Son cuocientes cuando representan una relación numérica entre dos magnitudes ó dos números.

Evidenciemos lo primero en esta Lección, y dejemos, por su gran importancia, lo segundo para la siguiente.

1.° Los QUEBRADOS SON NÚMEROS CONCRETOS.—Tres pesetas es tan número modular como ${}^{1}/_{4}$ de peseta, ó sea un real. El concepto de suma y de sumando es el mismo cuando se trata de números concretos expresivos de módulos enteros, que cuando se trata de submódulos ó de quebrados de los módulos. Tan individual es el concepto de real como el de peseta; y, á veces lo es tanto, que hasta olvidamos que real y peseta son cantidades relacionadas entre sí. Lo mismo pasa con otros muchos módulos. Por ejemplo: año, mes, día. «Es una niña de 3 meses: es un niño de 5 años»... Sólo necesitamos referir los submódulos á sus módulos cuando no hay costumbre de relacionar los unos con los otros, como cuando en Andalucía se dice: quiere casarse con una vieja de 200 meses.

No hay diferencias de concepto en

3 pesetas	3 céntimos de peseta	$\frac{3}{100}$
3 pesetas	3 céntimos de peseta	$\frac{3}{100}$
3 pesetas	3 céntimos de peseta	$\frac{3}{100}$
9 pesetas	9 céntimos de peseta	$\frac{9}{100}$

Así, los cuocientes de estas operaciones resultan idénticos.

9 pesetas | 3 pesetas = 3 veces 9 cénts. de pes. | 3 cénts. de pes. = 3 veces $\frac{9}{100}$ | $\frac{3}{100}$ = 3 veces

Ampliemos.

Supongamos dividido un módulo en el número de partes iguales que se quiera; por ejemplo, en 234. Tomemos una de estas partes, y, en virtud del convenio establecido, una de estas partes estará bien representada por la expresión $\frac{1}{234}$, donde el número de arriba se llama numerador y el de abajo denominador.

Si tomáramos 2, 3, 4, 5, 6,... 20,... 27,... 249,... 1481,... de estas partes, expresaríamos las nuevas magnitudes, conforme al convenio, por

$$\frac{2}{234}, \frac{3}{234}, \frac{4}{234}, \frac{5}{234},\dots \frac{20}{234},\dots \frac{27}{234},\dots \frac{249}{234},\dots \frac{1481}{234},\dots$$

De modo que estas expresiones resultarían formadas por dos operaciones sucesivas:

1.ª División de un módulo en 234 partes iguales;

2.ª Repetición de una de estas partes cierto número de veces; tantas como exprese el número puesto en el numerador.

Y, así como antes para sumar objetos (discontinuos ó continuos) teníamos que hacer su designación

(5 espadas + 5 espadas + ...); ó bien (5 kilogramos + 5 kilogramos + ...),

del mismo modo, tratándose de fracciones, hay que expresar siempre su denominación.

78	doscientos treinta y cuatro avos de minuto (por ej.).	$\frac{78}{234}$
+ 78	doscientos treinta y cuatro avos de minuto.........	$\frac{78}{234}$
+ 78	doscientos treinta y cuatro avos de minuto.........	$\frac{78}{234}$
= 234	doscientos treinta y cuatro avos de minuto.........	$\frac{234}{234}=1$
= 1	minuto.	

Para abreviar la expresión de las designaciones, se escribe, en vez de todo lo anterior, lo que sigue, conforme al convenio de la notación fraccionaria:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{78}{234} \\ +\frac{78}{234} \\ +\frac{78}{234} \\ \hline \frac{234}{234}=1 \end{array}\right\} \text{ó bien } \frac{78}{234}+\frac{78}{234}+\frac{78}{234}=\frac{234}{234}=1.$$

Naturalmente, cuando los quebrados tienen la misma denominación se suman los numeradores lo mismo que cuando se trata de manzanas ó de gramos...

Si 1 manzana + 1 manzana + 1 manzana, son 3 manzanas, de la misma manera 1 doscientos treinta y cuatro avos + 1 doscientos treinta y cuatro avos + 1 doscientos treinta y cuatro avos, son 3 doscientos treinta y cuatro avos, etc., etc.

1 manzana + 1 manzana + 1 manzana = 3 manzanas.

$$\frac{1}{234}+\frac{1}{234}+\frac{1}{234}=\frac{3}{234}$$

$$\frac{12}{234}+\frac{12}{234}+\frac{12}{234}=\frac{36}{234}$$

Y, como todo guarismo es el 1 repetido tantas veces como su número indica, resulta que las anteriores expresiones (según antes vimos) son iguales á las siguientes:

$$\frac{1}{234} \text{ repetido 78 veces} = \frac{1}{234} \times 78$$

$$+ \frac{1}{234} \text{ repetido 78 veces} = \frac{1}{234} \times 78$$

$$+ \frac{1}{234} \text{ repetido 78 veces} = \frac{1}{234} \times 78$$

$$= \frac{3}{234} \text{ repetido 78 veces} = \frac{3}{234} \times 78 = \frac{3 \times 78}{234} = \frac{234}{234} = 1$$

$$= \frac{3 \times 78}{234} = \frac{234}{234} = 1 \text{ vez el módulo de que se trate. (1)}$$

Los quebrados son, pues, números expresivos de módulos más pequeños que los módulos comunes, y su cálculo se rige por los mismos principios aritméticos que los enteros. El concepto de repetición de una cosa no varía, porque se diga, por ejemplo, 3 veces un metro ó 3 veces $\frac{1}{10}$ de metro ($\frac{3}{10}$ de metro ó 3 decímetros).

Por lo mismo también, cuando los denominadores son iguales, las operaciones de restar, multiplicar y partir se efectúan como las de cualesquiera otros números modulares.

$$\frac{3}{5} \text{ de duro} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}; \quad 3 \text{ pesetas} - 2 = 1 \text{ peseta}$$

$$\frac{3}{5} \text{ de duro} \times \text{por } 7 = \frac{21}{5}; \quad 3 \text{ pesetas} \times 7 = 21 \text{ pesetas}$$

$$\frac{21}{5} \text{ de duro} \div 7 = \frac{21 \div 7}{5} = \frac{3}{5}; \ 21 \text{ pesetas} \div 7 = 3 \text{ pesetas.}$$

(1) Si yo divido un módulo en 234 partes, y las tomo todas, claro es que he tomado todo el módulo. Así es que son representantes de la unidad todas las expresiones en que numerador y denominador son iguales:

$$\frac{2}{2} = 1; \ \frac{3}{3} = 1; \ \frac{4}{4} = 1; \ \frac{15}{15} = 1; \ \frac{234}{234} = 1; \ \frac{1000000}{1000000} = 1; \ \frac{n}{n} = 1.$$

$$2 \left| \frac{2}{=1} \right.; \quad 3 \left| \frac{3}{=1} \right.; \quad 15 \left| \frac{15}{=1} \right.; \quad 234 \left| \frac{234}{=1} \right.; \quad 1000000 \left| \frac{1000000}{=1} \right. \quad \text{etc.}$$

LECCIÓN II

Los quebrados son cuocientes.

Los quebrados han tenido su origen en la insuficiencia de los módulos primarios para medir y estimar toda clase de magnitudes. Un hombre es más alto que un metro: su estatura tiene un metro y varias partes de otro metro: la longitud del brazo no llega al módulo: sólo tiene unas cuantas de sus divisiones...

El metro, pues, hubo de dividirse en partes iguales, y estas partes del metro constituyeron sus quebrados.

QUEBRADO, así, por su origen y su etimología, entraña la idea de MENOR: menor que algo conocido destinado á medir.

Por otro lado: el dividendo (como suma que es de varios sumandos iguales) entraña á su vez la idea de MAYOR: mayor que el divisor. No nos extrañan, por tanto, las formas

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \cline{2-2} & \end{array} \qquad \frac{15}{3}$$

ni nos sorprende que se defina la operación de partir como una manera abreviada de restar un sumando cuantas veces sea posible de su suma.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

se resuelve naturalmente en

$$15 - 3 = 12;\ 12 - 3 = 9:\ 9 - 3 = 6;\ 6 - 3 = 3;\ 3 - 3 = 0.$$

Pero siempre causan sorpresa al principiante las formas

$$3 \left| \begin{array}{l} \underline{\;7\;\;\;\;\;\;} \\ \end{array} \right. \qquad \frac{3}{7}$$

porque la práctica y la definición nos borran constantemente de la memoria que por la operación de partir podemos también averiguar el sumando integrante de toda suma, cuando esta suma es conocida, así como el número de las repeticiones del sumando.

$\frac{1}{3}$ de paño
$+ \frac{1}{3}$ de paño
$+ \frac{1}{3}$ de paño
$+ \frac{1}{3}$ de paño
$+ \frac{1}{3}$ de paño
$+ \frac{}{3}$ de paño
$= \frac{6}{3} = 2$ varas

$$2 \text{ varas} \left| \begin{array}{l} \underline{\text{6 veces}} \\ = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \end{array} \right. \text{ porque } \frac{2}{6} = 2 \times \frac{1}{6}$$

Cuatro gañanes reciben tres hogazas de pan: ¿cuántos cuarterones corresponden á cada peón?

$$3 \text{ hogazas} \left| \begin{array}{l} \underline{\text{entre 4 jornaleros}} \\ = \frac{3}{4}; \text{ cada hombre debe recibir 3 cuarterones.} \end{array} \right.$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 12 \text{ cuarterones} = 3 \text{ hogazas.}$$

Cinco obreros ajustan una obra en 4 duros: ¿cuánto corresponde á cada operario?

$$4 \text{ duros} \left| \begin{array}{l} \underline{\text{entre 5 obreros}} \\ = \frac{4}{5}; \text{ cada obrero recibirá 4 pesetas.} \end{array} \right.$$

$$\frac{4}{5} \text{ de duro} + \frac{4}{5} \text{ de duro} + \frac{4}{5} \text{ de duro} + \frac{4}{5} \text{ de duro} + \frac{4}{5} \text{ de duro} = \frac{20}{5} = 4$$

4 ptas. + 4 pesetas + 4 pesetas + 4 pesetas + 4 pesetas = 20 ptas. = 4 duros.

Así, pues, todo número de cosas, repartido en cualquier número de porciones, tiene por cuociente un quebrado de la forma de los datos:

$$\frac{\text{Número de cosas}}{\text{Número de porciones}}$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\frac{\text{Número de cosas}}{\text{Número de veces}}$$

¿Cuál es, pues, el cuociente de 7 partido 15? $\frac{7}{15}$

¿Cuál el cuociente de 11 entre 13? $\frac{11}{13}$

¿De 7 entre 1000000? $\frac{7}{1000000}$

¿De m entre n? $\frac{m}{n}$

Todo quebrado, pues, es un cuociente.

Por tanto, todo cuociente es un quebrado $\left(4 = \frac{20}{5}\right)$

Si las anteriores consideraciones necesitasen confirmación, las corroborarían plenamente los resultados de las pruebas.

En efecto: el producto del divisor por el cuociente ha de dar el dividendo cuando las operaciones están bien; y de evidencia es que tal resultado se obtiene en las operaciones precedentes.

Divisor × cuociente

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} & =\frac{3}{4} \end{array} \quad \therefore \quad 4 \times \frac{3}{4} = \frac{4\times 3}{4} = \frac{4}{4} \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

Divisor × cuociente

$$\begin{array}{r|l} 4 & 5 \\ \cline{2-2} & =\frac{4}{5} \end{array} \quad \therefore \quad 5 \times \frac{4}{5} = \frac{5\times 4}{5} = \frac{5}{5} \times 4 = 1 \times 4 = 4$$

Divisor × cuociente

$$\begin{array}{r|l} 7 & 15 \\ \cline{2-2} & =\frac{7}{15} \end{array} \quad \therefore \quad 15 \times \frac{7}{15} = \frac{15\times 7}{15} = 7\,\frac{15}{15} \times 7 = 1 \times 7 = 7$$

Divisor × cuociente

$$\begin{array}{r|l} 11 & 13 \\ \cline{2-2} & =\frac{11}{13} \end{array} \quad \therefore \quad \frac{13\times 11}{13} = 11$$

Divisor × cuociente

$$\begin{array}{r|l} m & n \\ \cline{2-2} & =\frac{m}{n} \end{array} \quad \therefore \quad \frac{n\times m}{n} = \frac{n}{n} \times m = 1 \times m = m$$

COROLARIOS.

En cada sistema de numeración pura sólo hay una única manera para expresar cada grado de la pluralidad.

En el sistema decimal, el grado trece, ó bien el veinte y tres, ó bien cualquier otro, se expresan siempre y constantemente con los signos 13, 23... y no de otro modo ninguno. En el sistema quinario esos mismos grados son 23 y 41... etc.

Pero, por medio de los cuocientes, es inagotable el número de las expresiones representativas de cada grado de la pluralidad.

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ \hline = 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ \hline = 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ +\ 11 \\ +\ 11 \\ +\ 11 \\ +\ 11 \\ \hline = 55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 113 \\ +113 \\ +113 \\ +113 \\ +113 \\ \hline =565 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7549 \\ +\ 7549 \\ +\ 7549 \\ +\ 7549 \\ +\ 7549 \\ \hline =37745 \end{array}$$

$$\frac{15}{3} = 5$$

$$\frac{35}{7} = \text{también } 5$$

$$\frac{55}{11} = \text{también } 5$$

$$\frac{565}{113} = \text{también } 5$$

$$\frac{37745}{7549} = 5$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \cline{2-2} & = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 7 \\ \cline{2-2} & = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 55 & 11 \\ \cline{2-2} & = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 565 & 113 \\ \cline{2-2} & = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37745 & 7549 \\ \cline{2-2} & = 5 \end{array}$$

Se ve que, por medio de cuocientes, no tiene término ni fin en el sistema decimal (ó en cualquier otro) la multitud de expresiones capaces de representar el 5; pues todos los números imaginables pueden entrar 5 veces como sumandos en las corrrespondientes sumas concebibles.

Y lo dicho del 5 se ha de entender también de todos los demás grados de la pluralidad, así en el sistema corriente, como en cualquier otro sistema de numeración.

Los cuocientes expresivos de números puros resultan tanto de las sumas de sumandos iguales puros, como de los discontinuos ó de los modulares.

13	13 pianos	13 litros
13	13 pianos	13 litros
13	13 pianos	13 litros
39	39 pianos	39 litros

$\frac{39}{13} = 3$ veces $\qquad \frac{39}{13} = 3$ veces $\qquad \frac{39}{13} = 3$ veces

ó bien $\qquad$ ó bien $\qquad$ ó bien

39 \| 13 = 3 veces $\qquad$ 39 pianos \| 13 pianos = 3 veces $\qquad$ 39 litros \| 13 litros = 3 veces

De modo que, para que los cuocientes resulten números puros, esto es, números expresivos de repetición, es preciso que dividendo y divisor (ó bien numerador y denominador) sean de la misma especie:

O los dos, números puros;

O los dos, objetos discontinuos, v. gr. pianos;

O los dos, módulos, medidas artificiales de invención humana; por ejemplo, litros... etc., etc.

Pero, para obtener por medio de cuocientes números expresivos de cosas, es preciso que el dividendo (ó numerador) sea número de cosa, y el divisor (ó denominador) número puro.

13 mesas	19 pesetas
13 mesas	19 pesetas
13 mesas	19 pesetas
13 mesas	19 pesetas
13 mesas	19 pesetas
65 mesas	95 pesetas

$\frac{65 \text{ mesas}}{5 \text{ veces}} = 13$ mesas $\qquad \frac{95 \text{ pesetas}}{5 \text{ veces}} = 19$ pesetas

65 mesas \| 5 veces = 13 mesas $\qquad$ 95 pesetas \| 5 veces = 19 pesetas

Y, como pueden ser sumandos todos los números de cosas, claro es que todos pueden estar representados por cuocientes (1).

(1) No se olvide que los números de cosa sólo pueden aparecer como cuocientes cuando, conocida una suma y el número de veces que se repitió un sumando, se busca este sumando. Y, aun entonces, la operación se hace con números puros, y al resultado se le da una interpretación apropiada á la solución del problema.

Los cuocientes proceden de la repetición de sumandos iguales.

1.° Enteros (como en ejemplos anteriores):

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ \hline 12 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{12}{2} = 6$

2 sillas+2 sillas+2 sillas+2 sillas+2 sillas+2 sillas=12 sillas

$$\text{12 sillas} \,\Big|\, \underline{\text{2 sillas.}} \quad = \text{6 veces 2 sillas,}$$

$$\text{12 sillas} \,\Big|\, \underline{\text{6 veces}} \quad = \text{2 sillas.}$$

Etc.

2.° Fraccionarios:

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2} \text{ duro} \\ + & \frac{1}{2} \text{ duro} \\ + & \frac{1}{2} \text{ duro} \\ + & \frac{1}{2} \text{ duro} \\ + & \frac{1}{2} \text{ duro} \\ + & \frac{1}{2} \text{ duro} \\ \hline = & \frac{6}{2} = 3 \text{ enteros} \end{array}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ duros}$$

$$\frac{6}{2} \text{ (6 medios duros)} \,\Big|\, \underline{\frac{1}{2} \text{ duro}} \quad = \text{6 veces } \frac{1}{2} \text{ duro}$$

$$\frac{6}{2} \text{ (6 medios duros)} \,\Big|\, \underline{\text{6 veces}} \quad = \frac{1}{2} \text{ duro}$$

$$\begin{array}{rl} & \frac{3}{4} \\ + & \frac{3}{4} \\ + & \frac{3}{4} \\ + & \frac{3}{4} \\ \hline = & \frac{12}{4} = 3 \text{ enteros} \end{array}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{12}{4} \,\Big|\, \underline{\frac{3}{4}} \quad = \text{4 veces}$$

$$\frac{12}{4} \,\Big|\, \underline{\text{4 veces}} \quad = \frac{3}{4}$$

3.° Enteros y quebrados:

$$\begin{array}{rl} & \text{3 pesetas y 20 céntimos} \\ + & \text{3 pesetas y 20 céntimos} \\ + & \text{3 pesetas y 20 céntimos} \\ + & \text{3 pesetas y 20 céntimos} \\ + & \text{3 pesetas y 20 céntimos} \\ \hline = & \text{15 pesetas y 100 céntimos} \\ = & \text{16 pesetas.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 3\,^1/_5 \\ + & 3\,^1/_5 \\ + & 3\,^1/_5 \\ + & 3\,^1/_5 \\ + & 3\,^1/_5 \\ \hline = & 15 + {}^5/_5 \\ = & 16 \end{array}$$

Etc.

LECCIÓN III

Denominadores iguales.

Los cuocientes no varían cuando dividendo y divisor, ó bien numerador y denominador, se multiplican ó se parten por un mismo número.

$$
\begin{array}{cccccc}
3 & 3\times 2 & 7 & 7\times 3 & 11 & 88=11\times 8 \\
3 & 3\times 2 & 7 & 7\times 3 & 11 & 88=11\times 8 \\
3 & 3\times 2 & 7 & 7\times 3 & 11 & 88=11\times 8 \\
3 & 3\times 2 & 7 & 7\times 3 & 11 & 88=11\times 8 \\
3 & 3\times 2 & 7 & 7\times 3 & 11 & 88=11\times 8 \\
\hline
=15 & =30=(3\times 2)\times 5 & 35 & =105=(7\times 3)\times 5 & 55 & 440 \\
\hline
\frac{15}{3}=5 & \frac{15\times 2}{3\times 2}=5 & \frac{35}{7}=5 & \frac{35\times 3}{7\times 3}=5 & \frac{55}{11}=5 & \frac{440}{88}=5=\frac{55\times 8}{11\times 8}
\end{array}
$$

Y es que el número de los sumandos no varía cuando los sumandos iguales se multiplican ó se parten por un mismo número.

Esta preciosa propiedad nos da los medios de hacer que todos los quebrados tengan denominadores iguales; ya en una operación especial ó en varias especiales, ya en todas las que puedan ocurrir.

La transformación de varios quebrados, de modo que aparezcan todos con el mismo divisor, se llama impropiamente: *Reducir los quebrados á un común denominador*. (1)

(1) No hay reducción de ninguna clase cuando se da otra forma á un

$$\begin{array}{rrrr} 2 & 3 & 5 & 7 \\ +2 & +3 & +5 & +7 \\ +2 & +3 & +5 & +7 \\ +2 & +3 & +5 & +7 \\ +2 & +3 & +5 & +7 \\ \hline =10 & =15 & =25 & =35 \\ \hline \frac{10}{2}=5 & \frac{15}{3}=5 & \frac{25}{5}=5 & \frac{35}{7}=5 \end{array}$$

Dividida en los ejemplos anteriores cada suma por el respectivo sumando repetido, nos encontramos siempre el mismo cuociente 5.

Vamos ahora á hacer que todos esos sumandos repetidos

$$\frac{10}{2},\quad \frac{15}{3},\quad \frac{25}{5},\quad \frac{35}{7},$$

tengan denominadores iguales. Al efecto, se multiplicará el sumando repetido en cada suma por el producto de los sumandos no iguales de las demás.

$$\begin{array}{rrrr} 2\times(3\times5\times7) & 3\times(2\times5\times7) & 5\times(2\times3\times7) & 7\times(2\times3\times5) \\ +2\times(3\times5\times7) & +3\times(2\times5\times7) & +5\times(2\times3\times7) & +7\times(2\times3\times5) \\ +2\times(3\times5\times7) & +3\times(2\times5\times7) & +5\times(2\times3\times7) & +7\times(2\times3\times5) \\ +2\times(3\times5\times7) & +3\times(2\times5\times7) & +5\times(2\times3\times7) & +7\times(2\times3\times5) \\ +2\times(3\times5\times7) & +3\times(2\times5\times7) & +5\times(2\times3\times7) & +7\times(2\times3\times5) \end{array}$$

Efectuando las operaciones tendremos:

$$\begin{array}{rrrr} 210 & 210 & 210 & 210 \\ +210 & +210 & +210 & +210 \\ +210 & +210 & +210 & +210 \\ +210 & +210 & +210 & +210 \\ +210 & +210 & +210 & +210 \\ \hline =1050 & =1050 & =1050 & =1050 \\ \hline \frac{1050}{210}=5 & \frac{1050}{210}=5 & \frac{1050}{210}=5 & \frac{1050}{210}=5 \end{array}$$

De modo que, en virtud de las operaciones practicadas, los cuocientes

$$\frac{10}{2},\quad \frac{15}{3},\quad \frac{25}{5},\quad \frac{35}{7}$$

---

cuociente. $\frac{16}{8}$ es igual á 2, lo mismo en esa forma que cuando se hacen más pequeños los términos;

$$\frac{8}{4};\quad \frac{4}{2};\quad \frac{2}{1}=2$$

ó más grandes

$$\frac{32}{16},\quad \frac{64}{32}\ \dots \text{etc.}$$

que tienen por denominadores los números no iguales 2, 3, 5, 7 se han convertido en

$$\frac{1050}{210},\ \frac{1050}{210},\ \frac{1050}{210},\ \frac{1050}{210}$$

todos los cuales tienen igual denominador 210.

En las transformaciones anteriores los cuocientes eran iguales: todos 5; por lo cual resultan idénticos no solamente los denominadores (que era lo que se pretendía), sino también los numeradores.

Pero éste no es el caso general.

¿Qué hacer cuando el número de los sumandos no resulte igual en todas las sumas?

Supongamos ahora que el número de repeticiones sea diferente en cada suma

$$\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}2\\2\\2\\2\\2\end{array}\right\}\text{5 sumandos}\\ \hline 10\end{array}\quad
\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\end{array}\right\}\text{7 sumandos}\\ \hline 21\end{array}\quad
\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}5\\5\\5\\5\end{array}\right\}\text{4 sumandos}\\ \hline 20\end{array}\quad
\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}7\\7\\7\\7\\7\\7\\7\\7\end{array}\right\}\text{8 sumandos}\\ \hline 56\end{array}$$

Y nos resultarán los cuocientes que siguen:

$$\frac{10}{5}=2;\ \ \frac{21}{3}=7;\ \ \frac{20}{5}=4;\ \ \frac{56}{7}=8;$$

donde denominadores y cuocientes son desiguales.

Reduzcamos (como antes) estos quebrados ó cuocientes á un común denominador ó divisor; esto es, hagamos que sean iguales los sumandos que se repiten en todas y cada una de las sumas, y tendremos:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 7\times(2\times3\times5)\\
 & 3\times(2\times5\times7) & & 7\times(2\times3\times5)\\
 & 3\times(2\times5\times7) & & 7\times(2\times3\times5)\\
2\times(3\times5\times7) & 3\times(2\times5\times7) & & 7\times(2\times3\times5)\\
2\times(3\times5\times7) & 3\times(2\times5\times7) & 5\times(2\times3\times7) & 7\times(2\times3\times5)\\
2\times(3\times5\times7) & 3\times(2\times5\times7) & 5\times(2\times3\times7) & 7\times(2\times3\times5)\\
2\times(3\times5\times7) & 3\times(2\times5\times7) & 5\times(2\times3\times7) & 7\times(2\times3\times5)\\
2\times(3\times5\times7) & 3\times(2\times5\times7) & 5\times(2\times3\times7) & 7\times(2\times3\times5)\\ \hline
\end{array}$$

Y, efectuadas las operaciones, nos resultará:

			210
	210		210
	210		210
210	210		210
210	210	210	210
210	210	210	210
210	210	210	210
210	210	210	210
1050	1470	840	1680

Lo que nos dará los cuocientes (ó quebrados)

$$\frac{1050}{210}=5;\quad \frac{1470}{210}=7;\quad \frac{840}{210}=4;\quad \frac{1680}{210}=8;$$

todos de igual denominador y numeradores diferentes (caso general);

$$1050 \,\big|\, \underline{210} = 5 \qquad 1470 \,\big|\, \underline{210} = 7 \qquad 840 \,\big|\, \underline{210} = 4 \qquad 1680 \,\big|\, \underline{210} = 8$$

Para todas las operaciones es necesario reducir los quebrados á un común denominador (ó mejor dicho y sin apartar la vista de la realidad), hacer que los cuocientes escritos en forma de quebrado tengan divisores iguales.

Sumemos los quebrados

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{7}$$

multipliquemos en cada quebrado numerador y denominador por los denominadores de los demás, y tendremos las nuevas formas:

$$\frac{1\times(3\times5\times7)}{2\times(3\times5\times7)}+\frac{1\times(2\times5\times7)}{3\times(2\times5\times7)}+\frac{2\times(2\times3\times7)}{5\times(2\times3\times7)}+\frac{4\times(2\times3\times5)}{7\times(2\times3\times5)}$$

Efectuemos las operaciones indicadas y resultará:

$$\frac{105}{210}+\frac{70}{210}+\frac{84}{210}+\frac{120}{210}=\frac{279}{210}=1+\frac{69}{210}$$

Restemos los quebrados.

$$\frac{2}{3} \text{ de paño} - \frac{1}{2} \text{ vara de paño}$$

$$\frac{2 \times 2}{3 \times 2} - \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$$

$$\frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6} \text{ de vara, ó sea media tercia.}$$

$$\frac{1}{2} \text{ vara de paño} \div \frac{1}{4} \text{ de vara.}$$

Averigüemos cuántas veces se repitió $\frac{1}{4}$ para tener $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2 \text{ veces.}$$

Entendido ya el problema, reduzcamos los quebrados á un común denominador.

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} \div \frac{1 \times 2}{4 \times 2}$$

$$= \frac{4}{8} \div \frac{2}{8} = 2 \quad (1)$$

De lo anterior sale la regla que para partir quebrados dan regularmente los libros.

Para partir un quebrado por otro se multiplica el numerador del primero por el denominador del segundo, y el producto se parte por el producto del numerador del segundo por el denominador del segundo: ó bien de este modo abreviado: para partir quebrados se multiplican en cruz (ó en aspa).

$$\frac{2}{3} \div \frac{2}{9} = \frac{2 \times 9}{3 \times 2} = \frac{18}{6} = 3$$

(1) Siendo 4 manzanas $\div$ 2 manzanas $=$ 2 veces,... claro es que

4 octavos de una cosa $\div$ 2 octavos, será $=$ 2 veces.

Pero, como este resultado causa extrañeza al principiante, multipliquemos dividendo y divisor por el denominador común, lo que no hará variar el cuociente, y tendremos

$$\frac{4}{8} \div \frac{2}{8} = \frac{4 \times 8}{8} \div \frac{2 \times 8}{8} = \left(4 \times \frac{8}{8}\right) \div \left(2 \times \frac{8}{8}\right)$$

$$= \left(4 \times \frac{8}{8}\right) \div \left(2 \times \frac{8}{8}\right) = \left(4 \times 1\right) \div \left(2 \times 1\right) = 4 \div 2$$

No: no es eso. Para partir quebrados se reducen á un común denominador; y, siendo así ya magnitudes de una misma especie, se parten los numeradores, los cuales, independientemente de los denominadores, producen el cuociente.

$$\frac{2}{3} \div \frac{2}{9} = \frac{2 \times 9}{3 \times 9} \div \frac{2 \times 3}{9 \times 3}$$
$$= \frac{18}{27} \div \frac{6}{27}$$
$$= 18 \div 6 = 3$$

Trátese de lo que se quiera (de cosas enteras ó de partes iguales de ellas), siempre 18 cosas de una especie, partidas por 6 de la misma especie, darán 3.

LECCIÓN IV

Multiplicador fraccionario.—Divisor fraccionario.

Si, por falta de razonada interpretación y fijeza en los principios, se encuentra perplejo el neófito cuando ve, por ejemplo, que

$$2 \div \frac{1}{4} = 8,$$

mayor es todavía la confusión producida en la mente de cuantos examinan con profundidad los fundamentos científicos de los problemas en que aparece un multiplicador fraccionario. Porque ¿cuál puede ser el verdadero sentido de operaciones tales como

$$4 \times {}^1/_2 = 2; \quad 16 \times \frac{7}{8} = 14?$$

Cuando el divisor es fraccionario, lo mismo que cuando lo es el multiplicador, el lenguaje común y corriente repugna los resultados de las operaciones.

Que una cosa partida resulte mayor que la cosa misma, ó que una cosa multiplicada por algo aparezca menor, son conclusiones inadmisibles en el habla vulgar.

La expresión «cinco partido por un medio es igual á diez»

$$(5 \div \frac{1}{2} = 10)$$

suena á absurdo manifiesto, mientras la palabra partir se entiende usada en su significado vulgar de reducir á fragmentos. En «tomó el pan y lo partió», entendemos que las partes son y tienen que ser menores que el pan entero. Pero toda dificultad cesa en cuanto se entiende que no se trata de reducir á fragmentos cosa alguna, sino de averiguar ¿cuántas veces hay que repetir la cuarta parte de un objeto para tener cinco de ellos? ¿Cuántas veces hay que repetir la cuarta parte de una peseta para tener cinco pesetas? Claro es que hay que repetir 20 veces 1 real para obtener un duro. La dificultad se encuentra, más que en el pensamiento, en meras acepciones de palabras cuando se trata de la división de los quebrados, y el divisor es fraccionario.

Pero no ocurre lo mismo cuando el multiplicador es quebrado. ¿Qué es repetir una cosa media vez? ¿Qué es repetirla 5 veces y tres cuartos? ¿Qué es hacer una cosa $^7/_8$ de vez? ¿Quién concibe que la noción de vez sea divisible en partes?

Aquí, como se ve, se está ya en los dominios mismos del absurdo. Sin una interpretación racional se deshacen en polvo los fundamentos de la ciencia.

¿No sabemos que en toda multiplicación sólo uno de los dos factores, uno solamente, el multiplicando, puede ser número modular? ¿El otro factor (el multiplicador) no tiene forzosamente que ser número puro, porque el multiplicador representa el número de veces que el multiplicando fué repetido como sumando en la correspondiente suma matriz?

El multiplicador, así, no puede poseer jamás ninguna de las propiedades inherentes á los objetos exteriores: no puede tener partes: no puede ser ni $\frac{1}{2}$, ni $\frac{1}{8}$, ni $\frac{7}{9}$ etc., etc.; porque siempre el multiplicador representa *número de veces*, *repetición*. Si el 1, principio de la escala de la pluralidad, fuese divisible, cualquiera de sus partes sería anterior al principio, y el 1, así, no sería el inicio de la escala.

El elemento *número de veces*, *número de repeticiones* es elemento imprescindible en toda cuestión de multiplicar, por ser *de esencia* la repetición en toda suma de sumandos iguales: si no hay repetición de sumandos, no hay suma.

Pero una cosa se hace 1 vez, 2 veces, 3 veces, 4, 5,... 100,... 1000,... no media vez, ni un tercio de vez,... ni un milésimo;... de modo que las repeticiones son sólo expresables con números enteros. Luego un multiplicador fraccionario es un concepto contradictorio.

¿Qué significa, pues,

$$4 \times 3\frac{1}{2}?$$

Supongamos la siguiente suma:

$$\begin{array}{rl} 4 & (4+4+4)+2 = 14 \\ +\ 4 & \qquad = (4+4+4)+\frac{4}{2} \\ +\ 4 & \\ +\ 2 & \left(= \text{al cuociente } \frac{4}{2}\right) \\ \hline 14 & \end{array}$$

Por consiguiente: $4 \times 3\frac{1}{2}$ quiere decir que el 4 se ha de repetir 3 veces y á esos 3 sumandos iguales se ha de agregar otro sumando menor, igual al cuociente de $\frac{4}{2}$, ó sea igual á la mitad de 4.

¿Qué significa

$$24 \times 3\frac{5}{8}?$$

Significa que el sumando 24 se ha de repetir 3 veces, y después se les ha de agregar la octava parte de 24 repetida 5 veces.

$$\begin{array}{rl} 24 & \left(24+24+24\right)+\left(\frac{24}{8}+\frac{24}{8}+\frac{24}{8}+\frac{24}{8}+\frac{24}{8}\right) \\ +\ 24 & =(24+24+24)+(3+3+3+3+3) \\ +\ 24 & \\ +\ 3 & =(24 \times 3)+(3 \times 5)=87 \\ +\ 3 & \\ +\ 3 & \\ +\ 3 & \\ +\ 3 & \\ \hline =87 & \end{array}$$

¿Qué es $2187 \times 5\frac{8}{9}$?

Una suma de 5 sumandos iguales á 2187, más otra suma de 8 sumandos iguales al cuociente $\frac{2187}{9} = 243$.

$$\left\{\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 2187 \\ 2187 \\ 2187 \\ 2187 \\ 2187 \end{array}\right\} = 10935 \\ + \\ \left.\begin{array}{r} 243 \\ 243 \\ 243 \\ 243 \\ 243 \\ 243 \\ 243 \\ 243 \end{array}\right\} = 1944 \\ \hline 12879 = 12879 \end{array}\right.$$

Lo anterior se entiende. No se trata ya de absurdos, sino de modos especiales (que hay que aprender) de indicar ciertas operaciones de sumar. No se pretende multiplicar por $\frac{1}{2}$, ni por $\frac{5}{8}$, ni por $\frac{8}{9}$. No se piensa en repetir una cosa media vez, ni $\frac{5}{8}$ de vez, ni $\frac{8}{9}$ de vez (lo que entraña un intento absurdo): se trata meramente de tomar como sumandos los cuocientes

$$\frac{4}{2}=2; \quad \frac{24}{8}=3; \quad \frac{2187}{9}=243,$$

y de agregarlos á otros sumandos: el cuociente 2 $\left(=\frac{4}{2}\right)$ una sola vez á los 3 sumandos iguales á 4; el cuociente 3 $\left(=\frac{24}{8}\right)$ repetido cinco veces á 3 sumandos iguales á 24; y el cuociente 243 $\left(=\frac{2187}{9}\right)$ repetido ocho veces, á 5 sumandos iguales á 2187.

Multiplicar una magnitud cualquiera por $^7/_8$ es repetir siete veces un cuociente cuyo dividendo es la magnitud dada, y cuyo divisor es 8. Multiplicar es, pues, multiplicar.

$$40 \times \frac{7}{8} = \text{al cuociente } \frac{40}{8} \times 7 \text{ veces} = 5 \times 7 = 35.$$

Sea la magnitud $26 \times {}^7/_{13}$;

$$26 \times \frac{7}{13} = \frac{26}{13} \times 7 \text{ veces} = 2 \times 7 = 14.$$

Sea ahora $19 \times {}^7/_{13}$;

$$\frac{19}{13} \times 7 = 1\,{}^6/_{13} \times 7 \text{ veces} = (7 \times 1) + \left(\frac{6}{13} \times 7\right)$$

$$= 7 + \frac{42}{13} = 7 + 3\frac{4}{13} = 10 + \frac{4}{13}$$

Por de contado que no hay dificultad ninguna en la operación de multiplicar cuando el multiplicando es quebrado ó lo contiene.

6 varas de merino á 8 reales y medio ¿cuánto importan?

$$8\,{}^1/_2 \times 6 = 51 \text{ reales.}$$

8 $^1/_2$ reales. 8 $^1/_2$ reales. 8 $^1/_2$ reales. 8 $^1/_2$ reales. 8 $^1/_2$ reales. 8 $^1/_2$ reales.	1.° Se multiplica el 8 por 6 8 6 48
$48 + \frac{6}{2} = 51$ reales.	2.° Se multiplica el $\frac{1}{2}$ por 6, lo que da $\frac{6}{2}$. Pero 6 medias cosas son 3: se agrega el 3 al 48 y el total de la operación resulta como sigue:

$$\begin{array}{rl} 8\,{}^1/_2 & \\ 6 & \\ \hline 48 & \\ +\ 3 & = {}^1/_2 \times 6 \\ \hline = 51 & \end{array}$$

Supongamos el caso más complicado: el de haber quebrados en multiplicando y multiplicador.

¿Cuánto importan 3 kilogramos y $^3/_4$ de café á 4 pesetas y $^1/_2$?

$$\left.\begin{array}{r} 4\,{}^1/_2 \\ +\ 4\,{}^1/_2 \\ +\ 4\,{}^1/_2 \\ +\ 1\,{}^1/_8 \\ +\ 1\,{}^1/_8 \\ +\ 1\,{}^1/_8 \\ \hline \end{array}\right\} \text{Y ahora, reducidos los quebrados á un común denominador,} \left\{\begin{array}{r} 4\frac{4}{8} \\ +\ 4\frac{4}{8} \\ +\ 4\frac{4}{8} \\ +\ 1\frac{1}{8} \\ +\ 1\frac{1}{8} \\ +\ 1\frac{1}{8} \\ \hline 15+\frac{15}{8} = 16\frac{7}{8} \end{array}\right.$$

El problema consiste en repetir 3 veces el sumando $4\frac{1}{2}$ y otras 3 veces su cuarta parte. La multiplicación se haría regularmente como sigue:

$$\begin{array}{rl} 4\frac{1}{2} & \\ \times\ 3\,{}^3/_4 & \\ \hline 12 & = 3 \times 4 \\ 1\frac{4}{8} & = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{8} \\ 3 & = 4 \times \frac{3}{4} = \frac{4 \times 3}{4} = \frac{4}{4} \times 3 = 1 \times 3 = 3 \\ {}^3/_8 & = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} \div 4\right) \times 3 = \frac{1}{8} \times 3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \\ \hline 16\,{}^7/_8 & \end{array}$$

De lo dicho resulta que todo cuociente puesto en forma de quebrado, v. gr.,

$$\frac{15}{5},\quad \frac{20}{4},\quad \frac{m}{n},$$

es igual á

$$15 \times \frac{1}{5},\quad 20 \times \frac{1}{4}\quad m \times \frac{1}{n}.$$

Todo quebrado, pues, indica dos operaciones:

Una de dividir por el denominador,
Y otra de multiplicar por el numerador.

LECCIÓN V

Clases de quebrados, y propiedades.

Interpretadas ya de modo inteligible las ideas que sirven de base al cálculo aritmético de los quebrados (ó de los cuocientes), procedamos á ampliar y completar sus fundamentos.

Hay magnitudes que no se pueden medir con el módulo correspondiente; pero sí con una parte alícuota del módulo. La talla de un soldado no se mide con el metro, pero sí exactamente, ó casi, con el milímetro. El labriego que no tuviese más que pesas de arroba, no podría pesar el cerdo sacrificado alegremente por Navidad. La cantidad de vino existente en un tonel, considerada como dividendo, se mide con el litro, considerado como divisor, y el número de veces que hay de litros constituye el cuociente. Suponiendo que, hecha la medición, sobra todavía líquido, este líquido se medirá con alguna parte alícuota del litro; con lo que obtendremos otro subcuociente que, sumado al cuociente anterior, nos dará completa la correspondiente expresión entera y fraccionaria (ó casi) por ejemplo, 7 litros y $\frac{3}{10}$ de litro (ó bien $\frac{73}{10}$ de litro).

Parece que esta clase de mediciones sea el fundamento de los números fraccionarios. Pero no.

Indudablemente tales medidas los sugirieron; pero, no bien adelantó la ciencia (especialmente la geometría), se llegó á ver (ó, mejor dicho, se llegó á demostrar), porque verlo es imposible con los ojos de la cara, se llegó á demostrar que

NO SIEMPRE el sobrante de una medición hecha con un módulo primario se deja medir con una parte alícuota del módulo. Ninguna parte alícuota mide la diagonal del cuadrado, si se

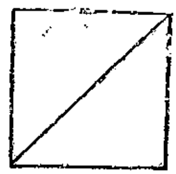


Figura 15.

toma por módulo el lado. Ninguna parte alícuota del diámetro mide la circunferencia, etc., etc. Y es de advertir que lo frecuente es encontrar magnitudes inconmensurables, y lo raro conmensurables.

Lo conmensurable, tan fácil de concebir en teoría, es casi un imposible en la práctica.

Pero, si se divide un número cualquiera y hay un sobrante, por ejemplo,

$$12 \,|\, 5 \quad = 2 + \frac{2}{5} \qquad\qquad 7 \,|\, 11 \quad = \frac{7}{11}$$

entonces el sobrante de la operación de dividir, da necesariamente un número fraccionario, porque, como todo número entero es un múltiplo de 1, el sobrante y el divisor tienen que tener por fuerza una medida común: el 1 fundamental.

La división de los números enteros es, por tanto, el verdadero origen aritmético de los números fraccionarios, cuando el dividendo es una suma de sumandos iguales todos menos uno, necesariamente menor (1).

De donde resulta: que todo número fraccionario es un múltiplo de una parte alícuota de un módulo.

---

(1) Ya es tiempo de manifestar que, en vez de haber sólo *un sumando único menor*, pueden formar el dividendo de que se trata, además de los correspondientes sumandos primarios iguales, grupos de otros sumandos secundarios también iguales, á condición de que la suma de los se-

Y que ningún número inconmensurable es múltiplo de ningún entero ni de ninguna parte alícuota del mismo (1).

En la práctica, más que como cuocientes (que es el concepto verdaderamente científico y general) se considera á los quebrados como expresiones representantes de una ó varias partes alícuotas de un módulo; y, de aquí la necesidad de expresar con la distinción debida los dos números enteros que concurren á la idea:

---

cundarios sea siempre menor que cualquiera de los sumandos primarios:

$$\begin{array}{l}
\quad 32 \\
\times \;\; 5+\frac{7}{8} \\
\hline
160 \\
+\;28 \left\{ \begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 32 \\ 7 \\ \hline 224 \\ 64 \end{array} & \begin{array}{l} 8 \\ \hline 28 \end{array} \end{array} \right. \\
\hline
=188
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
32 \\ +32 \\ +32 \\ +32 \\ +32 \\
\left.\begin{array}{r} +\;4 \\ +\;4 \\ +\;4 \\ +\;4 \\ +\;4 \\ +\;4 \\ +\;4 \end{array}\right\} \\
\hline
=188
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ = \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{r}
32 \\ +\;32 \\ +\;32 \\ +\;32 \\ +\;32 \\ \\ \\ \\ +\;28 \\ \\ \\ \\ \hline =188
\end{array}$$

El producto pedido es una suma de 5 sumandos iguales á 32, + un grupo de 7 sumandos iguales á 4, que en junto suman $28 < 32$.

Y también corresponde ya decir que, en vez de muchos sumandos primarios, puede haber uno únicamente acompañado de un gran grupo de secundarios. El sumando primario puede hasta faltar.

$$\begin{array}{l}
\quad 32 \\
\times\; 1+\frac{3}{8} \\
\hline
32 \\
\left.\begin{array}{r} +\;4 \\ +\;4 \\ +\;4 \end{array}\right\} = \\
\hline
44
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\quad 32 \\
\quad 1+\frac{3}{8} \\
\hline
32 \\
12 \left\{ \begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 32 \\ 3 \\ \hline 96 \\ 16 \end{array} & \begin{array}{l} 8 \\ \hline 12 \end{array} \end{array} \right. \\
\hline
44
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\quad 32 \\
\times\; \frac{3}{8} \\
\hline
12 = \left\{ \begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline 96 \end{array} & \begin{array}{l} 8 \\ \hline 12 \end{array} \end{array} \right.
\end{array}$$

(1) Los quebrados que se acercan á los inconmensurables son verdaderos múltiplos de otras magnitudes conmensurables, pero nunca submúltiplos de las inconmensurables correspondientes. (Véase INCONMENSURABLES.)

1.° Número de las partes en que se dividió el módulo;
2.° Número de las partes tomadas;
O sea, dividendo y divisor.

Si el módulo se divide en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 partes iguales, cada una de estas partes se llama (respectivamente) *un medio*, *un tercio*, *un cuarto*, *un quinto*, *un sexto*, *un séptimo*, *un octavo*, *un noveno* y *un décimo* (con sus correspondientes femeninos y plurales). Y, si el módulo se divide en mayor número de partes (es decir, si el divisor es mayor que 10) la denominación se forma con el número respectivo y la terminación *avos*, *once avos*, *doce avos*, *quince avos*, *ochenta y dos avos*, *mil trescientos treinta y seis avos*...

El número de partes tomadas se enuncia como se enuncian los módulos enteros; por manera que, si una medida se divide en 24 partes, y de ellas se toman 23, el enunciado verbal de este quebrado (cuociente), será: «veinte y tres, veinte y cuatro avos de tal cosa», enunciándose primero el número de partes tomadas que el número de las divisiones (1). El número de partes tomadas se llama NUMERADOR, y el de las divisiones ó partes alícuotas de un módulo, DENOMINADOR.

Los dos números que representan un quebrado, se llaman sus dos términos.

Cuando el denominador es una potencia del 10, la terminación acaba en *ésimo*.

$\frac{1}{10}$ se llama un décimo	$\frac{1}{10000}$, un diez milésimo
$\frac{1}{100}$, un centésimo	$\frac{1}{100000}$, un cien milésimo
$\frac{1}{1000}$, un milésimo	$\frac{1}{1000000}$, un millonésimo Etc.

En la numeración escrita el numerador (ó dividendo ó suma) se escribe por encima de una rayita horizontal, y por debajo el denominador (divisor, ó sumando repetido). Véase el Apéndice al Libro II, Lección I.

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{20}{5},\quad \frac{495}{9},\quad \frac{3457}{10000}\ \text{Etc.}$$

(1) Lógicamente debía hacerse al revés; pero el uso quiere la construcción común en todo lo referente á la numeración hablada. Primero debiera decirse la cosa y luego su determinante. Sin embargo, á veces se oye: reales, 5: libras, 7... Pero nadie dice: veinte y cuatro avos, diez y siete.

Siendo cuocientes los quebrados, claro es que el valor de una expresión fraccionaria no está en el numerador ni en el denominador, ni en la magnitud de sus términos.

$$\frac{20}{10}=2;\quad \frac{2000}{1000}=2;\quad \frac{44444}{22222}=2;...$$

El valor del quebrado es la relación numérica de los términos entre sí.

Llámase QUEBRADO PROPIO al que tiene menor el numerador que el denominador:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{2224}{2225}$$

Y llámase IMPROPIOS á todos los demás.

$$\frac{3}{3};\quad \frac{4}{4};\quad \frac{4}{3};\quad \frac{5}{4};\quad \frac{999}{9}.\qquad (1)$$

Todo quebrado cuyo numerador es igual al denominador es una forma del 1.

$$\frac{3}{3}=1;\quad \frac{4}{4}=1;\quad \frac{100}{100}=1....$$

Es de evidencia que tres tercias son 1 vara, que cuatro cuarterones son 1 hogaza, que 100 céntimos son 1 peseta; y, que, si una cosa se divide en partes y se toman todas, se toma la cosa por entero. Si yo divido una pesa de 1 000 gramos en 1 000 partes y las tomo todas, es claro que tomo entero el kilogramo.

Por consiguiente, todos los demás quebrados impropios son > 1, y todos los propios < 1.

Conviene á veces tener un quebrado impropio en la forma de entero, y entonces se divide el numerador por el denominador.

$$\frac{20}{5};\ 20 \,\underline{|\,5\quad}\, ; \qquad \frac{549}{9};\ 549 \,\underline{|\,9\quad}\, .$$
$$\qquad\qquad =4 \qquad\qquad\qquad\qquad =61$$

(1) Razón científica no hay ninguna para la división de los quebrados en *propios* é *impropios*. Al contrario; motivos sobran para condenarla, ya que puede inducir en el error de que la idea de *quebrado propio* se aparte de la idea de cuociente.

Pero esta clasificación está de tal modo generalizada que costaría mucho trabajo el abolirla, además de que no estorba, y tal vez favorece.

Pero la mayor parte de las veces el cuociente no resulta número entero.

$$\frac{21}{5}\text{ de duro} = \left(\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}\right)+\frac{1}{5} = (1+1+1+1)+\frac{1}{5} = 4+\frac{1}{5}$$

$$\frac{44}{13} = \left(\frac{13}{13}+\frac{13}{13}+\frac{13}{13}\right)+\frac{5}{13} = (1+1+1)+\frac{5}{13} = 3+\frac{5}{13}$$

Esta operación se llama: «convertir en número mixto un quebrado impropio».

Para hallar el entero ó los enteros de un quebrado impropio, se parte el *numerador* por el *denominador*, y al cuociente entero que resulte se le agrega un quebrado cuyo numerador sea el residuo de la división, y el denominador el mismo del quebrado impropio (ó divisor).

$$\frac{21}{5}\text{ de duro; } \begin{array}{r|l} 21 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \text{ duros} + \frac{1}{5}\text{ de duro;} \end{array} \qquad \frac{44}{13},\ \begin{array}{r|l} 44 & 13 \\ \cline{2-2} 5 & 3+\frac{5}{13} \end{array}$$

$= 4$ duros $+ 1$ peseta.
$= 21$ pesetas.

$$\begin{array}{rl} 5 & \text{pesetas.} \\ +\ 5 & \\ +\ 5 & \\ +\ 5 & \\ +\ 1 & \\ \hline =21 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 13 \\ +13 \\ +13 \\ +\ 5 \\ \hline =44 \end{array}$$

La operación consiste en hallar dos clases de sumandos: la primera, la de los sumandos iguales al denominador, y la segunda, la de los sumandos iguales á partes alícuotas del mismo denominador.

Extraer los enteros de la expresión fraccionaria $\frac{107}{17}$

$$\left.\begin{array}{r|l} 107 & 17 \\ \cline{2-2} & = 6 + \frac{5}{17} \end{array}\right\} = \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} +\ 17 \\ +\ 17 \\ +\ 17 \\ +\ 17 \\ +\ 17 \\ +\ 17 \end{array}\right\} = 102 \\ \left.\begin{array}{r} +\ 1 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \end{array}\right\} = +5 \\ \hline = 107 \quad = 107 \end{array}$$

Este compuesto de entero y quebrado se llama NÚMERO MIXTO (expresión verdaderamente nada correcta, como queda dicho).

Claro es que en la multiplicación del divisor por el cuociente (como prueba) ha de aparecer que el dividendo es una suma de sumandos todos iguales menos uno menor.

$$\begin{array}{r l} 17 & \\ \times\, 6 + \frac{5}{17} & \\ \hline 102 & \\ 5 & \left\{ \frac{17 \times 5}{17} = \frac{17}{17} \times 5 = 1 \times 5 = 5 \right. \\ \hline 107 & \end{array}$$

La razón es obvia.

El residuo de la división, multiplicado por el divisor y partido por el mismo divisor ha de resultar siempre igual á sí propio; porque el producto de cualquier quebrado por su denominador es su numerador:

$$\frac{m}{n} \times n = m$$

En los números mixtos se suprime generalmente el signo $+$ interpuesto entre el entero y el quebrado

$$7 + \frac{5}{6} = 7\,\frac{5}{6}\,; \quad 837 + \frac{15}{19} = 837\,\frac{15}{19}$$

La yuxtaposición se considera como suma (según la práctica constante en Aritmética). (1)

Para que un número mixto se transforme en el equivalente quebrado impropio, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se le agrega el numerador, y á la suma resultante se da por denominador el del quebrado propuesto.

$$6 + \frac{5}{17} = \frac{(6 \times 17) + 5}{17} = \frac{102 + 5}{17} = \frac{107}{17}.$$

$$23 + \frac{7}{8} = \frac{(23 \times 8) + 7}{8} = \frac{184 + 7}{8} = \frac{191}{8}$$

Esta transformación se llama *convertir en quebrado un número mixto.*

(1) No se olvide que en Algebra la yuxtaposición significa multiplicación.

A todo número puede darse la forma de quebrado con el denominador que se quiera.

Convertir el 15 en quebrado con el denominador 13.

$$15 \times \frac{13}{13} = \frac{15 \times 13}{13} = \frac{195}{13}$$

Se multiplica el número por el denominador pedido, y se le pone en el numerador el producto.

$$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}; \quad 7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}; \quad 81\frac{5}{9} = \frac{734}{9}$$

Los quebrados propios son innumerables y sus límites son cero y 1

$\frac{334678887}{334678888}$ se acerca bastante al límite 1.

$\frac{334678887654321}{334678887654322}$ se acerca todavía más al límite 1.

$\frac{2134526783423456782987643}{2134526783423456782987644}$ se acerca más á 1.

$\frac{1}{2467896784678}$ = una cantidad muy pequeña.

$\frac{1}{21678967846789674655678879876}$ = una cantidad menor aún que la anterior.

Entre cada dos enteros consecutivos hay multitud inasignable de números mixtos cuyo entero es el menor de los dos.

Entre 4 y 5, por ejemplo, hay

$$4\frac{1}{2},\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ 4\frac{1}{4},\ 4\frac{2}{4},\ 4\frac{3}{4},\ 4\frac{1}{5},\ 4\frac{2}{5},\ 4\frac{3}{5},\ 4\frac{4}{5} \text{ etc., etc.}$$

De dos quebrados de igual denominador es menor el que tenga menor numerador.

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

De dos quebrados de igual numerador es menor el que tenga mayor denominador

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{6} < \frac{3}{5}$$

Se aumenta, pues, un quebrado,

1.° Aumentando su numerador sin tocar al denominador, 2.° Disminuyendo el denominador sin tocar al numerador.

$$\frac{3+1}{7} > \frac{3}{7} \text{; á mayor dividendo} > \text{cuociente}$$

$$\frac{3}{7-1} > \frac{3}{7} \text{; á menor divisor} > \text{cuociente}$$

Por consiguiente; se disminuye un quebrado,

1.° Disminuyendo su numerador sin tocar al denominador.

2.° Aumentando su denominador sin tocar al numerador.

$$\frac{3-1}{7} < \frac{3}{7} \text{; á menor dividendo} < \text{cuociente}$$

$$\frac{3}{7+1} < \frac{3}{7} \text{; á mayor divisor} < \text{cuociente}$$

Si á los dos términos de un quebrado se les aumenta el mismo número, el quebrado aumenta:

á $\frac{1}{2}$ le falta $\frac{1}{2}$ para ser $= 1$

á $\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$ le falta $\frac{1}{3}$ para ser $= 1$; pero $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

á $\frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}$ le falta $\frac{1}{4}$ para ser $= 1$; pero $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$

á $\frac{3+1}{4+1} = \frac{4}{5}$ le falta $\frac{1}{5}$ para ser $= 1$; pero $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

á $\frac{4+5}{5+5} = \frac{9}{10}$ le falta $\frac{1}{10}$ para ser $= 1$; pero $\frac{1}{10} < \frac{1}{5}$

á $\frac{9+90}{10+90} = \frac{99}{100}$ le falta $\frac{1}{100}$ para ser $= 1$; pero $\frac{1}{100} < \frac{1}{10}$

á $\frac{99+900}{100+900} = \frac{999}{1000}$ le falta $\frac{1}{1000}$ para ser $= 1$; pero $\frac{1}{1000} < \frac{1}{100}$

Se ve que cada vez falta menos para llegar al límite 1 cuando á numerador y denominador se agrega la misma cantidad. Luego tanto se la puede aumentar que el quebrado sea casi $= 1$.

Luego, cuando á numerador y denominador se les reste el mismo número el quebrado disminuye.

Si se multiplica por n el numerador de un quebrado, el quebrado queda multiplicado también por n.

Porque si el dividendo se multiplica por un número cualquiera, el cuociente resulta multiplicado por el mismo.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 20 \times 3 & 5 \\ \cline{2-2} & 12 = 4 \times 3 \end{array}$$

Si el denominador se parte por un número, el cuociente resulta multiplicado por ese número.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 30 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 3 = 30 \div 10 \\ \cline{2-2} & 40 = 4 \times 10 \end{array}$$

Por consiguiente, si el numerador se parte ó el denominador se multiplica por un número, el cuociente resulta dividido por él.

$$\begin{array}{r|l} 160 & 5 \\ \cline{2-2} & 32 \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 160 & 40 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

Simplificar un quebrado es transformarlo en otro igual de términos menores.

$$\frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{27}{81} = \frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \cdots$$

La simplificación se verifica dividiendo numerador y denominador por sus factores comunes, cuando los tienen, hasta llegar á términos primos entre sí.

$$\frac{770}{2310} = \frac{77}{231} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

Claro es que no tendría que partir progresivamente, primero por $2 \times 5 = 10$, después por 7 y al fin por 11, quien hubiese visto desde luego que los términos de este quebrado son divisibles por 770.

$$\frac{770}{2310} = \frac{1}{3}$$

Todo quebrado cuyos términos son primos entre sí, se llama irreducible.

Todos los quebrados iguales tienen por numerador y denominador múltiplos de los de otro irreducible.

$$\frac{27}{81} = \frac{1}{3} \therefore = \frac{1 \times 27}{3 \times 27}$$

$$\frac{770}{2310} = \frac{1}{3} \therefore = \frac{1 \times 770}{3 \times 770}$$

Luego los dos términos de un quebrado resultan irreducibles ó reducidos á su más simple expresión, cuando se dividen por su máximo común divisor (1).

$$\frac{38808}{42336} \qquad \begin{array}{r|l} 42336 & 38808 \quad (1 \\ \hline 11)\ \ 3528 & 3528 \\ & 0000 \end{array}$$

El máximo común divisor es 3538, y, divididos por él tanto el numerador como el denominador, nos resultará el quebrado irreducible $\frac{11}{12}$

Ya hemos visto que para reducir varios quebrados á un común denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por los denominadores de los demás.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7},$$

$$\frac{105}{210}; \frac{70}{210}; \frac{42}{210}; \frac{30}{210}$$

Pero este método (que es general) ofrece el inconveniente de producir con frecuencia términos muy grandes; y, para evitarlos, se reducen ante todo los quebrados á su más simple expresión.

$$\frac{10}{20}, \frac{15}{45}, \frac{20}{100}, \frac{60}{420}, \frac{80}{160}, \frac{3}{15}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$$

(1) En la práctica no se hace así. Por lo regular se dividen ambos términos sucesivamente por los factores comunes que se van descubriendo á primera vista.

$$\frac{38808}{42336} = \overset{\text{4.ª parte}}{\frac{9702}{10584}} = \overset{\text{9.ª parte}}{\frac{1078}{1176}} = \overset{\text{Mitad}}{\frac{539}{588}} = \overset{\text{7.ª parte}}{\frac{77}{84}} = \overset{\text{7.ª parte}}{\frac{11}{12}}$$

Y, luego, reducidos ya los quebrados á su más simple expresión, se halla el mínimo común múltiplo de los nuevos denominadores, y se multiplican los dos términos de cada uno por el cuociente del mínimo común múltiplo partido por el denominador respectivo. A veces se abrevian las operaciones por medios que la práctica sugiere al calculador en cada caso particular.

LECCIÓN VI

Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.

La conveniencia de no interrumpir el orden de las ideas expuestas en las Lecciones precedentes, hizo dejar á un lado la explanación de los casos particulares y de las subdivisiones de cada caso que ocurren en la serie de operaciones aritméticas ejecutadas por medio de los quebrados. A completar la doctrina de esas operaciones está destinada esta Lección.

En las operaciones de la Aritmética modular entran cantidades de tres formas:

Enteros (9, 17, 1234;...)

Cuocientes en forma de quebrado $\left(\frac{24}{3};\ \frac{3}{24};\ \frac{234}{17698};\dots\right)$

Y los impropiamente llamados números mixtos $\left(2\frac{1}{2};\ 17\frac{3}{4};\ 4719\frac{3}{7}\dots\right)$

El estudio de las operaciones aritméticas de esta Lección es el de las combinaciones posibles con los números de estas formas.

§ I.—Sumar quebrados

Se reducen á un común denominador (si ya no los tienen iguales), se suman los numeradores, y la suma se divide por el denominador común.

$$\frac{13}{17}+\frac{15}{17}+\frac{16}{17}=\frac{13+15+16}{17}=\frac{44}{17}=2+\frac{10}{17}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{6}{7}=\frac{1\times5\times7}{3\times5\times7}+\frac{2\times3\times7}{3\times5\times7}+\frac{6\times3\times5}{3\times5\times7}$$

$$=\frac{35}{105}+\frac{42}{105}+\frac{90}{105}$$

$$=\frac{35+42+90}{105}=\frac{167}{105}=1+\frac{62}{105}$$

Si se dan á sumar números mixtos puede procederse de dos modos:

1.° Se reducen los mixtos á quebrados de un denominador común:

$$5\,^1/_2+3\,^2/_3+5\,^3/_5$$

$$=\frac{11}{2}+\frac{11}{3}+\frac{28}{5}$$

$$=\frac{11\times3\times5}{2\times3\times5}+\frac{11\times2\times5}{2\times3\times5}+\frac{28\times2\times3}{2\times3\times5}$$

$$=\frac{165}{30}+\frac{110}{30}+\frac{168}{30}=\frac{443}{30}=14+\frac{23}{30}$$

2.° Se colocan los mixtos unos bajo otros, como en la suma ordinaria, se suman en seguida los quebrados, se agrega su resultado á los enteros de los números mixtos, y se suman éstos

$$\begin{array}{r} \overset{1}{5}\ ^1/_2 \\ +\ 3\ ^2/_3 \\ +\ 5\ ^3/_5 \\ \hline 14\ ^{23}/_{30} \end{array}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{1\times3\times5}{2\times3\times5}+\frac{2\times2\times5}{2\times3\times5}+\frac{3\times2\times3}{2\times3\times5}$$

$$=\frac{15}{30}+\frac{20}{30}+\frac{18}{30}=\frac{53}{30}=1+\frac{23}{30}$$

Este segundo modo de operar es el preferible cuando hay que sumar enteros, quebrados propios y números mixtos. Los sumandos se colocan unos bajo otros como en la suma ordinaria; junto á los quebrados dados se colocan sus iguales reducidos á un común denominador; se suman éstos, se agrega el resultado á los enteros; y, por último, se halla la suma de éstos.

$$\begin{array}{rl|l}
3 & & \\
 & \frac{2}{3} & {}^{20}/_{30} \\
7 & & \\
71 & & \\
 & \frac{3}{5} & {}^{18}/_{30} \\
 & \frac{2}{6} & {}^{10}/_{30} \\
22 & & \\
3 & {}^{1}/_{2} & {}^{15}/_{30} \\
4 & {}^{1}/_{2} & {}^{15}/_{30} \\
25 & {}^{2}/_{3} & {}^{20}/_{30} \\
\hline
135 & \frac{4}{15} & 98 \;|\; 30 \\
 & & 8 \;|\; 3 + \frac{8}{30} = 3 + \frac{4}{15}
\end{array}$$

El mínimo común múltiplo es 30. En la práctica, el denominador común no se pone debajo de los numeradores respectivos, sino á la derecha tras una rayita inclinada; de modo que puedan sumarse fácilmente los numeradores.

§ II.—Restar quebrados.

Se reducen á un común denominador (si ya no lo están), y se restan los numeradores.

Si hay mixtos se procede análogamente á lo practicado en las precedentes operaciones del sumar.

$$\frac{20}{21} - \frac{3}{21} = \frac{20-3}{21} = \frac{17}{21}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$17\,\frac{4}{5} - 3\,\frac{2}{3} = \frac{89}{5} - \frac{11}{3}$$

$$= \frac{267}{15} - \frac{55}{15} = \frac{267-55}{15} = \frac{212}{15} = 14 + \frac{2}{15}$$

1.er modo con números mixtos. $14\,\frac{2}{5} - \frac{54}{7} = \frac{72}{5} - \frac{39}{7} = \frac{504}{35} - \frac{195}{35} = \frac{309}{35} = 8\,\frac{29}{35}$

2.º modo.

$$\begin{array}{rr}
17\ {}^{4}/_{5} & {}^{12}/_{15} \\
-\ 3\ {}^{2}/_{3} & -\ {}^{10}/_{15} \\
\hline
14\ {}^{2}/_{15} & {}^{2}/_{15}
\end{array}
\quad \frac{4}{5} - \frac{3}{2} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}.$$

Este último medio es impracticable cuando el quebrado del minuendo es < que el del sustraendo. Entonces se toma del minuendo un entero, se reduce á quebrado del mismo denominador que el deficiente, se suman los dos numeradores y ya es posible la resta de los quebrados.

$$\begin{array}{rcrcr} 14\,\frac{2}{5} & = & 13\,\frac{7}{5} & = & 13\;{}^{49}/_{35} \\ -\,5\,\frac{4}{7} & = & -\,5\,\frac{4}{7} & = & 5\;{}^{20}/_{35} \\ \hline & & & & 8\;{}^{29}/_{35} \end{array}$$

Si el quebrado del sustraendo es impropio, se extrae previamente su entero para que haya uniformidad.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 85\,\frac{1}{7} & = & 85\,\frac{1}{7} & = & 84\,\frac{8}{7} & = & 84\;{}^{24}/_{21} \\ -\,\frac{44}{3} & = & -\,14\,\frac{2}{3} & = & 14\,\frac{2}{3} & = & 14\;{}^{14}/_{21} \\ \hline & & & & & & 70\;{}^{10}/_{21} \end{array}$$

Si en el sustraendo hay quebrado y en el minuendo no, se saca del minuendo un 1, y se convierte en quebrado del mismo denominador que el del sustraendo.

$$\begin{array}{rcr} 24 & = & 23\;{}^{15}/_{15} \\ -\,3\,\frac{8}{15} & = & -\,3\;{}^{8}/_{15} \\ \hline & & 20\;{}^{7}/_{15} \end{array}$$

Si fuese impropio el quebrado del sustraendo se pondría en forma de número mixto.

$$\begin{array}{rcrcr} 24 & = & 24 & = & 23\;{}^{15}/_{15} \\ -\,\frac{53}{15} & = & 3\,\frac{8}{15} & = & 3\;{}^{8}/_{15} \\ \hline & & & & 20\;{}^{7}/_{15} \end{array}$$

Si se da un caso como el siguiente, se extrae del quebrado el correspondiente entero.

$$\begin{array}{rcl} 17 & = 16 & + \frac{13}{13} = 16\ {}^{13}/_{13} \\ 3\,\frac{41}{13} & = & 3 + \left(3 + \frac{2}{13}\right) = \underline{\ 6\ {}^{2}/_{13}} \\ & & \qquad\qquad\qquad \underline{\underline{10\ {}^{11}/_{13}}} \end{array}$$

Si son mixtos minuendo y sustraendo, se procede en consecuencia de lo anterior.

$$\begin{array}{l} 12\,\frac{69}{17} = 12 + \left(4 + \frac{1}{17}\right) = 15\ {}^{36}/_{34}\ (= 16\ {}^{1}/_{17} = 16\ {}^{2}/_{34} = 15\ {}^{36}/_{34}) \\ 1\,\frac{3}{2} = \ 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \underline{\ 2\ {}^{17}/_{34}}\ (=\ 2\ {}^{1}/_{2}\ =\ 2\ {}^{17}/_{34} = 2\ {}^{17}/_{34}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\underline{13\ {}^{19}/_{34}}} \end{array}$$

Si se dan muchos enteros, quebrados propios é impropios y números mixtos, unos con el signo + y otros con el signo —, se forma un grupo con todos los positivos, y otro grupo con todos los negativos; se suma separadamente cada grupo, y, por fin, se restan de los positivos los negativos (1).

$$-\,3 + 50 + \frac{1}{2} - 4 - {}^{3}/_{4} - 4\ {}^{1}/_{2} + \frac{9}{5} - \frac{17}{5} + 2\ {}^{1}/_{4} + \frac{7}{3}$$

$$\begin{array}{lllllllll} +\ 50 & = 50 & = 50 & & & -\ 3 & = 3 & = 3 \\ +\ \frac{1}{2} & = \frac{1}{2} & = {}^{30}/_{60} & & & -\ 4 & = 4 & = 4 \\ +\ \frac{9}{5} & = 1\,\frac{4}{5} & = 1\ {}^{48}/_{60} & & & -\ \frac{3}{4} & = \frac{3}{4} & = {}^{45}/_{60} \\ +\ 2\,\frac{1}{4} & = 2\,\frac{1}{4} & = 2\ {}^{15}/_{60} & & & -\ 4\,\frac{1}{2} & = 4\,\frac{1}{2} & = 4\ {}^{30}/_{60} \\ +\ \frac{7}{3} & = 2\,\frac{1}{3} & = 2\ {}^{20}/_{60} & & & -\ \frac{17}{5} & = 3\,\frac{2}{5} & = 3\ {}^{24}/_{60} \\ & & \begin{array}{r|l} 56+113 & 60 \\ \hline 53 & 1 \end{array} & & & & & \begin{array}{r|l} 15+99 & 60 \\ \hline 30 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56\ {}^{53}/_{60} \\ -\ 15\ {}^{30}/_{60} \\ \hline =\ 41\ {}^{23}/_{60} \end{array}$$

(1) Llámanse positivos los guarismos precedidos del signo + expreso ó sobrentendido, y negativos los precedidos del signo —.

§ III.—MULTIPLICAR QUEBRADOS.

Pueden ocurrir tres casos:

1.º Multiplicar un quebrado ó un mixto por un entero;

2.º Multiplicar un entero, un quebrado ó un mixto por un quebrado;

3.º Multiplicar un entero, un quebrado ó un mixto por un mixto.

1.º Multiplicar un quebrado por un entero es hacer abreviadamente una suma de tantos quebrados iguales como veces indique el entero multiplicador.

$$\frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Luego la regla será multiplicar el numerador por el entero y partir el producto por el denominador.

$$\frac{15}{3} \times 7 = \frac{15}{3} + \frac{15}{3} + \frac{15}{3} + \frac{15}{3} + \frac{15}{3} + \frac{15}{3} + \frac{15}{3} = \frac{15 \times 7}{3} = \frac{105}{3} = 35$$

$$\frac{17}{5} \times 3 = \frac{17}{5} + \frac{17}{5} + \frac{17}{5} = \frac{17 \times 3}{5} = \frac{51}{5} = 10\ \frac{1}{5}$$

Multiplicar un mixto por un entero es hacer abreviadamente una suma de tantos mixtos como repeticiones indique el entero multiplicador.

$$3\frac{2}{5} \times 3 = 3\frac{2}{5} + 3\frac{2}{5} + 3\frac{2}{5} = \left(3 + 3 + 3\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(3 \times 3\right) + \left(\frac{2}{5} \times 3\right)$$

$$= 9 + \frac{6}{5} = 9 + \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 10 + \frac{1}{5}$$

$$3\frac{2}{5} \times 3 = \left\{\begin{array}{r} 3\ {}^2/_5 \\ +\ 3\ {}^2/_5 \\ +\ 3\ {}^2/_5 \\ \hline \end{array}\right.$$

$$9 + {}^6/_5 = 10 + {}^1/_5$$

También puede hacerse la operación dando al mixto la forma de quebrado (con lo que estamos en la variante anterior).

$$3\frac{2}{5}\times 3=\frac{17}{5}\times 3=\frac{17\times 3}{5}=\frac{51}{5}=10+\frac{1}{5}$$

2.° Multiplicar un entero por un quebrado es (según se explicó en la Lec. IV, y entendiendo siempre la operación según allí queda consignado) repetir tantas veces como indique el numerador el cuociente del entero dividido por el denominador.

Sea un entero el multiplicando y un quebrado el multiplicador:

$$8\times\frac{3}{4}=\frac{8}{4}\times 3=2\times 3=6$$

Hay, pues, que hacer siempre dos operaciones:

Una de partir y otra de multiplicar (1).

O bien, hallar un cuociente y multiplicarlo, pues la esencia de la operación de multiplicar es multiplicar un cuociente, cuando el multiplicador es un quebrado.

Por consiguiente:

Multiplicar un quebrado por un quebrado es repetir tantas veces como indique el numerador del *quebrado-multiplicador*, el cuociente del quebrado-multiplicando partido por el denominador del multiplicador. Esto es lo sólo racional.

Hay, pues, que hacer dos operaciones:

Dividir el quebrado-multiplicando por el denominador del quebrado-multiplicador;

Y repetir el cuociente resultante tantas veces como indique el numerador del quebrado-multiplicador.

---

(1) Como los resultados numéricos no varían porque primero se multiplique y luego se parta, se invierte en la práctica con la mayor frecuencia el orden de las operaciones:

$$8\times\frac{3}{4}=\frac{8\times 3}{4}=\frac{24}{4}=6$$

O bien se considera al multiplicando como multiplicador (lo cual no tiene sentido cuando el multiplicando es número modular). ¿Qué significaría, por ejemplo,

$$\frac{3}{4}\times 8 \text{ manzanas de veces?}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} \div 4\right) \times 3 = \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{8} \text{ (1)}$$

$$\frac{13}{8} \times \frac{5}{7} = \left(\frac{13}{8} \div 7\right) \times 5 = \frac{13}{56} \times 5 = \frac{65}{56} = 1 + \frac{9}{56}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{12}{4} = \left(\frac{1}{2} \div 4\right) \times 12 = \frac{1}{8} \times 12 = \frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$$

Por consiguiente también:

Multiplicar un mixto por un quebrado es repetir tantas veces como indique el numerador del quebrado multiplicador, el cuociente del mixto por el denominador del multiplicador.

$$3\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \left(3\frac{1}{2} \div 3\right) \times 2 = \left(\frac{7}{2} \div 3\right) \times 2 = \frac{7}{6} \times 2 = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$$

De lo expuesto aparece que, cuando el multiplicador es un quebrado, el multiplicando se parte por el denominador, y el cuociente resultante se multiplica por el numerador.

Pero, atendiendo á que los resultados numéricos son iguales cuando se empieza partiendo (que es lo racional y científico) que cuando se empieza multiplicando (lo cual es científicamente inexplicable), se dan las siguientes reglas prácticas:

Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador y el producto se parte por el denominador;

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5};$$

Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican los numeradores entre sí, y el producto de los numeradores se parte por el producto de los denominadores.

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21};$$

Y para multiplicar un mixto por un quebrado se multiplica, ante todo, el entero por el quebrado, y en seguida se

(1) Téngase presente que un quebrado se parte por un entero multiplicando el denominador por el entero:

$$\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{2} \div 17 = \frac{1}{34};...$$

Es de evidencia que la mitad de un medio es una cuarta, etc.

agrega al resultado el producto del quebrado del número mixto por el quebrado-multiplicador; por manera, que el total resulta de la suma de dos productos.

$$8\,{}^1/_2 \times \frac{3}{4} = \left(8 \times \frac{3}{4}\right) \text{1.ª operación} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) \text{2.ª operación.}$$

$$= \left(\frac{24}{4} = 6\right) + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4} = {}^3/_8\right)$$

$$= 6 + \frac{3}{8} = 6\,{}^3/_8.$$

3.° Multiplicar por un número mixto.

Los tres casos que pueden ocurrir se reducen á los tres anteriores si el mixto-multiplicador se reduce á quebrado.

Entero por mixto:

$$17 \times 2\frac{3}{4} = 17 \times \frac{11}{4} = \frac{187}{4} = 46\frac{3}{4}$$

Quebrado por mixto:

$$\frac{3}{11} \times 4\,{}^1/_2 = \frac{3}{11} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{22} = 1\frac{5}{22}$$

Mixto por mixto:

$$5\frac{3}{4} \times 7\,{}^2/_3 = 5 + \frac{3}{4} \times \frac{23}{3} = \left(5 \times \frac{23}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{23}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{115}{3}\right) + \left(\frac{69}{12}\right)$$

$$= 38\frac{1}{3} + 5\frac{3}{4} = 38 + 5 + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = 44\frac{1}{12}$$

Pero, regularmente, el mixto no se pone en forma de quebrado, y entonces las operaciones se hacen como sigue:

Entero $\times$ mixto:

$$17 \times 2\frac{3}{4} = (17 \times 2) + \left(17 \times \frac{3}{4}\right) = 34 + \frac{51}{4} = 34 + 12\frac{3}{4} = 46\frac{3}{4}$$

Quebrado $\times$ mixto:

$$\frac{3}{11} \times 4\,{}^1/_2 = \left(\frac{3}{11} \times 4\right) + \left(\frac{3}{11} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{12}{11} + \frac{3}{22} = \frac{24}{22} + \frac{3}{22} = \frac{27}{22} = 1\frac{5}{22}$$

Mixto $\times$ mixto:

$$5\frac{3}{4}\times 7\frac{2}{3}=\left(5\times 7\right)+\left(\frac{3}{4}\times 7\right)+\left(5\times {}^{2}/_{3}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right) \quad (1)$$

$$=35+\frac{21}{4}+\frac{10}{3}+\frac{6}{12}$$

$$=35+5\frac{1}{4}+3\frac{1}{3}+\frac{6}{12}=35+5+3+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}$$

$$=35+5+3+1+\frac{1}{12}=44+\frac{1}{12}$$

Regularmente la última operación se haría como sigue:

$$\begin{array}{rl} 5\frac{3}{4} & \\ \times\ 7\frac{2}{3} & \\ \hline 35 & =\text{producto de los dos enteros} \\ \frac{21}{4} & =\text{producto de los enteros del multiplicador por el quebrado del multiplicando} \\ \frac{10}{3} & =\text{producto del quebrado del multiplicador por los enteros del multiplicando} \\ \frac{6}{12} & =\text{producto de los dos quebrados.} \end{array}$$

Y, reducidos los quebrados á denominador común, resultaría la operación total de este modo:

$$\begin{array}{rlll} 5\,{}^{3}/_{4} & & & \\ \times\ 7\,{}^{2}/_{3} & & & \\ \hline 35 & =\overset{1}{\smile}{35} & =35 & \\ \frac{21}{4} & =5\frac{1}{4} & =5\,{}^{3}/_{12} & \\ \frac{10}{3} & =3\frac{1}{3} & =3\,{}^{4}/_{12} & \\ \frac{6}{12} & =\frac{6}{12} & ={}^{6}/_{12} & \\ \hline & 44\frac{1}{13} & =43\,{}^{13}/_{12} & =43+1\,{}^{1}/_{12}=44\,{}^{1}/_{12} \end{array}$$

(1) Este último caso es el que presenta alguna complicación, por requerir cuatro operaciones:

1.ª Se multiplican los enteros entre sí;

2.ª Se multiplica el quebrado del multiplicando por los enteros del multiplicador;

3.ª Se multiplican los enteros del multiplicando por el quebrado del multiplicador;

4.ª Se multiplican ambos quebrados entre sí.

$$\begin{array}{ll} 417\frac{1}{2} & = \frac{835}{2} \\ \times\ 38\frac{3}{4} & = \times\frac{155}{4} \end{array} \Bigg\} \ \frac{835 \times 155}{2 \times 4} = \frac{129425}{8} = 16178\frac{1}{8}$$

$$\begin{array}{l} \ \ \underset{\smile}{1} \\ 3336 \\ 1251 \end{array} \Big\} \ 417 \times 38 = \text{al producto } 417 \times 38$$

$$\left.\begin{array}{l} 104\frac{1}{4} = 104\ {}^2/_8 \\ 104\frac{1}{4} = 104\ {}^2/_8 \\ 104\frac{1}{4} = 104\ {}^2/_8 \end{array}\right\} = 417 \times {}^3/_4 = \frac{417}{4} \times 3$$

$$19 \ = \ 38 \times {}^1/_2$$

$${}^3/_8 = {}^1/_8 \times {}^3/_4$$

$$16178\frac{1}{8} \quad ({}^2/_8 + {}^2/_8 + {}^2/_8 + {}^3/_8 = {}^9/_8 = 1\,{}^1/_8$$

Claro es que en las diversas combinaciones que pueden ocurrir caben muchas abreviaciones, si los numeradores y los denominadores tienen factores comunes.

Quebrado por entero:

$$\frac{3}{14} \times 7 = \frac{3}{2}\ ; \text{ (dividiendo el 14 por 7)}$$

Mixto por entero:

$$12\frac{3}{12} \times 4 = \frac{[(12 \times 12) + 3] \times 4}{12} = \frac{147 \times 4}{12} = \frac{147}{3} = 49, \text{ etc.}$$

Un quebrado multiplicado por su denominador es igual á su numerador

$$\frac{2}{3} \times 3 = \frac{2 \times 3}{3} = 2 \times \frac{3}{3} = 2 \times 1 = 2$$

$$\frac{m}{n} \times n = \frac{m \times n}{n} = m \times \frac{n}{n} = m \times 1 = m \quad (1).$$

(1) Esta propiedad, ó, más bien, evidencia, tiene constante aplicación en las consideraciones referentes á la operación de dividir quebrados.

§ IV.—PARTIR QUEBRADOS.

Los casos y subcasos posibles son los siguientes:

1.er caso.—Partir un quebrado / Partir un mixto } por un entero;

2.° caso.— Partir un entero / Partir un quebrado / Partir un mixto } por un quebrado;

3.° caso.— Partir un entero / Partir un quebrado / Partir un mixto } por un mixto.

PRIMER CASO.—Para dividir un quebrado por un entero se multiplica el denominador por el entero sin tocar al numerador.

$$\frac{1}{2} \div 5 = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10}$$

Es de evidencia que si una mitad de un módulo se divide en 5 partes, cada parte será cinco veces menor que la mitad. Y, en general,

$$\frac{m}{n} \div p = \frac{m}{n \times p}$$

$$\frac{5}{7} \div 6 = \frac{5}{42}; \quad \frac{1}{234} \div 17 = \frac{1}{234 \times 17} = \frac{1}{3978}$$

Para dividir un mixto por un entero se convierte el mixto en quebrado y se procede como antes.

$$17\frac{1}{2} \div 4 = \frac{(2 \times 17) + 1}{2} \div 4 = \frac{35}{2} \div 4 = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$$

Pero también puede verificarse la división por medio de tres operaciones:

1.ª Dividir el entero del mixto por el entero-divisor;
2.ª Dividir el quebrado del mixto por el entero-divisor;
3.ª Sumar los resultados.

$$17\frac{1}{2} \div 4 = \left\{ 17 \div 4 \right\} \text{ 1.ª operación, } + \left\{ \frac{1}{2} \div 4 \right\} \text{ 2.ª operación.}$$

$$= 4\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 4\frac{2}{8} + \frac{1}{8} = 4\frac{3}{8} \Big\} \text{ 3.ª operación.}$$

Segundo caso.—Para resolver las variantes del segundo caso se ha de tener presente que la operación de partir tiene por objeto:

O bien hallar el número de veces que se repitió un sumando cuando este sumando se conoce;

O bien hallar el sumando cuando se conoce el número de veces.

$$2 \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \hline = 4 \text{ veces} \end{array} \right. \qquad 2 \div \frac{1}{4} = 8 \text{ veces}$$

Estos cuocientes mayores que los respectivos dividendos causan extrañeza en los principiantes, porque no se dan razón de las contracciones introducidas en los dividendos por los que suministran los datos de las operaciones. En los casos propuestos las sumas matrices no eran los dividendos dados, sino $\frac{4}{2}$ y $\frac{8}{4}$.

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2} \\ + & \frac{1}{2} \\ + & \frac{1}{2} \\ + & \frac{1}{2} \\ \hline = & \frac{4}{2} \text{ Luego contraído en el dividendo 2.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{4} \\ + & \frac{1}{4} \\ + & \frac{1}{4} \\ + & \frac{1}{4} \\ + & \frac{1}{4} \\ + & \frac{1}{4} \\ + & \frac{1}{4} \\ + & \frac{1}{4} \\ \hline = & \frac{8}{4} \text{ Luego contraído en el dividendo 2.} \end{array}$$

Y, por tanto, si en vez de los datos contraídos

$$2 \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \right., \qquad 2 \div \frac{1}{4}$$

se nos hubiesen dado los verdaderos dividendos, no contraídos $^4/_2$ y $^8/_4$, entonces habríamos dispuesto las operaciones como sigue, donde ya no existe dificultad ninguna:

$$\frac{4}{2} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \hline = 4 \text{ veces } ^1/_2 \end{array} \right. \qquad \frac{8}{4} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ \hline = 8 \text{ veces } ^1/_4 \end{array} \right.$$

Solapadamente, cuando se nos exige que dividamos un entero por un quebrado, se nos dan términos no referidos á las mismas magnitudes, y, naturalmente, las operaciones resultan incomprensibles. Pero refiéranse dividendo y divisor á las mismas fracciones de módulo, y en el acto se desvanecerá todo motivo de perplejidad. Examinemos el ejemplo

$$14 \div \frac{2}{7} = 49$$

Aquí se nos dan cantidades referidas á magnitudes distintas: el 14 á módulos enteros; y el $^2/_7$ á séptimas partes del mismo módulo. La operación no es, pues, inteligible mientras no se reduzcan dividendo y divisor á igual denominación, ya recurriendo á la suma matriz, ó bien (por ser largo tal procedimiento) recurriendo á una propiedad que nos es muy conocida, procedente de las de la suma misma.

Sabemos que, si multiplicamos dividendo y divisor por idéntico número, el cuociente no varía. Pudiéramos, pues, multiplicar uno y otro por cualquier número; pero el más conveniente es el denominador mismo del quebrado. Y, si tal hacemos, en el caso propuesto tendremos:

$$14 \times 7 \div \frac{2 \times 7}{7} = \left(14 \times 7\right) \div \left(2 \times \frac{7}{7}\right) = 98 \div 2 = 49$$

Para comprobar que

$$4 \div \frac{1}{4} = 16 \qquad \begin{array}{l|l} 4 & \frac{1}{4} \\ \cline{2-2} & = 16 \text{ veces} \end{array}$$

multiplíquense dividendo y divisor por el denominador del quebrado y aparecerá evidente el resultado

$$\begin{array}{l|l} 4 \times 4 & \frac{1}{4} \times 4 \\ \cline{2-2} & \end{array} = \begin{array}{l|l} 16 & 1 \\ \cline{2-2} & = 16 \text{ veces} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 42 & ^2/_3 \\ \cline{2-2} & \end{array} = \begin{array}{l|l} 42 \times 3 & \frac{2}{3} \times 3 \\ \cline{2-2} & \end{array} = \begin{array}{l|l} 126 & 2 \\ \cline{2-2} & = 63 \text{ veces} \end{array}$$

$$10 \div \frac{4}{5} = 50 \div 4 = 12\,\frac{2}{4} = 12\,\frac{1}{2}$$

De donde resulta que para partir un entero por un quebrado se multiplica el entero por el denominador y el producto se parte por el numerador. (1).

Para dividir un quebrado por otro se reducen ambos á un común denominador, y se parte el nuevo numerador del primero por el nuevo del segundo.

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{14} = \frac{14}{28} \div \frac{2}{28} = 14 \div 2 = 7$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{21}{28} \div \frac{8}{28} = 21 \div 8 = 2 + \frac{5}{8}$$

Es de evidencia que un número cualquiera de partes alícuotas de un módulo partido por otro número cualquiera de las mismas partes, da un cuociente del todo independiente del tamaño de las partes alícuotas.

Además, siempre pudiera prescindirse de los denominadores multiplicando por ellos dividendo y divisor.

$$\frac{7}{8} \div \frac{7}{9} = \frac{7 \times 9}{8 \times 9} \div \frac{7 \times 8}{9 \times 8} = \frac{63}{72} \div \frac{56}{72}$$

Multipliquemos dividendo y divisor por el denominador común 72, suprimiendo al efecto los denominadores, y desaparecerá la forma de quebrado, con lo que tendremos:

$$63 \div 56$$

En la práctica, pues, para partir un quebrado por otro, se

(1) O bien (como dicen muchas Aritméticas) el entero se multiplica por el *quebrado invertido:*

$$21 \div \frac{3}{5} = 21 \times \frac{5}{3}$$

Pero esta prescripción (desventurada en su aspecto científico) desvía la mente del verdadero concepto de la división cuando el divisor es quebrado. Entonces se pide una operación con cantidades referidas á módulos distintos; y, para hacer desaparecer la incompatibilidad, hay que multiplicar dividendo y divisor por el denominador del quebrado. Esta es la idea verdadera y no la otra, especie de receta anticientífica. Lo racional es deshacer la contracción solapada de los datos, no referidos á un mismo módulo de medir.

multiplica el numerador de cada uno por el denominador del otro, y se parte el primer producto por el segundo. (1)

$$\frac{2}{7} \div \frac{1}{231} = \frac{2 \times 231}{1 \times 7} = \frac{462}{7} = 66$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{15} = \frac{2 \times 15}{3 \times 4} = \frac{30}{12} = 2\,{}^1\!/_2$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{1000} = \frac{1 \times 1000}{1 \times 2} = 500$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{16} = \frac{16}{4} = 4$$

Se ve que, si también al partir quebrados hay perplejidad al ver cuocientes mayores que los respectivos dividendos, la extrañeza depende de que el dividendo resulta contraído; refiéranse dividendo y divisor á magnitudes idénticas, y, desde luego, se harán evidentes los resultados

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{4}{8} \div \frac{1}{8} = 4 \div 1 = 4$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{8} \\ +\frac{1}{8} \\ +\frac{1}{8} \\ +\frac{1}{8} \\ \hline \frac{4}{8} \end{array} \text{ contraído en } \frac{1}{2}$$

La operación de dividir un mixto por un quebrado, se reduce á la de dividir un quebrado por otro cuando al mixto se da previamente la forma de quebrado:

$$7\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{15}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{15 \times 4}{2 \times 3} = \frac{60}{6} = 10$$

Pero, si el mixto no se reduce á quebrado, entonces se procede como sigue:

(1) A esto llaman en las escuelas *multiplicar en cruz:*

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 3} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$$

1.° Se parte el entero del mixto por el quebrado-divisor;

2.° Se parte el quebrado del mixto por el quebrado-divisor;

3.° Se suman los dos cuocientes.

$$7\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \left(7 \div {}^3/_4\right) + \left(\frac{1}{2} \div {}^3/_4\right)$$

$$= \left(\frac{7}{1} \div \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{7 \times 4}{3 \times 1}\right) + \left(\frac{1 \times 4}{2 \times 3}\right)$$

$$= \frac{28}{3} + \frac{4}{6} = 9\frac{1}{3} + \frac{4}{6} = 9 + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 10$$

Tercer caso.—El último caso, en que el divisor es un mixto, se reduce á las tres variantes anteriores, cuando el mixto se pone previamente en forma de quebrado

Entero ÷ por mixto:

$$7 \div 3\frac{1}{2} = 7 \div \frac{7}{2} = \frac{7}{1} \div \frac{7}{2} = \frac{7 \times 2}{7 \times 1} = \frac{7 \times 2}{7} = 2$$

Quebrado ÷ por mixto:

$$\frac{1}{8} \div 3\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \div \frac{7}{2} = \frac{1 \times 2}{7 \times 8} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

Mixto ÷ por mixto:

$$4\frac{1}{3} \div 3\frac{1}{2} = \frac{13}{3} \div \frac{7}{2} = \frac{13 \times 2}{7 \times 3} = \frac{26}{21} = 1\frac{5}{21}$$

Observación.—Claro es que en todas las operaciones de esta Lección cabe abreviar los cálculos, siempre que haya factores comunes en dividendo y divisor.

PRUEBAS DE LAS CUATRO OPERACIONES.

Son las mismas de la Aritmética pura, pues el modo de ejecutar las operaciones en la Aritmética modular, es el mismo de sumar, restar, multiplicar y partir, aprendidas en la primera parte.

APÉNDICE.

Máquinas aritméticas.—El distinguido sabio francés Eduardo Lucas, há poco fallecido en París, reunió en el Conservatorio de Artes y Oficios una colección muy completa de los aparatos destinados á efectuar mecánicamente las operaciones numéricas (suma, resta, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces).

Estos pueden clasificarse en dos grupos: unos que dan los resultados exactos del cálculo y otros que los dan sólo con cierta aproximación. De la primera clase son los inventados por Mannheim, Lalane, Genaille, Eduardo Lucas y las reglillas que antes que todos descubrió Néper, el ilustre inventor de los logaritmos. En cuanto á los que dan resultados exactos, la primera máquina aritmética fué ideada por Pascal, y simplificada después por Pepine, y últimamente por Roth. Con auxilio de la de Thomas de Colmar, se pueden multiplicar en un minuto dos números de diez cifras. En fin, entre las más notables se cuentan la de Babbage y la debida al célebre geómetra ruso Tschebichef.

En toda máquina aritmética se distinguen cuatro partes esenciales, que se han denominado; el generador, el reproductor, el inversor y el borrador. Están destinadas á poner los datos, efectuar la operación, hallar el resultado y volver á colocar el aparato en disposición de funcionar de nuevo, borrada ya toda traza de la operación efectuada.

Muy recientemente se han descubierto los integradores y los intégrafos, que efectúan mecánicamente la suma de una série infinita de magnitudes infinitamente pequeñas. El más conocido de los primeros es el planímetro de Ameler, y los intégrafos más perfectos son los discurridos por Abdank Abakanowiz, que no sólo dan el resultado de la suma, sino la ley que la rige, expresada por medio de la llamada curva integral.

ADVERTENCIAS.

Cuando el numerador de un primer quebrado es denominador de otro segundo, y el denominador del primero aparece como numerador del segundo, se dice que las fracciones son inversas.

Así, la fracción $\frac{3}{4}$ tiene por inversa á $\frac{4}{3}$

$\frac{7}{2}$ á $\frac{2}{7}$

De donde se deduce que el resultado de partir un primer quebrado por otro segundo es el mismo que el de multiplicar la fracción primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6}$$

Se dice que un entero se pone en forma de quebrado dándole por denominador la unidad. Así, 5, 7, 63,... en forma de quebrado resultan

$$\frac{5}{1}, \quad \frac{7}{1}, \quad \frac{63}{1}$$

Esto se efectúa para generalizar algunas reglas abreviadas. Por ejemplo: para partir quebrados se multiplican en cruz (ó en aspa).

$$7 \div \frac{3}{4} = \frac{7}{1} \div \frac{3}{4} = (7 \times 4) \div (1 \times 3) = 28 \div 3 = \frac{28}{8}$$

En toda división inexacta el residuo se considera como el numerador de un quebrado que tiene por denominador al divisor.

$$\frac{28}{3} = 9\,\frac{1}{3} \qquad \begin{array}{r|l} 28 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 9 \end{array} = 28 \begin{array}{|l} 3 \\ \hline 9 + \frac{1}{3} \end{array}$$

Efectivamente: El producto del cuociente por el divisor da el dividendo.

$$9\,\frac{1}{3} \times 3 = (9 \times 3) + \left(\frac{1}{3} \times 3\right) = 27 + \frac{3}{3} = 27 + 1 = 28$$

De donde resulta que todo número es múltiplo de otro, si éste se multiplica por el cuociente de los dos.

Así 17 es múltiplo de 7, si este 7 se multiplica por $2\,\frac{3}{7}$ que es el cuociente de

$$17 \begin{array}{|l} 7 \\ \hline \end{array} = 17 \begin{array}{|l} 7 \\ \hline 2\,\frac{3}{7} \end{array}$$

LIBRO II

FRACCIONES DECIMALES

FRACCIONES DECIMALES

LECCIÓN I

Fracciones decimales.

Si un módulo se divide en 10 partes, ó en 100, ó en 1000... ú otra potencia cualquiera del 10, las fracciones con tales denominadores se llaman decimales.

$$\frac{5}{10}, \quad \frac{75}{100}, \quad \frac{125}{1000}, \quad \frac{1582}{10000}, \ldots$$

Se llaman, pues, decimales los cuocientes puestos en forma de quebrado que tienen por denominador una potencia del 10.

Estas fracciones se reducen á un común denominador, multiplicando sus dos términos por la potencia del 10 que sea necesaria para que todos los denominadores tengan igual número de ceros. Así, los quebrados anteriores quedan reducidos á la misma denominación, multiplicando el primero por 10^3, el segundo por 10^2 y el tercero por 10^1.

$$\frac{5}{10} \times 10^3; \quad \frac{75}{100} \times 10^2; \quad \frac{125}{1000} \times 10^1; \quad \frac{1582}{10000}$$

$$\frac{5000}{10000}, \quad \frac{7500}{10000}; \quad \frac{1250}{10000}; \quad \frac{1582}{10000}$$

De donde resulta la siguiente regla práctica: Para reducir fracciones decimales á denominador común, se agregan á los dos términos de cada quebrado tantos ceros como fueren precisos para que todos los denominadores resulten iguales.

Ya con denominador común, las operaciones de sumar, restar, multiplicar y partir fracciones decimales, se efectúan conforme á las reglas explicadas.

El análisis de cualquier quebrado decimal hace ver que el valor correlativo de los numeradores decrece hacia la derecha como si se tratara de números enteros.

$$\frac{7852}{10000} = \frac{7000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{2}{10000}$$

$$= \frac{7 \times 10^3}{10000} + \frac{8 \times 10^2}{10000} + \frac{5 \times 10^1}{10000} + \frac{2 \times 10^0}{10000}$$

$$\frac{1}{10};\ \frac{1}{100};\ \frac{1}{1000};\ \frac{1}{10000};\ \frac{1}{100000};\ \frac{1}{1000000};\ \text{etc.}$$

$$\frac{2}{10};\ \frac{2}{100};\ \frac{2}{1000};\ \frac{2}{10000};\ \frac{2}{100000};\ \frac{2}{1000000};\ \text{etc.}$$

$$\frac{3}{10};\ \frac{3}{100};\ \frac{3}{1000};\ \frac{3}{10000};\ \frac{3}{100000};\ \frac{3}{1000000};\ \text{etc., etc.}$$

De donde resulta que, así como un millar tiene 10 centenas, y una centena 10 decenas, y una decena 10 unidades, así también una unidad tiene 10 décimas, una décima 10 centésimas, una centésima 10 milésimas, etc.; de modo, que la reunión de diez unidades de un orden cualquiera, constituye una unidad del orden inmediato superior á la izquierda.

De aquí el haberse extendido á las fracciones decimales los mismos principios en que se funda la numeración escrita de los enteros, con sólo una modificación: la de dar á conocer el lugar donde concluyen los enteros y empiezan las fracciones. Una coma, ó un punto á medio renglón (que ha sido hasta ahora lo más general) colocados entre los enteros y las décimas, determina esta separación:

Así,

47,3; 85,34; 117,917; 1,2347;...

47·3 85·34 117·917 1·2347;...

significan

47 enteros y tres décimas;
85 enteros y treinta y cuatro centésimas;
117 enteros y novecientas diez y siete milésimas;
1 entero y dos mil tres cientos cuarenta y siete diezmilésimas, etc.

y tienen el mismo valor que

$$47 + \frac{3}{10}; \quad 85 + \frac{34}{100}; \quad 117 + \frac{917}{1000}; \quad 1 + \frac{2347}{10000};...$$

En Inglaterra y otros países de Europa, y sobre todo en la República Norteamericana, la separación de los enteros y los decimales se ha marcado y se sigue marcando con un punto escrito á medio renglón (uso que también tiene adeptos en España, si bien son los menos):

$$47{\cdot}3; \quad 85{\cdot}34; \quad 117{\cdot}917; \quad 1{\cdot}2347,...$$

Cuando no hay enteros, se ha puesto un cero antes de la coma

$$\frac{3}{10} = 0{,}3; \quad \frac{3}{100} = 0{,}03; \quad \frac{3}{10000} = 0{,}0003 \text{ etc.}$$

ó solamente un punto inicial á medio renglón:

$${\cdot}3; \quad {\cdot}03; \quad {\cdot}0003;...$$

Véase el Apéndice á esta Lección.

Cuando un decimal tiene muchas cifras decimales, éstas se distribuyen y distinguen por grupos de á tres, contados desde la coma hacia la derecha; por lo cual puede suceder, y sucede, que el último grupo (el de la derecha) aparezca con tres cifras, ó con dos, ó con una. Cada grupo se lee agregando á su enunciación numérica su denominación decimal.

Así,

$$2{,}34\dot{5}67\dot{1}89\dot{7}67\dot{2}6; \text{ ó bien } 2{\cdot}345\ 671\ 897\ 672\ 6;$$

se leen

Dos enteros, trescientas cuarenta y cinco milésimas, seiscientas setenta y una millonésimas, ochocientas noventa y siete mil millonésimas, seiscientas setenta y dos billonésimas y seis diezbillonésimas.

Con suma frecuencia no se señalan los grupos de á tres cifras con puntos por encima ni se deslindan por pequeños espacios en claro intermedios:

47,67898765434567

enteros
milésimas
millonésimas
mil millonésimas
billonésimas
cien billonésimas

0,565717894389785
mil billonésimas

Como se vé, cada cifra decimal tiene dos valores: uno absoluto y otro de posición.

Así

3,4 se puede leer 3 enteros y cuatro décimas, ó bien treinta y cuatro décimas;
3,45 se lee 3 enteros y cuarenta y cinco centésimas; ó bien treinta y cuatro décimas y cinco centésimas; ó bien trescientas cuarenta y cinco centésimas;
374,457 se lee 374 enteros y 457 milésimas, ó bien
37 enteros y 4457 milésimas; ó bien
3 enteros y 74457 milésimas; ó bien
cero enteros y 374457 milésimas, etc., etc.

Si la fracción no contiene cifra ó cifras de algún orden, se hace ocupar por cero ó ceros el lugar ó lugares respectivos.

3,04; 3 enteros y 4 centésimas;
3,104; 3 enteros y 104 milésimas;
3,0004; 3 enteros y 4 diez milésimas.
3,000 000 000 004; 3 enteros y 4 billonésimas, etc., etc.

Los números mixtos decimales se leen, pues, de varios modos; pero el común y corriente es como sigue:

Se nombra ante todo la parte entera, y luego la parte decimal, como si también fuese entera, agregando al fin la denominación de la última cifra fraccionaria.

3745,3745; 26722,35467; ..

enteros
diez milésimas
enteros
cien milésimas

Si á la derecha de una fracción decimal se coloca uno ó más ceros, la fracción no varía, porque esa agregación equivale á multiplicar los dos términos del quebrado por una potencia del 10 igual al número de ceros.

$$0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000 = 0{,}3\dot{0}0\dot{0}000000$$

$$= \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} = \frac{3000}{10000} = \frac{3\,000\,000\,000}{10000000000}$$

$$= \frac{3}{10} = \frac{3 \times 10^1}{10 \times 10^1} = \frac{3 \times 10^2}{10 \times 10^2} = \frac{3 \times 10^3}{10 \times 10^3} = \frac{3 \times 10^9}{10 \times 10^9}$$

Luego quitar ceros de la derecha de una fracción decimal que los tenga, es partir los dos términos del quebrado por una potencia del 10 igual al número de ceros suprimidos.

Luego la fracción decimal no varía si los ceros de su derecha se suprimen.

O bien si se agregan varios.

Por eso las fracciones decimales se reducen á la misma denominación, haciendo que con ceros á la derecha aparezcan las de pocas cifras con tantos decimales como la que más.

Así, los quebrados

0,8; 0,87; 0,7876; 0,674567899874;...
0·8: 0·87; 0·7876; 0·674567899874;...
·8; ·87; ·7876; ·674567899874;...
·674 567 899 874;...

resultan todos reducidos á billonésimas como sigue:

0,800000000000; 0,870000000000; 0,787600000000; 0,674567897874

Para multiplicar por 10, basta con mover la coma un lugar á la derecha.

$0{,}3 \times 10 = 03, \quad = 3$, porque el cero á la izquierda carece de valor.

$$\frac{3}{10} \times 10 = \frac{3 \times 10}{10} = 3 \times \frac{10}{10} = 3 \times 1 = 3$$

En efecto, es de evidencia que 3 enteros valen 10 veces más que 3 décimas.

Por consiguiente; para multiplicar una fracción decimal por 100, 1000, 10000, ó por una potencia cualquiera de 10, basta con situar la coma á la derecha tantos lugares como ceros tenga la potencia.

0,3 × 100 = 030, = 030 = 30 (suprimido el cero á la izquierda).
0,0003 × 10000 = 00003, = 3, (suprimidos los ceros á la izquierda).
408,1356 × 10 = 4081,356; ó bien 4081·356
408,1356 × 1000 = 408135,6; ó bien 408135·6
0,0006 × 100 = 000,06 = 0,06; ó bien 0·06; ó bien ·06
0,6 × 1000 000 = 600 000, etc.

Suprimir la coma, es multiplicar por una potencia de 10 igual al número de cifras decimales.

0,0006 es 10000 veces < que 00006 = 6

Naturalmente, si la coma se mueve á la izquierda, el quebrado queda dividido por una potencia del 10 igual al número de lugares recorridos.

0,5 ÷ 10 = ,05 = 0,05 = 0·05

y claro es que 5 centésimas valen 10 veces menos que 5 décimas.

84,6 ÷ 100 = 0,846; ó bien 0·846; ó bien ·846
84,6 ÷ 100000 = 0,000 846; ó bien 0·000 846; ó bien ·000 846

APÉNDICE

Recientemente se han introducido grandes modificaciones en el sistema de notación de los quebrados comunes y de las fracciones decimales.

Según las decisiones de la Oficina internacional de pesos y medidas, del Congreso de electricistas de París de 1881, del Congreso de Mecánica aplicada de 1889, del Congreso de electricistas de París de 1889, del Congreso de electricistas de Francfort de 1891 y de la Comisión de notaciones del Congreso de electricistas de Chicago en 1893, se ha convenido:

1.° En que únicamente la coma sirva para separar la parte entera de la decimal;

2.° En que las cifras se distribuyan en grupos de á tres, separados por un estrecho espacio en blanco;

Y 3.° En que el punto sea exclusivamente signo de multiplicar escrito, no á medio renglón, sino en la parte baja de la línea.

Según estos acuerdos, pues, debe escribirse:

3,17 y no 3·17

0,126 717 18 y { no 0·12671718 / ni 0·12671718 / ni ·12671718 }

En virtud de estos acuerdos se emplea también *algunas veces* una notación especialísima llamada exponencial. En vez de emplear los múltiplos ó los submúltiplos, se expresan los números considerándolos como productos de dos factores, uno de los cuales es siempre el 10 elevado á una potencia. Si se trata de una fracción, el exponente es negativo.

Así, por ejemplo, si un número entero es cuatrocientos cincuenta y nueve millones, se escribirá

$$459\,000\,000$$

ó bien

$$459.10^6$$

ó bien

$$45{,}9.10^7$$

ó bien

$$4{,}59.10^8 \quad \text{Etc., etc.}$$

Y, si el número no fuera entero, sino fraccionario, como por ejemplo

$$\frac{1}{459000000}$$

se escribiría

$$0{,}000\,000\,459$$

ó bien

$$459.10^{-9}$$

ó bien

$$0{,}459.10^{-6} \quad \text{Etc., etc.}$$

El exponente indica cuántos lugares hay que correr la coma hacia la derecha cuando los exponentes son positivos, ó hacia la izquierda cuando los exponentes son negativos, con el objeto, tanto en un caso como en otro, de obtener el número entero correspondiente, ó la equivalente fracción decimal en la notación común.

Las decisiones de los Congresos citados se cumplen generalmente en el extranjero por los hombres dedicados á los cálculos de electricidad. Pero los Aritméticos no observan todavía las nuevas prescripciones.

LECCIÓN II

Operaciones con decimales.

Se efectúan como las de los enteros del sistema de la notación decimal, atendiendo á que toda cifra de orden superior vale 10 veces más que la de orden inferior situada inmediatamente á la izquierda.

Antes de empezar una operación, si dos ó más fracciones decimales no tienen igual número de cifras, se agregan á la derecha de las deficientes los ceros necesarios para la igualación. Y si, en gracia á la brevedad, no se escriben en muchos casos materialmente los ceros á la derecha, se los imagina siempre como escritos.

Las reglas de las operaciones con números decimales obedecen á los mismos principios que rigen las de las fracciones ordinarias.

§ I.—Sumar números decimales.

Se colocan las cifras unas bajo otras, correspondientemente, protoenas bajo protoenas, deutenas bajo deutenas, etc., y (mentalmente) se igualan las fracciones con ceros á la derecha, quedando así reducidas á la misma denominación.

1	
205	
13,04	
7,77777	
93184,92	Las pruebas, como en los números enteros.
5	
6	
7	
48,19	
93476,92777	

La coma se coloca al sumar en el lugar correspondiente, separándose en la suma tantas cifras decimales como en el sumando que tenga más.

§ II.—Restar números decimales.

Se efectúa la operación como si los datos fuesen enteros. Sólo hay que cuidar de que la coma aparezca siempre entre las protoenas y las décimas.

$$\begin{array}{r} 450{,}64 \\ 25{,}33 \\ \hline 425{,}31 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 450{,}24 \\ 25{,}33 \\ \hline 424{,}91 \end{array}$$

Cuando no tengan las fracciones decimales igual número de cifras, conviene igualarlas con ceros; si bien siempre es posible suponerlas imaginativamente escritas, que es lo más breve y más práctico.

$$\begin{array}{r} 345{,}4 \\ 27{,}0954 \\ \hline 318{,}3046 \end{array} \quad \begin{array}{c} = \\ = \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 345{,}4000 \\ 27{,}0954 \\ \hline 318{,}3046 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 721{,}43 \\ 21 \\ \hline 700{,}43 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8{,}4 \\ 7{,}000091 \\ \hline 1{,}399909 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7 \\ 6{,}43781 \\ \hline 0{,}56219 \end{array} \quad \begin{array}{c} = \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 7{,}00000 \\ 6{,}43781 \\ \hline 0{,}56219 \end{array}$$

§ III.—Multiplicar números decimales.

Se multiplica uno por otro suponiendo omitidas las comas, en lo que se comete un error, que se corrige luego separando en el producto total tantas cifras de la derecha como haya en multiplicando y multiplicador.

$$\begin{array}{r} 13{,}5 \\ 4{,}5 \\ \hline 675 \\ 540 \\ \hline 60{,}75 \end{array}$$

Si en vez de 13,5 suponemos 135, claro es que hacemos el multiplicando 10 veces mayor; y, si en vez de 4,5 suponemos 45, empleamos un multiplicador 10 veces también mayor.

Luego el producto total será 100 veces más grande de lo que debe ser;

Luego para que resulte igual al verdadero habrá que hacer 100 veces menor el 6075;

Luego, separando con la coma dos cifras de la derecha, tendremos el verdadero producto total: 60,75.

Et sic de céteris.

Las pruebas deben siempre hacerse; y se harán como si se tratara de enteros.

```
      24,7 (4          3212    8
      52,3            0,425   ×7
                               2
  ----------       ----------
       741 (3          16060
      494  (8          6424
    1235   (2         12848
  ----------       ----------
  1291,81 (4      1365,100 (7
```

Haga el discípulo las pruebas de los ejemplos siguientes:

```
     3      0,17     0,3      43,17
  ×0,4      4        0,4       0,05
  ----    ----     ----     -------
   1,2    0,68     0,12      2,1585
```

Puede suceder que el producto total no tenga número suficiente de cifras para separar tantas en él como dé la suma de las cifras del multiplicando y del multiplicador: entonces se ponen á la izquierda del producto los ceros necesarios para hacer la separación.

```
   4,4                4
  ×0,000 007          0,000 000 007
  -----------         -------------
   0,000 030 8        0,000 000 028
```

Los casos que pueden ocurrir son los mismos que en la multiplicación de las fracciones ordinarias.

1.° Quebrado, Mixto } × por un entero

$$\begin{array}{r} 0,3 \\ \times 4 \\ \hline 1,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5,7 \\ \times 2 \\ \hline 11,4 \end{array}$$

2.° Entero, Quebrado, Mixto, } × por un quebrado

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 0,5 \\ \hline 2,0 = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,3 \\ \times 0,21 \\ \hline 0,063 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,75 \\ 0,00002 \\ \hline 0,0000350 \end{array}$$

3.° Entero, Quebrado, Mixto, } × por un mixto

$$\begin{array}{r} 847 \\ 3,5 \\ \hline 4235 \\ 2541 \\ \hline 2964,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,001008 \\ 2,000002 \\ \hline 2016 \\ 201600000 \\ \hline 0,002016002016 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,5 \\ 2,5 \\ \hline 175 \\ 70 \\ \hline 8,75 \end{array}$$

Las reglas de la multiplicación de las fracciones decimales son, pues, las mismas de las fracciones ordinarias.

El último ejemplo, expresado en quebrados comunes, habría sido:

$3\,^1/_2$	$3\,^1/_2$	$3{,}5$
$\times\ 2\,^1/_2$	$\times\ 2\,^1/_2$	$\times\ 2{,}5$
$6 = 3 \times 2$	$^1/_4 = {}^1/_2 \times {}^1/_2$	$0{,}25 = 0{,}5 \times 0{,}5$
$1 = {}^1/_2 \times 2$	$1\,^1/_2 = 3 \times {}^1/_2$	$1{,}5 = 3 \times 0{,}5$
$1\,^1/_2 = 3 \times {}^1/_2$	$1 = {}^1/_2 \times 2$	$1 = 0{,}5 \times 2$
$^1/_4 = {}^1/_2 \times {}^1/_2$	$6 = 3 \times 2$	$6 = 3 \times 2$
$8\,^3/_4$	$8\,^3/_4$	$8{,}75$

En la práctica, la operación se efectúa conforme al primer modelo; pero, para uniformar las operaciones de quebrados comunes con las de fracciones decimales, se ejecutarían como en el segundo y el tercero.

§ IV.—Partir números decimales.

Si ambos tienen igual número de cifras decimales, se prescinde de las comas, lo que equivale á multiplicar dividendo y divisor por una potencia del 10 igual al número de cifras; y en seguida se efectúa la operación de partir como si se tratase de enteros.

$$
\begin{array}{r|l}
49{,}91 \div 2{,}17 = 4991 & 217 \\ \cline{2-2}
651 & \\
\cdots & 23
\end{array}
$$

Si el dividendo tiene menos cifras decimales que el divisor, se agregan al dividendo tantos ceros como se necesiten para igualar y luego se prescinde de las comas.

$$
\begin{array}{r|l}
204 \div 0{,}34 = 20400 & 34 \\ \cline{2-2}
 & 600 \\
 & \\
346{,}24 \div 0{,}001315 = 346240000 & 1315 \\ \cline{2-2}
3324 & \\
4340 & 263300 \\
3950 & \\
500
\end{array}
\quad \text{Háganse las pruebas.}
$$

Si el divisor no tiene decimales, se prescinde de la coma en el dividendo, lo cual es multiplicar á este por una potencia del 10 igual al número de cifras decimales: el cuociente, por tanto, resultará $>$ de lo debidó tantas veces como el dividendo lo sea, y, por tanto, habrá que separar de la derecha del cuociente tantas cifras con la coma como fuere preciso para corregir el error.

$$74{,}76 \div 12 = \begin{array}{r|l} 74{,}76 & 12 \\ \cline{2-2} 27 & 6{,}23 \\ 36 & \\ \cdot\,\cdot & \end{array}$$

Si el dividendo tiene más cifras que el divisor, se correrá la coma á la derecha en el dividendo tantos lugares como hubiere decimales en el divisor (del cual se suprimirá la coma); y, hecho esto, nos encontraremos en el caso último.

$$34{,}69836 \div 17{,}009 = \begin{array}{r|l} 34698{,}36 & 17009 \\ \cline{2-2} 68036 & 2{,}04 \\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & \end{array}$$

Los casos que en la división de fracciones decimales pueden ocurrir son los mismos que en la división de las fracciones ordinarias.

1.° Quebrado, Mixto } ÷ por un entero

$$0{,}6 \div 15 = \begin{array}{r|l} 60 & 15 \\ \cline{2-2} & 0{,}04 \end{array}$$

$$4{,}05 \div 25 = 4{,}050 \div 25 = \begin{array}{r|l} 4050 & 25 \\ \cline{2-2} & 0{,}162 \end{array}$$

2.° Entero, Quebrado, Mixto, } ÷ por un quebrado

$$4 \div 0{,}5 = \begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \cline{2-2} & 8 \end{array}$$

$$0{,}5 \div 0{,}25 = \begin{array}{r|l} 50 & 25 \\ \cline{2-2} & 2 \end{array}$$

$$4{,}5 \div 0{,}5 = \begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ \cline{2-2} & 9 \end{array}$$

3.° Entero, Quebrado, Mixto, } ÷ por un mixto

$$6 \div 1{,}5 = \begin{array}{r|l} 60 & 15 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

$$0{,}2 \div 2{,}5 = 2 \div 25 = \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

$$7{,}5 \div 2{,}5 = \begin{array}{r|l} 75 & 25 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}$$

De entre las muchas ventajas que ofrecen las fracciones decimales, no es la menor la de poderse demostrar sus propiedades todas suponiéndolos enteros; porque, si para alguna demostración hay que admitir un error considerando á una expresión multiplicada (ó partida) por una potencia del 10, este error queda inmediatamente corregido partiendo (ó multiplicando) el resultado por la misma potencia del 10, sin más que correr convenientemente la coma, ya á la izquierda, ya á la derecha.

De este modo se evitan las mucho más abstrusas demostraciones directas en que se fundan los principios que rigen á las fracciones ordinarias; sin embargo de lo cual, y *mutatis mutandis*, se los puede también aplicar sin gran trabajo á las fracciones decimales; por manera que éstas obedecen á la vez á los cánones de los quebrados comunes y á los algoritmos del sistema de notación decimal.

Puede suceder que se den como datos promiscuamente fracciones ordinarias y fracciones decimales. Para saber el modo de operar con ellas, véase más adelante.

LECCIÓN III

Transformación de las fracciones en otras de especial denominador.

§ I.—Sabemos transformar los quebrados en otros de igual cuociente:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{5}=\ldots$$
$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\qquad=\frac{3}{6}\qquad=\frac{4}{8}\qquad=\frac{5}{10}=\ldots$$

Multiplicados dividendo y divisor por un mismo número, el cuociente no varía; preciosa propiedad que nos ha servido para reducir los quebrados á un común denominador.

Así, multiplicando sucesivamente los dos términos del quebrado $\frac{24}{12}$ por la serie de los números naturales, tendríamos los quebrados $\frac{48}{24}$, $\frac{72}{36}$, $\frac{96}{48}$, ... etc.; pero no podríamos por tal procedimiento obtener quebrados que tuviesen un denominador distinto de los que naturalmente produjese esta serie de multiplicaciones.

Ahora bien: supongamos que necesitásemos para algún fin aritmético tener otros quebrados equivalentes cuyo denominador fuese 3: ¿podríamos conseguirlo? Sí: $\frac{24}{12}$, cuyo cuociente es 2, resulta igual á $\frac{24}{4}\times\frac{1}{3}$; y esta expresión es $=6\times\frac{1}{3}=\frac{6}{3}$; cuyo cuociente es también 2; de manera que, por medio de las sencillas transformaciones anteriores, el quebrado $\frac{24}{12}$ se ha convertido en otro de igual cuociente que el $\frac{24}{12}$ y con el denominador pedido 3.

$$\frac{24}{12}=\frac{24}{12\,(\div 3\ \times 3)}=\frac{24}{12\div 3}\times\frac{1}{3}=\frac{24}{4}\times\frac{1}{3}=6\times\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2$$

¿Pudiera convertirse el mismo quebrado en otro de igual cuociente y que tuviera el denominador 4? Indudablemente.

$$\frac{24}{12}=\frac{24}{12\,(\div 4 \times 4)}=\frac{24}{(12 \div 4) \times 4}=\frac{24}{3 \times 4}=\frac{24}{3}\times\frac{1}{4}=8\times\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$$

¿Y en otro con el denominador 6? También, en virtud de las evidencias siguientes:

$$\frac{24}{12}=\frac{24}{12\,(\div 6 \times 6)}=\frac{24}{(12 \div 6) \times 6}=\frac{24}{2 \times 6}=\frac{24}{2}\times\frac{1}{6}=12\times\frac{1}{6}=\frac{12}{6}=2$$

¿Y en otro con el denominador 2?

$$\frac{24}{12}=\frac{24}{12\,(\div 2 \times 2)}=\frac{24}{(12 \div 2) \times 2}=\frac{24}{6 \times 2}=\frac{24}{6}\times\frac{1}{2}=4\times\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Ahora bien, una de dos:

O el número que se pide para denominador especial está entre los factores de la *fracción dada*,

O no.

Si no lo está, se hace que lo esté multiplicando por él los dos términos del quebrado.

Y si lo está, entonces la *fracción dada* se descompondrá en dos quebrados: uno que lleve por numerador la unidad y por denominador el número pedido, y otro formado por el remanente de la *fracción dada*.

Transfórmese el quebrado $\frac{a}{b \times c}$ en otro que tenga por denominador especial al número c:

$$\frac{a}{b \times c}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}$$

Hagamos igual á q el cuociente $\frac{a}{b}$ y tendremos:

$$\frac{a}{b \times c}=q\times\frac{1}{c}=\frac{q}{c}$$

Por consiguiente: si se nos pide que la fracción $\frac{a}{b}$ se transforme en otra cuyo denominador sea c, tendremos, multiplicando numerador y denominador por c,

$$\frac{a \times c}{b \times c}=\frac{a \times c}{b}\times\frac{1}{c},$$

Y, haciendo igual á q' el cuociente $\frac{a \times c}{b}$, resultará:

$$\frac{a \times c}{b \times c}=\frac{a \times c}{b}\times\frac{1}{c}=q'\times\frac{1}{c}=\frac{q'}{c}$$

Siempre, por tanto, es posible transformar una fracción dada en otra de la denominación que se quiera.

Pero pocas veces ocurrirá que los cuocientes

$$q, q',$$

sean números enteros. Si se quiere que la fracción

$$\frac{24}{2 \times 2 \times 3}$$

resulte transformada en otra cuyo denominador sea 3, tendremos:

$$\frac{24}{2 \times 2 \times 3} = \frac{24}{2 \times 2} \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

donde el cuociente $q \left(= \frac{24}{2 \times 2} = 6\right)$ resulta número entero.

Pero, si se nos hubiese dado la fracción

$$\frac{25}{12} = \frac{25}{2 \times 2 \times 3} = \frac{25}{2 \times 2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{6\frac{1}{4}}{3},$$

el cuociente $q \left(= \frac{25}{2 \times 2} = 6\frac{1}{4}\right)$ no resultaría número entero.

Lo mismo puede ocurrir con el cuociente q': pocas veces resultará cuociente entero.

Transfórmese la fracción $\frac{3}{5}$ en otra cuyo denominador sea 10

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 10}{5 \times 10} = \frac{30}{5} \times \frac{1}{10} = 6 \times \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$

donde $q' = \left(\frac{3 \times 10}{5}\right)$ es entero.

Pero, transfórmese $\frac{3}{5}$ en otro quebrado cuyo denominador sea 8

$$\frac{3 \times 8}{5 \times 8} = \frac{24}{5} \times \frac{1}{8} = 4\frac{4}{5} \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{4\frac{4}{5}}{8}$$

§ II.—La facilidad con que se reducen á un común denominador las fracciones decimales, la posibilidad de poderse hacer con ellas todas las operaciones como si se tratase de números enteros, y la uniformidad de los resultados obtenidos, hicieron pensar en la transformación sistemática de todas las fracciones ordinarias en fracciones decimales.

Ninguna objeción habría podido hacerse á la constante sustitución de los quebrados comunes por los decimales, si siempre los cuocientes q y q' se obtuviesen enteros. Pero la mayor parte de las veces resultan fraccionarios y no transformables exactamente; por lo cual los cálculos hechos con ellos sólo son aproximados; y, naturalmente, el obtener conclusiones incompletas cuando pueden lograrse enteramente exactas, hubo de retraer durante mucho tiempo á los operadores escrupulosos. Sin embargo, habiéndose visto que la aproximación puede llevarse casi hasta la exactitud, de modo que los resultados incompletos difieran de los completos en menos que cualquier cantidad dada por pequeña que fuere, hicieron al fin prevalecer el cálculo efectuado por medio de las fracciones decimales sobre el cálculo efectuado con las fracciones ordinarias. Y tanto, que hoy los quebrados comunes se emplean casi como excepción en los cálculos de cierta complejidad.

§ III.—Fracciones comunes exactamente transformables.

Transformemos en decimal el quebrado $\frac{1}{2}$, y al efecto multipliquemos sus dos términos por 10 y el resultado será exactamente $= 0{,}5$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 10}{2 \times 10} = \frac{10}{2} \times \frac{1}{10} = 5 \times \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Transformemos ahora $\frac{1}{5}$ en decimal:

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \times 10}{5 \times 10} = \frac{10}{5 \times 10} = \frac{10}{5} \times \frac{1}{10} = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

Transformemos en decimal el quebrado $\frac{3}{4}$; para lo cual habremos de multiplicar sus dos términos por 100, pues no bastaría hacerlo por 10:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 100}{4 \times 100} = \frac{300}{4 \times 100} = \frac{300}{4} \times \frac{1}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Transformemos $\frac{1}{8}$ en decimal, á cuyo fin multiplicaremos sus dos términos por la potencia de 10 suficiente al efecto: (en este caso por el número 1000):

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 1000}{8 \times 1000} = \frac{1000}{8 \times 1000} = \frac{1000}{8} \times \frac{1}{1000} = 125 \times \frac{1}{1000} = \frac{125}{1000} = 0{,}125$$

Para transformar, pues, en decimal un quebrado, se multiplican sus dos términos por la potencia de 10 necesaria al efecto. Y, como casi siempre se ignora cuál sea esa potencia suficiente, la operación se hace por tanteos, agregando ceros al dividendo, como sigue (prácticamente á los residuos):

$$\frac{1}{2} = \begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \cline{2-2} 10 & \\ 00 & 0{,}5 \end{array}; \qquad \frac{1}{5} = \begin{array}{r|l} 1 & 5 \\ \cline{2-2} 10 & \\ 00 & 0{,}2 \end{array}$$

$$\frac{3}{4} = \begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & \\ 20 & 0{,}75 \\ 00 & \end{array}; \qquad \frac{3}{8} = \begin{array}{r|l} 3 & 8 \\ \cline{2-2} 30 & \\ 60 & 0{,}375 \\ 40 & \\ 00 & \end{array}$$

Se va, pues, agregando á cada residuo parcial un cero, hasta que no resulta residuo ninguno. En el caso del $\frac{1}{5}$ se han multiplicado los dos términos del quebrado por 10^1; en el del $^3/_4$ por 10^2; en el del $\frac{1}{8}$ por 10^3,...

$$\frac{7}{128} = \begin{array}{r|l} 700 & 128 \\ \cline{2-2} 600 & 0{,}0546875 \\ 880 & \\ 1120 & \\ 960 & \\ 640 & \end{array} = \begin{array}{r|l} 70000000 & 128 \\ \cline{2-2} 600 & \\ 880 & 0{,}0546875 \\ 1120 & \\ 960 & \\ 640 & \end{array}$$

Aquí se ha multiplicado el 7 por 10000000.

El procedimiento ha sido como sigue:

Transformar $\frac{7}{128}$ en decimal:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 128 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

7 entre 128 no se puede dividir: cero al cuociente:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 128 \\ \cline{2-2} & 0 \text{ enteros} = 0, \end{array}$$

Se agrega un cero al dividendo

$$\begin{array}{r|l} 70 & 128 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

70 entre 128 no se puede dividir tampoco: nuevo cero al cuociente. Este segundo cero indica que no hay décimas:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 128 \\ \cline{2-2} & 0{,}0 \end{array}$$

Se agrega otro cero al dividendo

$$\begin{array}{r|l} 700 & 128 \\ \cline{2-2} & 0{,}0 \end{array}$$

700 entre 128 á 5; y se efectúa esta división parcial:

$$\begin{array}{r|l} 700 & 128 \\ \cline{2-2} 60 & 0{,}05 \end{array}$$

Se agrega un cero al residuo: 4 al cuociente, etc.

$$\begin{array}{r|l} 700 & 128 \\ \cline{2-2} 600 & 0{,}05 \end{array}$$

Y, análogamente, se agregará un cero á cada residuo (lo que equivale á agregarlo al dividendo); todo como sigue en la operación actual, hasta terminarla.

$$\begin{array}{l|l} 700 & 128 \\ \cline{2-2} \;\;600 & 0{,}0546875 \\ \;\;\;\;880 & \\ \;\;\;1120 & \\ \;\;\;\;\;\;960 & \\ \;\;\;\;\;\;\;640 & \\ \;\;\;\;\;\;\;000 & \end{array}$$

Se llama generatriz á cualquier fracción ordinaria de donde procede otra fracción decimal.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 10}{5 \times 10} = \begin{array}{r|l} 200 & 50 \\ \cline{2-2} & 0{,}4 \end{array}$$

$^2/_5$ es la generatriz de 0,4

Y se llama generatriz primaria á la generatriz que tiene por numerador á la unidad

$$\frac{1}{16} = \begin{array}{r|l} 100 & 16 \\ \cline{2-2} 40 & \\ 80 & 0{,}0625 \end{array}$$

$\frac{1}{16}$ es la generatriz primaria de 0,0625.

La decimal equivalente de una generatriz primaria se denomina, análogamente, decimal primaria.

§ IV.—Fracciones decimales periódicas.

Vamos á examinar ahora quebrados que no se pueden transformar exactamente en decimales.

Sea $\frac{2}{3}$.

Multipliquemos sus dos términos por una alta potencia de 10.

$$\frac{2 \times 1\,000\,000}{3 \times 1\,000\,000} = \frac{2\,000\,000}{3} \times \frac{1}{1\,000\,000}$$

Por si la sexta potencia del 10 no es suficiente, procedamos, como antes, por tanteos.

$$\begin{array}{l|l}
20 & 3 \\ \cline{2-2}
\quad 20 & \\
\qquad 20 & 0{,}666666... \\
\qquad\quad 20 & \\
\qquad\qquad 20 & \\
\qquad\qquad\quad 20 & \\
\qquad\qquad\qquad 2..... &
\end{array}$$

Pero vemos que, hallada la primera cifra decimal 6, nos resulta como residuo 2: si agregamos á este 2 un cero, volvemos á encontrar idéntico cuociente parcial 6 é idéntico residuo 2;... y, así, continuamente, sin término ni fin, por muy alta que sea la potencia del 10 que nos sirva para multiplicar los dos términos del quebrado $^2/_3$. Este quebrado, pues, no se puede reducir exactamente á decimal, porque siempre, multiplicado un cuociente parcial por el divisor 3, nos resultará un residuo $= 2$.

$$\frac{7}{11} = \begin{array}{l|l}
70 & 11 \\ \cline{2-2}
\quad 40 & \\
\qquad 70 & 0{,}636363... \\
\qquad\quad 40 & \\
\qquad\qquad 70 & \\
\qquad\qquad\quad 40 & \\
\qquad\qquad\qquad 7 &
\end{array}$$

Aquí el período 63 reaparecerá sin término ninguno. Por tanto, no hay fracción decimal alguna exactamente igual á $\frac{7}{11}$ (1).

(1) Llámase período al grupo de cifras que en esta clase de divisiones se repiten en el cuociente continúa é indefinidamente siempre en el mismo orden.

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{7} = 10 & 7 \\ \quad 30 & \overline{0,142857...} \\ \quad\; 20 & \\ \quad\;\; 60 & \\ \quad\;\;\; 40 & \\ \quad\;\;\;\; 50 & \\ \quad\;\;\;\;\; 1... & \end{array}$$

Claro es que, si ahora agregamos un cero al residuo 1..., volveremos á encontrar la misma serie de cuocientes parciales y de residuos anteriores; de modo que obtendremos indefinidamente la repetición interminable de períodos iguales.

0,142857 142857 142857 142857...

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{101} = 1000 & 101 \\ \quad 910 & \overline{0,0099\ 0099\ 0099...} \\ \quad ..1000 & \\ \quad\;\; ..910 & \\ \quad\;\;\; ..1... & \end{array}$$

Período = 0099...

§ V.—Fracciones decimales, no periódicas, en un principio.

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{24} = 100 & 24 \\ \quad 40 & \overline{0,04166666...} \\ \quad 160 & \\ \quad\; 160 & \\ \quad\;\; 160 & \\ \quad\;\;\; 160 & \\ \quad\;\;\;\; 160 & \\ \quad\;\;\;\;\; 16... & \end{array}$$

Aquí el período es 666..., el cual empieza después de la parte decimal no periódica ,041.

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{72} = 100 & 72 \\ \quad 280 & \overline{0,013888...} \\ \quad\; 640 & \\ \quad\;\; 640 & \\ \quad\;\;\; 64... & \end{array}$$

Aquí el período es 8888... precedido de la parte decimal no periódica .013.

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{60} = 100 & 60 \\ \quad 400 & \overline{0,01666} \\ \quad\; 400 & \\ \quad\;\; 400 & \\ \quad\;\;\; 40... & \end{array}$$

Período; 6666...: parte no periódica; .01.

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{74} = 100 & 74 \\ 260 & \hline 380 & 0{,}0135135135135\ldots \\ 100 & \\ 260 & \\ 380 & \\ 10\ldots & \end{array}$$

Período; 135...: parte no periódica; .0

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{88} = 100 & 88 \\ 120 & \hline 320 & 0{,}011363636\ldots \\ 560 & \\ 32\ldots & \end{array}$$

Período; 36...: parte no periódica; .011

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{108} = 1000 & 108 \\ ..280 & \hline .640 & 0{,}00925925925\ldots \\ 100\ldots & \end{array}$$

Período; 925...; principio no periódico; .00

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{110} = 1000 & 110 \\ 1000 & \hline 10 & 0{,}0090909090\ldots \end{array}$$

Período; .09...: parte no periódica; .0

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{148} = 1000 & 148 \\ 1120 & \hline ..840 & 0{,}00675675675675\ldots \\ 100 & \end{array}$$

Período; 675...: parte no periódica; .00

En vista de las tres especies de ejemplos anteriores, no cabe dudar de la existencia de dos clases de fracciones decimales, ambas procedentes de la transformación de los quebrados comunes:

Primera clase; fracciones decimales de número determinado de cifras;

Segunda clase; fracciones decimales de número inacabable de períodos.

En esta segunda clase se comprenden dos subclases:

Una, de grupos periódicos de cifras que empiezan en las décimas;

Otra, cuyos grupos periódicos no empiezan en las décimas, sino después.

Las fracciones decimales de la primera clase se llaman exactas, por ser, como cuocientes, enteramente iguales á las fracciones ordinarias de que proceden.

Las de la segunda clase, se denominan inexactas; porque nunca llegan á igualar á las fracciones ordinarias correspondientes.

A las fracciones cuyos períodos empiezan desde las décimas mismas, se da el nombre de fracciones periódicas puras.

Y á las de la segunda subclase se da el nombre de fracciones periódicas mixtas.

Advertencia.—Hay otra clase importantísima de fracciones decimales de número ilimitado de cifras, pero no periódicas puras ni periódicas mixtas.

En ellas el número de cifras no tiene término ni fin, pero jamás aparecen entre ellas grupos periódicos repetidos en el mismo orden continua é indefinidamente.

Estas decimales de número inacabable de cifras aperiódicas no proceden de la conversión de los quebrados comunes en fracciones decimales, sino de las operaciones que tienen por objeto hallar expresiones numéricas que difieran de las cantidades *llamadas* inconmensurables menos aún que cualquier magnitud dada.

Por ahora no se tratará de estas decimales aperiódicas de número inacabable de cifras.

LECCIÓN IV

Hallar las generatrices de las fracciones decimales.

1.ª CLASE.—Transformación de las fracciones decimales de limitado número de cifras en fracciones comunes equivalentes:

$$0{,}75 = \frac{75}{100} \text{ (partiendo por 25) } = \frac{3}{4}$$

Las decimales de esta clase son cuocientes enteramente iguales á los expresados por sus generatrices. Por consiguiente, $0{,}75 =$ á su generatriz $\frac{3}{4}$.

Póngase la decimal en forma de quebrado: $\frac{75}{100} =$ á su generatriz.

Simplifíquese y se encontrará la generatriz reducida á su más simple expresión.

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \text{(partiendo por 125) } \frac{1}{8} \quad (1)$$

---

(1) Las generatrices $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{24}$,... habrían dado el mismo resultado decimal que $\frac{1}{8}$:

10	8	20	16	30	24
20		40		60	
40	0,125	80	0,125	120	0,125

Por consiguiente, la generatriz que se halla por este procedimiento es la reducida á su más simple expresión, cuyos múltiplos se encontrarían multiplicando los dos términos del quebrado por la serie indefinida de los números naturales.

Los ceros á la derecha se suprimen en las decimales cuya generatriz se quiere hallar.

$$0{,}125000000 = \frac{125000000}{1000000000} = \frac{125}{1000} \text{ etc.}$$

Para hallar, pues, la generatriz de una decimal exacta, se pone la decimal en forma de quebrado y se simplifica.

$$0{,}5 = \frac{5}{10} \text{ (y partiendo ambos términos por } 5) = \frac{1}{2}$$

$$0{,}75 = \frac{75}{100} \qquad \text{por } 25) = \frac{3}{4}$$

$$0{,}375 = \frac{375}{1000} \qquad \text{por 5 y por 5 y por } 5) = \frac{3}{8}$$

$$0{,}0546875 = \frac{546875}{10000000} \text{ (partiendo por 5 siete veces)} = \frac{7}{128}$$

La ley á que obedecen los resultados anteriores es sumamente sencilla; si bien no se deja ver claramente por resultar enmascarada á causa de no hacerse generalmente el estudio sobre generatrices primarias (1).

Pero tomemos siempre generatrices cuyo numerador sea la unidad, y pongámosles por denominadores

ó bien 2 elevado á alguna potencia;
ó bien 5 ó sus potencias;
ó bien, á la vez, 2×5, con potencias diferentes cada uno de estos dos factores.

¿Qué es, pues, transformar en decimal una generatriz primaria como

$$\frac{1}{2^1};\ \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{2^3};\ \frac{1}{2^4};\ \frac{1}{2^5};\ \ldots\ \frac{1}{2^n},$$

todas las cuales tienen el factor 2 en el denominador?

Pues es multiplicar los dos términos por una potencia del 10 que anule á la potencia del 2 en el denominador, quedando sólo la del 5 en el numerador.

(1) Recuérdase que se llama primaria á la generatriz que tiene la unidad por numerador.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 10^1}{2^1 \times 10^1} = \frac{1 \times (2^1 \times 5^1)}{2^1 \times 10^1} = \frac{5}{10} \times \frac{2^1}{2^1} = \frac{5}{10} \times 1 = 0{,}5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 10^2}{2^2 \times 10^2} = \frac{1 \times 2^2 \times 5^2}{2^2 \times 10^2} = \frac{5^2}{10^2} \times \frac{2^2}{2^2} = \frac{5^2}{10^2} = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 10^3}{2^3 \times 10^3} = \frac{1 \times 2^3 \times 5^3}{2^3 \times 10^3} = \frac{5^3}{10^3} \times \frac{2^3}{2^3} = \frac{5^3}{10^3} = 0{,}125$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1 \times 10^4}{2^4 \times 10^4} = \frac{2^4 \times 5^4}{2^4 \times 10^4} = 0{,}625$$

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1 \times 10^n}{2^n \times 10^n} = \frac{2^n \times 5^n}{2^n \times 10^n} = 0{,}5^n\ldots$$

Luego al multiplicar por $2^n \times 5^n$ se anula el 2^n del denominador de la generatriz, y sólo queda en el numerador la potencia del 5 igual á la del 2; esto es, 5^n. El numerador, es, pues, una potencia del 5.

Análogamente: ¿qué es transformar en decimal una generatriz primaria tal como

$$\frac{1}{5};\quad \frac{1}{5^2};\quad \frac{1}{5^3};\quad \frac{1}{5^4};\quad \frac{1}{5^5};\ \ldots\ \frac{1}{5^n},$$

todas las cuales tienen al factor 5 en el denominador?

Pues es multiplicar los dos términos por una potencia del 10 que anule á la del 5 en el denominador, quedando sólo la del 2 en el numerador.

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \times (2^1 \times 5^1)}{5^1 \times 10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{25} = \frac{1 \times (2^2 \times 5^2)}{5^2 \times 10^2} = \frac{2^2}{10^2} = 0{,}04$$

$$\frac{1}{125} = \frac{1 \times (2^3 \times 5^3)}{5^3 \times 10^3} = \frac{2^3}{10^3} = 0{,}008$$

$$\frac{1}{625} = \frac{1 \times (2^4 \times 5^4)}{5^4 \times 10^4} = 0{,}0016$$

$$\frac{1}{5^n} = \frac{1 \times (2^n \times 5^n)}{5^n \times 10^n} = \frac{2^n}{10^n}$$

Luego al multiplicar por $2^n \times 5^n$ se anula el 5^n del denominador de la generatriz primaria, y sólo queda en el numerador la potencia del 2 igual á la del 5; esto es, 2^n. El numerador es, pues, una potencia del 2.

¿Qué es, por tanto, transformar en decimal una generatriz primaria como

$$\frac{1}{2\times5^2};\quad \frac{1}{2\times5^3};\quad \frac{1}{2\times5^4};\quad \frac{1}{2\times5^5};\ldots\quad \frac{1}{2\times5^n},$$

en todas las cuales aparecen conjuntamente los factores 2 y 5?

Pues es llevar al numerador una potencia del 10 ($=2\times5$) que anula á la del 5 en el denominador; de modo que sólo quede en el numerador la diferencia entre las potencias correspondientes del 2:

$$\frac{1}{2^1\times5^2}=\frac{1\times10^2}{2^1\times5^2\times10^2}=\frac{1\times(2^2\times5^2)}{2^1\times5^2\times10^2}=\frac{1\times2}{10}=0{,}02$$

$$\frac{1}{2^1\times5^3}=\frac{1\times(2^3\times5^3)}{2^1\times5^3\times10^3}=\frac{2^2}{10^3}=0{,}004$$

$$\frac{1}{2^1\times5^4}=\frac{1\times(2^4\times5^4)}{2^1\times5^4\times10^4}=\frac{2^3}{10^4}=0{,}0008$$

$$\frac{1}{2^1\times5^n}=\frac{1\times10^n}{2^1\times5^n\times10^n}=\frac{1\times2^n\times5^n}{2^1\times5^n\times10^n}=\frac{2^{n-1}}{10^n}$$

$$\frac{1}{2^2\times5^n}=\frac{1\times(2^n\times5^n)}{2^2\times5^n\times10^n}=\frac{2^{n-2}}{10^n}$$

$$\frac{1}{2^5\times5^n}=\frac{1\times2^n\times5^n}{2^5\times5^n\times10^n}=\frac{2^{n-5}}{10^n}$$

Y, en general, siendo $m>n$,

$$\frac{1}{2^n\times5^m}=\frac{1\times10^m}{2^n\times5^m\times10^m}=\frac{1\times2^m\times5^m}{2^n\times5^m\times10^m}=\frac{2^{m-n}}{10^m}.$$

Y siendo $n>m$

$$\frac{1}{2^n\times5^m}=\frac{1\times2^n\times5^n}{2^n\times5^m\times10^n}=\frac{5^{n-n}}{10^n}$$

Las generatrices transformables son, pues, las que tienen en el denominador los factores 2 ó 5; ó á la vez 2 y 5.

Estos factores del denominador pueden estar elevados á cualesquiera potencias.

Si en el denominador existe únicamente el factor 2 elevado á cualquier potencia, sólo aparece en el numerador entonces el 5 elevado á la misma potencia y partido por la del 10 de igual índice:

$$\frac{1}{2^n}=\frac{5^n}{10^n}.$$

Si en el denominador existe únicamente el factor 5 elevado á cualquier potencia, sólo aparece el 2 en el numerador elevado á la misma potencia, y partido por la del 10 de igual índice:

$$\frac{1}{5^n} = \frac{2^n}{10^n}$$

Si en el denominador existen los dos factores elevados á distintas potencias, sólo queda en el numerador el factor de menor índice elevado á una potencia igual á la diferencia entre los dos índices de los factores del denominador: á ese numerador (= á una diferencia) se le da por denominador el 10 elevado al índice mayor (de los dos que en el quebrado primitivo tenía el denominador). Sea $m > n$ y tendremos:

$$\frac{1}{2^m \times 5^n} = \frac{5^{m-n}}{10^m}$$

$$\frac{1}{2^n \times 5^m} = \frac{2^{m-n}}{10^m}$$

La potencia del 2 no puede ser igual á la del 5 en ningún quebrado generador de fracción decimal exacta; pues si ambas potencias fueran iguales, la generatriz no sería ya quebrado común, sino decimal.

$$\frac{1}{2^3 \times 5^3} = \frac{1}{(2 \times 5)^3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Luego en toda generatriz de fracción exacta las potencias del 2 y del 5 son desiguales; por ejemplo:

$$\frac{1}{2^5 \times 5^4};\quad \frac{1}{2^2 \times 5^7};\quad \frac{1}{2^m \times 5^n};\quad \frac{1}{2^n \times 5^m};\ \text{siendo } m > n$$

El numerador de una generatriz productora de una fracción decimal exacta no puede acabar en cero; porque, si acabase en cero, la generatriz no sería quebrado común irreducible; y, al simplificarlo, se habría suprimido el cero.

$$\frac{30}{2^4 \times 5^2} = \frac{3}{2^3 \times 5},\ \text{fracción irreducible.}$$

$$\frac{3}{2^3 \times 5} = \frac{3}{8 \times 5} = \frac{3}{40} = \begin{array}{r|l} 300 & 40 \\ \cline{2-2} 200 & 0{,}075 \\ \ldots & \end{array}$$

El número de cifras decimales de una fracción decimal exacta, tiene que ser igual necesariamente al mayor de los exponentes del 2 ó del 5 existentes en el denominador de la generatriz.

$$\frac{1}{800} = \frac{1}{2^5 \times 5^2} = \frac{1}{32 \times 25}$$

Para que esta fracción ordinaria se transforme en fracción decimal exacta, es preciso que el denominador sea la unidad seguida solo de ceros. Al efecto, hay que multiplicar ambos términos del quebrado propuesto por 100000.

$$\frac{1}{800} = \frac{1 \times 100000}{2^5 \times 5^2 \times 100000} = \frac{1 \times 2^5 \times 5^5}{2^5 \times 5^2 \times 100000} = \frac{5^{5-2}}{100000} = \frac{5^3}{100000}$$

Así el nuevo denominador resulta de necesidad, por causa de la transformación, con tantos ceros como tiene unos el índice de la mayor potencia existente en el otro denominador de la generatriz; y, por tanto, al escribir el resultado de la transformación, conforme á la notación decimal, habrá que poner tantas cifras decimales como haya ceros en el denominador de la transformación.

$$\frac{1}{800} = \frac{1}{2^5 \times 5^2} = \frac{5^3}{100000} = \frac{125}{100000} = 0{,}00125.$$

$$\frac{1}{2^3 \times 5^{15}} = \text{á una fracción de 15 cifras decimales.}$$

$$\frac{1}{2^{17} \times 5^3} = \text{á una fracción de 17 cifras decimales.}$$

Si, pues, $\frac{1}{800} = \frac{125}{100000}$, claro es que, para que exista la igualdad, el numerador 125 ha de ser 800 veces menor que el denominador 100000; y, por tanto, 100000 ha de ser exactamente divisible por 125. Y no puede haber resto ninguno, porque 800 es un número entero.

Luego los dos términos del quebrado $\frac{125}{100000}$ son divisibles por 125.

Luego el numerador es el máximo común divisor de los dos términos.

Y, como estas conclusiones son independientes de los valores de los términos del quebrado propuesto $\frac{1}{800}$ y de los de su equivalente el decimal, resulta que, en toda decimal exacta, el numerador es el máximo común divisor de los dos términos del quebrado decimal:

$$\frac{1}{n} = 0,pqrs = \frac{pqrs}{10000...} = \frac{pqrs \div pqrs}{10000... \div pqrs} = \frac{1}{n}$$

La generatriz puede no ser primaria. En ese caso será un múltiplo de la primaria.

$$\frac{1}{2^m \times 5^n} \times a = \frac{a}{2^m \times 5^n}, \text{ donde } m > n$$

Multipliquemos ambos términos por una potencia del 10 igual al mayor exponente del denominador de la fracción ordinaria propuesta.

$$\frac{1}{2^m \times 5^n} \times a = \frac{a \times 10^m}{2^m \times 5^n \times 10^m} = \frac{a \times 2^m \times 5^m}{2^m \times 5^n \times 10^m} = \frac{a \times 5^{m-n}}{10^m}$$

Por consiguiente, los dos términos del quebrado son divisibles por el factor común 5^{m-n}; el cual podrá siempre encontrarse por el método del máximo común divisor.

Toda fracción decimal exacta es simplificable, pues sus fórmulas son (según los casos)

$$\frac{1}{2^n} = \frac{5^n}{10^n}; \quad \frac{1}{5^n} = \frac{2^n}{10^n}; \quad \frac{1}{2^m \times 5^n} = \frac{5^{m-n}}{10^m}; \quad \frac{1}{2^n \times 5^m} = \frac{2^{m-n}}{10^m}$$

donde $m > n$.

Ahora bien, estas fórmulas son iguales á

$$\frac{5^n}{10^n} = \frac{5^n}{2^n \times 5^n} = \frac{1}{2^n} \times \frac{5^n}{5^n} = \frac{1}{2^n} \times 1 = \frac{1}{2^n};$$ que es la generatriz primaria

$$\frac{2^n}{10^n} = \frac{2^n}{2^n \times 5^n} = \frac{1}{5^n} \times \frac{2^n}{2^n} = \frac{1}{5^n} \times 1 = \frac{1}{5^n};$$ que es la generatriz primaria

Para facilitar la comprensión de las fórmulas tercera y cuarta, demos valores numéricos á m y n, y tendremos, vgr.:

$$\frac{1}{2^7 \times 5^3} = \frac{1 \times 10^7}{2^7 \times 5^3 \times 10^7} = \frac{1 \times 2^7 \times 5^7}{2^7 \times 5^3 \times 10^7} =$$

$$\frac{2^{7-7} \times 5^{7-3}}{10^7} = \frac{5^{7-3}}{10^7} = \frac{5^4}{10^7} = \frac{5^4}{2^7 \times 5^7} = \frac{5^4}{2^7 \times 5^4 \times 5^3} = \frac{1}{2^7 \times 5^3} \times \frac{5^4}{5^4} = \frac{1}{2^7 \times 5^3}$$

que es la generatriz primaria.

Y, análogamente,

$$\frac{1}{2^3 \times 5^7} = \frac{1 \times 10^7}{2^3 \times 5^7 \times 10^7} = \frac{1 \times 2^7 \times 5^7}{2^3 \times 5^7 \times 10^7} = \frac{2^{7-3} \times 5^{7-7}}{10^7}$$

$$\frac{2^{7-3}}{10^7} = \frac{2^4}{2^7 \times 5^7} = \frac{2^4}{2^4 \times 2^3 \times 5^7} = \frac{1}{2^3 \times 5^7}$$

que es la generatriz primaria.

Luego toda fracción decimal primaria puesta en forma de quebrado, tiene en el numerador y en el denominador potencias comunes del 2, ó bien del 5, suprimidas las cuales resultará la generatriz primaria.

De donde se deduce la regla dada al principio de esta Lección.

EJEMPLOS.

Si la generatriz primaria se duplica, ó triplica, ó cuadruplica..., ó se multiplica por un número cualquiera n, se obtendrá la correspondiente fracción decimal, duplicando, ó triplicando, ó cuadruplicando..., ó multiplicando por n la decimal primaria.

$$\frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$\frac{2}{8} = 0{,}125 \times 2 = 0{,}250 = 0{,}25$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}125 \times 3 = 0{,}375$$

$$\frac{4}{8} = 0{,}125 \times 4 = 0{,}500 = 0{,}5$$

$$\frac{n}{8} = n \times 0{,}125, \text{ etc., etc.}$$

Prescindamos ahora de las generatrices primarias; y, considerando en general la cuestión, ¿qué fracciones comunes pueden ser generatrices cualesquiera (no primarias precisamente) de fracciones decimales exactas?

Solamente las que tengan por denominador alguno de los factores de 10; es decir, el 2 ó alguna potencia del 2,

El 5 ó alguna de sus potencias,

O bien á la vez el 2 y el 5 elevados á potencias diferentes:

$$\frac{45}{2}=\frac{45}{2^1}=\begin{array}{r|l} 45 & 2 \\ \cline{2-2} 05 & 22,5 \\ 10 & \text{Una cifra} \\ & \text{decimal.} \end{array};\qquad \frac{45}{4}=\frac{45}{2^2}=\begin{array}{r|l} 45 & 4 \\ \cline{2-2} 5 & 11,25 \\ 10 & \text{Dos cifras} \\ 20 & \text{decimales.} \end{array}$$

$$\frac{45}{8}=\frac{45}{2^3}=\begin{array}{r|l} 45 & 8 \\ \cline{2-2} 50 & 5,625 \\ 20 & \text{Tres cifras} \\ 40 & \text{decimales.} \end{array};\qquad \frac{45}{16}=\frac{45}{2^4}=\begin{array}{r|l} 45 & 16 \\ \cline{2-2} 130 & 2,8125 \\ 020 & \text{Cuatro cifras} \\ 40 & \text{decimales.} \\ 80 & \end{array}$$

Obsérvese que el número de cifras decimales es = en cada caso al exponente de la potencia del denominador 2.

$$\frac{146}{5}=\frac{146}{5^1}=\begin{array}{r|l} 146 & 5 \\ \cline{2-2} 46 & 29,2 \\ 10 & \text{Una cifra} \\ .. & \text{decimal.} \end{array};\qquad \frac{46}{25}=\frac{46}{5^2}=\begin{array}{r|l} 46 & 25 \\ \cline{2-2} 210 & 1,84 \\ 100 & \text{Dos cifras} \\ .. & \text{decimales.} \end{array}$$

$$\frac{146}{125}=\frac{146}{5^3}=\begin{array}{r|l} 146 & 125 \\ \cline{2-2} 210 & 1,168 \\ 850 & \text{Tres cifras} \\ 1000 & \text{decimales.} \\ \ldots & \end{array};\qquad \frac{146}{625}=\frac{146}{5^4}=\begin{array}{r|l} 1460 & 625 \\ \cline{2-2} 2100 & 0,2336 \\ 2250 & \text{Cuatro cifras} \\ 3750 & \text{decimales.} \\ \ldots & \end{array}$$

Obsérvese también que en cada caso el número de cifras decimales resulta igual al exponente de la potencia del denominador 5.

$$\frac{4597}{10}=\frac{4597}{2^1\times 5^1}=\begin{array}{r|l} 4597 & 10 \\ \cline{2-2} 59 & 459,7 \\ 97 & \text{Una cifra} \\ 70 & \text{decimal.} \end{array};\qquad \frac{4597}{20}=\frac{4597}{2^2\times 5^1}=\begin{array}{r|l} 4597 & 20 \\ \cline{2-2} 59 & 229,85 \\ 197 & \text{Dos cifras} \\ 170 & \text{decimales.} \\ 100 & \end{array}$$

Claro es que en este primer ejemplo la fracción decimal se obtiene, desde luego; $\frac{4597}{10}=459,7\ldots$

$$\frac{4597}{40}=\frac{4597}{2^3\times 5^1}=\begin{array}{r|l} 4597 & 40 \\ \cline{2-2} 59 & 114,925 \\ 197 & \text{Tres cifras} \\ 370 & \text{decimales.} \\ 100 & \\ 200 & \\ \ldots & \end{array};\qquad \frac{4597}{80}=\frac{4597}{2^4\times 5}=\begin{array}{r|l} 4597 & 80 \\ \cline{2-2} 597 & 57,4625 \\ 370 & \\ 500 & \text{Cuatro cifras} \\ 200 & \text{decimales.} \\ 400 & \\ \ldots & \end{array}$$

Obsérvese que el número de cifras decimales es en cada caso igual al exponente de la mayor potencia del factor 2.

$$\frac{4597}{50} = \frac{4597}{2^1 \times 5^2} = \begin{array}{r|l} 4597 & 50 \\ \cdot\cdot 97 & \overline{91{,}94} \\ 470 & \text{Dos cifras} \\ 200 & \text{decimales.} \end{array}\;;\qquad \frac{4599}{250} = \frac{4599}{2 \times 5^3} = \begin{array}{r|l} 4599 & 250 \\ 2099 & \overline{18{,}396} \\ \cdot\cdot 990 & \\ 2400 & \text{Tres cifras} \\ 1500 & \text{decimales.} \\ \cdots\cdot & \end{array}$$

$$\frac{4597}{1250} = \frac{4597}{2^1 \times 5^4} = \begin{array}{r|l} 4597 & 1250 \\ \cdot 8470 & \overline{3{,}6776} \\ \cdot 9700 & \\ \cdot 9500 & \text{Cuatro cifras} \\ \cdot 7500 & \text{decimales.} \\ \cdots\cdot & \end{array}\;;\qquad \frac{4597}{6250} = \frac{4597}{2^1 \times 5^5} = \begin{array}{r|l} 45970 & 6250 \\ 22200 & \overline{0{,}73552} \\ 34500 & \\ 32500 & \text{Cinco cifras} \\ 12500 & \text{decimales.} \\ \cdots\cdot\cdot & \end{array}$$

Obsérvese asimismo que en estos ejemplos el número de cifras decimales iguala en cada caso al exponente de la mayor potencia del factor 5.

Et sic de céteris.

Transformemos, pues, ahora las decimales halladas, y convirtámoslas en las generatrices de que proceden, ajustándonos á la regla de poner la fracción decimal en forma de quebrado y de simplificar debidamente.

$$22\,\frac{5}{10} = 22\,\frac{1}{2} = \frac{45}{2^1}; \qquad 11\,\frac{25}{100} = 11\,\frac{1}{4} = \frac{45}{4} = \frac{45}{2^2}$$

$$5\,\frac{625}{1000} = 5\,\frac{5}{8}\left(\begin{array}{c}\text{partiendo}\\ \text{por 125.}\end{array}\right) = \frac{45}{8} = \frac{45}{2^3}; \qquad 2\,\frac{8125}{10000}\left(\begin{array}{c}\text{partiendo}\\ \text{por 625.}\end{array}\right) = 2\,\frac{13}{16} = \frac{45}{16} = \frac{45}{2^4}$$

$$29\,\frac{2}{10} = 29\,\frac{1}{5} = \frac{146}{5^1}; \qquad 1\,\frac{84}{100} = 1\,\frac{21}{25} = \frac{46}{5^2}$$

$$1\,\frac{168}{1000} = 1\,\frac{21}{125} = \frac{146}{5^3}; \qquad 0{,}2336 = \frac{2336}{10000}\left(\begin{array}{c}\text{partiendo}\\ \text{por 16.}\end{array}\right) = \frac{146}{625}$$

$$459\,\frac{7}{10} = \frac{4597}{10} = \frac{4597}{2^1 \times 5^1}; \quad 229{,}85 = 229\,\frac{85}{100} = 229\,\frac{17}{20} = \frac{(229 \times 20) + 17}{20} = \frac{4597}{2^2 \times 5^1}$$

$$114{,}925 = 114\,\frac{925}{1000}\left(\begin{array}{c}\text{partiendo}\\ \text{por 25.}\end{array}\right) = 114\,\frac{37}{40} = \frac{4597}{2^3 \times 5^1};$$

$$57{,}4625 = 57\,\frac{4625}{10000}\left(\begin{array}{c}\text{partiendo}\\ \text{por 1255}\end{array}\right) = 57\,\frac{37}{80} = \frac{4597}{2^4 \times 5^1}$$

$$91{,}94 = 91\,\frac{94}{100} = 91\,\frac{47}{50} = \frac{4597}{2^1 \times 5^2}; \quad 18{,}396 = 18\,\frac{396}{1000} = 18\,\frac{99}{250} = \frac{4599}{2^1 \times 5^3}$$

$$3{,}6776 = 3\,\frac{6776}{10000} = 3\,\frac{847}{1250} = \frac{4597}{2^1 \times 5^4}; \quad 0{,}73552 = \frac{73552}{100000}\left(\begin{array}{c}\text{partiendo}\\ \text{por 16.}\end{array}\right) = \frac{4597}{2^1 \times 5^5}$$

LECCIÓN V

Transformación de las fracciones periódicas puras en fracciones comunes equivalentes.

Una generatriz cualquiera es transformable en fracción decimal exacta, sólo cuando los factores del denominador de la generatriz son 2 y 5, ó bien 2, ó bien 5.

Así es, que (como ya hemos visto) toda generatriz exactamente transformable ha de aparecer en alguna de las cuatro formas siguientes:

$$\frac{a}{2^m}; \quad \frac{a}{5^n}; \quad \frac{a}{2^m \times 5^n}; \quad \text{ó bien } \frac{a}{2^n \times 5^m}$$

Y tiene que ser así por necesidad, atendiendo á que la transformación de una generatriz en decimal exacta consiste en multiplicar la generatriz por una potencia conveniente del 10, sacar luego el cuociente, y al fin partir ese cuociente por la misma potencia del 10.

Por ejemplo: transformar en decimal la generatriz $\frac{a}{2^n}$

$$\left(\frac{a}{2^n} \times 10^r\right) \div 10^r = \frac{a \times (2^r \times 5^r)}{2^n} \div 10^r = \frac{a \times 2^{r-n} \times 5^r}{10^r} = \frac{\text{número entero}}{10^r}$$
$$= \text{fracción exacta decimal.}$$

Es preciso, pues, que haya en el numerador $\frac{a \times (2^r \times 5^r)}{2^n}$ los mismos factores 2 y 5, ó bien en otro caso 2, ó bien 5, existentes en el denominador.

De lo cual se deduce que, si en el denominador de una generatriz existe un factor diferente del 2 y del 5, entonces la transformación es imposible exactamente.

Por tanto,

$$\frac{1}{3};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{37};\ \frac{1}{2\times 3};\ \frac{1}{5\times 11};\ \frac{1}{2^m\times 5^n\times 17};\ldots$$

son generatrices intransformables con exactitud. Únicamente es posible hallar decimales que se les acerquen cuanto se quiera (1).

Antes de estudiar la transformación de las fracciones periódicas puras en fracciones comunes, conviene examinar la de las generatrices que sean primarias en fracciones decimales, porque los resultados de cualesquiera otras generatrices que no tengan por numerador la unidad, enmascaran la ley y la ocultan, ó no dejan verla en toda su sencillez y plenitud.

---

(1) Claro es que puede haber fracciones decimales exactas procedentes de generatrices con factores en el denominador distintos del 2 y del 5. Pero esto solo ocurrirá cuando, por falta de simplicación previa, esos factores distintos del 2 y del 5 tengan en el numerador múltiplos que anulen los del denominador.

Por ejemplo:

¿Cuál es la fracción decimal equivalente á la generatriz $\frac{168}{525}$? 0,32 exactamente.

Y, sin embargo,

$$\frac{168}{525}=\frac{168}{3\times 7\times 5^2}$$

Pero el numerador

$$168=12\times 14=(3\times 4)\times(2\times 7);$$

de modo que

$$\frac{168}{525}=\frac{(3\times 4)\times(2\times 7)}{(3\times 7)\times 5^2}=\frac{(3\times 7)\times 2^3}{(3\times 7)\times 5^2}=\frac{2^3}{5^2}$$

Supprimiendo, pues, en los dos términos del quebrado los factores primos con 10, comunes á numerador y denominador, la generatriz

$$\frac{168}{525}$$

simplificada no es realmente otra cosa que

$$\frac{2^3}{5^2}=\frac{8}{25}=\frac{32}{100}=0{,}32$$

Pero ahora en esta Lección no se trata, pues, de fracciones simplificables, sino de fracciones comunes irreducibles que tengan en el denominador factores distintos del 2 y del 5.

$$\frac{1}{7} = \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ 30 & \\ 20 & 0{,}142857\ldots \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1\ldots & \end{array}$$

El período es .142857.

Para obtenerlo hemos debido hacer seis divisiones parciales, y en ellas hemos obtenido por residuos consecutivos todos los números posibles antes del 7, á saber: 1, 2, 3, 4, 5 y 6, aunque no por este orden, pues el orden ha sido 1, 3, 2, 6, 4, 5.

Claro es que no podía resultar el 7 como residuo, ni tampoco ningún número mayor, porque todo resto ha de ser menor que el divisor.

Y claro es también que el último residuo había de ser = 1; porque con cualquiera otro de los restos no podía repetirse totalmente un período que empezó con 1. Solamente, pues, reapareciendo el 1, es como puede venir otro período = 142857.

El período tiene, por tanto, todos los restos posibles, por ser seis los números que hay por debajo del 7 divisor.

$$\frac{1}{11} = \begin{array}{r|l} 100 & 11 \\ ..100 & \\ ..100 & 0{,}090909 \\ ..1\ldots & \end{array}$$

Aquí el período no tiene todos los restos posibles, pues el período es 09, el cual reaparece á cada dos divisiones parciales. Podían, como antes, haber salido de residuos todos los números que hay por debajo del divisor (que ahora son 10; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10); pero no ha sucedido así. Con solo el residuo 1 ha habido para volver á empezar. Y necesariamente ha tenido que aparecer el 1, porque con cualquier otro número de los 10 inferiores al divisor 11, no podría repetirse el período 09; 090909...

Así, los períodos constan:

1.º Unas veces, de tantas cifras menos una, como unidades tiene el divisor (ó sea el denominador de la generatriz primaria);

2.º Y otras veces consta de muchas menos cifras que el número de unos contenidos en ese denominador.

Cuando la generatriz es primaria, siempre el 1 es el último de los residuos, ya salgan todos, ya salgan menos; lo cual es condición indispensable para el inicio de un nuevo período, repetición del anterior.

Y tiene que ser así precisamente, porque una de dos:

O aparecen todos los restos posibles,—O no.

Si no aparecen todos los restos posibles, saldrá el 1 antes que los demás; y, en cuanto salga, se repetirán las divisiones parciales y restas anteriores, y se obtendrá otro período;

Y, si aparecen todos los restos posibles, por fuerza han de salir antes que el 1 todos los demás; pues, si el 1 saliera antes, se iniciarían nuevos períodos, iguales á los precedentes, antes de salir todos los restos posibles.

En corroboración, y por vía de ejercicio, ejecútense los siguientes ejemplos con generatrices primarias de denominadores primos con 10, ya cuando salgan sólo algunos de los restos, ya cuando aparezcan todos los posibles.

Períodos de menos cifras que el divisor (ó sea de menos cifras que tiene unos el denominador de la fracción generatriz primaria).

$$\frac{1}{37} = \begin{array}{r|l} 100 & 37 \ \textit{(número primo).} \\ \cline{2-2} 260 & 0{,}027\ldots \\ \ldots 1\ldots & \end{array}$$

El período resulta aquí con tres cifras; 027. El número de residuos consta del 10, el 26 y necesariamente el 1.

$$\frac{1}{13} = \begin{array}{r|l} 100 & 13 \ \textit{(número primo)} \\ \cline{2-2} 90 & \\ 120 & 0{,}076923\ldots \\ 30 & \\ 40 & \\ 1\ldots & \end{array}$$

El período tiene ahora seis cifras; 076923. Y hay también seis residuos; 10, 9, 12, 3, 4 y necesariamente el 1 al final.

$$\frac{1}{41} = \begin{array}{r|l} 100 & 41 \ \textit{(número primo).} \\ \cline{2-2} 180 & \\ 160 & 0{,}02439\ldots \\ 370 & \\ \ldots 1\ldots & \end{array}$$

Período, 02439; restos 18, 16, 37 y el 1, necesario para la repetición del período.

```
 1                   | 31 (número primo).
---- = 100           |----------------------
 31      70          | 0,032258064516129...
          80
           180
            250
              200
               140
                160
                  50
                  190
                    40
                     90
                     280
                       1...
```

De los 30 restos posibles han aparecido hasta 15; de los cuales el último ha sido el 1, condición inexcusable de la repetición desde las décimas del período 032258064516129...

```
 1                   | 17 (número primo).
---- = 100           |----------------------
 17     150          | 0,0588235294117647...
         140
           40
            60
             90
              50
              160
                70
                 20
                  30
                  130
                   110
                     80
                     120
                       1...
```

Período de 16 cifras; todas las posibles: último resto 1.

```
 1                   | 19 (número primo).
---- = 100           |----------------------
 19      50          | 0,052631578947368421
         120
           60
            30
            110
             150
              170
               180
                 90
                 140
                   70
                   130
                    160
                      80
                       40
                        20
                         1
```

Período de 18 cifras; todas las posibles: último resto 1.

```
 1
—— = 100   | 23 (número primo)
23    80   |——————————————————————————————
      110  | 0,0434782608695652173913...
       180
        190
          60
          140
            200
             160
              220
               130
                150
                 120
                   50
                   40
                   170
                     90
                     210
                       30
                        70
                         1...
```

Período de 22 cifras; último resto, 1.

```
 1
—— = 100   | 29 (número primo)
29   130   |——————————————————————————————————
      140  | 0,0344827586206896551724137931...
       240
         80
        220
         170
          250
           180
             60
             200
              260
               280
                190
                 160
                  150
                    52
                    210
                      70
                      120
                        40
                        110
                         230
                          270
                            90
                             30
                              1...
```

Período de 28 cifras; último resto final, el 1.

Como vemos, siendo primaria la generatriz, es condición ineludible de las reapariciones de los períodos, que el último resto sea el 1, ya salgan todos los restos posibles, ya salgan menos.

Y, por consiguiente, por ejemplo,

$$\frac{1}{7}=\begin{array}{l|l} 10 & 7 \\ \;\;30 & \\ \;\;\;\;20 & \overline{0{,}142857\ldots} \\ \quad\;\;60 & \\ \quad\;\;\;\;40 & \\ \qquad\;50 & \\ \qquad\;\;\;1\ldots & \end{array} = \begin{array}{l|l} 1000000 & 7 \\ \;\;30 & \\ \;\;\;\;20 & \overline{142857} \\ \quad\;\;60 & \\ \quad\;\;\;\;40 & \\ \qquad\;50 & \\ \qquad\;\;\;1\ldots & \end{array}$$

De donde resulta (según sabemos) que
El dividendo — el residuo = al divisor $\times$ por el cuociente.

$$1000000-1=7\times 142857$$
$$\therefore \quad 999999 = \text{denominador} \times \text{período}.$$

Luego en general:

$$\frac{1}{\text{denominador, primo con 10, de la generatriz}} = \frac{\text{período}}{\text{por tantos nueves como cifras decimales hubiere en el período.}}$$

Luego toda generatriz de fracción periódica pura es igual al período partido por tantos nueves como tenga cifras decimales el período.

$$\frac{1}{7}=\frac{142857}{999999}. \quad \text{En efecto:} \quad 142857\times 7=999999$$

Esta regla es capital. Y sencillísima: su única dificultad consiste en la simplificación del quebrado $\frac{\text{período}}{\text{grupo de nueves}}$

DEDUCCIONES

Luego

$$\frac{\text{Grupo de nueves en número suficiente}}{\text{período}} = \text{denominador de la generatriz primaria}$$

Luego para hallar el denominador de esa generatriz se partirá el grupo de los nueves por el período.

Luego para hallar el período se partirá el mismo grupo de los nueves por el denominador de la generatriz primaria.

$$\frac{1}{7}=\begin{array}{l|l} 999999 & 7 \\ \;\;29 & \\ \;\;\;\;19 & \overline{0{,}142857} \\ \quad\;\;59 & \\ \quad\;\;\;\;39 & \\ \qquad\;49 & \\ \qquad\;\;\ldots & \end{array} = \begin{array}{l|l} 9 & 7 \\ 29 & \\ \;\;19 & \overline{0{,}142857} \\ \;\;\;\;59 & \\ \quad\;\;39 & \\ \quad\;\;\;\;49 & \\ \qquad\ldots & \end{array}$$

Así, pues, conforme á los datos anteriores,

$$\frac{1}{37} = 0{,}027 = \frac{27}{999}$$

Luego

$$\begin{array}{r|l} 999 & 27 \\ \cline{2-2} 189 & \\ \cdots & = 37 = \text{denominador de la generatriz } \frac{1}{37} \end{array}$$

Luego, el período tiene que ser divisible por 9, cuando no pueda serlo el denominador de la raíz primaria, á causa de ser primo distinto del 3 ó de las potencias del 3.

$$\frac{142857}{9} = 15873, \text{ número entero. } (1).$$

Luego en el período han de estar todos los factores del grupo de los nueves, excepto el que constituya el denominador primo de la generatriz.

999999	9
111111	3
37037	7
5291	11
481	13
37	37

142857	9	Aquí están todos los factores del grupo de los nueves, y sólo falta el 7, denominador de la generatriz $^1/_7$
15873	3	
5291	11	
481	13	
37	37	

---

(1) Si el denominador es 3 ó bien 9, ó sus múltiplos, el período puede no ser divisible por 9.

$$\frac{1}{3} = \begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 10\ldots & 0{,}333\ldots \end{array}$$

El período no es divisible por 9.

$$\frac{1}{9} = \begin{array}{r|l} 10 & 9 \\ \cline{2-2} 10\ldots & 0{,}111\ldots \end{array}$$

El período no es divisible por 9.

$$\frac{1}{27} = \begin{array}{r|l} 100 & 27 \text{ (divisible por 9)} \\ \cline{2-2} 190 & 0{,}037 \\ 1\ldots & \end{array}$$

El período no es divisible por 9.

$$\frac{1}{81} = \begin{array}{r|l} 100 & 81 \text{ (divisible por 9)} \\ \cline{2-2} 190 & \\ 280 & 0{,}012345679 \\ 370 & \\ 460 & \\ 550 & \\ 640 & \\ 730 & \\ 1.. & \end{array}$$

El período no es divisible por 9.

Es curioso que en este ejemplo último las cifras del período crezcan según la serie de los números naturales, y que lo mismo suceda con las de los restos en sentido diagonal, ya subiendo, ya bajando.

$$\frac{1}{13} = 0{,}0\,7\,6\,9\,2\,3 \ldots = \frac{76923}{999999} \textit{ (divisible por 9)} \quad (1)$$

$$\text{Luego } \begin{array}{r|l} 9\,9\,9\,9\,9\,9 & 7\,6\,9\,2\,3 \\ \cline{2-2} 2\,3\,0\,7\,6\,9 & \\ \ldots\ldots & = 1\,3 = \text{al denominador de la generatriz.} \end{array}$$

$$\text{Luego } 0{,}0\,7\,6\,9\,2\,3 = \frac{1}{13} = \text{á la generatriz.}$$

$$\text{Luego } \begin{array}{r|l} 9\,9\,9\,9\,9\,9 & 1\,3 \\ \cline{2-2} & 7\,6\,9\,2\,3 \end{array}$$

$$\frac{1}{41} = 0{,}0\,2\,4\,3\,9 \ldots = \frac{2439}{99999};$$

$$\text{Luego } \begin{array}{r|l} 9\,9\,9\,9\,9 & 2\,4\,3\,9 \\ \cline{2-2} 2\,4\,3\,9 & \\ \ldots\ldots & = 4\,1 = \text{al denominador de la generatriz.} \end{array}$$

$$\text{Luego } 0{,}0\,2\,4\,3\,9 = \frac{1}{41} = \text{á la generatriz.}$$

$$\text{Luego } \begin{array}{r|l} 9\,9\,9\,9\,9 & 4\,1 \\ \cline{2-2} & 2\,4\,3\,9 \end{array}$$

$$\frac{1}{31} = 0{,}0\,3\,2\,2\,5\,8\,0\,6\,4\,5\,1\,6\,1\,2\,9 \ldots = \frac{322580645161 29}{999999999999999} \textit{ (divisible por 9)}$$

$$\text{Luego } \begin{array}{r|l} 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 & 3\,2\,2\,5\,8\,0\,6\,4\,5\,1\,6\,1\,2\,9 \\ \cline{2-2} .\,3\,2\,2\,5\,8\,0\,6\,4\,5\,1\,6\,1\,2\,9 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & = 3\,1 = \text{al denom. de la generatriz.} \end{array}$$

$$\text{Luego } \begin{array}{r|l} 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 & 3\,1 \\ \cline{2-2} & = \text{al período} \end{array}$$

$$\frac{1}{17} = 0{,}0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7 \ldots = \frac{5882352941176 47}{9999999999999999} \textit{ (divisible por 9)}$$

$$\text{Luego } \begin{array}{r|l} 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 & 5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7 \\ \cline{2-2} 4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & = 1\,7 = \text{al d.}^{\text{dor}} \text{ de la generatriz.} \end{array}$$

$$\text{Luego } \begin{array}{r|l} 9\,9 \ldots \text{ (hasta 16 cifras)} & 1\,7 \\ \cline{2-2} & = \text{al período } 5\,8\,8\,2 \ldots \end{array}$$

De análoga manera se hallaría que corresponden á las ge-

---

(1)
$$\begin{array}{r|l} 100 & 13 \\ \cline{2-2} 90 & 0{,}076923 \\ 120 & \\ 30 & \\ 4 & \\ 1 & \end{array}$$

neratrices $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$ y $\frac{1}{29}$ las largas fracciones decimales calculadas anteriormente. (Compruebe el discípulo los resultados por vía de ejercicio.)

De consiguiente,

Todo guarismo que no tenga entre sus factores al 2 ni al 5, si es repetido el suficiente número de veces, da una suma expresada por el correlativo número de nueves colocados á continuación unos de otros (1).

$$\left.\begin{array}{r} 11 \\ +\ 11 \\ +\ 11 \\ \text{hasta } 9 \\ \text{veces} \\ \hline =\ 99 \end{array}\right\} 11 \times 9 = 99 \qquad \left.\begin{array}{r} 21 \\ +\ 21 \\ +\ 21 \\ \text{hasta} \\ 47619 \\ \text{veces} \\ \hline =\ 999999 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 21 \times 47619 = 999999 \\ 21 \times (9 \times 11 \times 13 \times 37) = 999999 \end{array}$$

Por consiguiente también, todo número que no tenga entre sus factores ni al 2, ni al 5, ni al 9, si es repetido el suficiente número de veces, da una suma expresada por el correlativo número de unos colocados á continuación unos de otros.

$$\left.\begin{array}{r} 21 \\ +\ 21 \\ +\ 21 \\ \text{hasta} \\ 5291 \\ \text{veces} \\ \hline =\ 111111 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 21 \times 5291 = 111111 \\ 21 \times (11 \times 13 \times 37) = 111111 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ \text{hasta} \\ 15873 \\ \text{veces} \\ \hline 111111 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 \times 15873 = 111111 \\ 7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) = 111111 \end{array}$$

En resumen:

El número de cifras del período de una decimal periódica pura es menor que el número de unidades que contiene el denominador de la generatriz. Porque en las divisiones necesarias para la transformación de la generatriz en decimal, no pueden salir sino restos menores que el denominador, y, si salen todos los restos posibles, saldrán en número igual al denominador — 1.

Toda generatriz primaria de una fracción decimal periódica pura tiene la forma $\frac{1}{n}$, donde n es primo con 10.

---

(1) Recuérdese la última nota.

El correspondiente período se halla por medio de divisiones tales como

$$\begin{array}{l|l} 10 & n \\ \;a0 & \overline{0{,}p\,q\,r\,..} \\ \;\;b0 & \\ \;\;\;c0 & \\ \;\;\;\;1... & \end{array}$$

donde el segundo período $p\,q\,r$ no empieza hasta que reaparece el 1 iniciador (numerador de la generatriz primaria).

Por consiguiente, restando del dividendo ese 1 iniciador, tendremos que la resta será igual al divisor $\times$ por el cuociente (ó sea al denominador de la generatriz $\times$ por el período).

$$\therefore\ 1000...-1 = n \times p\,q\,r$$
$$\therefore\ 9999... = n \times p\,q\,r$$
$$\therefore\ \frac{1}{n} = \frac{p\,q\,r}{999..}$$

Luego, para que exista la igualdad, es preciso que $p\,q\,r$ sea divisor exacto del grupo de nueves 999...

Luego $p\,q\,r$ es el máximo común divisor de los dos términos de la expresión $\frac{p\,q\,r}{999..}$ = á la generatriz primaria $\frac{1}{n}$

Si la generatriz de la fracción decimal periódica pura no fuese primaria, sería múltiplo de la primaria de la forma.

$$\frac{1}{n} \times a = \frac{a}{n} = \frac{a \times p\,q\,r}{999...},$$

donde $p\,q\,r$ será, como antes, divisor exacto del grupo de nueves, y, de consiguiente, fácilmente aislable por el método del máximo común divisor.

De lo expuesto resulta otro método (ya indicado poco há) para hallar el período decimal correspondiente á una generatriz que no contenga del modo dicho en su denominador ni al 2 ni al 5.

Se parte un 9 por el denominador de la generatriz;

Al resto se agrega 9, y se vuelve á partir;

Al nuevo resto se agrega 9,...

Y así sucesivamente hasta llegar á un cuociente exacto.

$$\begin{array}{l|l} 99 & 13 \\ \;89 & \overline{0{,}076923} \\ \;119 & \\ \;\;29 & \\ \;\;\;39 & \\ \;\;\;00 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 999 & 101 \\ 909 & \overline{0{,}0099} \\ ... & \end{array}$$

$$\frac{1}{13} = \frac{76923}{999999}; \qquad \frac{1}{101} = \frac{99}{9999}$$

Ya con estos antecedentes puede procederse á la transformación de las fracciones decimales periódicas puras y primarias en sus correspondientes generatrices primarias.

Claro es que no se trata de equivalencias por el estilo de las que siguen, consistentes en dar al período por denominador un grupo de tantos nueves como cifras decimales haya en el período.

¿Cuál es la generatriz de 0,142857...?

Pues es $\frac{142857}{999999}$

¿Cuál la de 0,027...?

Es $\frac{27}{999}$

¿Cuál la de 0,076923...?

Es $\frac{76923}{999999}$

¿Cuál la de 0,02439...?

Es $\frac{2439}{99999}$

No: no se trata de esta clase de equivalencias. Esos nuevos quebrados comunes son, sin duda, equivalentes á los decimales; pero ¿quién puede formarse idea, sin simplificarlos, de la relación en que están sus términos, tan exageradamente complicados?

La dificultad está toda en la simplificación.

Y, para llevar esos quebrados á su menor expresión posible, habrá de hacerse lo que sigue:

Primeramente se hallará el denominador de la generatriz partiendo el grupo de los nueves por su período (máximo común divisor): y, hallado el denominador, se le dará luego por numerador la unidad.

¿Cuál es la generatriz de 0,142857..., fracción periódica pura y primaria?

$\frac{142857}{999999}$. Simplifiquémosla: $\begin{array}{r|l} 999999 & 142857 \\ \hline \ldots\ldots & 7 \end{array}$;

Luego, la generatriz primaria es $= \frac{1}{7}$

¿Cuál es la generatriz de la fracción decimal primaria y periódica pura 0,09...?

$$\frac{0,09}{99}. \quad \text{Simplifiquémosla:} \quad \begin{array}{r|l} 99 & 9 \\ \hline & 11 \end{array};$$

Luego, la generatriz primaria es $= \frac{1}{11}$

¿Cuál es la generatriz de 0,027..., fracción periódica pura y primaria?

$$\frac{27}{999}. \quad \text{Simplifiquémosla:} \quad \begin{array}{r|l} 999 & 27 \\ 189 & \overline{37} \\ \ldots & \end{array}$$

Luego, la generatriz primaria es $= \frac{1}{37}$

¿Cuál es la generatriz de la fracción primaria y periódica pura 0,076923...?

$$\frac{76923}{99999}. \quad \text{Simplifiquémosla:} \quad \begin{array}{r|l} 999999 & 76923 \\ 230769 & \overline{13} \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Luego, la generatriz primaria es $= \frac{1}{13}$

¿Cuál es la generatriz de 0,02439..., fracción primaria y periódica pura?

$$\frac{2439}{99999}. \quad \text{Simplifiquémosla:} \quad \begin{array}{r|l} 99999 & 2439 \\ 2439 & \overline{41} \end{array}$$

Luego, la generatriz primaria es $= \frac{1}{41}$

¿Cuál es la generatriz de la fracción decimal periódica pura 0,032258064516129...?

$$\begin{array}{r|l} 999999999999999 & 32258064516129 \\ 32258064516129 & \overline{31} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Luego, la generatriz primaria es $= \frac{1}{31}$

¿Cuál es la generatriz de la fracción periódica pura y primaria 0,0588235294117647?

$$\begin{array}{r|l} 9999999999999999 & 588235294117647 \\ & \overline{17} \end{array}$$

Luego generatriz primaria $= \frac{1}{17}$

¿Cuál es la generatriz de la fracción periódica pura y primaria 0,052631578947368421?

$$\begin{array}{r|l} 999999999999999999 & 52631578947368421 \\ \cline{2-2} & 19 \end{array}$$

Luego generatriz primaria $= \frac{1}{19}$

REGLA DE LA SIMPLIFICACIÓN

Las fracciones decimales primarias, si son periódicas puras, se transforman en sus generatrices primarias dividiendo por el período un grupo de tantos nueves como decimales tenga el período, y poniendo al cuociente por numerador la unidad.

¿A qué generatriz primaria es igual la fracción primaria periódica pura $= 0{,}047619\ldots$?

$$\begin{array}{r|l} 999999 & 47619 \\ \cline{2-2} 47619 & \\ \cdots\cdots & 21 \end{array}$$

Luego

$$\frac{1}{21} = \frac{47619}{999999}$$

¿A qué es igual 0,09...?

$$\begin{array}{r|l} 99 & 9 \\ \cline{2-2} & 11 \end{array}$$

Luego

$$\frac{1}{11} = \frac{9}{99}$$

TRANSFORMACIÓN EN GENERAL

Claro es que, cuando dos quebrados son iguales, si uno de ellos es irreducible, el otro se ha obtenido multiplicando los dos términos del irreducible por un mismo número, primo ó múltiplo.

El irreducible

$$\frac{1}{n} = \frac{\times p}{n \times p} = \frac{1 \times (m \text{ veces } p)}{n \times (m \text{ veces } p)}$$

y claro es también que, simplificando el quebrado no irreducible hasta su menor expresión, se obtendrá el irreducible.

Si

$$\frac{1}{21} = \frac{47619}{999999}$$

es porque el segundo quebrado resulta $= \frac{1 \times x}{21 \times x}$, y, por tanto, dividiendo por ese factor x los dos términos de la complicada expresión $\frac{47619}{999999}$, se obtendrá la fracción irreducible equivalente $\frac{1}{21}$, que fué su generatriz.

Pero el sistema de simplificaciones sucesivas por medio de factores primos es sobremanera laborioso y á veces impracticable, ó casi impracticable, cuando se trata de guarismos cuyos factores no se descubren sino con ímprobo trabajo.

$$\frac{47619}{999999} \text{ partiendo por } 9 = \text{á } \frac{5291}{111111}$$

$$\text{partiendo por } 11 = \text{á } \frac{481}{10101}$$

$$\text{partiendo por } 13 = \text{á } \frac{37}{777}$$

$$\text{partiendo por } 37 = \text{á } \frac{1}{21} \quad (1)$$

No debe, pues, intentarse jamás la simplificación por el sistema usual de los factores sucesivos; pues siempre ha de tenerse en cuenta que toda generatriz primaria lleva por numerador la unidad y que, por tanto, el denominador de la

(1) Todo período, cuando está en la forma

$$\frac{\text{período}}{\text{grupo de nueves}}$$

es divisible por 9 (no se olvide la nota anterior de la pág. 130), de modo que los denominadores de las generatrices, hecha la primera simplificación, aparecerán todos formados de unos.

11111, 111111, 111111, 1111111, 11111111, etc.

Y ¿habrá muchos calculadores, no digamos principiantes sólo, sino ya muy experimentados, que, por el método de los factores primos, sean capaces de simplificar quebrados cuyos denominadores aparezcan formados únicamente por grupos de 11111..., con especialidad si los grupos son impares y no divisibles por 3? ¿qué hacer cuando esos unos asciendan á muchas decenas, y tal vez á centenares... si en una transformación de un número alto salen todos los restos posibles?.

fracción decimal equivalente es divisible por su numerador. De consiguiente, cualquier fracción decimal periódica pura

$$\frac{0{,}abcd\ldots}{9999\ldots}, \text{ siendo igual á una generatriz } \frac{1}{n},$$

tiene su denominador 9999... divisible por su numerador *abcd*...; con lo cual siempre el grupo de nueves resulta divisible exactamente por el período decimal puro, cuando éste es primario.

Para simplificar, pues, ha de partirse el grupo de los nueves por su respectivo período (ó numerador); que es al mismo tiempo su máximo común divisor.

LECCIÓN VI

Rotación de las cifras decimales en los múltiplos de las fracciones periódicas primarias.

Todas las generatrices de igual denominador son múltiplos de la generatriz primaria: de la $\frac{1}{11}$ en los ejs. siguientes:

$\frac{1}{11}+\frac{1}{11}=\frac{1}{11}\times2=\frac{2}{11}$; $\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}=\frac{1}{11}\times3=\frac{3}{11}$; $\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}=\frac{1}{11}\times6=\frac{6}{11}$; etc.

Y es evidente que se hallarán las fracciones decimales correspondientes, multiplicando la decimal primaria por 2, por 3, por 4, por...

$$\frac{1}{11} = \text{generatriz primaria} = 0{,}090909\ldots, \text{ decimal primaria;}$$

$$\frac{1}{11}\times 2 = \frac{2}{11} = 0{,}090909\ldots \times 2 = 0{,}181818\ldots$$

$$\frac{1}{11}\times 3 = \frac{3}{11} = 0{,}090909\ldots \times 3 = 0{,}272727\ldots$$

$$\frac{1}{11}\times 4 = \frac{4}{11} = 0{,}090909\ldots \times 4 = 0{,}363636\ldots$$

$$\frac{1}{11}\times 5 = \frac{5}{11} = 0{,}090909\ldots \times 5 = 0{,}454545\ldots$$

$$\frac{1}{11}\times 6 = \frac{6}{11} = 0{,}090909\ldots \times 6 = 0{,}545454\ldots$$

$$\frac{1}{11}\times 7 = \frac{7}{11} = 0{,}090909\ldots \times 7 = 0{,}636363\ldots$$

$$\frac{1}{11}\times 8 = \frac{8}{11} = 0{,}090909\ldots \times 8 = 0{,}727272\ldots$$

$$\frac{1}{11}\times 9 = \frac{9}{11} = 0{,}090909\ldots \times 9 = 0{,}818181\ldots$$

$$\frac{1}{11}\times 10 = \frac{10}{11} = 0{,}090909\ldots \times 10 = 0{,}909090\ldots$$

Los nuevos numeradores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, de los quebrados comunes $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{11}$,... son precisamente los multiplicadores de la generatriz primaria $\frac{1}{11}$

Si cada una de estas nuevas generatrices se convierte en fracción decimal, cada uno de los multiplicadores empezará la respectiva transformación, y constituirá en cada caso el resto último del correspondiente período:

$$\frac{2}{11}=\begin{array}{r|l} 20 & 11 \\ \cline{2-2} 90 & \\ 20 & 0{,}181818 \\ 90 & \\ 2\ldots & \end{array} \qquad \frac{3}{11}=\begin{array}{r|l} 30 & 11 \\ \cline{2-2} 80 & \\ 30 & 0{,}2727 \\ 80 & \\ 3\ldots & \end{array} \qquad \frac{4}{11}=\begin{array}{r|l} 40 & 11 \\ \cline{2-2} 70 & \\ 40 & 0{,}363636 \\ 70 & \\ 4\ldots & \end{array}$$

$$\frac{5}{11}=\begin{array}{r|l} 50 & 11 \\ \cline{2-2} 60 & \\ 50 & 0{,}454545 \\ 60 & \\ 5\ldots & \end{array} \qquad \frac{6}{11}=\begin{array}{r|l} 60 & 11 \\ \cline{2-2} 50 & \\ 60 & 0{,}545454 \\ 50 & \\ 6\ldots & \end{array} \qquad \frac{7}{11}=\begin{array}{r|l} 70 & 11 \\ \cline{2-2} 40 & \\ 70 & 0{,}636363 \\ 40 & \\ 7\ldots & \end{array}$$

$$\frac{8}{11}=\begin{array}{r|l} 80 & 11 \\ \cline{2-2} 30 & \\ 80 & 0{,}727272 \\ 30 & \\ 8\ldots & \end{array} \qquad \frac{9}{11}=\begin{array}{r|l} 90 & 11 \\ \cline{2-2} 20 & \\ 90 & 0{,}818181 \\ 20 & \\ 9\ldots & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 11 \\ \cline{2-2} 100 & \\ 100 & 0{,}909090 \\ 1\ldots & \end{array}$$

Vése, pues, que los restos últimos de las generatrices no primarias son iguales á los numeradores de tales generatrices: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Estos ejemplos confirman las consideraciones expuestas con el fin de probar que la condición necesaria para que en cada caso se sucedan continua é indefinidamente los períodos, es que se repita como último residuo el respectivo multiplicador de la generatriz correspondiente (ó sea el respectivo numerador de los quebrados de igual denominador). Por eso, transformadas en decimales todas las generatrices de la serie

$$\frac{1}{11},\ \frac{2}{11},\ \frac{3}{11},\ \frac{4}{11},\ \frac{5}{11},\ \frac{6}{11},\ \frac{7}{11},\ \frac{8}{11},\ \frac{9}{11} \text{ y } \frac{10}{11},$$

los últimos residuos en las operaciones de cada período son, respectivamente,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Lo mismo pasaría en cualquier otra serie, por ejemplo:

$$\frac{1}{37} = \begin{array}{r|l} 100 & \underline{37} \\ 260 & \\ 1\ldots & 0{,}027\ldots \end{array} \qquad \frac{2}{37} = \begin{array}{r|l} 200 & \underline{37} \\ 150 & \\ 2\ldots & 0{,}054\ldots \end{array}$$

$$\frac{3}{37} = \begin{array}{r|l} 300 & \underline{37} \\ 40 & \\ 3\ldots & 0{,}081\ldots \end{array} \qquad \frac{7}{37} = \begin{array}{r|l} 70 & \underline{37} \\ 330 & \\ 340 & 0{,}189\ldots \\ 7\ldots & \end{array}$$

$$\frac{21}{37} = \begin{array}{r|l} 210 & \underline{37} \\ 250 & \\ 280 & 0{,}567\ldots \\ 21\ldots & \end{array} \qquad \frac{26}{37} = \begin{array}{r|l} 260 & \underline{37} \\ 100 & \\ 26\ldots & 0{,}702\ldots \end{array}$$

$$\frac{31}{37} = \begin{array}{r|l} 310 & \underline{37} \\ 140 & \\ 290 & 0{,}837\ldots \\ 31\ldots & \end{array} \qquad \frac{36}{37} = \begin{array}{r|l} 360 & \underline{37} \\ 270 & \\ 110 & 0{,}972\ldots \\ 36\ldots & \end{array}$$

Aquí, como antes, se repiten los períodos sólo cuando aparecen en los restos los multiplicadores de la generatriz primaria (ó sea los numeradores de sus múltiplos).

El método de agregar un 9 á cada resto da únicamente el período de la generatriz primaria (cuyo numerador es 1); por manera que, si la generatriz no es primaria, hay que multiplicar el período primario por el numerador de esta generatriz no primaria; y, por tanto, hay que hacer dos clases de operaciones: primera, hallar el período primario; segunda, multiplicarlo convenientemente. Mas el método de dividir directamente por el respectivo denominador el numerador de una generatriz cualquiera seguido del cero ó de los ceros correspondientes, lo mismo que los restos sucesivos, conduce inmediatamente al resultado final.

¿Cuál es el período correspondiente á la fracción $\frac{7}{13}$?

Métodos de los 9 agregados á los restos.

$$\frac{7}{13} = \frac{1}{13} \times 7; \quad \frac{1}{13} = \begin{array}{r|l} 99 & \underline{13 \quad \times 7} \\ 89 & \\ 119 & 0{,}076923 \\ 29 & \underline{\quad\times 7} \\ 39 & \\ 00 & 0{,}538461 \end{array}$$

Este método es el mejor cuando se trata de hallar la generatriz primaria; ó bien (si no toda la serie completa) muchos de los múltiplos.

Método de los 0
agregados á los restos.

$$\frac{7}{13} = \begin{array}{l|l} 70 & 13 \\ \hline 50 & 0{,}538461... \\ 110 & \\ 60 & \\ 80 & \\ 20 & \\ 7... & \end{array}$$

Este método es el más rápido cuando no hay que hallar más que un solo múltiplo de una generatriz primaria.

Es de gran importancia la advertencia siguiente. El producto de una decimal periódica primaria multiplicada por un número cualquiera, no se obtiene con exactitud tomando como multiplicando solamente un período primitivo. Cuando menos, hay que tomar dos para conocer el período del producto.

Por ejemplo:

El quebrado impropio $\frac{27}{7}$ es la generatriz de la fracción decimal periódica

$$3{,}\underbrace{857142}_{\text{período}}857142... \qquad \begin{array}{l|l} 27 & 7 \\ \hline 60 & 3{,}857142... \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 6... & \end{array}$$

Ahora bien: multiplicando por 27 la decimal primaria 0,142857..., correspondiente á $\frac{1}{7}$, no se obtiene el período 857142... del producto 3,857142...

Véase como prueba la multiplicación

$$\begin{array}{r} 0{,}142857 \\ 27 \\ \hline 999999 \\ 285714 \\ \hline 3{,}857139; \end{array}$$

faltan 3 millonésimas para la exactitud.

Y tiene que ser así, porque el multiplicando 0,142857 es menor de lo que debe ser. Sólo se obtendrá el nuevo período correspondiente al producto $\frac{1}{7} \times 27$, poniendo como multiplicando dos períodos cuando menos de la decimal primaria.

$$\begin{array}{r} 0{,}142857142857 \\ 27 \\ \hline 999999999999 \\ 285714285714 \\ \hline 3{,}857142857139 \end{array}$$

Aquí ya sale exacto el primer período 857142... é inexacto, por defecto, el segundo.

Cuando una fracción decimal primaria tiene tantas cifras menos una como el número primo denominador de su generatriz primaria, en toda la serie de los múltiplos de la fracción decimal aparecen las mismas cifras decimales, y no otras.

$$\frac{1}{7} = \begin{array}{l|l} 10 & 7 \\ \hline 30 & 0{,}142857\ldots; \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1\ldots & \end{array} \qquad \frac{2}{7} = \begin{array}{l|l} 20 & 7 \\ \hline 60 & 0{,}285714\ldots; \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 2\ldots & \end{array}$$

$$\frac{3}{7} = \begin{array}{l|l} 30 & 7 \\ \hline 20 & 0{,}428571\ldots; \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 3\ldots & \end{array} \qquad \frac{4}{7} = \begin{array}{l|l} 40 & 7 \\ \hline 50 & 0{,}571428\ldots; \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 4\ldots & \end{array}$$

$$\frac{5}{7} = \begin{array}{l|l} 50 & 7 \\ \hline 10 & 0{,}714285\ldots; \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 5\ldots & \end{array} \qquad \frac{6}{7} = \begin{array}{l|l} 60 & 7 \\ \hline 40 & 0{,}857142\ldots \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 6\ldots & \end{array}$$

La fracción primaria 0,142857 tiene tantas cifras decimales en su período, como unidades el denominador 7 menos una: se han dado, pues, todos los restos posibles:

Los múltiplos por 2, 3, 4, 5 y 6 de esa generatriz primaria $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \ldots\right)$ tienen también seis cifras decimales en sus respectivos cuocientes (ó períodos); y las cifras decimales de los múltiplos son las mismas de la decimal primaria; 142857.

Estas cifras se repiten cíclicamente:

$$\begin{array}{ccc} & 1\ \ 4 & \\ 7 & & 2 \\ & 5\ \ 8 & \end{array}$$

Si el cuociente empieza por el 1, como en la decimal primaria correspondiente á $\frac{1}{7}$, el orden circular es 142857.

Si el cuociente empieza por el 2, como en la decimal correspondiente al múltiplo $\frac{2}{7}$, el orden circular es 285714.

Si el cuociente empieza por 4, como en la decimal correspondiente al múltiplo $\frac{3}{7}$, el orden cíclico es 428571.

Si el cuociente empieza por 5, como en la decimal correspondiente al múltiplo $\frac{4}{7}$, el orden es 571428.

Si el cuociente empieza por 7, como en la decimal correspondiente al múltiplo $\frac{5}{7}$, el orden circular es 714285.

Y si el cuociente empieza por 8, como en la decimal correspondiente al múltiplo $\frac{6}{7}$, la rotación es 857142.

Tanto en la decimal primaria como en las múltiplas, los cuocientes son todos divisibles por 9, cifra máxima del sistema de la notación decimal.

La razón de todo esto es muy sencilla.

Los multiplicadores de una generatriz primaria, como $\frac{1}{7}$ (por ejemplo) son tantos como unidades menos 1 hay en el denominador. En el caso del $\frac{1}{7}$ hay $(7-1)$, esto es, 6; á saber: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 multiplicadores (considerando al 1 como multiplicador).

$$\frac{1}{7}\times 1=\frac{1}{7}\,; \quad \frac{1}{7}\times 2=\frac{2}{7}\,; \quad \frac{1}{7}\times 3=\frac{3}{7}\,; \quad \frac{1}{7}\times 4=\frac{4}{7}\,;$$

$$\frac{1}{7}\times 5=\frac{5}{7}\,, \text{ y } \frac{1}{7}\times 6=\frac{6}{7}\,.$$

Pues bien; cuando, al transformarse en decimal una generatriz primaria, aparecen todos los restos posibles, claro es que se presentan los mismos números que, en otro caso, hacen de multiplicadores de la misma generatriz primaria (esto es, 6 en el ejemplo del $\frac{1}{7}$) á saber: 1, 2, 3, 4, 5 y 6; y claro es también que, agregado un cero á cada uno de estos restos, se hallarán los mismos cuocientes y los mismos nuevos restos que por sí propio daría el correspondiente quebrado multiplicador de la generatriz; todo en orden cíclico conforme queda expuesto.

Así, pues, si (habiendo salido todos los restos posibles) tenemos á la vista la transformación de una generatriz primaria en fracción decimal también primaria, como por ejemplo,

```
1
— = 10    | 7
7    30   |________
      20  | 0,142857
       60
        40
         50
          1...
```

no hay necesidad de hacer análogas operaciones para encontrar las demás fracciones decimales de los múltiplos, pues basta con conocer la ley de la rotación de las cifras del cuociente.

$\frac{2}{7} = 2 \left| \frac{7}{0{,}285714} \right.$; $\frac{3}{7} = 3 \left| \frac{7}{0{,}428571} \right.$; $\frac{4}{7} = 4 \left| \frac{7}{0{,}571428} \right.$;

$\frac{5}{7} = 5 \left| \frac{7}{0{,}774285} \right.$; $\frac{6}{7} = 6 \left| \frac{7}{0{,}857142} \right.$.

Si el múltiplo es 2, ha de buscarse, para la transformación, el resto 2 en la operación primera (la del $\frac{1}{7}$) y desde el 2 se copia cíclicamente el cuociente.

Y así de los demás múltiplos.

Imagine el discípulo la molestia de efectuar puntualmente las 16 operaciones necesarias para hallar las fracciones decimales equivalentes á $\frac{1}{17}$ y á sus respectivos múltiplos $\frac{2}{17}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{4}{17}$,... $\frac{16}{17}$ (según que por vía de ejercicio se ponen á continuación).

```
1                                 2
—— = 100  | 17                    —— = 20   | 17
17   150  |___________________    17   30   |_________________
      140 | 0,0588235294117647...;     130  | 0,1176470588235294
       40                               110
        60                               80
         90                              120
          50                              100
          160                              150
           70                               140
            20                               40
             30                               60
             130                               90
              110                               50
               80                               160
               120                               70
                1...                              2...
```

$\frac{3}{17}$ = 30 | 17
130 | 0,1764705882352941...;
110
80
120
100
150
140
40
60
90
50
160
70
20
3...

$\frac{4}{17}$ = 40 | 17
60
90 | 0,2352941176470588...
50
160
70
20
30
130
110
80
120
100
150
140
4...

50 | 17
160
70 | 0,2941176470588235...;
20
30
130
110
80
120
10
150
140
40
60
90
5...

60 | 17
90
50 | 0,3529411764705882...
160
70
20
30
130
110
80
120
100
150
140
40
6...

70 | 17
20
30 | 0,4117647058823529...;
130
110
80
120
100
150
140
40
60
90
50
160
7...

80 | 17
120
100 | 0,4705882352941176
150
140
40
60
90
50
160
70
20
30
130
110
8...

```
 90  | 17
 50  |--------------------
160  | 0,5294117647058823...;
  70
   20
    30
    130
     110
       80
       120
         100
          150
           140
             40
              60
               9...
```

```
100  | 17
 150 |--------------------
  140| 0,5882352941176470
    40
     60
      90
       50
       160
         70
          20
           30
           130
            110
              80
              120
                10...
```

```
110  | 17
 80  |--------------------
120  | 0,6470588235294117...
 100
  150
   140
     40
      60
       90
        50
        160
          70
           20
            30
            130
              11...
```

```
12/17 = 120  | 17
         100 |--------------------
          150| 0,7058823529411764...
          140
            40
             60
              90
               50
               160
                 70
                  20
                   30
                   130
                    110
                      80
                       12...
```

```
13/17 = 130  | 17
         110 |--------------------
          80 | 0,7647058823529411...
         120
          100
           150
            140
              40
               60
                90
                 50
                 160
                   70
                    20
                     30
                      13...
```

```
140  | 17
 40  |--------------------
  60 | 0,8235294117647058...
   90
    50
    160
      70
       20
        30
        130
         110
           80
           120
             100
              150
               14...
```

```
150  | 17
 140 |-----------------
   40| 0,8823529411764705...
   60
    90
     50
     160
       70
        20
         30
         170
          110
            80
           120
             100
              15...
```

```
160  | 17
  70 |-----------------
   20| 0,9411764705882352...
    30
    130
     110
       80
       120
         100
          150
           140
             40
              60
               90
                50
                 16...
```

Pues imagine ahora el alumno la facilidad con que se pueden hallar todas las fracciones decimales correspondientes á los múltiplos de $\frac{1}{17}$, utilizando al efecto la ley de la rotación de las cifras, una vez conocida la transformación de la generatriz primaria (que es preciso, en todo caso, calcular).

```
1
-- = 100  | 17
17   150  |-----------------
      140 | 0,0588235294117647...
        40
         60
          90
           50
           160
             70
              20
               30
               130
                110
                  80
                 120
                   1...
```

```
  0 5 8 8
 7       2
 4       3
 6       5
 7       2
  1 1 4 9
```

$$\frac{2}{17} = 0{,}1176470588235294\ldots$$

$$\frac{3}{17} = 0{,}1764705882352941\ldots$$

$$\frac{4}{17} = 0{,}2352941176470588\ldots$$

$$\frac{5}{17} = 0{,}2941176470588235\ldots$$

$$\frac{6}{17} = 0{,}3529411764705882\ldots$$

$$\frac{7}{17} = 0{,}4117647058823529\ldots$$

$$\frac{8}{17} = 0{,}4705882352941176\ldots$$

$$\frac{9}{17} = 0{,}5294117647058823\ldots$$

$$\frac{10}{17} = 0{,}5882352941176470\ldots$$

$$\frac{11}{17} = 0{,}6470588235294117\ldots$$

$$\frac{12}{17} = 0{,}7058823529411764\ldots$$

$$\frac{13}{17} = 0{,}7647058823529411\ldots$$

$$\frac{14}{17} = 0{,}8235294117647058\ldots$$

$$\frac{15}{17} = 0{,}8823529411764705\ldots$$

$$\frac{16}{17} = 0{,}9411764705882352\ldots$$

Estos nuevos antecedentes nos ponen ya en camino de hallar una generatriz cualquiera, dada una fracción periódica no primaria.

LECCIÓN VII

Transformación de las fracciones periódicas no primarias en sus respectivas generatrices.

Sabemos que cualquier generatriz no primaria de una fracción periódica pura es un múltiplo de la generatriz primaria.

Por consiguiente, toda fracción periódica pura es una suma de varios sumandos todos iguales á la periódica primaria.

$\frac{1}{7}$ = generatriz primaria.

$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$; suma de dos sumandos iguales.

$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$; suma de tres sumandos iguales.

$\frac{4}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$; suma de cuatro sumandos iguales.

$\frac{5}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$; suma de cinco sumandos iguales.

$\frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$; suma de seis sumandos iguales.

Por tanto, las fracciones decimales equivalentes son, naturalmente, sumas también de sumandos iguales.

$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ldots = $ periódica pura primaria.

$\frac{2}{7} = \left\{\begin{array}{l} 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \end{array}\right\} = 0{,}285714\ldots = $ 2 veces la fracción periódica pura primaria (1).

$\frac{3}{7} = \left\{\begin{array}{l} 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \end{array}\right\} = 0{,}428571\ldots = $ 3 veces la primaria (1).

$\frac{4}{7} = \left\{\begin{array}{l} 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \end{array}\right\} = 0{,}571428\ldots = $ 4 veces la primaria (1).

$\frac{5}{7} = \left\{\begin{array}{l} 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \end{array}\right\} = 0{,}714285\ldots = $ 5 veces la primaria (1).

$\frac{6}{7} = \left\{\begin{array}{l} 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \\ 0{,}142857\ldots \end{array}\right\} = 0{,}857142\ldots = $ 6 veces la primaria (1).

Sabemos, asimismo, que todo período primario, partido por un grupo de tantos nueves como decimales tenga el período, es igual á la generatriz primaria.

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999};$$

Por lo cual, dividiendo el grupo de nueves por su período, obtendremos siempre el denominador de la generatriz primaria.

$$999999 \;\Big|\; \underline{142857} \quad = 7, \text{ denominador de la fracción primaria}$$

Luego, en este caso, generatriz primaria $= \frac{1}{7}$.

Ahora bien:

Si dividimos el grupo de nueves, no por la decimal primaria, sino por un múltiplo cualquiera de esa misma decimal primaria, no aparecerá ya, como antes, en el cuociente el de-

(1) Obsérvese la rotación de las cifras.

nominador de la generatriz; pero, sin duda, aparecerá un número estrechamente emparentado con ese denominador.

Por ejemplo: pongamos, pues, por dividendo el grupo de nueves: demos á este dividendo por divisor el doble de la decimal primaria; y, como el divisor resulta doble, claro es que el cuociente será la mitad del denominador de la correspondiente generatriz.

$$\begin{array}{r|l} 999999 & 285714 \\ \cline{2-2} 142857 & 3\ \frac{142857}{285714} = 3\,{}^1/_2 = \frac{(2 \times 3) + 1}{2} = \frac{7}{2} \end{array}$$

Luego la generatriz es $= \frac{2}{7}$.

En efecto; poniendo el cuociente en forma de quebrado $\left(3\ \frac{1}{2} = \frac{7}{2}\right)$, obtendremos el denominador 7 de la generatriz primaria $\frac{1}{7}$; y, ya sabiendo que esta generatriz primaria es $= \frac{1}{7}$, muy fácil nos será averiguar que 0,285714 equivale á la generatriz no primaria $= \frac{2}{7}$.

Este procedimiento podía hacerse general y darse como regla que, para hallar la generatriz de una fracción decimal cualquiera, periódica pura, se partirá por la decimal el correspondiente grupo de nueves, se pondrá el cuociente en forma de quebrado, y el quebrado invertido resultará = la generatriz (1).

Veamos algún ejemplo:

¿A qué generatriz es igual la fracción decimal periódica pura 0,428571...?

Pongamos por dividendo un grupo de nueves que conste de tantas cifras como contenga la fracción 0,428571; demos

(1) La regla sería tan general que dentro de ella cabrían hasta las generatrices primarias. La única diferencia estaría en que la división del grupo de nueves por un período primario no deja residuo, y los demás sí.

$$\begin{array}{r|l} 999999 & 142857 \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & 7 \end{array}$$

Póngase ahora el 7 en forma de quebrado, ${}^7/_1$;
Inviértase $= {}^1/_7$;
Y en ese ${}^1/_7$ tendremos la generatriz primaria correspondiente á la decimal periódica pura, también primaria, 0,142857.
La regla es, pues, la misma.

á ese dividendo por divisor la misma fracción; y hagamos la división:

$$\begin{array}{r|l} 999999 & 428571 \\ \cline{2-2} 142857 & 2\,\dfrac{142857}{428571} \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si se dividen ambos} \\ \text{términos del que-} \\ \text{brado por el nu-} \\ \text{merador,} \end{array} \right\} \; 2\,\frac{1}{3} = \frac{(3 \times 2) + 1}{3} = \frac{7}{3}$$

Luego la generatriz es $= \frac{3}{7}$.

¿A qué generatriz es igual la fracción periódica pura 0,857142...?

$$\begin{array}{r|l} 999999 & 857142 \\ \cline{2-2} 142857 & 1\,\dfrac{142857}{857142} \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si se dividen ambos} \\ \text{términos del que-} \\ \text{brado por el nu-} \\ \text{merador,} \end{array} \right\} \; 1\,\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

Luego la generatriz es $= \frac{6}{7}$.

SIMPLIFICACIÓN.

Pero hay que renunciar á este procedimiento, porque siempre necesitan simplificación quebrados tales como los muy complicados resultantes en los cuocientes anteriores.

$$\frac{142857}{428571}, \quad \frac{142857}{857142}$$

Habiendo que renunciar, por impracticable la mayor parte de las veces, á la simplificación por medio de los factores primos, hay que recurrir á otro procedimiento, en virtud de las siguientes consideraciones.

Claro es que no habría para qué acudir á otros medios, si los quebrados resultantes en los cuocientes fueran siempre tales como

$$\frac{9}{45}, \quad \frac{27}{243}, \quad \frac{76923}{307692}$$

equivalentes á generatrices primarias como

$$\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{4},$$

verdaderamente muy fáciles de calcular, porque cada denominador es un evidente múltiplo del numerador respectivo.

Pero las más de las veces no ocurre así.

Con frecuencia el numerador del quebrado resultante en esa clase de cuocientes no es evidente submúltiplo de su denominador, y entonces la simplificación ha de ofrecer necesariamente seria dificultad.

Por ejemplo:

¿Cuál es la generatriz de 0,714285?...

$$\begin{array}{r|l} 999999 & 714285 \\ \cline{2-2} 285714 & 1\,\frac{285714}{714285} \end{array}$$

Aquí aparece en el cuociente un quebrado cuyo denominador no es múltiplo del numerador, por lo cual la relación entre ambos no se percibe desde luego ni á primera vista.

Mas la simplificación no ha de ofrecer dificultades si se recuerda que tanto el residuo 285714, que hace de numerador, como el divisor 714285, que hace de denominador, son grupos de sumandos, todos iguales al período primario. De modo que tenemos

$$\frac{\text{Residuo} = \text{á } n \text{ veces el período primario}}{\text{Divisor} = \text{á } m \text{ veces el período primario}} = \frac{n \text{ número entero}}{m \text{ número entero}}.$$

Supongamos

$$\frac{n}{m} = \frac{2}{5} = \frac{2 \text{ veces el período}}{5 \text{ veces el período}}$$

Y es claro que el período aparecerá como nuevo resto, si el $5 \times$ por período se divide por el $2 \times$ período

$$\begin{array}{r|l} +\,5 \times \text{período} & 2 \times \text{período} \\ \cline{2-2} -\,4 \times \text{período} & 2 \\ \hline 1 \times \text{período} & \end{array}$$

Y, en efecto,

$$\begin{array}{r|l} 714285 & 285714 \\ \cline{2-2} 142857 & 2\,\frac{142857}{285714} \end{array}$$

donde claramente se ve que 142857 es el período primario.

Ya con este dato volvamos al principio.

$$\begin{array}{l|l} 999999 & 714285 \\ \cline{2-2} 285714 & 1\,\frac{285714}{714285} = \left\{ \begin{array}{c}\text{partiendo ambos tér-}\\ \text{minos por 142857.}\end{array} \right\} 1\,\frac{2}{5} = \frac{(5 \times 1) + 2}{5} = \frac{7}{5} \end{array}$$

Y, por consiguiente,

La fracción decimal periódica pura 0,714285 = fracción común $\frac{5}{7}$

De donde resulta que la decimal primaria es siempre divisor común de toda fracción periódica cualquiera, puesta en la forma de

$$\frac{\text{período no primario}}{9999\ldots}$$

Luego siempre se hallará la decimal primaria por el procedimiento del máximo común divisor.

Y, hallada, se obtendrá la generatriz de la fracción decimal dada, dividiendo por el período primario la fracción

$$\frac{\text{período no primario}}{9999\ldots}$$

Porque

$$\text{generatriz cualquiera} = \frac{1}{n} \times p = \frac{\text{período primario}}{999\ldots} \times p$$

¿Cuál es la generatriz de 0,571428...?

$$= \frac{571428}{999999}$$

Para simplicar este enorme quebrado, recurramos al procedimiento del máximo común divisor.

	999999	571428	(1
1)	428571	142857	(3
	......		

No habiendo ya resto, claro es que 142857 es el período primario; y, siéndolo, dividamos por él los dos términos del quebrado

$$\frac{571428}{9999999} = \frac{4}{7}$$

Para ahorrar cifras, tiempo y trabajo, la operación total debe aparecer como sigue, dividiendo al fin por la decimal primaria los dos guarismos que encabezan la operación del máximo común divisor.

	999999	571428	(1
1)	428571	142857	(3
	......		

Luego

$$99999 \,\underline{|\,142857}\quad ; \qquad 571428 \,\underline{|\,142857}$$
$$\qquad\quad 7 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4$$

Luego

la fracción dada, decimal periódica pura = á la fracción ordinaria $\frac{4}{7}$ ·

¿Cuál es la generatriz de 0,58536...?

$$= \frac{58536}{99999}$$

Simplificación por el máximo común divisor.

	99999	58536	(1
1)	41463	17073	(2
2)	7317	2439	(3
	....		

Luego, dividiendo por el máximo común divisor 2439, tanto el numerador 99999 como el denominador 58536, resultará:

99999	2439	;	58536	2439
·2439	41		·9756	24
....			....	

Luego

la decimal periódica 0,58536... es = á la fracción ordinaria $\frac{24}{41}$ (1)

(1) Alguien me ha tachado de largos los trámites que exige esta manéra de simplificar; pero quien tal crea, pruebe á simplificar el mismo quebrado

$$\frac{58536}{99999}$$

por el método de los factores sucesivos.

Sólo sabemos que, en virtud de la propiedad general de todas las frac-

De lo expuesto resulta que para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica pura cualquiera (no primaria) (1),

1.° Se pone la decimal en forma de quebrado común, dando á este quebrado común por numerador el período, y por denominador tantos nueves como el período tenga cifras decimales;

2.° Se divide el correspondiente grupo de nueves por el período;

3.° Se divide en seguida el período por el resto de la primera división;

4.° Se divide el *primer* resto por el segundo;

5.° Se divide el *segundo* resto por el tercero;

6.° Se divide el *tercer* resto por el cuarto;...

7.° Y así sucesivamente, hasta llegar á una división parcial donde no resulte resto. Entonces el último resto es el período primario, y, por tanto, factor común al numerador y al denominador decimales.

8.° Obtenido el período primario, se vuelve al principio; y se parten por ese período primario tanto el grupo de los nueves como el período que le ha servido de divisor. Los cuocientes resultantes, puestos convenientemente en forma de quebrado, son la fracción ordinaria pedida.

¿Cuál es la generatriz de 0,56097...?

---

ciones periódicas puras, son siempre divisibles por 9 numerador y denominador. Pero ¿y luego?

$$\frac{58536}{99999} = \frac{6504}{11111}$$

¿Cuáles son los factores del denominador 11111? ¿Habrá muchos que atinen de pronto con que ambos términos pueden dividirse por el número primo 271?

$$\frac{6504}{11111} = \text{(dividiendo por 271)}\ \frac{24}{41}$$

Y aun suponiendo que los trámites aludidos fuesen largos (que no lo son), siempre resultaría en su abono el ser fácilmente practicables, mientras que la simplificación común casi nunca lo es dentro de los límites exigibles á la generalidad de los calculadores.

(1) Y aun las primarias también.

	99999	56097	(1
1)	43902	12195	(3
1)	7317	4878	(1
2)	2439	....	

$\frac{99999}{2439} = 41$ $\frac{56097}{2439} = 23$

Luego

$$0{,}56097\ldots = \frac{23}{41}$$

¿Cuál es la generatriz de 0,53658...?

	99999	53658	(1
1)	46341	7317	(6
3)	2439	....	

$\frac{99999}{2439} = 41$ $\frac{53658}{2439} = 22$

Luego

$$0{,}53658\ldots = \frac{22}{41}$$

¿Cuál es la generatriz de 0,615384...?

	999999	615384	(1
1)	384615	230769	(1
2)	153846	76923	

$\frac{999999}{76923} = 13$ $\frac{615384}{76923} = 8$

Luego

$$0{,}615384\ldots = \frac{8}{13}$$

¿Cuál es la generatriz de 0,129032258064516...?

	999999999999999	129032258064516	(7
1)	96774193548387	32258064516129	(3
	....		

$\frac{999\ldots}{32\ldots} = 31$ $\frac{129\ldots}{32\ldots} = 4$

Luego

$$0{,}129032258064516\ldots = \frac{4}{31} \quad (1)$$

(1) Quien dude de la eficacia y brevedad de este sistema de simplificación, trate de simplificar esta fracción decimal por los medios usuales de los factores primos.

¿Cuál es la generatriz de 0,45...? $= \frac{5}{11}$ (1).

	99	45 (2
5)	9	....

$\frac{99}{9} = 11$ $\frac{45}{9} = 5$

¿Cuál es la generatriz de 0,243...? $= \frac{9}{37}$ (1)

	999	243 (4
9)	27	...

$\frac{999}{27} = 37$ $\frac{243}{27} = 9$

¿Cuál es la generatriz de 0,307692...? $= \frac{4}{13}$ (1)

	999999	307692 (3
4)	76923	......

$\frac{999999}{76923} = 13$ $\frac{307692}{76923} = 4$

¿Cuál es la generatriz de 0,19512...? $= \frac{8}{41}$ (1)

	99999	19512 (5
8)	2439	.....

$\frac{99999}{2439} = 41$ $\frac{15512}{2439} = 8$

¿Cuál es la generatriz de 0,161290322580645...? $= \frac{5}{31}$ (1)

	999999999999999	161290322580645 (6
5)	32258064516129	....

$\frac{999...}{32...} = 31$ $\frac{161...}{32...} = 5$

---

(1) Naturalmente, la operación se ha hecho antes de encontrar esta solución.

CASO PARTICULAR

Supongamos la transformación en decimal de un quebrado impropio que carezca en el denominador de los factores 2 y 5.

$$\frac{8}{7} = \begin{array}{r|l} 8 & 7 \\ \cline{2-2} 10 & 1{,}142857\ldots \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1\ldots & \end{array}$$

El cuociente tiene una parte entera $= 1$; y, además, otra parte decimal que es el período $= 0{,}142857\ldots$ (ya de nosotros muy conocido).

Claro es que no hay razón para ejecutar así la operación, siendo tan natural efectuarla de este otro modo:

$$\frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7}$$

$$1 + \frac{1}{7} = \left\{ \begin{array}{l} +\ 1 \\ +\ \dfrac{1}{7} = \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}142857\ldots \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1\ldots & \end{array} \end{array} \right.$$

Cuando, pues, el quebrado sea impropio, deberá, ante todo, reducírsele á número mixto, y luego transformarse en decimal sólo la parte fraccionaria.

También es natural que, si se nos da una fracción decimal precedida de una parte entera, se transforme en su generatriz únicamente la parte decimal; y, hallada, se la haga preceder de su entero.

$$1{,}142857 = 1 + \left(\begin{array}{r|l} 999999 & 142857 \\ \ldots\ldots & \cline{2-2} & \frac{7}{1} \end{array} = 1 + \frac{1}{7} \right) = \frac{8}{7}$$

Y esto con tanta más razón cuanto que la parte entera puede constar de gran número de cifras que, incluídas in-necesariamente en la transformación, habrán de embarazar los cálculos sin provecho de ninguna clase.

Pero demos que se quiera encontrar directamente el quebrado impropio generador de la fracción decimal dada, compuesta de entero y período, ¿cómo procede efectuar la operación?

Hallar el número generador de 1,142857...

Quítese la coma, lo cual equivale á indicar la suma siguiente:

$$\frac{1142857}{999999}=\frac{1000000+142857}{999999}$$

El sumando 142857 es (según todo lo anteriormente demostrado) un submúltiplo exacto del grupo de los seis nueves, ó sea del denominador 999999; pero el otro sumando 1000000 no lo es, pues acaba en cero, y á todo guarismo acabado en cero, si es una potencia del 10, le sobra un 1 para ser igual á un grupo de tantos nueves como ceros haya en la potencia.

Para que la división sea exacta, es preciso, pues, restar un 1 del sumando 1000000; y, efectuada la resta, tendremos:

$$\frac{(1000000-1)+142857}{999999}=\frac{999999+142857}{999999}=\frac{1142856}{999999}$$

O bien

$$=\frac{(1000000+142857)-1}{999999}=\frac{1142857-1}{999999}$$

$$=\frac{1142856}{999999}=\left|\begin{array}{l}\text{si se parten ambos}\\ \text{términos por 142857}\end{array}\right\}\frac{8}{7},$$

serie de operaciones que ha dado directamente el quebrado impropio generador $\frac{8}{7}$.

De modo que el cálculo ha consistido:

1.° En poner por numerador, sin la coma, toda la expresión decimal constituída por el entero y el período;

2.° En restar de tal expresión la parte entera; (1)

3.° Y en partir la diferencia resultante por un grupo de tantos nueves como decimales tenía la expresión compuesta de entero y quebrado.

---

(1) Al agregarse la parte entera seguida de ceros se agrega más de lo necesario, y, por tanto, hay que rebajar el exceso.

¿Cuál es la generatriz de 1,076923...?

$$\frac{1076923-1}{999999}=\frac{1076922}{999999}=\left\{\begin{array}{l}\text{si se parten ambos}\\ \text{términos por 76923}\end{array}\right\}\frac{14}{13}$$

¿Cuál es la generatriz de 1,027...?

$$\frac{1027-1}{999}=\frac{1026}{999}=\left\{\begin{array}{l}\text{si se parten ambos}\\ \text{términos por 27}\end{array}\right\}\frac{38}{37}$$

El método es general, sea la que fuere la parte entera.

Hallar el número compuesto de entero y quebrado generador de 2,285714...

Quítese la coma, y tendremos

$$\frac{2000000+285714}{999999}$$

Al sumando 2000000 (como doble que es de 1000000) le sobran 2 para ser divisible por el correspondiente grupo de nueves; y, á fin de que lo sea, hay que restarle 2; y tendremos:

$$\frac{(2000000-2)+285714}{999999}=\frac{199998+285714}{999999}=\frac{2285712}{999999}$$

O bien

$$\frac{2285714-2}{999999}=\frac{2285712}{999999}=\left\{\begin{array}{l}\text{partiendo ambos tér-}\\ \text{minos por 142857}\end{array}\right\}\frac{16}{7}$$

Hallar el quebrado impropio generador de 3,07317...

Quitada la coma, tendremos

$$\frac{300000+7317}{99999}$$

El sumando 7317 es submúltiplo exacto del grupo de nueves del denominador; pero el otro sumando 300000 no lo es, si no se le restan tres unidades, como triplo que es de 100000.

Luego

$$\frac{307317-3}{99999}=\left\{\begin{array}{l}\text{partiendo ambos tér-}\\ \text{minos por 2439}\end{array}\right\}\frac{126}{41}$$

¿Cuál es la generatriz de 67,02439...?

$$\frac{6702439-67}{99999}=\frac{6702372}{99999}$$

No ha de olvidarse nunca que el 67 (ó sea la parte entera) no se rebaja de la decimal 0,2439, sino del otro sumando

6700000. Para la práctica es indiferente restarla del un sumando ó del otro, pues los resultados son idénticos; pero para la teoría es capital la distinción.

$$\frac{6700000 - 67 + 2439}{99999} = \frac{6699933 + 2439}{99999} = \frac{6702372}{99999} = \frac{2748}{41}\ (*) = 67\,\frac{1}{41}$$

¿Cuál es el quebrado impropio generador de 60604,41463...?

$$\frac{6060441463 - 60604}{99999}\ (**) = \frac{6060380859}{99999}$$

$$\begin{array}{rr|l}
 & 6060380859 & 99999\ (60604 \\
\hline
 & 604408 & \\
 & 441459 & \\
2) & 41463 & 17073\ (2 \\
\hline
2) & 7317 & 2439\ (3 \\
\hline
 & \cdots & \\
\end{array}
\qquad \frac{99999}{2439} = 41$$

$$\frac{6060380859}{2439} = 2484781 \quad \begin{array}{r|l}
11823 & \\
20678 & \\
11660 & \\
19048 & \\
19755 & \\
2439 & \\
\cdots & \\
\end{array}$$

Luego

$$60604{,}41463\ldots = \frac{2484781}{41}$$

$$= 60604\,\frac{17}{41}$$

$$\begin{array}{r|l}
170 & 41 \\
\cline{2-2}
60 & \\
190 & 0{,}41463 \\
260 & \\
140 & \\
17\ldots & \\
\end{array}$$

(*) Hay que partir ambos términos por el máximo común divisor 2439

$$\begin{array}{rr|l}
 & 6702372 & 99999\ (67 \\
\cline{3-3}
 & 70243 & \\
41) & 1439 & 2439 \\
\end{array}$$

(**) No se olvide que la parte entera no se rebaja del sumando decimal 41463, sino del otro sumando entero 6060400000. Los resultados numéricos son iguales; pero la distinción teórica es de esencia.

APÉNDICE.

SÍNTESIS Ó DEMOSTRACIÓN GENERAL.

Todas las propiedades de las fracciones periódicas puras se demuestran de un modo general por medio del cálculo siguiente:

Sea $n, a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d...$ un número decimal periódico puro, en el cual n expresa la parte entera (que puede ser cero) y $a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d...$ la serie continua é inacabable de períodos $a\,b\,c\,d...$

La fracción generatriz será

$$\text{Generatriz} = n,\ a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d...$$

Multipliquemos ambos miembros de esta ecuación por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el período, y nos resultará la ecuación

$$10000 \text{ veces la generatriz} = n\,a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d...$$

Restemos de esta ecuación la primera, como sigue:

$$\begin{array}{rl} 10000 \times \text{generatriz} = & n\,a\,b\,c\,d,\ a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d... \\ -\quad \text{generatriz} = & -\quad n,\ a\,b\,c\,d\;\;a\,b\,c\,d... \\ \hline 9999\quad \text{generatriz} = & n\,a\,b\,c\,d - n \qquad (1) \end{array}$$

De donde saldrá:

$$\text{Generatriz} = \frac{n\,a\,b\,c\,d - n}{9999}$$

Y, si n es cero,

$$\text{Generatriz} = \frac{a\,b\,c\,d}{9999} = \frac{\text{Período}}{\text{Grupo de nueves en número igual á las cifras del período.}} \qquad (2)$$

(1) Los períodos del minuendo se destruyen con los del sustraendo.

(2) Es lástima que esta ingeniosa demostración (que puede estudiarse en las buenas Aritméticas) no haga ver la estructura íntima de las operaciones. Á nadie es lícito rechazarla, so pena de recusar la dialéctica matemática; y, sin embargo, no satisface á quien desea el PLUS ULTRA que da razón de los procedimientos. ¿Por qué se resta una ecuación de otra? ¿Por qué la parte entera se ha de rebajar de la suma formada por el entero y el decimal? ¿Cuál de los dos sumandos hace de minuendo en esa sustracción? ¿Y por qué se ha de proceder de tal manera para que resulten los grupos de los nueves? Preguntas son éstas que dejan perplejo al buen alumno; y, lo que es peor, á buen número de profesores entendidos.

Luego, en general, para hallar la generatriz de una fracción periódica pura,

1.° Se pone por numerador la parte entera, si la hay, seguida del período, haciendo caso omiso de la coma;

2.° Se resta de esa expresión la parte entera;

3.° Y se pone por denominador de la diferencia un grupo de tantos nueves como cifras tenga el período.

Si no hay parte entera (ó si se la quiere dejar aparte, que es lo común y lo más sencillo), (1)

1.° Se pone por numerador el período;

2.° Y por denominador el grupo de tantos nueves como cifras decimales haya en el período.

(1) Compárese lo complicado de la operación última (pág. 163) con la sencillez de la siguiente:

¿Cuál es el quebrado impropio generador de 60604,41463...?

Calculemos sólo la generatriz de la parte decimal $\frac{41463}{99999}$

	99999	41463	(2
2)	17073	7317	(2
	2439	....	

Partamos ahora por 2439 los dos términos del quebrado, y tendremos

$$\frac{41463 \div 2439 = 17}{99999 \div 2439 = 41}$$

De donde saldrá que el número mixto buscado es

$$60604 + \frac{17}{41}$$

Y, si se quiere reducir la parte entera á quebrado, resultará el quebrado impropio

$$\frac{2484781}{41}$$

LECCIÓN VIII

Transformación de las fracciones decimales mixtas en fracciones comunes equivalentes.

Queda por estudiar el caso de haber en el denominador de la generatriz factores primos con 10, al mismo tiempo que alguno ó los dos de los no primos con 10, 2 y 5.

La generatriz primaria de una decimal periódica mixta tiene en su denominador, además de uno ó más factores primos con 10, alguno de los factores de 10, ó los dos.

$$\frac{1}{3 \times 2^5} = \frac{1}{3 \times 32} = \frac{1}{96} = \begin{array}{r|l} 100 & 96 \\ \cline{2-2} 400 & 0{,}0104\underbrace{1666\ldots}_{\text{periodo}} \\ 160 & \\ 640 & \\ 640 & \\ 64\ldots & \end{array}$$

$$\frac{1}{3 \times 5^5} = \frac{1}{3 \times 3125} = \frac{1}{9375} = \begin{array}{r|l} 10000 & 9375 \\ \cline{2-2} 62500 & 0{,}000106\underbrace{66\ldots}_{\text{periodo}} \\ 62500 & \\ 62500 & \\ 6250\ldots & \end{array}$$

$$\frac{1}{3 \times 2^5 \times 5^3} = \frac{1}{3 \times 32 \times 125} = \frac{1}{12000} = \begin{array}{r|l} 100000 & 12000 \\ \cline{2-2} 40000 & 0{,}0000833\underbrace{3\ldots}_{\text{Periodo}} \\ 40000 & \\ 40000 & \\ 4000\ldots & \end{array}$$

$$\frac{1}{\times 7 \times 2^6 \times 5^3} = \frac{1}{3 \times 7 \times 32 \times 125} = \frac{1}{84000} = \begin{array}{r|l} 100000 & 84000 \\ \cline{2-2} 160000 & 0{,}00001\underbrace{190476}_{\text{periodo}}\ldots \\ 760000 & \\ 400000 & \\ 640000 & \\ 520000 & \\ 16000\ldots & \end{array}$$

Sabemos que las fracciones comunes que tienen en el denominador el 2, ó el 5, ó el 2 y el 5 conjuntamente, elevados á cualesquiera potencias, son transformables en decimales exactas, por ser la parte decimal el producto del numerador de la generatriz por 5, ó una potencia del 5, si en el denominador prepondera el 2; ó por 2, ó una potencia del 2, si en el denominador prepondera el 5.

El producto, por tanto, resulta siempre un número entero por ser siempre producto de 2 números enteros.

La transformación tiene que ser constantemente exacta.

Sabemos también que, por lo contrario, las fracciones comunes que no tienen en el denominador ni el 2 ni el 5, nunca pueden ser exactamente transformables, porque (al agregarse ceros á los restos sucesivos) sólo entran en el numerador los factores 2 y 5, ninguno de los cuales es divisible por los factores primos con ellos, existentes en el denominador de la generatriz. No pueden, pues, ser exactas, ni por más ceros que se agreguen á los residuos parciales, cabrá jamás encontrar término ni fin á la transformación. Pero tan inacabable serie de cifras tiene que estar dividida en períodos iguales; porque el numerador, seguido del cero ó ceros correspondientes, dividido por el denominador, ha de dejar necesariamente un resto. Si á este resto se agrega otro cero y el producto se divide por el mismo denominador, volverá á tenerse otro resto... y así sucesivamente. Pero, como los restos han de ser siempre menores que el denominador, resultará una de dos cosas: ó que todos los restos posibles aparecen, ó que, antes de aparecer todos, se presenta la cifra que inició la operación. Si la cifra iniciadora de la operación se presenta antes, entonces habrán de repetirse las del cuociente y los restos anteriores sin término ni fin en períodos sucesivos. Y, si la cifra iniciadora no se presenta hasta que hayan aparecido todos los restos posibles, sucederá lo mismo que antes, sin otra diferencia que la de que el período tendrá entonces tantas cifras menos una, como unos haya en el denominador de la fracción común.

Ahora bien; cabe otra tercera combinación, que es la que estamos estudiando. Cuando la generatriz tenga en su denominador conjuntamente factores del 10 y factores primos con el 10, la expresión decimal correspondiente participará de las propiedades acabadas de exponer. No será exacta, por haber en el denominador de la generatriz factores primos con el 10; ni tampoco periódica pura, por haber en el denominador factores del 10. Resultará, pues, mixta. Una parte no será periódica por causa de los factores 2 y 5, y otra lo será por causa de los factores diferentes. La parte no periódica tendrá tantas cifras como la mayor potencia del 2, ó bien del 5, existentes en el denominador de la generatriz; y la periódica resultará con las mismas cifras que, á estar solo, requeriría el factor primo con el 10; ó, habiendo más de uno de estos factores primos con el 10, el período tendrá tantas cifras como pediría el factor exigente de más restos.

Así, en la transformación de la generatriz primaria

$$\frac{1}{12000} = \frac{1}{3 \times 2^5 \times 5^3} = 0{,}000083333\ldots$$

la parte no periódica 00008 tiene cinco cifras, por ser igual á 5 el mayor exponente de los factores del 10 existente en el denominador 12000, y el período, que es 3, tiene una sola cifra, porque la transformación del quebrado $\frac{1}{3}$ no exigiría más, á estar solo; $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$

$$\frac{1}{168} = \frac{1}{3 \times 7 \times 2^3} = 0{,}005\underbrace{952380}_{\text{período}}952380\ldots$$

Aquí la parte no periódica 005 tiene tres cifras por ser 3 el exponente de la potencia del 2; y el período es de seis cifras, porque seis cifras exigiría á estar solo el quebrado $\frac{1}{7} = 0{,}142857\ldots$

El denominador, pues, de toda generatriz productora de una fracción decimal mixta, es un producto formado, de una parte, por una potencia del 10 igual al mayor exponente del 2, ó bien del 5, que hubiere en dicho denominador de la generatriz; y, de otra parte, por una expresión compuesta de tantos nueves como fueren necesarios para obtener un múltiplo exacto del período.

$$\frac{1}{28000} = \frac{1}{(2^5 \times 5^3) \times 7} = \frac{1}{4000 \times 7}$$

Supongamos por un momento que no existe el 7 (en lo que cometemos á sabiendas un error), y transformemos en decimal exacta el quebrado

$$\frac{1}{4000} = \begin{array}{r|l} 10000 & 4000 \\ \cline{2-2} 20000 & \\ \ldots\ldots & 0{,}00025 \end{array}$$

Obtenida la decimal exacta $0{,}00025 = \frac{25}{100000}$, fuerza es corregir el error cometido al suprimir el 7; porque con esa supresión hicimos siete veces mayor, de lo que realmente es, al denominador $\frac{1}{(2^5 \times 5^5) \times 7}$.

Hay, pues, que hacer ahora el $\frac{25}{100000}$ siete veces menor.

Partamos, pues, por 7 el numerador 25, con lo que tendremos:

$$\frac{\frac{25}{7}}{100000} = \frac{25 \div 7}{100000}$$

Transformemos en decimal el numerador

$$\frac{25}{7} = \begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \cline{2-2} 40 & \\ 50 & 3{,}\underbrace{571428}_{\text{Período}}\ldots \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 4\ldots & \end{array} = \frac{3571428 - 3}{999999}$$

Sustituyamos la nueva fracción decimal mixta en el quebrado

$$\frac{\frac{25}{7}}{100000} = \frac{25 \div 7}{100000}$$

Y tendremos:

$$\frac{\frac{3571428 - 3}{999999}}{100000} = \frac{3571425}{999999 \times 100000} = \frac{3571425}{99999900000}$$

igual (si se dividen ambos términos por su factor común, que es el numerador) al quebrado propuesto $\frac{1}{28000}$.

Sea ahora el quebrado

$$\frac{1}{432} = \frac{1}{2^4 \times 3^3} = \frac{1}{16 \times 27}$$

Suprimamos por un momento el 27, tercera potencia del factor 3 del denominador de la generatriz, supresión que equivale á hacer 27 veces $>$ de lo que es al quebrado $\frac{1}{432}$

Tendremos, pues,

$$\frac{1}{16} = \begin{array}{r|l} 100 & 16 \\ \cline{2-2} 40 & \\ 80 & 0{,}0625 \text{ (exactamente)} = \frac{625}{10000} \\ .. & \end{array}$$

Ahora; el error quedará corregido haciendo veinte y siete veces menor de lo que es el numerador del quebrado $\frac{625}{10000}$.

Y tendremos:

$$\frac{\frac{625}{27}}{10000} = \begin{array}{r|l} 625 & 27 \\ \cline{2-2} 85 & \\ 40 & 23{,}148... = \frac{23148-23}{999} \\ 130 & \\ 220 & \\ 4... & \end{array}$$

Sustituyamos:

$$\frac{\frac{625}{27}}{10000} = \frac{\frac{23148-23}{999}}{10000} = \frac{23125}{999 \times 10000} = \frac{23125}{9990000}$$

Y, dividiendo por el numerador, factor común, ambos términos de este quebrado, nos resultará el propuesto $\frac{1}{432}$

$$\frac{1}{108} = \frac{1}{2^2 \times 3^3} = \frac{1}{4 \times 27}$$

Suprimamos el 27, cometiendo el error de hacer el quebrado 27 veces mayor.

$$\frac{1}{4} = \begin{array}{r|l} 100 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & \\ .. & 0{,}25 \end{array} = 0{,}25 = \frac{25}{100}$$

Para corregir el error, dividamos el 25 por 27, y tendremos:

$$\frac{1}{103} = \frac{\frac{25}{27}}{100}$$

Transformemos en decimal el nuevo quebrado que hace de numerador, ó sea el $\frac{25}{27}$;

$$\begin{array}{r|l} 250 & 27 \\ \cline{2-2} 70 & \\ 160 & 0{,}925... \\ 25 .. & \end{array}$$

Sustituyamos:

$$\frac{\frac{25}{27}}{100} = \frac{\frac{925}{999}}{100} = \frac{925}{999 \times 100} = \frac{925}{99900}$$

Y, partiendo ambos términos por su factor común, que es el numerador 925, nos resultará el quebrado propuesto $\frac{1}{108}$.

La operación de transformar en decimal una generatriz en cuyo denominador haya factores del 10 juntamente con factores primos del 10, puede dividirse en tres partes:

1.ª Se prescinde ante todo de los factores primos con 10, y se halla la fracción decimal exacta correspondiente á los factores del 10;

2.ª Se parte luego el numerador de esta fracción decimal exacta por los factores primos con 10 de que se hizo caso omiso, y se transforma en decimal el quebrado-resultante en el numerador;

3.ª Y, hechas las debidas sustituciones y simplificaciones, se obtiene un quebrado cuyo denominador resulta compuesto por un grupo de nueves seguido de otro de ceros: el grupo de los nueves contiene tantos nueves como cifras hay en el período decimal del numerador, y el grupo de los ceros es igual á la mayor potencia del 2, ó del 5, en la fracción propuesta.

Pero en la práctica no se procede así; pues, en vez de las dos operaciones sucesivas acabadas de mencionar, se hace una sola, que desde luego da por resultado la fracción decimal mixta que se busca. El procedimiento es entonces el mismo utilizado para el cálculo de las fracciones periódicas generadas por un quebrado impropio. Sólo hay la diferencia de que el denominador aparece en las decimales mixtas formado por un grupo de tantos nueves como cifras tiene la parte periódica, seguido de otro grupo de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

$$\frac{1}{28000} = \begin{array}{r|l} 100000 & 28000 \\ \hline 160000 & \\ 200000 & 0,0000\underbrace{3571428}_{\text{período}}\ldots \\ 40000 & \\ 120000 & \\ 80000 & \\ 240000 & \\ 16000\ldots & \end{array} = \frac{3571428-3}{999999 \times 100000} = \frac{3571425}{99999900000}$$

$$\frac{1}{432} = \begin{array}{r|l} 1000 & 432 \\ \hline 1360 & \\ 640 & 0,002\underbrace{3148}_{\text{período}}\ldots \\ 2080 & \\ 3520 & \\ ..64.. & \end{array} = \frac{23148-23}{999 \times 10000} = \frac{23125}{9990000}$$

$$\frac{1}{108} = \frac{1}{2^2 \times 3^3} = \begin{array}{r|l} 1000 & 108 \\ \cline{2-2} 280 & \\ 640 & 0{,}00\underbrace{925}_{\text{período}}\ldots \\ 100\ldots & \end{array} = \frac{925}{99900}$$

Las generatrices anteriores

$$\frac{1}{2800},\ \frac{1}{432},\ \frac{1}{108}$$

son todas primarias, por tener á la unidad como numerador, y las decimales mixtas que les corresponden son primarias también.

Las demás generatrices de igual denominador son múltiplos de las primarias respectivas; y precisamente cada numerador es el multiplicador de la primaria. Así

$$\frac{2}{2800} = \frac{1}{2800} \times 2; \quad \frac{3}{2800} = \frac{1}{2800} \times 3; \quad \frac{1}{2800} = \frac{1}{2800} \times 108; \text{ etc.}$$

$$\frac{10}{432} = \frac{1}{432} \times 10; \quad \frac{11}{432} = \frac{1}{432} \times 11; \quad \frac{401}{432} = \frac{1}{432} \times 401; \text{ etc.}$$

$$\frac{100}{108} = \frac{1}{108} \times 100; \quad \frac{101}{108} = \frac{1}{108} \times 101; \quad \frac{102}{108} = \frac{1}{108} \times 102; \text{ etc.}$$

Por consiguiente, si se conocen las respectivas decimales mixtas primarias, se obtendrán las correspondientes á los quebrados anteriores multiplicando cada mixta primaria por el correlativo multiplicador, ó sea numerador.

Así,

$$\frac{2}{2800} = \frac{3571425\ldots}{9999990000} \times 2; \quad \frac{3}{2800} = \frac{3571425\ldots}{9999990000} \times 3;\ldots \quad \frac{108}{2800} = \frac{3571425\ldots}{9999990000} \times 108; \text{ etc.}$$

$$\frac{10}{432} = \frac{23125\ldots}{9990000} \times 10;\ldots \text{ etc.}$$

$$\frac{4321}{108} \text{ (quebrado impropio)} = \frac{925\ldots}{99900} \times 4321;\ldots \text{ etc., etc.}$$

Pero es de gran importancia hacer la advertencia siguiente, análoga á la hecha con motivo de las periódicas puras.

El producto de una decimal mixta primaria multiplicada por un número cualquiera, no se obtiene con exactitud tomando como multiplicando un período solamente. Cuando menos, es preciso tomar dos para conocer el período del producto.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{28000} = 0{,}00003\underbrace{571428}_{\text{período}}\ldots$$

Si con estos datos quisiéramos hallar la fracción decimal mixta correspondiente á $\frac{1721}{28000}$, no hallaríamos el producto buscado contentándonos con multiplicar 0,00003571428 por 1721; pues, por defecto, el resultado distaría bastante del verdadero. Lo cual es muy natural. Siendo el multiplicando menor de lo debido, también ha de resultarlo el producto. Es preciso, pues, tomar cuando menos dos períodos de la fracción decimal dada, para obtener exactamente el primer período del producto. Por tanto, hay que multiplicar 0,00003571428571428 por 1721. Compárense los siguientes resultados:

$$\begin{array}{r|l}
172100 & 28000 \\ \cline{2-2}
41000 & \\
130000 & 0{,}06146\underbrace{428571}_{\text{período}}\ldots \\
180000 & \\
120000 & \\
80000 & \\
240000 & \\
160000 & \\
200000 & \\
40000 & \\
12000.\ . &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
0{,}00003571428 \\
\times \quad 1721 \\ \hline
3571428 \\
7142856 \\
24999996 \\
3571428 \\ \hline
0{,}06146\underbrace{427588}\ldots
\end{array}$$

producto inexacto, por defecto de 983 cienmilmillonésimas, cantidad ciertamente muy pequeña, pero bastante para no dejar ver el nuevo período del producto.

$$\begin{array}{r}
0{,}00003571428571428 \\
1721 \\ \hline
3571428571428 \\
7142857142856 \\
24999999999996 \\
3571428571428 \\ \hline
0{,}06146\underbrace{428571}_{\substack{\text{nuevo}\\\text{período}\\\text{del}\\\text{producto}}}427588\ldots
\end{array}$$

producto que da con exactitud el primer período, y con inexactitud por defecto el segundo, el cual se hallaría exactamente agregando al multiplicando otro 571428...

Siendo toda decimal mixta múltiplo de una primaria, claro es que, reducida á la forma

$$\frac{n}{\text{grupo de nueves} \times \text{grupo de ceros}},$$

el numerador será una suma de m sumandos iguales, y el denominador otra suma de los mismos sumandos en número n. La simplificación consistirá en partir ambos términos de la fracción decimal mixta por el sumando común, y la dificultad toda de la simplificación estará únicamente en descubrir ese factor común por el método del máximo común divisor.

Luego toda fracción decimal en la forma $\frac{n}{99...00..}$ tiene máximo común divisor. En efecto:

Toda generatriz primaria de una fracción decimal periódica mixta tiene la forma

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^m \times 5^n \times \text{primo con } 10}$$

donde puede faltar el 2, ó el 5, pero no los dos á la vez; y donde puede existir más de un primo con el 10.

Transformada la generatriz primaria, resulta

$$\frac{1}{n} = \frac{p\,q\,r\,a\,b\,c\,d - p\,q\,r}{9999000}$$

Y, por consiguiente, para que subsista la igualdad, debe ser el numerador $p\,q\,r\,a\,b\,c\,d - p\,q\,r$ divisor exacto del grupo de nueves y de ceros que constituyen el denominador.

Si la generatriz no fuese primaria sería

$$\frac{a}{n} = \frac{a\,(p\,q\,r\,a\,b\,c\,d - p\,q\,r)}{9999000}$$

donde el factor $(p\,q\,r\,a\,b\,c\,d - p\,q\,r)$ es divisor, como antes, del denominador, y puede ser aislado por el método del máximo común divisor.

¿Cuál es la generatriz de

$$0{,}06146\underbrace{428571}_{\text{período}}\ldots?$$

Se reduce la decimal mixta á la forma $\frac{n}{\text{grupo de nueves seguido de ceros}}$

$$\frac{6146428571 - 6146}{9999990000} = \frac{6146422425}{99999900000}$$

Se halla el factor común por el método del máximo común divisor

	99999900000 38535675750	6146422425	(16
5)	1657141200	1174998825	(1
2)	482142375	210714075	(2
5)	060714225	28571400	(2
8)	3571425	....	

Y se parten ahora dividendo y divisor por ese factor común.

99999900000 28571400	3571425 28000	6146422425 25749974 7499992 3571425	3571425 1721

Luego la fracción común buscada es $\frac{1721}{2800}$

¿Cuál es la generatriz de la fracción decimal mixta

$$0{,}9976\underbrace{851}_{\text{período}}\ldots$$

Pongamos la decimal en la forma $\frac{n}{99\ldots00\ldots}$

$$\frac{9976851 - 9976}{9990000} = \frac{9966875}{9990000}$$

Hallemos por el máximo común divisor el sumando repetido en numerador y denominador

	9990000	9966875	(1
431)	23125	71687 23125	

Y dividamos dividendo y divisor por el común factor 23125.

9990000 74000 046250	23125 432	9966875 71687 23125	23125 431

Luego 0,9976 *851* $\frac{431}{432}$

¿Cuál es la generatriz de

$$31,\underbrace{54629}_{\text{período}}\ldots \quad (1)$$

Pongamos esta fracción decimal mixta en la forma

$$\frac{n}{99\ldots\,00\ldots}$$

$$\frac{3154629-3154}{99900}=\frac{3151475}{99900}$$

Hallemos por medio del máximo común divisor el sumando repetido en ambos términos:

	3151475 154475	99900	(31
1)	54575	45325	(1
4)	9250	8325	(1
9)	925	....	

Dividamos dividendo y divisor por ese máximo común di-

(1) La parte periódica en las decimales mixtas es divisible por 9 cuando el 3 ó el 9 no están entre los factores de la generatriz.

$\frac{1}{74}=\frac{1}{2\times 37}=0{,}0135135\ldots$ La parte periódica es divisible por 9

$\frac{1}{88}=\frac{1}{2^3\times 11}=0{,}0113636\ldots$ La parte periódica es divisible por 9.

$\frac{1}{110}=\frac{1}{2\times 5\times 11}=0{,}00909\ldots$ La parte periódica es divisible por 9.

$\frac{1}{148}=\frac{1}{2^2\times 37}=0{,}00675675\ldots$ La parte periódica es divisible por 9.

$\frac{1}{24}=\frac{1}{3\times 8}=0{,}041666\ldots$ La parte periódica no es divisible por 9, porque el denominador 24 lo es por 3.

$\frac{1}{72}=\frac{1}{8\times 9}=0{,}013888\ldots$ La parte periódica no es divisible por 9, por serlo el denominador 72.

$\frac{1}{54}=\frac{1}{9\times 3\times 2}=0{,}0185185$ No divisible por 9 por serlo el denominador 54.

$\frac{1}{162}=\frac{1}{9\times 9\times 2}=0{,}0061728395$ No divisible por 9 por serlo el denominador 162.

visor, ó sea por el sumando integrante de numerador y denominador

3151475 3764 6475	925 3407	99900 7400	925 108

Luego la generatriz de la fracción decimal mixta 31,54621 es el quebrado impropio

$$\frac{3407}{108} = 31\,\frac{59}{108}$$

APÉNDICE.

SÍNTESIS Ó DEMOSTRACIÓN GENERAL.

Todas las propiedades de las fracciones decimales mixtas se demuestran por medio del procedimiento siguiente:

Sea $n, p\,q\,r\;a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\ldots$ una fracción decimal mixta cuya conversión se desea en la equivalente generatriz.

En esa expresión, n representa el entero (que puede no existir); $p\,q\,r$ la parte no periódica, y $a\,b\,c\,d$ el período.

Y, naturalmente, tendremos

$$\text{Generatriz} = n, p\,q\,r\;a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\ldots$$

Multipliquemos primeramente los dos miembros de esta ecuación por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica (por 1000 en el caso actual):

$$1000 \times \text{generatriz} = n\,p\,q\,r, a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\ldots$$

Multipliquemos luego la misma ecuación por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tengan juntamente la parte no periódica y el período: en el caso presente por 10000000:

$$10000000 \times \text{generatriz} = n\,p\,q\,r\;a\,b\,c\,d, a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\;a\,b\,c\,d\ldots$$

Restemos de esta ecuación la anterior:

$$\begin{array}{rl} & 10000000 \times \text{generatriz} = n\,p\,q\,r\,a\,b\,c\,d, a\,b\,c\,d\ldots \\ - & 1000 \times \text{generatriz} = n\,p\,q\,r, a\,b\,c\,d\ldots \\ \hline = & 9999000 \times \text{generatriz} = n\,p\,q\,r\,a\,b\,c\,d - n\,p\,q\,r \end{array}$$

Y, despejando,

$$\text{generatriz} = \frac{n\,p\,q\,r\,a\,b\,c\,d - n\,p\,q\,r}{9999000.}$$

De donde sale la regla: para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica mixta se forma otra fracción

1.º Cuyo numerador es igual

$$\left\{\begin{array}{l} \quad \text{Al entero} \\ + \text{ La parte no periódica} \\ + \text{ El período} \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} \text{El entero} \\ \\ \text{Y la parte no periódica} \end{array}\right\}$$

2.º Y cuyo denominador es igual

$$\left\{\begin{array}{c} \text{A un grupo de tantos nueves} \\ \text{como cifras tiene el período.} \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{c} \text{Por un 1 seguido de tantos ceros co-} \\ \text{mo cifras tiene la parte no periódica} \end{array}\right\}$$

3.º Obtenida así la fracción ordinaria equivalente, se la reduce por medio del máximo común divisor á su más simple expresión; y esta expresión simplificada es la generatriz;

4.º Si no hay parte entera se procede en consecuencia, y entonces la fórmula es

$$\text{Generatriz} = \frac{p\,q\,r\,a\,b\,c\,d - p\,q\,r}{9999000}$$

LECCIÓN IX

Decimales tabulares.—Observaciones.

La facilidad de las operaciones fraccionarias cuando los quebrados aparecen en forma decimal, ha generalizado (hasta hacerlo hoy casi exclusivo en los cálculos aritméticos de alguna importancia) el uso de las fracciones decimales; y, como la transformación de las ordinarias en sus equivalentes es tan laboriosa, se han formado, para la conversión de unas en otras, TABLAS DE EQUIVALENCIAS, en que las generatrices primarias aparecen con sus correlativas decimales al lado (1).

El uso de estas TABLAS es hoy indispensable, además de muy cómodo; pues, aunque en ellas sólo están registrados los quebrados decimales correspondientes á las generatrices primarias, es muy fácil calcular, por medio de simples multiplicaciones, los correspondientes á cualesquiera otras generatrices de igual denominador.

Las menos de las veces es posible con entera exactitud transformar por medio de decimales el valor de cantidades fraccionarias apreciables siempre exactamente en quebrados comunes; pero, cuando la transformación exacta es inasequi-

(1) Regularmente en las tablas sólo hay los decimales correspondientes á las 999 fracciones primarias cuyos denominadores son 2 á 999; esto es

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ldots \ \frac{1}{993} \text{ y } \frac{1}{999}.$$

Pero hay tablas mucho más extensas.

ble, resulta dable en todo caso obtener por decimales un valor aproximado con un error más pequeño que cualquier cantidad dada. Tómese el número de cifras que nos plazca correspondientes á las fracciones periódicas, ya puras, ya mixtas; y donde quiera que nos detengamos siempre el resultado será erróneo por defecto en una unidad menor que la cifra decimal del período en qué paremos; pero sólo depende de la aproximación que pensemos dar al cálculo, el que nos detengamos en las millonésimas ó en las mil millonésimas, ó en las billonésimas, ó en las trillonésimas, ó en la cantidad que se desee, por pequeña que se exija.

¿Cuál es la fracción decimal correspondiente á la generatriz $\frac{29}{457}$?

Busquemos en las TABLAS (pág. 194) las cifras decimales de la generatriz primaria $\frac{1}{457}$: hallaremos 0,002188184; y, multiplicando estas cifras por 29, obtendremos las decimales correspondientes á la generatriz propuesta.

$$\frac{29}{457} = 0{,}002188184 \times 29 = 0{,}063457336$$

Según sabemos, las fracciones decimales son exactas ó aproximadas solamente.

Las exactas tienen que ser las menos, como que únicamente gozan de tan preciosa propiedad aquellas cuyas generatrices contienen en su denominador solamente los factores del 10; esto es, el 2 y el 5, ó el 2, ó el 5.

Forman, pues, las otras la inmensa mayoría de las fracciones decimales; y, por tanto, los cálculos hechos con ellas nunca resultan más que aproximados.

Los períodos de corto número de cifras decimales son muy raros. Ya los hemos visto de más de veinte cifras (el de la fracción $\frac{1}{29}$ tiene 28); y, si en los ejemplos de esta obra no se hubieran escogido, en gracia de la brevedad, los períodos fácilmente manejables, los habríamos encontrado hasta de cientos.

Claro es que los cálculos serían impracticables con tan embarazoso número de cifras; y por eso en las TABLAS todas las fracciones decimales aparecen por lo regular con solo nueve cifras decimales ó algunas pocas más. (1). El error con

(1) Hay, sin embargo, tablas hasta con 30 decimales.

nueve cifras es verdaderamente ya pequeño por ser $<$ que una diez mil millonésima; pero al fin el error existe, y, cuando se multiplica una fracción decimal por números considerables, aparece necesariamente. Ya nos consta que para hallar el período de un producto es preciso hacer uso de dos períodos primarios cuando menos; de modo que, no estando en las TABLAS completos, ni aun siquiera los primeros períodos cuando éstos pasan de nueve cifras, la inexactitud se agrava necesariamente.

Pero hay más: la novena cifra de las TABLAS (mejor dicho, la última, si hay más de nueve) no es la que corresponde al período, cuando á la verdadera sigue un número mayor que 5. Por ejemplo; el quebrado común $\frac{2}{3}$ tiene por expresión decimal 0,66666666666666...; pero, como en las TABLAS no cabe más que una expresión de nueve cifras, se prescinde (en el caso particular de que se trata) de todos los seis excedentes del número de cifras que cabe en cada columna, con lo que se comete un error por defecto; para compensar el cual hasta cierto punto, se comete otro por exceso, aumentando la última cifra en una unidad. (1).

(1) El aumento de la última cifra de los decimales tabulares se hace sentir con especialidad cuando se calculan los cuadrados y los cubos, porque entonces el error, por pequeño que sea, se amplifica enormemente. Por ejemplo: se da como número muy próximo á la $\sqrt{2}$ el decimal 1,4142136; pero si este quebrado impropio se multiplica por sí mismo, resulta un número mayor que 2. El exceso es de algo más de 1 diez millonésima, cantidad casi insignificante en este cálculo; pero que en otra operación donde hubiese un multiplicador muy alto no sería tal vez indiferente.

```
        1,4142136 (4
        1,4142136
       ----------
         84852816 (6
        42426408  (3
       14142136   (4
      28284272    (8
     56568544     (7
    14142136      (4
   56568544       (7
  14142136        (4
 ----------------
 2,00000010642496 (7
 ================
```

Así, en el cálculo anterior hay que prescindir, para subsecuentes operaciones, de la parte excedente 10642196 cienbillonésimas. Etc.

Y así, en vez de tabular

$$\frac{1}{6} = 0{,}66666\dot{6}666,$$

en lo que habría deficiencia, se tabula

$$\frac{1}{6} = 0{,}666666667$$

en lo que hay exceso. La deficiencia es de más de 6 diez mil millonésimas y la excedencia no llega á 4 diez mil millonésimas; de modo que, por importar menos el exceso que la falta, se prefiere aquél á ésta.

Así, pues, los decimales por sí propios son ya un motivo de inexactitud, y también lo son por causa de las TABLAS.

Por tantos motivos de error deben los resultados de las operaciones hechas con decimales tabulares examinarse con prudente criterio, y corregirse en consecuencia.

Pero este criterio de corrección no es dado á los principiantes; y, á veces, ni aun á los hombres muy versados en los cálculos.

Semejante dificultad de interpretación es ya grande cuando se trata de transformar una generatriz común en fracción decimal; pero se hace muchísimo mayor cuando se trata de calcular una generatriz desde las fracciones tabulares.

Por de pronto, ¿á qué clase de fracciones decimales corresponde la decimal de las TABLAS? ¿Es exacta? ¿Es periódica pura? ¿Es mixta?

Por ejemplo: Supongamos que se nos den, á estilo de las TABLAS, sólo nueve cifras decimales de una fracción 0,000037560, para calcular su generatriz. ¿Qué hacer? ¿Lo que se nos da pertenece á un período? ¿Es sólo la parte no periódica de una fracción mixta? ¿Hay también en esas nueve cifras algunas ya del período? ¿Dónde empieza éste?... Sólo teniendo todos los datos es como puede darse solución á la dificultad; y, sin embargo, no se nos suministran tales datos, que son éstos:

$$0{,}00003756009\,6\underbrace{15384}_{\text{período}}\ldots$$

correspondientes á la generatriz primaria

$$\frac{1}{26624} = \frac{1}{2^{11} \times 13}$$

Con efecto;

$$
\begin{array}{l|l}
100000 & 26624 \\ \cline{2-2}
\;\;201280 & 0{,}00003756009\underbrace{615384}_{\text{período}}\ldots \\
\;\;\;\;149120 & \\
\;\;\;\;\;\;160000 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;256000 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;163840 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40960 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;143360 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;102400 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;225280 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;122880 & \\
\;16384\ldots &
\end{array}
$$

¿Cómo sin tan precisos antecedentes es posible restar la parte no periódica del conjunto formado por ella misma con el período?

$$\frac{3756009615384 - 3756009}{999999 \times 00000000000} = \frac{3756005859375}{99999900000000000}$$

Sólo con estos números se puede proceder al cálculo del máximo común divisor.

$$
\begin{array}{l|l}
99999900000000000 & 3756005859375 \;(^{26624} \\ \cline{2-2}
24879782812500 & \\
\;\;23437476562500 & \\
\;\;\;\;9014414062500 & \\
\;\;\;\;15024023437500 & \\
\;\;\;\;\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

De donde saldría el dato $0{,}000037560\ldots = \frac{1}{26624}$.

Por suerte, pocas veces es necesario transformar en fracción ordinaria una decimal, operación siempre laboriosa, aun con todos los datos necesarios; al paso que es hasta cierto punto fácil la operación común y corriente de convertir una fracción común en decimal.

Las Tablas son, pues, de suma utilidad, especialmente tratándose de generatrices de pocos factores en el denominador; pero siempre requieren sumo tino para su acertado empleo.

Puede suceder que se den á sumar números decimales con quebrados comunes. Entonces se reducen los comunes á decimales; y, según el grado de aproximación que se desee, se repiten más ó menos los períodos.

$$\frac{1}{8}+3{,}142857+\frac{1}{3}+\frac{3}{22}$$

$$=0{,}125+3{,}142857...+0.333...+0{,}136...=\begin{array}{r} 0{,}125000000000 \\ +\ 3.142857142857 \\ +\ 0{,}333333333333 \\ +\ 0{,}136136136136 \\ \hline 3{,}737326612326 \\ \hline \end{array}$$

También pudieran transformarse los decimales en quebrados comunes, lo que daría resultados exactos, que no se obtienen con las decimales periódicas; pero la sencillez de las operaciones decimales hace dar la preferencia á la conversión de los quebrados comunes en fracciones decimales.

Si hay que restar promiscuamente quebrados comunes y fracciones decimales, se convierten aquéllos en éstas (si bien pudieran éstas ser transformadas en aquéllos).

$$28{,}142857-\frac{1}{3}=\left\{\begin{array}{r} 28{,}142857 \\ -\ \ 0{,}333333 \\ \hline =\ 27{,}809524 \\ \hline \end{array}\right.$$

$$28\frac{1}{3}-0{,}142857=\left\{\begin{array}{r} 28{,}333333 \\ -\ \ 0{,}142857 \\ \hline =\ 28{,}190476 \\ \hline \end{array}\right.$$

Si la conversión de los quebrados comunes no siempre conduce á un resto exacto, facilita en todo caso los medios de obtener cuanta aproximación sea apetecible.

Sabemos que para multiplicar una fracción decimal por otra, se hace la operación como si las comas no existiesen en multiplicando ni en multiplicador; y luego se separan de derecha á izquierda en el producto total tantas cifras como haya decimales en los dos factores.

$$\begin{array}{r} 6{,}142857 \\ 4{,}3 \\ \hline 18428571 \\ 24571228 \\ \hline 26{,}4140851 \end{array}$$

A veces no hay en el producto total cifras bastantes para separar la suma de las de los dos factores; y, en tal caso, se agregan á la izquierda del producto los ceros necesarios para que á la derecha de la coma aparezcan tantas cifras decimales como exija dicha suma.

$$\begin{array}{r} 0{,}000628 \\ \times\, 0{,}000625 \\ \hline 3140 \\ 1256 \\ 3768 \\ \hline =0{,}000000392500 \end{array}$$

Ahora bien: si hay que multiplicar decimales por fracciones comunes, las comunes se convierten en decimales (si bien pudiera hacerse lo contrario, á no ser por la conveniencia). Y, obtenida la conversión, se opera teniendo en cuenta las dos reglas anteriores.

$$\frac{1}{5} \times 0{,}6... = 0{,}20 \times 0{,}6... = \left\{ \begin{array}{r} 0{,}66 \\ \times\ 0{,}20 \\ \hline 0{,}1320 \end{array} \right.$$

Aquí, por criterio, y sabiéndose que si hubiera más cifras en el multiplicando (como puede y debe haberlas) el producto sería mayor, ha de ponerse que

$$0{,}66 \times 0{,}20 = 1333...$$

En efecto

$$0{,}6666666 \times 0{,}20 = 0{,}133333320;$$

y, por tanto, reducido este producto á solo cuatro cifras decimales, resulta

$$= 0{,}1333...$$

También puede multiplicarse directamente un quebrado común por una fracción decimal sin necesidad de reducir el uno á la especie de la otra.

Multiplíquese

$$0{,}142857 \times \frac{3}{4} = \frac{0{,}142857 \times 3}{4} = \frac{0{,}428571}{4} = 0{,}107142$$

Reducidas ambas fracciones á decimales, la aproximación sería mayor:

$$0{,}142857\ldots \times 0{,}75 = 0{,}10714275$$

Pero en ningún caso la aproximación sería tanta como efectuando realmente la transformación en decimales del producto natural de

$$\frac{1}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{28}$$

En efecto

$$\begin{array}{l|l} 30 & 28 \\ \cline{2-2} \ \ 200 & 0{,}10714285\ldots \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ 120 & \\ \ \ \ \ \ \ 80 & \\ \ \ \ \ \ \ 240 & \\ \ \ \ \ \ \ \ 160 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 & \end{array}$$

Y, sin embargo, aun este resultado peca por defecto, pues para la exactitud falta la serie indefinida de los demás períodos.

Si hay que dividir un decimal por un quebrado común, ó bien un quebrado común por un decimal, el quebrado se reduce por conveniencia á decimal (si bien pudiera hacerse lo contrario).

$$0{,}5 \div \frac{1}{3} = 0{,}5 \div 0{,}33333\ldots$$

$$\begin{array}{l|l} 50000 & 33333 \\ \cline{2-2} 16667 & 1, \end{array}$$

Aquí, por criterio, debe el residuo considerarse como = 166666, con lo cual tendremos

$$\begin{array}{r|l} 50000 & 33333 \\ \cline{2-2} 166666 & 1{,}5 \\ 00000 & \end{array}$$

Y, en efecto,

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1{,}50$$

Sea ahora

$$\frac{1}{2} \div 0{,}3333\ldots$$

Y, convertido en decimal el $\frac{1}{2}$, tendremos, como antes

$$50000 \;\Big|\; \frac{33333}{\quad} = 1{,}50$$

También puede partirse un decimal por un quebrado común, multiplicando el decimal por el quebrado invertido:

$$0{,}142857\ldots \div \frac{3}{4} = 0{,}142857\ldots \times \frac{4}{3} = \frac{0{,}571428\ldots}{3} = 0{,}190476\ldots$$

Este resultado peca por defecto, como también la reducción directa del cuociente de

$$\frac{1}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{21} = \begin{array}{r|l} 40 & 21 \\ 190 & \overline{0{,}190476\ldots} \\ 100 & \\ 160 & \\ 130 & \\ 4\ldots & \end{array}$$

Si ambas fracciones apareciesen en forma decimal, el resultado pecaría por exceso

$$\begin{array}{r|l} 0{,}142857\ldots & 0{,}75 \\ 678 & \overline{0{,}190476} \\ 357 & \\ 570 & \\ 450 & \\ 000 & \end{array}$$

Aquí el cuociente resulta exacto, pero es mayor de lo debido, porque el dividendo ha sido menor de lo que es en realidad. Pero, en vez del dividendo 14285700, póngase el verdadero 14285714... (tomando para final el 14 del principio del segundo período suprimido), y el cuociente aparecerá entonces con mayor aproximación:

$$\begin{array}{l|l} 0{,}14285714\ldots & 0{,}75 \\ \cline{2-2} \quad 678 & 0{,}19047618\ldots \\ \quad\ 357 & \\ \quad\quad 571 & \\ \quad\quad\ 464 & \\ \quad\quad\ 140\ldots & \\ \quad\quad\quad 650 & \end{array}$$

También se puede dividir un quebrado común por otro decimal, multiplicando el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como haya cifras decimales en el divisor, y partiendo el producto resultante por el producto del denominador del quebrado común multiplicado por el dato decimal:

$$\frac{3}{5} \div 0{,}75 = \frac{3}{5} \div \frac{75}{100} = \frac{3 \times 100}{5 \times 75} = \frac{300}{375} = 0{,}8$$

Por último:

El procedimiento empleado para convertir en decimales las generatrices

$$\frac{1}{n} = \begin{array}{l|l} 10 & n \\ \cline{2-2} \ a0 & \\ \ \ b0 & 0{,}pqrs \\ \quad c0 & \\ \quad\ d0 & \end{array}$$

ha de conducir necesariamente á fracciones de un número limitado de cifras, ó á fracciones de períodos sucesivos sin término ni fin (como ya sabemos).

Tienen limitado número de cifras las decimales exactas procedentes de quebrados comunes en cuyos denominadores sólo entran factores del 10.

Y no tienen límite de cifras las fracciones decimales generadas por quebrados en que entran factores primos con 10 (1).

No hay, pues, límite al número de períodos, porque cada uno de los restos a, b, c, d... tiene que ser menor que n; y, si salen todos los posibles, no bien reaparezca el iniciador, se repetirán las operaciones parciales precedentes, dando lugar á nuevos é inacabables períodos.

Las decimales, pues, procedentes de quebrados comunes, son ó exactas ó periódicas.

---

(1) Si entran factores primos con 10, además del 2 ó el 5, resultan las periódicas mixtas.

Por consiguiente, no proceden de fracciones ordinarias aquellas fracciones decimales inexactas pero no periódicas, cuyas cifras en número ilimitado no se repiten por grupos periódicos en el mismo orden continua é indefinidamente.

Luego toda fracción decimal inexacta y no periódica no corresponde á generatrices conmensurables.

Luego procede de las operaciones á que dan lugar los inconmensurables.

(Véase *Inconmensurables.*)

APÉNDICE

Se llama quebrado de quebrado al producto de dos quebrados.

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

$$0{,}75 \text{ de } 0{,}714285... = 0{,}75 \times 0{,}714285... = 0{,}55371375...$$

Toda potencia de un quebrado es igual á la potencia del mismo grado del numerador dividida por la del denominador.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \frac{5^3}{10^3} = \frac{125}{1000} = \left(0{,}5\right)^3 = 0{,}125$$

La potencia de una fracción es, pues, la de su numerador partida por la de su denominador.

Se llama raíz de un número otro número del que sea potencia el primero. Así

$$\frac{3}{5} \text{ es } \sqrt{\frac{9}{25}}$$

Las potencias sucesivas de los números mayores que la unidad van creciendo y las de los quebrados propios van decreciendo, á medida que aumenta el exponente

$$2^2 = 4 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$2^3 = 8 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$2^4 = 16 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$2^5 = 32 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$2^6 = 64 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Etc. Etc.

El cuociente de toda división de enteros puede ponerse en forma de quebrado

$$24 \,\underline{|\, 6 \quad}\quad 4 = \frac{24}{6}; \qquad \begin{array}{r} 25 \\ 1 \end{array} \underline{|\, 6 \quad}\quad 4 = \frac{25}{6}; \ldots$$

Y, análogamente, el cuociente de dos fracciones ordinarias puede también ponerse en forma de quebrado

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{21}{10} = 2\,\frac{1}{10}$$

TABLA DE FRACCIONES DECIMALES

La TABLA siguiente contiene las fracciones decimales correspondientes á los quebrados comunes

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7}, \dots \text{ hasta } \frac{1}{999},\ \frac{1}{1000}$$

Todo número, pues, tabulado en la primera de cada dos columnas contiguas, es el denominador de una fracción común cuyo numerador es 1. Así,

34	·029411765 representa lo mismo que $\frac{1}{34} = 0{,}029411765$
114	·008771930 representa lo mismo que $\frac{1}{114} = 0{,}008771930$
171	·005847953 representa lo mismo que $\frac{1}{171} = 0{,}005847953$

Como esos enteros, puestos en forma de quebrado, serían (según el convenio admitido)

$$\frac{34}{1}, \qquad \frac{114}{1}, \qquad \frac{171}{1},$$

y sus fracciones inversas aparecerían en la forma de

$$\frac{1}{34}, \qquad \frac{1}{114}, \qquad \frac{1}{171},$$

iguales respectivamente á

·029411765, ·008771930, ·005847953,

es costumbre hacer esta clase de tabulaciones llamando NÚMEROS á los denominadores de los quebrados comunes, y designando con el nombre de INVERSAS á las correspondientes fracciones decimales.

Números	Inversas	Números	Inversas	Números	Inversas
1	1.00000000	58	·017241379	115	·008695652
2	·500000000	59	·016949153	116	·008620690
3	·333333333	60	·016666667	117	·008547009
4	·250000000	61	·016393443	118	·008474576
5	·200000000	62	·016129032	119	·008403361
6	·166666667	63	·015873016	120	·008333333
7	·142857143	64	·015625000	121	·008264463
8	·125000000	65	·015384615	122	·008196721
9	·111111111	66	·015151515	123	·008130081
10	·100000000	67	·014925373	124	·008064516
11	·090909091	68	·014705882	125	·008000000
12	·083333333	69	·014492754	126	·007936508
13	·076923077	70	·014285714	127	·007874016
14	·071428571	71	·014084517	128	·007812500
15	·066666667	72	·013888889	129	·007751938
16	·062500000	73	·013698630	130	·007692308
17	·058823529	74	·013513514	131	·007633588
18	·055555556	75	·013333333	132	·007575758
19	·052631579	76	·013157895	133	·007518797
20	·050000000	77	·012987013	134	·007462687
21	·047619048	78	·012820513	135	·007407407
22	·045454545	79	·012658228	136	·007352941
23	·043478261	80	·012500000	137	·007299270
24	·041666667	81	·012345679	138	·007246377
25	·040000000	82	012195122	139	·007194245
26	·038461538	83	·012048193	140	·007142857
27	·037037037	84	·011904762	141	·007092199
28	·035714286	85	·011764706	142	·007042254
29	·034482759	86	·011627907	143	·006993007
30	·033333333	87	·011494253	144	·006944444
31	·032258065	88	·011363636	145	·006896552
32	·031250000	89	·011235955	146	·006849315
33	·030303030	90	·011111111	147	·006802721
34	·029411765	91	·010989011	148	·006756757
35	·028571429	92	·010869565	149	·006711409
36	·027777778	93	·010752688	150	·006666667
37	·027027027	94	·010638298	151	·006622517
38	·026315789	95	·010526316	152	·006578947
39	·025641026	96	·010416667	153	·006535948
40	·025000000	97	·010309278	154	·006493506
41	·024390244	98	·010204082	155	·006451613
42	·023809524	99	·010101010	156	·006410256
43	·023255814	100	·010000000	157	·006369427
44	·022727273	101	·009900990	158	·006329114
45	·022222222	102	·009803922	159	·006289308
46	·021739130	103	·009708738	160	·006250000
47	·021276600	104	·009615385	161	·006211180
48	·020833333	105	·009523810	162	·006172840
49	·020408163	106	·009433962	163	·006134969
50	·020000000	107	·009345794	164	·006097561
51	·019607843	108	·009259259	165	·006060606
52	·019230769	109	·009174312	166	·006024096
53	·018867925	110	·009090909	167	·005988024
54	·018518519	111	·009009009	168	·005952381
55	·018181818	112	·008928571	169	·005917160
56	·017857143	113	·008849558	170	·005882353
57	·017543860	114	·008771930	171	·005847953

Números	Inversas	Números	Inversas	Números	Inversas
172	·005813953	229	·004366812	286	·003496503
173	·005780347	230	·004347826	287	·003484321
174	·005747126	231	·004329004	288	·003472222
175	·005714286	232	·004310345	289	·003460208
176	·005681818	233	·004291845	290	·003448276
177	·005649718	234	·004273504	291	·003436426
178	·005617978	235	·004255319	292	·003424658
179	·005586592	236	·004237288	293	·003412969
180	·005555556	237	·004219409	294	·003401361
181	·005524862	238	·004201681	295	·003389831
182	·005494505	239	·004184100	296	·003378378
183	·005464481	240	·004166667	297	·003367003
184	·005434783	241	·004149378	298	·003355705
185	·005405405	242	·004132231	299	·003344482
186	·005376344	243	·004115226	300	·003333333
187	·005347594	244	·004098361	301	·003322259
188	·005319149	245	·004081633	302	·003311258
189	·005291005	246	·004065041	303	·003301330
190	·005263158	247	·004048583	304	·003289474
191	·005235602	248	·004032258	305	·003278689
192	·005208333	249	·004016064	306	·003267974
193	·005181347	250	·004000000	307	·003257329
194	·005154639	251	·003984064	308	·003246753
195	·005128205	252	·003968254	309	·003236246
196	·005102041	253	·003952569	310	·003225806
197	·005076142	254	·003937008	311	·003215434
198	·005050505	255	·003921569	312	·003205128
199	·005025126	256	·003906250	313	·003194888
200	·005000000	257	·003891051	314	·003184713
201	·004975124	258	·003875969	315	·003174603
202	·004950495	259	·003861004	316	·003164557
203	·004926108	260	·003846154	317	·003154574
204	·004901961	261	·003831418	318	·003144654
205	·004878049	262	·003816794	319	·003134796
206	·004854369	263	·003802281	320	·003125000
207	·004830918	264	·003787879	321	·003115265
208	·004807692	265	·003773585	322	·003105590
209	·004784689	266	·003759398	323	·003095975
210	·004761905	267	·003745318	324	·003086420
211	·004739336	268	·003731343	325	·003076923
212	·004716981	269	·003717472	326	·003067485
213	·004694836	270	·003703704	327	·003048104
214	·004672897	271	·003690037	328	·003048780
215	·004651163	272	·003676471	329	·003039514
216	·004629630	273	·003663004	330	·003030303
217	·004608295	274	·003649635	331	·003021148
218	·004587156	275	·003636364	332	·003012048
219	·004566210	276	·003623188	333	·003003003
220	·004545455	277	·003610108	334	·002994012
221	·004524887	278	·003597122	335	·002985075
222	·004504505	279	·003584229	336	·002976190
223	·004484305	280	·003571429	337	·002967359
224	·004464286	281	·003558719	338	·002958580
225	·004444444	282	·003546099	339	·002949853
226	·004424779	283	·003533569	340	·002941176
227	·004405286	284	·003521127	341	·002932551
228	·004385965	285	·003508772	342	·002923977

Números	Inversas	Números	Inversas	Números	Inversas
343	·002915452	400	·002500000	457	·002188184
344	·002906977	401	·002493760	458	·002183406
345	·002898551	402	·002487562	459	·002178649
346	·002890173	403	·002481390	460	·002173913
347	·002881844	404	·002475248	461	·002169197
348	·002873563	405	·002469136	462	·002164502
349	·002865330	406	·002463054	463	·002159827
350	·002857143	407	·002457002	464	·002155172
351	·002849003	408	·002450980	465	·002150538
352	·002840909	409	·002444988	466	·002145923
353	·002832861	410	·002439024	467	·002141328
354	·002824859	411	·002433090	468	·002136752
355	·002816901	412	·002427184	469	·002132196
356	·002808989	413	·002421308	470	·002127660
357	·002801120	414	·002415459	471	·002123142
358	·002793296	415	·002409639	472	·002118644
359	·002785515	416	·002406846	473	·002114165
360	·002777778	417	·002398082	474	·002109705
361	·002770083	418	·002392344	475	·002105263
362	·002762431	419	·002386635	476	·002100840
363	·002754821	420	·002380952	477	·002096436
364	·002747253	421	·002375297	478	·002092050
365	·002739726	422	·002369668	479	·002087683
366	·002732240	423	·002364066	480	·002083333
367	·002724796	424	·002358491	481	·002079002
368	·002717391	425	·002352941	482	·002074689
369	·002710027	426	·002347418	483	·002070393
370	·002702703	427	·002341920	484	·002066116
371	·002695418	428	·002336449	485	·002061856
372	·002688172	429	·002331002	486	·002057613
373	·002680965	430	·002325581	487	·002053388
374	·002673797	431	·002320186	488	·002049180
375	·002666667	432	·002314815	489	·002044990
376	·002659574	433	·002309469	490	·002040816
377	·002652520	434	·002304147	491	·002036660
378	·002645503	435	·002298851	492	·002032520
379	·002638521	436	·002293578	493	·002028398
380	·002631579	437	·002288330	494	·002024291
381	·002624672	438	·002283105	495	·002020202
382	·002617801	439	·002277904	496	·002016129
383	·002610966	440	·002272727	497	·002012072
384	·002604167	441	·002267574	498	·002008032
385	·002597403	442	·002262443	499	·002004008
386	·002590674	443	·002257336	500	·002000000
387	·002583979	444	·002252252	501	·001996008
388	·002577320	445	·002247191	502	·001992032
389	·002570694	446	·002242152	503	·001988072
390	·002564103	447	·002237136	504	·001984127
391	·002557545	448	·002232143	505	·001980198
392	·002551020	449	·002227171	506	·001976285
393	·002544529	450	·002222222	507	·001972387
394	·002538071	451	·002217295	508	·001968504
395	·002531646	452	·002212389	509	·001964637
396	·002525253	453	·002207506	510	·001960784
397	·002518892	454	·002202643	511	·001956947
398	·002512563	455	·002197802	512	·001953125
399	·002506266	456	·002192982	513	·001949318

Números	Inversas	Números	Inversas	Números	Inversas
514	·001945525	571	·001751313	628	·001592357
515	·001941748	572	·001748252	629	·001589825
516	·001937984	573	·001745201	630	·001587302
517	·001934236	574	·001742160	631	·001584786
518	·001930502	575	·001739130	632	·001582278
519	·001926782	576	·001736111	633	·001579779
520	·001923077	577	·001733102	634	·001577287
521	·001919386	578	·001730104	635	·001574803
522	·001915709	579	·001727116	636	·001572327
523	·001912046	580	·001724138	637	·001569859
524	·001908397	581	·001721170	638	·001567398
525	·001904762	582	·001718213	639	·001564945
526	·001901141	583	·001715266	640	·001562500
527	·001897533	584	·001712329	641	·001560062
528	·001893939	585	·001709402	642	·001557632
529	·001890359	586	·001706485	643	·001555210
530	·001886792	587	·001703578	644	·001552795
531	·001883239	588	·001700680	645	·901550388
532	·001879699	589	·001697793	646	·001547988
533	·001876173	590	·001694915	647	·091545595
534	·001872659	591	·001692047	648	·001543210
535	·001869159	592	·001689189	649	·001540832
536	·001865672	593	·001686341	650	·001538462
537	·001862197	594	·001683502	651	·001536098
538	·001858736	595	·001680672	652	·001533742
539	·001855288	596	·001677852	653	·001531394
540	·001851852	597	·001675042	654	·001529052
541	·001848429	598	·001672241	655	·001526718
542	·001845018	599	·001669449	656	·001524390
543	·001841621	600	·001666667	657	·001522070
544	·001838235	601	·001663894	658	·001519757
545	·001834862	602	·001661130	659	·001517451
546	·001831502	603	·001658375	660	·001515152
547	·001828154	604	·001655629	661	·001512859
548	·001824818	605	·001652893	662	·001510574
549	·001821494	606	·001650165	663	·001508296
550	·001818182	607	·001647446	664	·001506024
551	·001814882	608	·001644737	665	·001503759
552	·001811594	609	·001642036	666	·001501502
553	·081808318	610	·001639344	667	·001499250
554	·001805054	611	·001636661	668	·001497006
555	·001801802	612	·001633987	669	·001494768
556	·001798561	613	·001631321	670	·001492537
557	·001795332	614	·001628664	671	·001490313
558	·001792115	615	·001626016	672	·001488095
559	·001788909	616	·001623377	673	·001485884
560	·001785714	617	·001620746	674	·001483680
561	·001782531	618	·001618123	675	·001481481
562	·001779359	619	·001615509	676	·001479290
563	·001776199	620	·001612903	677	·001477105
564	·001773050	621	·001610306	678	·001474926
565	·001769912	622	·001607717	679	·001472754
566	·001766784	623	·001605136	680	·001470588
567	·001763668	624	·001602564	681	·001468429
568	·001760563	625	·001600000	682	·001466276
569	·001757469	626	·001597444	683	·001464129
570	·001754386	627	·001594896	684	·001461988

Números	Inversas	Números	Inversas	Números	Inversas
685	·001459854	742	·001347709	799	·001251564
686	·001457726	743	·001345895	800	·001250000
687	·001455604	744	·001344086	801	·001248439
688	·001453488	745	·001342282	802	·001246883
689	·001451379	746	·001340483	803	·001245330
990	·001449275	747	·001338688	804	·001243781
691	·001447178	748	·001336898	805	·001242236
692	·001445087	749	·001335113	806	·001240695
693	·001443001	750	·001333333	807	·001239157
694	·001440922	751	·001331558	808	·001237624
695	·001438849	752	·001329787	809	·001236094
696	·001436782	753	·001328021	810	·001234568
697	·001434720	754	·001326260	811	·001233046
698	·001432665	755	·001324503	812	·001231527
799	·001430615	756	·001322751	813	·001230012
700	·001428571	757	·001321004	814	·001228501
701	·001426534	758	·001319261	815	·001226994
702	·001424501	759	·001317523	816	·001225499
703	·001422475	760	·001315789	817	·001223990
704	·001420455	761	·001314060	818	·001222494
705	·001418440	762	·001312336	819	·001221001
706	·001416431	763	·001310616	820	·001219512
707	·001414427	764	·001308901	821	·001218027
708	·001412429	765	·001307190	822	·001216545
709	·001410437	766	·001305483	823	·001215067
710	·001408451	767	·001303781	824	·001213592
711	·001406470	768	·001302083	825	·001212121
712	·001404494	769	·001300390	826	·701210654
713	·001402525	770	·001298701	827	·001209190
714	·001400560	771	·001297017	828	·001207729
715	·001398601	772	·001295337	829	·001206273
716	·001396648	773	·001293661	830	·001204819
717	·001394700	774	·001291990	831	·001203369
718	·001392758	775	·001290323	832	·001201923
719	·001390821	776	·001288660	833	·021200480
720	·001388889	777	·001287001	834	·001199041
721	·001386963	778	·001285347	835	·001197605
722	·001385042	779	·001283697	836	·001196172
723	·001383126	780	·001282051	837	·001194743
724	·001381215	781	·001280410	838	·001193317
725	·001379310	782	·001278772	839	·001191895
726	·001377410	783	·001277139	840	·001190476
727	·001375516	784	·001275510	841	·001189061
728	·001373626	785	·001273885	842	·001187648
729	·001371742	786	·001272265	843	·001186240
730	·001369863	787	·001270648	844	·001184834
731	·001367989	788	·001269036	845	·001183432
732	·001366120	789	·001267427	846	·001182033
733	·001364256	790	·001265823	847	·001180638
734	·001362398	791	·001264223	848	·001179245
735	·001360544	792	·001262626	849	·001177856
736	·001358696	793	·001261034	850	·001176471
737	·001356852	794	·001259446	851	·001175088
738	·001355014	795	·001257862	852	·001173709
739	·001353180	796	·001256281	853	·001172333
740	·001351351	797	·001254705	854	·001170960
741	·001349528	798	·001253133	855	·001169591

Números	Inversas	Números	Inversas	Números	Inversas
856	·001168224	905	·001104972	953	·001049318
857	·001166861	906	·001103753	954	·001048218
858	·001165501	907	·001102536	955	·001047120
859	·001164144	908	·001101322	956	·001046025
860	·001162791	909	·001100110	957	·001044932
861	·001161440	910	·001098901	958	·001043841
862	·001160093	911	·001097695	959	·001042753
863	·001158749	912	·001096491	960	·001041667
864	001157407	913	·001095290	961	·001040583
865	·001156069	914	·001094092	962	·001039501
866	·001154734	915	·001092896	963	·001038422
867	·001153403	916	·001091703	964	·001037344
868	·001152074	917	·001090513	965	·001036269
869	·001150748	918	·001089325	966	·001035197
870	·001149425	919	·001088139	967	·001034126
871	·001148106	920	·001086957	968	·001033058
872	·001146789	921	·001085776	969	·001031992
873	·001145475	922	·001084599	970	·001030928
874	·001144165	923	·001083423	971	·001029866
875	·001142857	924	·001082251	972	·001028807
876	·001141553	925	·001081081	973	·001027749
877	·001140251	926	·001079914	974	·001026694
878	·001138952	927	·001078749	975	·001025641
879	·001137656	928	001077586	976	·001024590
880	·001136364	929	·001076426	977	·001023541
881	·001135074	930	·001075269	978	·001022495
882	·001133787	931	·001074114	979	·001021450
883	·001132503	932	·001072961	980	·001020408
884	·001131222	933	·001071811	981	·001019168
885	·001129944	934	·001070664	982	·001018330
886	·001128668	935	·001069519	983	·001017294
887	·001127396	936	·001068376	984	·001016260
888	·001126126	937	·001067236	985	·001015228
889	·001124859	938	·001066098	986	·001014199
890	·001123596	939	·001064963	987	·001013171
891	·001122334	940	·001063830	988	·001012146
892	·001121076	941	·001062699	989	·001011122
893	·001119821	942	·001061571	990	·001010101
894	·001118568	943	·901060445	991	·001009082
895	·001117318	944	·001059322	992	·001008065
896	·001116071	945	·001058201	993	·001007049
897	·001114827	946	·001057082	994	·001006036
898	·001113586	947	·001055966	995	·001005025
899	·001112347	948	·001054852	996	·001004016
900	·001111111	949	·001053741	997	·001003009
901	·001109878	950	·001052632	998	·001002004
902	·001108647	951	·001051525	999	·001001001
903	·001107420	952	·001050420	1000	·001000000
904	·001106195				

LIBRO III

CUOCIENTES IGUALES

PROGRESIONES.— PROPORCIONES

CUOCIENTES IGUALES

LECCIÓN I

Proporción.

Si un dividendo partido por su divisor da el mismo cuociente que otro dividendo partido por su respectivo divisor, entonces se dice que los dos dividendos y los dos divisores forman proporción.

$$\frac{10}{2} = 5; \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline & 5 \end{array}\,; \qquad \left.\begin{array}{r} 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ \hline =10 \end{array}\right\} \text{5 sumandos}$$

$$\frac{35}{7} = 5; \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 7 \\ \hline & 5 \end{array}\,; \qquad \left.\begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ \hline =35 \end{array}\right\} \text{5 sumandos} \quad (1)$$

Claro es que los números proporcionales no son los dos

(1) Si dos sumas de sumandos iguales tienen el mismo número de sumandos, cada suma es proporcional á su respectivo sumando generador.

cuocientes iguales, sino los cuatro números que dos á dos dan tales cuocientes.

En el anterior ejemplo los números proporcionales son

10 y 2; 35 y 5;

Y en el ejemplo siguiente

$$\frac{21}{7} = 3; \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 7 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}; \qquad \left\{\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \end{array}\right\} \text{3 sumandos} \\ \hline = 21 \end{array}\right.$$

$$\frac{15}{5} = 3; \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}; \qquad \left\{\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \end{array}\right\} \text{3 sumandos} \\ \hline = 15 \end{array}\right.$$

los números proporcionales son

21 y 7; 15 y 5.

En toda proporción hay, pues, cuatro términos.

Actualmente cuando cuatro números son proporcionales suelen escribirse tales números en forma de quebrado; pero en lo antiguo se escribían con una notación particular (que también se usa todavía).

Así, en vez de

$$\frac{10}{2} = \frac{35}{7}$$

que se lee

Diez *partido por* dos *igual á* treinta y cinco *partido por* siete,

se presentaba, y se presenta, la proporción en la siguiente forma:

$$10 : 2 :: 35 : 7;$$

notación que se lee así:

Diez *es á* 2 *como* treinta y cinco *es á* 7.

De modo que el signo :: se lee *como*.

Y su correlativo el signo : se lee *es á*.

Del mismo modo se leen los números proporcionales cuando aparecen en forma de ecuación fraccionaria,

$$\frac{21}{7} = \frac{15}{5}$$

21 *es á* 7 *como* 15 *es á* 5;

Por manera que en semejante caso el signo de igualdad $=$ se lee *como*,

Y su correlativo la raya de quebrado se lee *es á*.

Asimismo hay quienes escriben las proporciones así:

$$8 : 1 = 40 : 5$$

Ocho *es á* uno *como* cuarenta *es á* cinco.

Y también

$$\frac{8}{1} :: \frac{40}{5}.$$

Tratándose, pues, de proporciones, los signos $::$ y $=$ son *como*, y la raya de quebrado y el signo $:$ son *es á;* sin perjuicio de lo cual los signos $\div$ y $:$ se leen *partido por* cuando se trata de indicar la operación de dividir.

No paran aquí las diferencias de enunciación. Al cuociente, cuando se trata de números proporcionales, se le da el nombre de *razón;* y, así, en vez de decir que 7 es el cuociente de 56 partido por 8, se dice que 7 es la *razón* de 56 á 8; ó bien la *razón* de 8 á 56. ¿Cuál es la *razón* de 12 á 3? La razón de 12 á 3 es 4.

Por consiguiente, *cuociente*, *razón* y *fracción* son la misma cosa en cuanto á sus resultados numéricos.

Por tanto,

$\frac{12}{3} = 4$; *doce partido por 3* . .	Son expresiones que representan el mismo resultado numérico 4.
$\frac{12}{3} = 4$; *la razón de 12 á tres*	
$\frac{12}{3} = 4$; *doce tercios*	

Y, sin embargo, tales expresiones no son sinónimas.

Doce partido por tres......	Indica que hay que hacer una operación de dividir, esto es, que hay que buscar un cuociente.
Doce es á tres.............	Significa que esas cantidades están en proporción con otras dos; y
Doce tercios ó doce tercias..	Manifiesta la suma de las partes de un módulo obtenidas en una medición.

Por tanto, el resultado numérico es siempre el mismo, 4. Pero la procedencia ó la interpretación que debe darse á esos números no es idéntica.

Así 12 tercias nunca puede representar un número puro sino un número modular; al paso que la razón 12 es á 3 puede referirse lo mismo á números puros que á números modulares. Por ejemplo, 12 manzanas es á 3 manzanas, de igual manera que la suma 12 de 4 sumandos iguales á 3 es al número puro 3:

$$3\ (\text{número puro}) + 3 + 3 + 3 = 12.$$

Lo mismo hay que decir de dividendos y divisores, que pueden ser números puros ó números modulares.

$$12\ \text{manzanas}\ \left|\underline{\ 3\ \text{manzanas};\ }\right. \qquad 12\ (\text{número puro})\ \left|\underline{\ 3\ (\text{número puro})\ }\right.$$

Nota. Aunque las razones puedan ser relaciones entre números puros, resultan en gran número de casos relaciones entre números modulares de la misma especie: (12 metros y 3 metros: 30 kilos y 3 kilos, etc.)

Tampoco en el lenguaje especial de los números proporcionales se llama dividendos ni divisores á los números cuyos respectivos cuocientes son iguales. Los dividendos se denominan *antecedentes* y los divisores *consecuentes*.

Así, en la proporción

$$10 : 2 :: 35 : 7;\ \left(\frac{10}{2} = \frac{35}{7}\right); \quad \begin{array}{r} 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ \hline = 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ \hline = 35 \end{array}$$

los números 10 y 35 no se llaman sumas, ni dividendos, ni numeradores, sino *antecedentes*, y los números 2 y 7 no se denominan sumandos, ni divisores ni denominadores, sino *consecuentes*.

De modo que

10 : 2 :: 35 : 7

se lee así

El 1.er antecedente :	al 1.er consecuente ::	el 2.° antecedente :	al 2.° consecuente
10	2	35	7.

Pero, según se ve con toda claridad, no son conceptos distintos en esencia (aunque no precisamente sinónimos) los conceptos de *suma de sumandos iguales*, *dividendo*, *numerador* y *antecedente*, ni sus correlativos de *sumando*, *divisor*, *denominador* y *conecuentes*.

Las diferencias son análogas á las indicadas con respecto al anterior $\frac{12}{3}$.

El primer antecedente y el segundo consecuente se llaman *extremos*, y se denominan *medios* el segundo consecuente y el segundo antecedente.

8 : 1 :: 40 : 5

En esta proporción 8 y 5 son los *extremos*, y 1 y 40 son los *medios*.

5 : 35 :: 2 : 14

Y aquí 5 y 14 son los *extremos*, y 35 y 2 los *medios*.

Tampoco se dice que *proporción es la igualdad de dos cuocientes*, sino que *proporción es la igualdad de dos razones;* pero la diferencia de nomenclatura no entraña diferencia de conceptos.

En rigor, pues, no hay verdaderamente motivo esencial para conservar las antiguas denominaciones ni su especial notación *(a : b : : c : d)*; pero tanto notación como nomenclatura recuerdan al operador que no se trata de números cualesquiera, sino precisamente de números proporcionales; y esto es ya de suficiente importancia para no abolir la antigua manera de nombrarlos y escribirlos (1). De aquí su

(1) Además, los datos puestos en forma de proporción se *imaginan* mejor que puestos en forma de quebrado; particularidad más que suficiente para conservar la antigua notación por lo que ésta facilita el cálculo mental.

uso, general aún, en geometría especialmente. Y de aquí también el empleo de las formas fraccionarias cuando se consideran preferibles;

$$a : b :: c : d \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Del empleo de las varias denominaciones de los números proporcionales resulta lo siguiente, cuando las razones ó cuocientes son iguales:

Una suma de sumandos iguales	: á su sumando	::	Otra suma de igual número de sumandos iguales	: al suyo	Siendo iguales los cuocientes, según queda dicho.
Un dividendo	: á su divisor	::	otro dividendo	: al suyo	
Un numerador	: á su denominador	::	otro numerador	: á su denominador	
Un antecedente	: á su consecuente	::	otro antecedente	: á su consecuente	
Un extremo	: á su medio	::	el otro medio	: al otro extremo.	

Dos cuocientes iguales (ó bien dos razones iguales) significan que el número de sumandos es el mismo en dos sumas diferentes (1).

Así, la proporción

$$6 : 2 :: 30 : 10; \text{ ó bien } \frac{6}{2} = \frac{30}{10}; \text{ ó bien } \frac{6}{2} :: \frac{30}{10}$$

representa las dos sumas siguientes:

$$\begin{array}{rr} 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ \hline =\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 10 \\ +\ 10 \\ +\ 10 \\ \hline =\ 30 \end{array}$$

cada una de las cuales tiene tres sumandos (iguales en cada una y diferentes de una á otra).

El *número* de los sumandos iguales (ó sea el *cuociente*, ó bien la *razón*) es siempre un número puro, al paso que los sumandos pueden ser números puros ó números-módulo.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ pesetas} \\ +\ 2 \text{ pesetas} \\ +\ 2 \text{ pesetas} \\ \hline =\ 6 \text{ pesetas} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \text{ pesetas} \\ +\ 10 \text{ pesetas} \\ +\ 10 \text{ pesetas} \\ \hline =\ 30 \text{ pesetas} \end{array}$$

(1) Véase Lección IV.

El hecho de que una suma tenga el mismo número de sumandos que otra suma entraña una propiedad importantísima: la de que los dos términos de una de las razones son equimúltiplos de los de la otra. En el último ejemplo tenemos

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ + & 2 \\ + & 2 \\ \hline = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 10 = 2 \times 5 \\ + & 10 = 2 \times 5 \\ + & 10 = 2 \times 5 \\ \hline = & 30 = 6 \times 5 \end{array}$$

donde vemos que los términos de la segunda razón son los mismos de la primera multiplicados por 5.

Y, como esto es general, tenemos que toda proporción es de la forma siguiente:

$$a : b :: n \times a : n \times b; \text{ ó bien } \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{n \times b}; \text{ ó bien } \frac{a}{b} :: \frac{n \times a}{n \times b}$$

igualdad ya evidente; pues nos consta que, si numerador y denominador se multiplican por un mismo número, el quebrado no varía. Por otra parte sabemos que todo número es igual á cualquier otro, si este otro se multiplica por el cuociente de ambos.

$$15 : 5 :: 51 : 17; \text{ ó bien } \frac{15}{5} = \frac{51}{17}; \text{ ó bien } \frac{15}{5} :: \frac{51}{17}$$

expresiones que representan las sumas

$$\begin{array}{rl} & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ \hline = & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 17 \\ + & 17 \\ + & 17 \\ \hline = & 51 \end{array}$$

donde 17 es un múltiplo de 5, si 5 se multiplica por el cuociente de ambos números, que es $3\,{}^2/_5$. En efecto,

$$\frac{17}{5} = 3\,{}^2/_5,$$

de donde

$$\begin{array}{rl} & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ \hline = & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 5 \times 3\,{}^2/_5 = 17 \\ + & 5 \times 3\,{}^2/_5 = 17 \\ + & 5 \times 3\,{}^2/_5 = 17 \\ \hline & 15 \times 3\,{}^2/_5 = 51 \end{array}$$

Así, pues, todo antecedente es igual á su consecuente multiplicado por su razón.

$$\frac{20}{5} = 4, \text{ razón } \therefore 20 = 5 \times 4$$

ó, lo que es lo mismo,

el dividendo = divisor × cuociente.

De donde resulta esta propiedad capital de todas las proporciones:

El producto de medios es igual al producto de extremos.

En efecto:

1.° La segunda razón es = á la 1.ª Si los dos términos de ésta se multiplican por un mismo número ó coeficiente:

$$a : b :: n \times a : n \times b$$

$$\therefore \underset{\text{producto de extremos}}{a \times (n \times b)} = \underset{\text{producto de medios.}}{b \times (n \times a)}$$

Y, como el orden de los factores no altera el producto, resulta la evidencia siguiente:

$$a \times b \times n = a \times b \times n.$$

Un ejemplo:

$$20 : 5 :: 60 : 15$$

ó bien

$$20 : 5 :: (20 \times 3) : (5 \times 3)$$

Por consiguiente, producto de extremos = producto de medios:

$$20 \times (3 \times 5) = 5 \times (3 \times 20)$$

ó bien

$$20 \times 5 \times 3 = 20 \times 5 \times 3$$

y así de los demás casos, en que los equimúltiplos pueden proceder de números fraccionarios.

$$\begin{array}{rr} 5 & 17 = 5 \times 3\,^2/_5 \\ +\ 5 & +17 = 5 \times 3\,^2/_5 \\ +\ 5 & +17 = 5 \times 3\,^2/_5 \\ \hline = 15 & = 51 = 15 \times 3\,^2/_5 \end{array}$$

$15 : 5 :: 51 : 17$; ó bien $15 : 5 :: (15 \times 3\,^2/_5) : 5 \times (3\,^2/_5)$

y, por consiguiente, $15 \times (5 \times 3\,^2/_5) = 5 \times (15 \times 3\,^2/_5$

$$3\,^2/_5 \times 15 \times 5 = 3\,^2/_5 \times 15 \times 5$$

2.° Por consiguiente, toda proporción es, en esencia, una identidad,

$$A = A$$

ó bien, formas diferentes de una identidad

$$\frac{6}{1} = \frac{6 \times 3}{1 \times 3}$$

$$\frac{6}{1} = \frac{18}{3}$$

$$\frac{6}{1} :: \frac{18}{3}$$

$$6 : 1 :: 18 : 3$$

Llámase proporción *continua* aquella cuyos medios son iguales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 60 & : & 30 & :: & 30 & : & 15 \\ 16 & : & 4 & :: & 4 & : & 1 \\ a & : & b & :: & b & : & c \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{estas proporciones}\\ \text{suelen escribirse}\end{array} \left\{\begin{array}{rcrcr} \div\div\ 60 & : & 30 & : & 15 \\ \div\div\ 16 & : & 4 & : & 1 \\ \div\div\ a & : & b & : & c \end{array}\right.$$

En esta clase especial de proporciones

$$\text{Un extremo} = \frac{\text{al cuadrado de un medio}}{\text{por el otro extremo}}$$

$$a = \frac{b^2}{c}$$

$$c = \frac{b^2}{a}$$

$$60 = \frac{30^2}{15} = \frac{900}{15}$$

$$15 = \frac{30^2}{60} = \frac{900}{60}$$

$$16 = \frac{4^2}{1} = \frac{16}{1}$$

$$1 = \frac{4^2}{16} = \frac{16}{16}$$

Pueden darse proporciones de la forma

$$a : b :: c : a$$

$$30 : 60 :: 15 : 30$$

en que los extremos sean los términos iguales; pero estas proporciones no tienen denominación especial, y sus propiedades son iguales á las de las proporciones continuas.

En las proporciones continuas se llama á cualquiera de los medios *medio proporcional entre los dos extremos* (1), y el último término se llama *tercero proporcional* entre el 1.º y el 2.º; ó bien *tercero proporcional al 1.º y al 2.º*

Por último, en una proporción continua uno de los medios es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos

$$a : b :: b : c \ .\cdot. \ b^2 = a \times c \ .\cdot. \ b = \sqrt{a \times c}$$

$$60 : 30 :: 30 : 15 \ .\cdot. \ 30^2 = 60 \times 15 \ .\cdot. \ 30 = \sqrt{60 \times 15} = \sqrt{900} = 30$$

Observación.—La antigua notación y sus denominaciones son más á propósito que las modernas para hacer comprender las propiedades de las proporciones.

¡Cuánto más claro es decir «*el producto de medios es igual al producto de extremos*» que no la fórmula: «*En toda igualdad fraccionaria son iguales los productos de los términos opuestos*!»

Además, hay que definir lo que se entiende por términos opuestos.

Son, pues, términos opuestos, el numerador de una razón y el denominador de la otra.

En la igualdad fraccionaria

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ ó bien } \frac{a}{b} :: \frac{c}{d}$$

Son términos opuestos a y d, así como b y c.

(1) También el medio proporcional entre dos extremos se llama media factorial.

Véase Lección preliminar de las progresiones.

LECCIÓN II

Transformación de los términos de una proporción.

Una razón se llama inversa de otra cuando el numerador de la 1.ª es denominador de la 2.ª y el denominador en aquélla es numerador en ésta.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{20}{5} \text{ y } \frac{5}{20} \\ \frac{13}{7} \text{ y } \frac{7}{13} \\ \frac{a}{b} \text{ y } \frac{b}{a} \end{array}\right\} \text{son razones inversas.}$$

El producto de dos razones inversas es siempre $= 1$, evidentemente.

$$\frac{20}{5} \times \frac{5}{20} = \frac{20 \times 5}{5 \times 20} = 1$$

$$\frac{13}{7} \times \frac{7}{13} = \frac{13 \times 7}{7 \times 13} = 1$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$$

De donde se deduce también que el producto de medios es igual al producto de extremos; por resultar de las operaciones dos razones inversas.

$a : b :: (n \times a) : (n \times b)$

$a \times (n \times b) = b \times (n \times a)$; ó bien $\frac{a}{b} \times \frac{n \times b}{n \times a}$; ó bien $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

$20 : 5 :: 60 : 15$

$20 \times 15 = 5 \times 60$; ó bien $\frac{20}{5} \times \frac{15}{60} = \frac{20}{5} \times \frac{5 \times 3}{20 \times 3} = \frac{20}{5} \times \frac{5}{20} = 1$

Si un producto de dos factores, partido por otro producto también de dos factores, da por cuociente la unidad, los cuatro factores forman proporción; porque siempre resultan dos razones iguales, colocando como extremos á los dos factores de uno cualquiera de los dos productos, y como medios á los otros dos.

$$\frac{20 \times 3}{5 \times 12} = 1$$

$$\therefore 20 : 5 :: 12 : 3$$

Colocados los factores de este modo, resultan en proporción por ser iguales las razones

$$\frac{20}{5} \text{ y } \frac{12}{3}; \quad \left\{ \begin{array}{rr} 5 & 3 \\ +\ 5 & +\ 3 \\ +\ 5 & +\ 3 \\ +\ 5 & +\ 3 \\ \hline =20 & =12 \end{array} \right.$$

Y también los mismos números resultarían proporcionales poniendo como extremos los que ahora son medios:

$$\frac{5 \times 12}{20 \times 3} = 1$$

$$\therefore 5 : 20 :: 3 : 12$$

Cuyas razones son

$$\frac{5}{20} \text{ y } \frac{3}{12}$$

inversas de las anteriores.

Cuando un producto binario partido por otro producto binario da por cuociente la unidad, como

$$\frac{20 \times 3}{5 \times 12} = 1,$$

la proporción resulta leyendo ante todo el primer factor del numerador, luego los dos factores del denominador, y, por último, el segundo del numerador.

$$20 : 5 :: 12 : 3$$

Por consiguiente, los ejemplos que siguen

$$\frac{35 \times 13}{7 \times 65}; \quad \frac{a \times d}{b \times c}$$

se leerán respectivamente:

$$35 : 7 :: 65 : 13, \quad \text{y} \quad a : b :: c : d,$$

sin alteración de la propiedad fundamental de ser 1 el cuociente.

Ocho son las posiciones de que resultan susceptibles dos productos binarios iguales; porque tales productos corresponden á dos sumas del mismo número de sumandos iguales, tales, como por ejemplo, las dos siguientes, de cuatro sumandos cada una.

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ \hline =\ 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ \hline =\ 12 \end{array}$$

Esta clase de sumas de igual número de sumandos da lugar á las cuatro propiedades siguientes, cada una susceptible de dos variantes, según se tome como primera ó como segunda una de las dos sumas.

1.ª Una suma es á su sumando :: la otra suma al suyo.	$20 : 5 :: 12 : 3; \frac{20 \times 3}{5 \times 12} = 1$ $12 : 3 :: 20 : 5; \frac{12 \times 5}{3 \times 20} = 1$	Un antecedente es á su consec. :: el otro ant. al suyo.
2.ª Un sumando es á su suma :: el otro sumando á la suya.	$5 : 20 :: 3 : 12; \frac{5 \times 12}{20 \times 3} = 1$ $3 : 12 :: 5 : 20; \frac{3 \times 20}{12 \times 5} = 1$	Un consec. es á su antecedente :: el otro cons. al suyo.
3.ª Una suma es á la otra :: un sumando á otro (respectivamente) *	$20 : 12 :: 5 : 3; \frac{20 \times 3}{12 \times 5} = 1$ $12 : 20 :: 3 : 5; \frac{12 \times 5}{20 \times 3} = 1$	Un antec. es al otro :: un consecuente al otro (respectivamente).
4.ª Un sumando es al otro :: una suma á la otra (respectivamente) **	$5 : 3 :: 20 : 12; \frac{5 \times 12}{3 \times 20} = 1$ $3 : 5 :: 12 : 20; \frac{3 \times 20}{5 \times 12} = 1$	Un cons. es al otro :: un ant. al otro (respectivamente).

En las 8 posiciones, cada suma tiene por factor el sumando de la otra. Así la 1.ª suma 20 va siempre multiplicada por

* Es preciso agregar el adverbio *respectivamente*, porque no habría proporción poniendo de cualquier modo los sumandos. Por ejemplo: $20 : 12 :: 3 : 5$ no son proporción.

** Tampoco formarían proporción $5 : 3 :: 12 : 20$.

el sumando 3 de la segunda; y la 2.ª suma 12 por el 5, sumando de la 1.ª Los factores aparecen alterados; esto es, 20×3 y 3×20; y cada alternación está dos veces como numerador, y otras dos como denominador.

Las razones, por tanto, son solamente dos: $\frac{20}{5}$ y $\frac{5}{3}$; y sus inversas $\frac{5}{20}$ y $\frac{3}{5}$

Como ejercicio apliquemos todo esto á las dos sumas siguientes, cada una de 5 sumandos iguales:

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ \hline =35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ +\ 13 \\ +\ 13 \\ +\ 13 \\ +\ 13 \\ \hline =65 \end{array}$$

Una suma es á su sumando :: la otra al suyo

$35 : 7 :: 65 : 13$; razón $= 5$; productos, $\frac{35 \times 13}{7 \times 65} = \frac{455}{455}$.

$65 : 13 :: 35 : 7$; razón $= 5$; productos, $\frac{65 \times 7}{13 \times 35} = \frac{455}{455}$.

Un sumando es á su suma :: el otro sumando á la suya

$7 : 35 :: 13 : 65$; razón $= \frac{1}{5}$; productos, $\frac{7 \times 65}{35 \times 13} = \frac{455}{455}$.

$13 : 65 :: 7 : 35$; razón $= \frac{1}{5}$; productos, $\frac{13 \times 35}{65 \times 7} = \frac{455}{455}$.

Las sumas son una á otra :: sus respectivos sumandos

$35 : 65 :: 7 : 13$; razón $= \frac{7}{13}$; productos, $\frac{35 \times 13}{65 \times 7} = \frac{455}{455}$.

$65 : 35 :: 13 : 7$; razón $= \frac{13}{7}$; productos, $\frac{65 \times 7}{35 \times 13} = \frac{455}{455}$.

Los sumandos son uno á otro :: sus respectivas sumas

$7 : 13 :: 35 : 65$; razón $= \frac{7}{13}$; productos, $\frac{7 \times 65}{13 \times 35} = \frac{455}{455}$.

$13 : 7 :: 65 : 35$; razón $= \frac{13}{7}$; productos, $\frac{13 \times 35}{7 \times 65} = \frac{455}{455}$.

Los cuatro primeros numeradores son idénticos á los cuatro segundos, pero los respectivos denominadores aparecen alternados.

SIGNIFICACIÓN DE LOS NUMERADORES IGUALES Y DENOMINADORES ALTERNADOS.

Una suma es á su sumando :: la otra suma al suyo	$\left\{\begin{array}{c} \frac{35\times13}{7\times65};\ \frac{35\times13}{65\times7} \\ \frac{65\times7}{13\times35};\ \frac{65\times7}{35\times13} \end{array}\right\}$	Las sumas son una á otra :: sus respectivos sumandos.
Un sumando es á su suma :: el otro sumando á la suya	$\left\{\begin{array}{c} \frac{7\times65}{35\times13};\ \frac{7\times65}{13\times35} \\ \frac{13\times35}{65\times7};\ \frac{13\times35}{7\times65} \end{array}\right\}$	Los sumandos son uno á otro :: sus respectivas sumas.

Resumiendo resulta:

1.° Que toda igualdad fraccionaria es susceptible de tantas transformaciones cuantas permitan que resulten iguales los productos de los términos opuestos; ó resultantes en aspa:

$$\frac{20}{5}=\frac{12}{3};\ \frac{12}{3}=\frac{20}{5};\ \frac{5}{20}=\frac{3}{12};\ \frac{3}{12}=\frac{5}{20};\ \frac{20}{12}=\frac{5}{3};\ \frac{12}{20}=\frac{3}{5};\ \frac{5}{3}=\frac{20}{12};\ \text{y}\ \frac{3}{5}=\frac{12}{20}$$

O bien,

2.° Que en toda proporción se pueden permutar los medios, los extremos, ó unos y otros, y, además, cabe poner los medios por extremos ó los extremos por medios.

Es consecuencia de lo expuesto que toda operación de multiplicar enteros es un caso particular de las reglas de las proporciones.

Sea la multiplicación

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times\ 4 \\ \hline =\ 8 \end{array}$$

Aquí hay las dos sumas siguientes:

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ +\ 2 \\ \hline =\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ \hline =\ 4 \end{array}$$

Y la razón de ser toda operación de multiplicar enteros un caso de las proporciones resulta muy clara. Siempre el multiplicador es una suma de unidades, y siempre el producto es una suma del mismo número de multiplicandos que unidades tiene el multiplicador.

Como el orden de los factores no cambia el producto (tratándose de números puros), claro es que resultarían las mismas consideraciones haciendo *multiplicando* al multiplicador y *multiplicador* al multiplicando; 4×2.

Entonces tendríamos (siguiendo el ejemplo anterior) las sumas

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\,4 \\ \hline =8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\,1 \\ \hline =2 \end{array}$$

Por consiguiente, cuando se nos dan un multiplicando y un multiplicador enteros, no se nos dan dos datos, sino tres:

El multiplicando, ó sea el sumando de una suma que hay que sacar;

El multiplicador, ó sea una suma de cierto número de unidades conocido;

Y la unidad, sumando repetido de esta suma conocida.

Y, por tanto, multiplicar es hallar abreviadamente la suma de tantos multiplicandos como unidades tiene el multiplicador.

Así, pues, si se nos dan á multiplicar 12 manzanas por cinco, tendremos:

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\,1 \\ +\,1 \\ +\,1 \\ +\,1 \\ \hline =5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ +\,12 \\ +\,12 \\ +\,12 \\ +\,12 \\ \hline =x \end{array}$$

de donde, por ser una suma á su sumando como la otra al suyo, resulta la proporción

$$5 : 1 :: x : 12$$

Y, siendo el producto de medios igual al de extremos, tendremos:

$$1 \times x = 5 \times 12; \quad \text{ó bien} \quad x = 5 \times 12 = 60;$$

de modo que el producto se hallará multiplicando el multiplicando por el multiplicador.

Siendo entero el multiplicador no cabe dificultad ninguna en asimilar las proporciones á las operaciones de multiplicar. Pero no aparece tan fácil la asimilación cuando en las multiplicaciones fraccionarias es quebrado el multiplicador.

¿Qué significa, por ejemplo, $60 \times \frac{1}{5}$? ¿Qué interpretación ha de darse á esos datos?

Puesto que $\frac{1}{5}$ es una magnitud $<$ que la unidad, claro es que $\frac{1}{5}$ no puede ser la suma de varios unos, como antes lo eran los multiplicadores enteros que se nos daban: en el último ejemplo

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Antes, pues, cuando el multiplicador era entero, se nos daban tres números,

la suma de los unos del multiplicador,

el sumando 1,

y el sumando que había de componer el producto, ó sea el multiplicando.

$$\begin{array}{rr} 1 & 12 \\ +\ 1 & +\ 12 \\ +\ 1 & +\ 12 \\ +\ 1 & +\ 12 \\ +\ 1 & +\ 12 \\ \hline = 5 & = x \end{array}$$

Se nos daba

el 5, suma;

el 1, sumando; y

el 12, sumando;

y se nos encargaba que buscásemos la suma x. Se nos daban, pues, dos sumandos y una suma.

Pero ahora, cuando el multiplicador es un quebrado, como en $60 \times \frac{1}{5}$, se nos dan

el sumando que hace de multiplicador (en el ejemplo, $\frac{1}{5}$);

la suma de todos estos multiplicadores (que es $= 1$);

y la suma ó producto de sumandos que se buscan, que es 60;

Se nos dan, pues, dos sumas y un sumando, en vez de dos sumandos y una suma:

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{5} & x \\ +\frac{1}{5} & +x \\ +\frac{1}{5} & +x \\ +\frac{1}{5} & +x \\ +\frac{1}{5} & +x \\ \hline =1 & =60 \end{array}$$

De donde sale la proporción

$$1 : \frac{1}{5} :: 60 : x$$

suma : sumando : : suma : sumando que se busca

y como el producto de extremos = al producto de medios,

$$1 \times x = 60 \times \frac{1}{5};$$

$$\therefore x = 60 \times \frac{1}{5} = 12;$$

de modo que, si en las dos sumas anteriores se sustituye el valor de x, aparecerá

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{5} & 12 \\ +\frac{1}{5} & +12 \\ +\frac{1}{5} & +12 \\ +\frac{1}{5} & +12 \\ +\frac{1}{5} & +12 \\ \hline =5 & =60 \end{array}$$

Así, pues, el sumando buscado ($x = 12$) : á su suma (60) : : el multiplicador $\left(\frac{1}{5}\right)$: á su suma $= 1$.

El multiplicador $\frac{1}{5}$ es la quinta parte de la unidad, y el número buscado 12 es también la quinta parte del otro dato $= 60$. Los resultados son, pues, proporcionales.

Tal es el fundamento de la definición más generalizada de la operación de multiplicar. Esta definición es como sigue:

Dados dos factores,

Multiplicar es hallar un tercer número que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad.

Por tanto, multiplicar por 7 es hacer 7 veces mayor un multiplicando, porque 7 es siete veces mayor que 1.

$$8 \times 7 = 56$$

El 3.er número, 56 : al 1.º, 8 : : el 2.º, 7 : á la unidad $\therefore\ 8 \times 7 = 56 \times 1$

Y multiplicar 56 por $\frac{1}{7}$ es hacer siete veces menor el producto dado, porque $\frac{1}{7}$ es siete veces menor que 1.

$$56 \times \frac{1}{7} = 8 \ \therefore\ 56 : 8 :: 1 : \frac{1}{7} \ \therefore\ 56 \times \frac{1}{7} = 8 \times 1$$

El 3.er número, 8 : al 1.º, 56 : : el 2.º, $\frac{1}{7}$: á la unidad.

Los resultados tienen, pues, explicación en la teoría de las proporciones; pero, cuando el multiplicador no es número entero, la definición entraña el absurdo de que sea *multiplicar*, no el buscar una suma, sino el buscar un sumando.

Siendo entero el multiplicador, la incógnita es una suma de multiplicandos

$$\begin{array}{ccccc} 9 & \times & 3 & = & 27 \\ \text{multiplicando} & \times & \text{multiplicador} & = & \text{suma ó producto} \end{array} \left\{ \begin{array}{rr} 9 & 1 \\ +\ 9 & +\ 1 \\ +\ 9 & +\ 1 \\ \hline = x & = 3 \end{array} \right.$$

Pero, cuando el multiplicador es un quebrado, la incógnita es un sumando desconocido que se ha de repetir: esto es, un multiplicando.

$$27 \times \frac{1}{3} = 9 \left\{ \begin{array}{rr} x & \frac{1}{3} \\ +\ x & +\ \frac{1}{3} \\ +\ x & +\ \frac{1}{3} \\ \hline 27 & = 1 \end{array} \right.$$

Aritméticamente, pues, la definición no es admisible.

Claro es que, si el multiplicador no es una fracción primaria, sino secundaria, habrá que multiplicar el resultado de la fracción primaria por el numerador de la secundaria.

$$60 \times \frac{2}{5} = \text{dos veces } \left(60 \times \frac{1}{5}\right) = \frac{60}{5} \times 2 = 12 \times 2 = 24$$

$$60 \times \frac{3}{5} = \text{tres veces } \left(60 \times \frac{1}{5}\right) = \frac{60}{5} \times 3 = 12 \times 3 = 36$$

Etc.

En la práctica conviene casi siempre empezar multiplicando por el numerador de la fracción secundaria;

$$60 \times \frac{3}{5} = \frac{60 \times 3}{5} = \frac{180}{5} = 36$$

Etc.

Este procedimiento, además de su utilidad en la práctica, tiene de bueno el ser teóricamente algo más conforme al concepto de la operación de multiplicar. Cuando en el ejemplo anterior se multiplica el 60 por 3 (prescindiendo del denominador 5), se encuentra un verdadero producto = 180. Verdad es que este producto resulta 5 veces mayor de lo que debe ser, porque el multiplicador no es 3, sino $\frac{3}{5}$; pero el error inmediatamente queda salvado dividiendo por 5 el 180. *Et sic de céteris.*

Correlativa con la anterior definición de multiplicar, hay, naturalmente, otra de la operación de dividir.

MULTIPLICAR	PARTIR
es hallar un tercer número que sea respecto del primero : : el segundo respecto de la unidad.	es hallar un tercer número que sea respecto del primero : : la unidad respecto del segundo.

Conocida esta nueva definición del partir, sea 20 dividido por 5, y haya que hallar el cuociente 4. Y tendremos que

el 3.er número, 4 : al 1.º, 20 : : la unidad : al 2.º, 5.

La unidad es $<$ en una quinta parte que el segundo número 5, y, de conformidad, el número buscado 4 es también $<$ en una quinta parte que el número primero 20. Tratándose de enteros, los resultados entran dentro de esa definición del partir, y son una consecuencia de las propiedades de las proporciones.

Pero sea ahora

$$20 \div \frac{1}{5}$$

Hallemos el cuociente, y nos resultará que es = 100 (según sabemos).

Este resultado también entra dentro de la definición. En efecto,

$$\text{el } 3.^{\text{er}} \text{ número, } 100 : \text{al } 1.^{\circ}, 20 :: \text{la unidad} : \text{al } 2.^{\circ}, \frac{1}{5}$$

La unidad es 5 veces > que $\frac{1}{5}$; y, de conformidad, el número buscado 100 es también 5 veces > que el número primero, 20. Tratándose de fracciones, entran también los resultados dentro de la definición. Pero objeciones análogas á las anteriores no pueden dejar satisfecho á quien busque en las matemáticas, más que la belleza de los artificios dialécticos, la firmeza incontrastable de los sistemas críticos. *Multiplicar* jamás será disminuír, ni *partir* aumentar.

Ni es lo mismo buscar sumas que buscar sumandos.

LECCIÓN III

Propiedades numéricas de las proporciones.—Series de razones iguales.

Toda proporción subsiste si se multiplican ó se parten los dos términos de una razón por un número cualquiera, ó los dos de las dos razones; ó bien si se multiplican los dos términos de una, ó se parten los dos de otra por el mismo número, ó los de cada una por números distintos.

En efecto; el valor de un cuociente no varía cuando dividendo y divisor se multiplican ó se parten por un mismo número; las razones subsisten iguales, y el producto de extremos siempre resulta igual al producto de medios.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\,;\ \frac{a}{b}=\frac{c\times n}{d\times n}\,;\ \frac{a\times n}{b\times n}=\frac{c}{d}\,;\ \frac{a\times m}{b\times m}=\frac{c\times n}{d\times n}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\,;\ \frac{a}{b}=\frac{c\div n}{d\div n}\,;\ \frac{a\div n}{b\div n}=\frac{c}{d}\,;\ \frac{a\div m}{b\div m}=\frac{c\div n}{d\div n}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\,;\ \frac{a\times m}{b\times m}=\frac{c\div n}{d\div n}\,;\ \frac{a\div m}{b\div m}=\frac{c\times n}{d\times n}$$

$$\frac{20}{5}=\frac{60}{15}\,;\ \frac{20}{5}=\frac{60\times 7}{15\times 7}\,;\ \frac{20\times 11}{5\times 11}=\frac{60}{15}\,;\ \frac{20\times 13}{5\times 13}=\frac{60\times 17}{15\times 17}$$

$$\frac{20\div 5}{5\div 5}=\frac{60\div 3}{15\div 3}\,;\ \frac{20\times 7}{5\times 7}=\frac{60\div 15}{15\div 15}\ \text{etc.}$$

Por consiguiente, el teorema «forman proporción los cuatro números de dos productos binarios si partido uno por otro resulta por cuociente la unidad», v. gr.,

$$\frac{a\times d}{b\times c}=1\,;\ \frac{20\times 15}{5\times 60},$$

no ha de entenderse de un modo tan estrecho que no sea también verdadero si cada uno de los cuatro factores a, b, c y d es á su vez múltiplo de otros factores.

En efecto, ya hemos visto que en la proporción

$$\frac{20}{5} :: \frac{60}{15}$$

20, 60 y 15 son múltiplos de 5; de modo que tenemos

$$\frac{20 \times 15}{5 \times 60} = 1$$

$$\frac{(5 \times 4) \times (5 \times 3)}{5 \quad \times (5 \times 12)} = 1$$

$$\frac{(5 \times 2^2) \times (5 \times 3)}{5 \quad \times (5 \times 2^2 \times 3)} = 1$$

Y, en general, si

$$a = a' \times m \times n \times r$$

$$b = b' \times m' \times n' \times r'$$

podemos tener como producto de dos factores á

$$\frac{a \times d}{b \times c} = 1 = \frac{(a' \times m \times n \times r) \times d}{(b' \times m' \times n' \times r') \times c} = 1$$

Si los antecedentes de una proporción se multiplican por un mismo número, los nuevos antecedentes forman proporción con los consecuentes; pero la nueva razón es = al producto de la razón primitiva por el número multiplicador de los antecedentes

$a : b :: c : d$, cuya razón es r

$a \times m : b :: c \times m : d$, cuya razón es $r \times m$

$20 : 5 :: 60 : 15$, cuya razón es 4

$20 \times 7 : 5 :: 60 \times 7 : 15 = 140 : 5 :: 420 : 15$, cuya razón es $4 \times 7 = 28$

La penúltima de estas dos proporciones corresponde á las dos sumas siguientes, cada una de cuatro sumandos

$$\left.\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \end{array}\right\} \text{4 sumandos} \qquad \left.\begin{array}{r} 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \end{array}\right\} \text{4 sumandos}$$

$$= 20 \qquad\qquad = 60$$

Y la última de las mismas dos proporciones corresponde á las dos sumas siguientes, cada una de 28 sumandos.

$$\left.\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} \text{28 sumandos} \qquad \left.\begin{array}{r} 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} \text{28 sumandos}$$

$$=140 \qquad\qquad =420$$

Recíprocamente: si los antecedentes de una proporción se parten por un mismo número, los nuevos antecedentes forman proporción con los consecuentes, y la nueva razón es = al cuociente de la razón dada por el número divisor de los antecedentes,

$$(140 \div 7) : 5 :: (420 \div 7) : 15; \text{ etc.}$$

Una razón queda multiplicada por un número, si, en vez de multiplicar por él el antecedente, se parte el consecuente; y

Una razón queda dividida por un número si en vez de partir el antecedente se multiplica el consecuente.

Sea la proporción

$$\frac{20}{5} :: \frac{60}{15}$$

Para multiplicarla por 5 se puede proceder de los dos modos siguientes:

$$\frac{20 \times 5}{5} :: \frac{60 \times 5}{15} \therefore \frac{100}{5} :: \frac{300}{15} \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplicando el dividendo} \\ \text{se multiplica el cuociente.} \end{array} \right.$$

O bien

$$\frac{20}{(5 \div 5)} :: \frac{60}{(15 \div 5)} \therefore \frac{20}{1} :: \frac{60}{3} \left\{ \begin{array}{l} \text{Partiendo el divisor se mul-} \\ \text{tiplica el cuociente.} \end{array} \right.$$

Y, para partirla por 5, como sigue:

$$\frac{20 \div 5)}{5} :: \frac{(60 \div 5)}{15} \therefore \frac{4}{5} :: \frac{12}{15} \left\{ \begin{array}{l} \text{Partiendo el dividendo se} \\ \text{parte el cuociente.} \end{array} \right.$$

O bien

$$\frac{20}{5 \times 5} :: \frac{60}{15 \times 5} \therefore \frac{20}{25} :: \frac{60}{75} \quad \text{Multiplicando el divisor se parte el cuociente.}$$

$$\therefore \frac{4}{5} :: \frac{12}{15}$$

$$\therefore \frac{4}{5} :: \frac{4}{5}$$

$$\therefore 4 = 4$$

$$\therefore 1 = 1$$

Si se multiplican ordenadamente los términos correspondientes de dos ó más proporciones, los productos forman proporción.

$$\left.\begin{array}{l} a \;: b \;:: c \;: d \\ a' : b' :: c' : d' \\ a'' : b'' :: c'' : d'' \\ a''' : b''' :: c''' : d''' \end{array}\right\} \therefore a \times a' \times a'' \times a''' : b \times b' \times b'' \times b''' :: c \times c' \times c'' \times c''' : d \times d' \times d'' \times d'''$$

$$\left.\begin{array}{r} 20:5::60:15 \\ 14:7::34:17 \\ 3:1::\;6:\;2 \end{array}\right\} \therefore \begin{array}{c} 20 \times 14 \times 3 : 5 \times 7 \times 1 :: 60 \times 34 \times 6 : 15 \times 17 \times 2 \\ 840 : \quad 35 \quad :: \quad 12240 \quad : \quad 510 \end{array}$$

$$\frac{840}{35} = 24 = \frac{12240}{510} = 24$$

En efecto, multiplicar una proporción por otra es multiplicar los antecedentes de una de ellas por el cuociente ó razón de la otra.

$$\frac{20}{5} :: \frac{60}{15} \text{ multiplicado ordenadamente por } \frac{14}{7} :: \frac{34}{17}$$

es lo mismo que multiplicar por 2 los antecedentes de la proporción primera.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{20}{5} \times \frac{14}{7} = \frac{20}{5} \times 2 = \frac{20 \times 2}{5} \\ \frac{60}{15} \times \frac{34}{17} = \frac{60}{15} \times 2 = \frac{60 \times 2}{15} \end{array}\right\} \text{Los antecedentes de la 1.}^{\text{a}} \text{ proporción multiplicados por la razón ó cuociente de la 2.}^{\text{a}} \text{ proporción.}$$

Recíprocamente:

Si se dividen ordenadamente los términos correspondientes de dos proporciones los cuocientes forman proporción.

$$\left.\begin{array}{l}20:5::60:15\\14:7::34:17\end{array}\right\} \therefore \frac{20}{14}:\frac{5}{7}::\frac{60}{34}:\frac{15}{17}$$

$$\therefore \frac{20}{14}\times\frac{15}{17}=\frac{5}{7}\times\frac{60}{34}$$

$$\therefore \frac{300}{238}=\frac{300}{238}$$

$$\therefore 300=300$$

$$\therefore 1=1$$

Cuando se multiplican ó se parten ordenadamente los términos de 2 proporciones (ó más) la nueva razón es igual al producto ó al cuociente de las razones primitivas.

$$\left.\begin{array}{l}20:5::60:15;\ \text{razón}=4\\14:7::34:17;\ \text{razón}=2\\3:1::\ 6:\ 2;\ \text{razón}=3\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Multiplíquense ordenadamente}\\\text{y tendremos:}\end{array}$$

$$20\times14\times3:5\times7\times1::60\times34\times6:15\times17\times2;\ \text{razón}=4\times2\times3$$

$$840:\quad 35\quad::\quad 12240\quad:\quad 510;\quad \text{razón}=24$$

$$\left.\begin{array}{l}20:5::60:15;\ \text{razón}=4\\14:7::34:17;\ \text{razón}=2\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Pártanse ordenadamente}\\\text{y tendremos:}\end{array}$$

$$\frac{20}{14}:\frac{5}{7}::\frac{60}{34}:\frac{15}{17};\ \text{razón}=\frac{4}{2}$$

$$=\frac{10}{7}:\frac{5}{7}::\frac{30}{17}:\frac{15}{17};\ \text{razón}=2$$

Reduciendo á un común denominador

$$\frac{10\times17}{7\times17}:\frac{5\times17}{7\times17}::\frac{30\times7}{17\times7}:\frac{15\times7}{17\times7}$$

$$\therefore \frac{170}{119}:\frac{85}{119}::\frac{210}{119}:\frac{105}{119}$$

$$\therefore 170\quad:\ 85\quad::210\quad:105;\ \text{razón}=2,\ \text{evidentemente.}$$

Las potencias ó las raíces de igual grado de los cuatro términos de una proporción forman otra proporción cuya razón es la potencia ó la raíz de la primitiva:

$$\begin{array}{l}a\ :b\ ::c\ :d\\a^2:b^2::c^2:d^2\quad (a:b::c:d)\times \text{ordenadamente por } (a:b::c:d)\\a^n:b^n::c^n:d^n\end{array}$$

$$20:5::60:15,\ \text{razón}=4\ \therefore\ 20^2:5^2::60^2\ :15^2;\ \text{razón}=4^2$$
$$400:25::3600:225;\ \text{razón}=16$$

$$a:\quad b::\quad c:\quad d$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt{d}$$

$$\sqrt{400}:\sqrt{25}::\sqrt{3600}:\sqrt{225};\ \text{razón}=\sqrt{16}=4$$

En toda proporción la suma de los dos primeros términos es al segundo como la suma de los términos tercero y cuarto, es al cuarto

$$\begin{array}{llll} a & : b :: c & & : d \\ (a+b) & : b :: (c+d) & & : d \\ 20 & : 5 :: 60 & & : 15 \\ (20+5) & : 5 :: (60+15) & & : 15 \end{array}$$

ó bien

$$25 \quad : 5 :: 75 \quad : 15$$

En efecto: esta proporción corresponde á las siguientes sumas:

$$\left.\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \end{array}\right\} \text{5 sumandos} \qquad \left.\begin{array}{r} 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \end{array}\right\} \text{5 sumandos}$$

$$= 25 \qquad\qquad = 75$$

Aumentar á un antecedente su consecuente equivale á aumentar un sumando más á la correspondiente suma; y, si esto se hace en las dos razones de una proporción, resultan siempre las correspondientes sumas con igual número de sumandos; y, por consiguiente, en proporción. La nueva razón es igual á la primitiva + 1. Tales sumas, pues, resultan proporcionales á los consecuentes (respectivamente).

Si á cada antecedente se agrega su consecuente repetido el mismo número de veces, las nuevas sumas resultan en proporción con los primitivos consecuentes

$$\begin{array}{llll} a & : b :: c & & : d \\ a+(b \times n) & : b :: c+(d \times n) & & : d \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 20 & : 5 :: 60 & & : 15 \\ 20+(5 \times 3) & : 5 :: 60+(15 \times 3) & & : 15 \\ 35 & : 5 :: 105 & & : 15 \end{array}$$

A esta proporción corresponden las sumas siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \end{array}\right\} \text{7 sumandos} \qquad \left.\begin{array}{r} 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \\ +\ 15 \end{array}\right\} \text{7 sumandos}$$

$$= 35 \qquad\qquad = 105$$

Y, como el número de los sumandos es igual en ambas sumas, los nuevos números resultan correspondientemente en proporción.

En general: si los dos antecedentes se aumentan ó se disminuyen con equimúltiplos de los respectivos consecuentes, los nuevos antecedentes resultan en proporción con los primitivos consecuentes

$$a : b :: c : d$$

$$[a \pm (b \times n)] : b :: [c \pm (d \times n)] : d.$$

$$20 : 5 :: 60 : 15$$

$$[20 \pm (5 \times 1)] : 5 :: \ 60 \pm (15 \times 1) \ : 15 \Big\} = \Big\{ \begin{matrix} 20 : 5 :: \ 75 : 15 \\ 15 : 5 :: \ 45 : 15 \end{matrix}$$

$$[20 \pm (5 \times 3)] : 5 :: [60 \pm (15 \times 3)] : 15 \Big\} = \Big\{ \begin{matrix} 35 : 5 :: 105 : 15 \\ 5 : 5 :: \ 15 : 15 \end{matrix}$$

En toda proporción la suma ó la diferencia de los dos términos de una razón es á la suma ó la diferencia de los dos términos de la otra como los respectivos antecedentes.

$$a \quad : b :: c \quad : d$$

$$\therefore \quad a \pm b : b :: c \pm d : d$$

Sabemos que, si se multiplican los consecuentes por un mismo número, los nuevos términos resultan en proporción, si bien la razón es otra

$$\therefore \quad (a \pm b) : (b \times n) :: (c \pm d) : (d \times n)$$

Resulta, pues, que si n es = razón $\frac{a}{b} = r$, esta proporción general se reducirá al caso particular siguiente

$$(a \pm b) : (b \times r) :: (c \pm d) : (d \times r).$$

Pero, como $(b \times r) = a$; y como $(d \times r) = c$, tendremos, si sustituímos,

$$a \pm a : a :: c \pm d : c; \text{ Q. E. D. (1)}$$

$$20 : 5 :: 60 : 15 \therefore (20 \pm 5) : 20 :: (60 \pm 15) : 15 \left\{ \begin{matrix} 25 : 20 :: 75 : 60; \text{ razón } \frac{5}{4} \\ \\ 15 : 20 :: 45 : 60; \text{ razón } \frac{3}{4} \end{matrix} \right.$$

(1) Esta abreviatura significa *quod erat demonstrandum*, *que era lo que había que demostrar.*

En toda proporción la suma ó la diferencia de los dos términos de una razón, es á la suma ó la diferencia de los de la otra, como los respectivos equimúltiplos de los antecedentes.

$$a : b :: c : d$$
$$\therefore (a \pm b) : a :: (c \pm d) : c$$
$$\therefore (a \pm b) : (a \times n) :: (c \pm d) : (c \times n)$$

En toda proporción la suma de los términos de la primera razón es á su diferencia como la suma de los dos términos de la segunda razón es á su diferencia

$$a : b :: c : d$$
$$a + b : a - b :: c + d : c - d$$
$$20 : 5 :: 60 : 15$$
$$20 + 5 : 20 - 5 :: 60 + 15 : 60 - 15$$

O bien

$$25 : 15 :: 75 : 45; \text{ razón } \frac{5}{3}$$

Y, en general, las correspondientes sumas y diferencias de equimúltiplos forman proporción

$$a + (b \times n) : a - (b \times n) :: c + (d \times n) : c - (d \times n)$$
$$a + (b \times m) : a - (b \times n) :: c + (d \times m) : c - (d \times n)$$
$$200 : 5 :: 600 : 15$$
$$200 + (5 \times 10) : 200 - (5 \times 8) :: 600 + (15 \times 10) : 600 - (15 \times 8)$$
$$250 : 160 :: 750 : 480$$
$$\therefore \frac{250 \times 480}{160 \times 750} = \frac{120000}{120000}$$

La suma ó la diferencia de los antecedentes es á la suma ó la diferencia de los consecuentes como un antecedente es á su consecuente

$$a : b :: c : d$$
$$(a \pm c) : (b \pm d) :: a : b$$
$$60 : 15 :: 20 : 5$$
$$(60 \pm 20) : (15 \pm 5) :: 20 : 5 \quad (1)$$

(1) Para que se realicen aritméticamente estas propiedades, es preciso que las razones se coloquen de modo que puedan verificarse las restas (cuando haya que hacerlas).

En toda proporción la suma de los antecedentes es á su diferencia como la suma de los consecuentes es á su diferencia

$$a : b :: c : d$$

$$(a + c) : (a - c) :: (b + d) : (b - d)$$

$$60 : 15 :: 20 : 5$$

$$(60 + 20) : (60 - 20) :: (15 + 5) : (15 - 5)$$

$$80 \quad : \quad 40 \quad :: \quad 20 \quad : 10; \text{ razón} = 2.$$

LECCIÓN IV

Series de razones iguales.

Cuando más de dos razones iguales están relacionadas entre sí, se da al conjunto el nombre de serie:

$$4 : 1 :: 20 : 5 :: 12 : 3 :: 28 : 7 :: 8000 : 2000; \text{ razón } 4.$$

O bien

$$\frac{4}{1} = \frac{20}{5} = \frac{12}{3} = \frac{28}{7} = \frac{8000}{2000}$$

En toda serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la de todos los consecuentes como un antecedente cualquiera es á su consecuente.

O bien la suma de todos los numeradores de una serie de quebrados iguales es á la de todos los denominadores como un numerador cualquiera es á su denominador.

$$4 + 20 + 12 + 28 + 8000 : 1 + 5 + 3 + 7 + 2000 :: 12 : 3$$

$$\frac{4 + 20 + 12 + 28 + 8000}{1 + 5 + 3 + 7 + 2000} :: \frac{28}{7} \quad (1)$$

(1) Efectuando las sumas resultará:

$$\begin{array}{rcrl} 4 & & 1 & \\ 20 & & 5 & \\ 12 & & 3 & \\ 28 & & 7 & \\ 8000 & & 2000 & \\ \hline 8064 & : & 2016 & :: 28 : 7 \end{array}$$

$$\frac{8064}{2016} = \frac{28}{7}$$

En toda serie de razones iguales la suma de una parte de los antecedentes es á la de sus respectivos consecuentes como uno cualquiera de los antecedentes es á su consecuente;

O bien en toda serie de quebrados iguales la suma de una parte de los numeradores es á la de los respectivos denominadores como un numerador cualquiera es á su denominador.

$$20 + 12 + 8000 : 5 + 3 + 2000 :: 4 : 1$$

$$\frac{20 + 12 + 8000}{5 + 3 + 2000} :: \frac{28}{7} \quad (1)$$

En toda serie de razones iguales el producto de los antecedentes (ó numeradores) es al producto de los consecuentes (ó denominadores) como un antecedente (ó numerador cualquiera de los de la serie) elevado á una potencia igual al número de términos de la serie, es á su consecuente (ó denominador) elevado á la misma potencia.

$$4 \times 20 \times 12 \times 28 \times 8000 : 1 \times 5 \times 3 \times 7 \times 2000 :: \frac{4^5}{1^5}$$

O bien

$$\frac{4 \times 20 \times 12 \times 28 \times 8000}{1 \times 5 \times 3 \times 7 \times 2000} = \frac{12^5}{3^5}; \quad (2)$$

Si en una serie de razones se elevan á una misma potencia todos los numeradores (ó antecedentes) así como todos los de

---

(1)

$$\begin{array}{r} 20 \\ 12 \\ 8000 \\ \hline 8032 \end{array} \; : \; \begin{array}{r} 5 \\ 3 \\ 2000 \\ \hline 2008 \end{array} \; :: 4 : 1; \text{ó bien} :: \frac{28}{7} \ldots$$

(2)

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 20 \\ \hline 80 \\ \times\ 12 \\ \hline 960 \\ \times\ 28 \\ \hline 7680 \\ 1920 \\ \hline 26880 \\ 8000 \\ \hline 215040000 \\ ..50 \\ 84 \\ .. \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1 \\ \times\ 5 \\ \hline 5 \\ \times\ 3 \\ \hline 15 \\ 7 \\ \hline 105 \\ \times\ 2000 \\ \hline 210000 \\ \hline 1024\ ; \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \times\ 4 \\ \hline 16 \\ \times\ 4 \\ \hline 64 \\ \times\ 4 \\ \hline 256 \\ \times\ 4 \\ \hline 1024 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 12 \\ \hline 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 1728 \\ \times\ 12 \\ \hline 20736 \\ \times\ 12 \\ \hline 248832 \\ ..583 \\ .972 \\ ... \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 3 \\ \times\ 3 \\ \hline 9 \\ \times\ 3 \\ \hline 27 \\ \times\ 3 \\ \hline 81 \\ \times\ 3 \\ \hline 243 \\ \hline 1024 \end{array} \right.$$

nominadores (ó consecuentes), la suma de los nuevos numeradores es á la suma de sus denominadores :: un numerador cualquiera de la primitiva serie elevado á la misma potencia, es á su respectivo denominador elevado igualmente.

Sea la serie

$$\frac{4}{1}=\frac{20}{5}=\frac{12}{3}=\frac{28}{7}=\frac{8000}{2000}$$

Elevemos cada razón á la tercera potencia, por ejemplo,

$$\frac{4^3}{1^3}=\frac{20^3}{5^3}=\frac{12^3}{3^3}=\frac{28^3}{7^3}=\frac{8000^3}{2000^3}$$

Efectuemos las operaciones indicadas:

$$\frac{64}{1}=\frac{8000}{125}=\frac{1728}{27}=\frac{21952}{343}=\frac{512000000000}{8000000000}$$

Sumemos ordenadamente (1), y tendremos:

$$512000031744 : 8000000496 :: 4^3 : 1^3;\ \text{ó bien} :: 64 : 1\ldots$$

Por consiguiente:

En toda serie de razones iguales la raíz n de la suma de las potencias n de los numeradores, partida por la raíz n de la suma de los potencias n de los denominadores, es igual á cualquiera de las razones de la serie primitiva.

$$\sqrt[3]{\frac{512000031744}{8000000496}}=\sqrt[3]{\frac{64}{1}}=\frac{4}{1}\ ;\ \text{ó bien}\ \frac{20}{5}\ ;\ \text{ó bien}\ \frac{28}{7}\ \text{etc.}$$

Si dos proporciones tienen comunes una razón, los otros cuatro números son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } a : b :: c : d \\ \text{y } a : b :: e : f\end{array}\right\}\ \text{entonces}\ c : d :: e : f$$

$$\left.\begin{array}{l}20 : 5 :: 60 : 15 \\ 20 : 5 :: 68 : 17\end{array}\right\}\ \therefore\ 60 : 15 :: 68 : 17$$

---

(1)

$$\begin{array}{r|l}
64 & 1 \\
8000 & 125 \\
1728 & 27 \\
21952 & 343 \\
512000000000 & 8000000000 \\
\hline
512000031744 & 8000000496 \\
32000001984 & \overline{64} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

Si dos proporciones tienen comunes los dos antecedentes, ó los dos consecuentes, los otros cuatro términos forman proporción.

1) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } a : b :: c : d \\ \text{y } a : e :: c : f\end{array}\right\}$ entonces $b : d :: e : f$

2) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } a : b :: c : d \\ \text{y } e : b :: f : d\end{array}\right\}$ entonces $\therefore a : e :: c : f$

1) $\left.\begin{array}{l}20 : 5 :: 60 : 15 \\ 20 : 10 :: 60 : 30\end{array}\right\} \therefore 5 : 15 :: 10 : 30$

2) $\left.\begin{array}{l}20 : 5 :: 60 : 15 \\ 55 : 5 :: 165 : 15\end{array}\right\} \therefore 20 : 55 :: 60 : 165$

Si dos proporciones tienen comunes los extremos, la razón de los consecuentes restantes es inversa de la razón de los dos antecedentes no comunes.

$\left.\begin{array}{l}\text{Si } a : b :: c : d \\ \text{y } a : e :: f : d\end{array}\right\}$ entonces $\frac{b}{e}$ es razón inversa de $\frac{c}{f}$

$\left.\begin{array}{l}20 : 5 :: 60 : 15 \\ 20 : 4 :: 75 : 15\end{array}\right\} \therefore \frac{5}{4}$ razón inversa de $\frac{60}{75} = \frac{4}{5}$

Si dos proporciones tienen comunes los medios, los dos primeros extremos están en razón inversa de los dos segundos extremos.

$\left.\begin{array}{l}\text{Si } a : b :: c : d \\ \text{y } e : b :: c : f\end{array}\right\}$ entonces $\frac{a}{e}$ es razón inversa de $\frac{d}{f}$

$\left.\begin{array}{l}20 : 5 :: 60 : 15 \\ 15 : 5 :: 60 : 20\end{array}\right\} \therefore \frac{20}{15}$ es razón inversa de $\frac{15}{20}$

De modo que cuando los medios ó los extremos son iguales, las razones correspondientes de los otros términos son inversas.

LECCIÓN V

Divisores iguales y cuocientes desiguales.

Yo he comprado primeramente á 3 pesetas 4 metros de tela; después he comprado al mismo precio otros 7 metros, y quiero saber cuántas pesetas he gastado: tendré, pues, que hacer las dos sumas siguientes y unir los resultados:

$$\left.\begin{array}{rl} & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \end{array}\right\} \text{4 sumandos} \qquad \left.\begin{array}{rl} & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \\ + & 3 \text{ pesetas} \end{array}\right\} \text{7 sumandos}$$

$$= 12 \text{ pesetas} \qquad\qquad = 21 \text{ pesetas}$$

He aquí dos sumas de distinta composición que las que nos han estado sirviendo en las Lecciones anteriores para hacer ver la naturaleza de las proporciones. En estas dos que tenemos aquí á la vista los sumandos son iguales en ambas sumas, pero desigual el número de ellos; 4 en la primera y 7 en la segunda.

Por el contrario, en las Lecciones precedentes los sumandos eran siempre desiguales de una suma á otra, é igual el número de ellos, como por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rr} & 4 \\ + & 4 \\ + & 4 \end{array}\right\} \text{3 sumandos} \qquad \left.\begin{array}{rr} & 7 \\ + & 7 \\ + & 7 \end{array}\right\} \text{3 sumandos}$$

$$= 12 \qquad\qquad = 21$$

La diferencia no puede ser más patente. De las dos últimas adiciones podemos ciertamente asegurar que

la primera suma	:	á su sumando	::	la segunda	:	al suyo
12	:	4	::	21	:	7

pero de las dos primeras adiciones de esta Lección no cabe decir lo mismo, porque

12 no es á 3 :: 21 es á 3.

La razón de 12 á 3 es 4, y la de 21 á 3 es 7: de modo que, si quisiéramos formar una proporción, nos resultaría el absurdo

$$\frac{12}{3} = \frac{21}{3}; \text{ ó bien } 4 = 7.$$

Y, sin embargo, hay proporción. Pero no entre las sumas y los sumandos, sino entre las sumas y el número de ellos.

La 1.ª suma :	al n.º de sus sumandos ::	la 2.ª suma :	al n.º de los suyos
= 12	= 4	= 21	= 7

Y, en efecto,

$$\frac{12}{4} = \frac{21}{7}; \text{ ó bien } 3 = 3.$$

Puestos los anteriores guarismos en forma de división, resulta

Suma 12	sumando 3 = 4, número de sumandos del dividendo 12.	;	Suma 21	sumando 3 también = 7, número de sumandos del dividendo 21.

De donde (por ser estos resultados independientes de las cifras del caso particular propuesto) resulta que, en general, cuando los divisores son iguales, los dividendos son entre sí como los cuocientes.

Dividendo 12 : á dividendo 21 :: cuociente 4 : á cuociente 7.

$$\frac{12}{21} = \frac{4}{7}; \text{ ó bien } \frac{4}{7} = \frac{4}{7}; \text{ ó bien } 1 = 1$$

Y, por consiguiente, el primer dividendo es á su cuociente como el segundo al suyo:

Dividendo 12 : á cuociente 4 :: dividendo 21 : á cuociente 7

$$\frac{12}{4} = \frac{21}{7}; \text{ ó bien } 3 = 3; \text{ ó bien } 1 = 1$$

Y, en general, cuando son iguales los divisores, los dividendos y los respectivos cuocientes son números proporcionales.

Resulta, pues, que, siendo iguales los divisores y estando entonces siempre en proporción los dividendos con los cuocientes, las propiedades explicadas en las últimas Lecciones les son enteramente aplicables, *mutatis mutandis*.

Este resultado no puede causar extrañeza tratándose de números puros, porque entonces para la formación de un producto es indiferente el orden de los factores.

$$\left.\begin{array}{l} 12 \;\begin{array}{|l} 3 \\ \hline =4 \end{array} \quad \therefore\ 12 = 3 \times 4 \\[2em] 12 \;\begin{array}{|l} 4 \\ \hline =3 \end{array} \quad \therefore\ 12 = 4 \times 3 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \end{array}\right\} \text{4 sumandos} \\ \hline =12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 4 \\ +\ 4 \\ +\ 4 \end{array}\right\} \text{3 sumandos} \\ \hline =12 \end{array}$$

Pero, tratándose de números modulares, el orden no es indiferente, porque el cuociente ha de ser siempre el número de repeticiones necesario para que el divisor forme el dividendo.

$$\text{12 manzanas} \;\begin{array}{|l} \text{3 manzanas} \\ \hline =\text{4 repeticiones} \end{array} \;\therefore\; \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \text{3 manzanas} \\ +\ \text{3 manzanas} \\ +\ \text{3 manzanas} \\ +\ \text{3 manzanas} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{4 sumandos, ó sea} \\ \text{el sumando 3} \\ \text{manzanas repe-} \\ \text{tido 4 veces.} \end{array} \\ \hline =\text{12 manzanas} \end{array}$$

No hay absurdo ninguno en decir que el número de 3 manzanas se ha repetido 4 veces; pero no tiene sentido el afirmar que el número puro 4 se ha repetido 3 manzanas de veces.

Por tanto, cuando en dos operaciones de partir, los divisores son iguales, es preciso considerar á estos divisores como números puros para que resulte verdad que están en proporción los dividendos y los cuocientes respectivos.

Ciertamente, cuando se trata sólo de obtener resultados aritméticos, siempre es posible operar con los números modulares como si fuesen números puros; y, por esto, cabe siempre poner en proporción dividendos y cuocientes cuando los divisores son iguales, considerando entonces á los cuocientes como sumandos iguales en cada suma pero diferentes de una á otra, y á los divisores como números iguales de sumandos repetidos.

Convèrtidos así en cuocientes iguales los divisores iguales, y siendo proporcionales los otros cuatro números, resultan dos razones iguales en proporción, porque la igualdad de dos razones iguales constituye siempre proporción.

$$\text{DIVIDENDO} \,\Big|\, \frac{\textit{Divisor}}{= \text{CUOCIENTE}} \quad \text{y} \quad \textit{Dividendo} \,\Big|\, \frac{\textit{Divisor}}{= \textit{Cuociente}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{DIVIDENDO}}{\text{CUOCIENTE}} = \text{divisor}: \text{ y } \frac{\textit{Dividendo}}{\textit{Cuociente}} = \text{divisor}.$$

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí;

$$\therefore \quad \frac{\text{DIVIDENDO}}{\text{CUOCIENTE}} = \frac{\textit{Dividendo}}{\textit{Cuociente}}$$

$$\therefore \quad \text{DIVIDENDO} : \text{CUOCIENTE} :: \textit{Dividendo} : \textit{Cuociente}.$$

Luego, como producto de extremos es igual al producto de medios,

$$\text{DIVIDENDO} \times \textit{Cuociente} = \text{CUOCIENTE} \times \textit{Dividendo}.$$

Sean las sumas

$$\left.\begin{array}{r} 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \end{array}\right\} \text{4 sumandos} \qquad \left.\begin{array}{r} 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \end{array}\right\} \text{7 sumandos} \qquad 12 \,\Big|\, \frac{3}{= 4}\,; \quad 21 \,\Big|\, \frac{3}{= 7}$$

$$= 12 \qquad\qquad = 21$$

Y tendremos, cuando los sumandos son iguales en ambas sumas:

Una suma es al número de sus sumandos :: la otra al de los suyos	$12 : 4 :: 21 : 7$	Razón, 3.	Productos, $\frac{12 \times 7}{4 \times 21} = \frac{84}{84}$
	$21 : 7 :: 12 : 4$	Razón, 3.	Productos, $\frac{21 \times 4}{7 \times 12} = \frac{84}{84}$
Un número de sumandos es á su suma :: el otro número de sumandos á la suya	$4 : 12 :: 7 : 21$	Razón, $\frac{1}{3}$	Productos, $\frac{4 \times 21}{12 \times 7} = \frac{84}{84}$
	$7 : 21 :: 4 : 12$	Razón, $\frac{1}{3}$	Productos, $\frac{7 \times 12}{21 \times 4} = \frac{84}{84}$
Las sumas son una á otra :: los respectivos números de sumandos	$12 : 21 :: 4 : 7$	Razón, $\frac{4}{7}$	Productos, $\frac{12 \times 7}{21 \times 4} = \frac{84}{84}$
	$21 : 12 :: 7 : 4$	Razón, $\frac{7}{4}$	Productos, $\frac{21 \times 4}{12 \times 7} = \frac{84}{84}$
El número de sumandos es uno á otro :: sus respectivas sumas	$4 : 7 :: 12 : 21$	Razón, $\frac{4}{7}$	Productos, $\frac{4 \times 21}{7 \times 12} = \frac{84}{84}$
	$7 : 4 :: 21 : 12$	Razón, $\frac{7}{4}$	Productos, $\frac{7 \times 12}{4 \times 21} = \frac{84}{84}$

Los cuatro primeros numeradores son idénticos á los cuatro segundos; pero los respectivos denominadores aparecen alternados.

Los demás corolarios son análogos á los de la Lección II y las transformaciones iguales á las de la Lección III.

RESUMEN

1.º Toda proporción es la igualdad de dos razones.

2.º Pero las razones que están en proporción pueden resultar de dos distintas procedencias.

O bien de dos sumas, en una de las cuales se repite un sumando el mismo número de veces que otro sumando distinto en la otra suma.

$$\left.\begin{array}{r} 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \end{array}\right\} \text{4 veces} \qquad \left.\begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \end{array}\right\} \text{4 veces}$$

$$= 12 \qquad\qquad = 28$$

O bien de dos sumas en cada una de las cuales un mismo sumando se repite diferente número de veces,

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 4 \\ +\ 4 \\ +\ 4 \end{array}\right\} \text{repetido 3 veces} \\ \hline = 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 4 \\ +\ 4 \\ +\ 4 \\ +\ 4 \\ +\ 4 \\ +\ 4 \\ +\ 4 \end{array}\right\} \text{repetido 7 veces.} \\ \hline = 28 \end{array}$$

3.° En el primer caso las sumas son proporcionales á los sumandos diferentes;

Y en el segundo caso las sumas son proporcionales á los números diferentes de repeticiones.

4.° Si los números son modulares en el segundo caso, hay que prescindir de su denominación y considerarlos como números puros.

LECCIÓN VI

Regla de oro, ó de tres simple.

Así llamaron los antiguos á la propiedad siguiente de todas las proporciones:

Un medio es igual al producto de los dos extremos partido por el otro medio;

O bien

Un extremo es igual al producto de los dos medios partido por el otro extremo.

Cuando no se conocía el Algebra, era natural que se considerase como de oro la manera segura de resolver el problema de «hallar uno de los términos de cualquier proporción dados los otros tres», ó bien «hallar el cuarto proporcional á tres números dados».

El problema presenta cuatro variantes.

Hallar el primer medio:

$$a : x :: c : d \therefore x = \frac{a \times d}{c} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{x} = \dfrac{c}{d};\ \text{Divisor } x = \dfrac{\text{Dividendo } a}{\text{Cuociente } \frac{c}{d}} \\ \therefore x = a \times \dfrac{d}{c} \therefore x = a \div \dfrac{c}{d} \end{array} \right.$$

$$20 : x :: 60 : 15 \therefore x = \frac{20 \times 15}{60} = 5$$

Hallar el segundo medio:

$$a : b :: x : d \therefore x = \frac{d \times a}{b} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{d};\ \text{Ddo. } x = \text{Div.}^{r}\ d \times \text{Cuoc. } \dfrac{a}{b} \\ \therefore x = d \times \dfrac{a}{b} \therefore x = d \div \dfrac{b}{a} \end{array} \right.$$

$$20 : 5 :: x : 15 \therefore x = \frac{15 \times 20}{5} = 60$$

Hallar el primer extremo:

$$x : b :: c : d \therefore x = \frac{b \times c}{d} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{b} = \frac{c}{d}\text{; Ddo. } x = \text{Div.}^{\text{r}}\, b \times \text{Cuoc. } \frac{c}{d} \\ \therefore x = b \times \frac{c}{d} \therefore x = b \div \frac{d}{c} \end{array} \right.$$

$$x : 5 :: 60 : 15 \therefore x = \frac{5 \times 60}{15} = 20$$

Hallar el segundo extremo:

$$a : b :: c : x \therefore x = \frac{b \times c}{a} \qquad \left| \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{c}{x}\text{; Div.}^{\text{r}}\, x = \text{Ddo. } c \div \text{Cuoc. } \frac{a}{b} \\ \therefore x = c \times \frac{b}{a} \therefore x = c \div \frac{a}{b} \end{array} \right.$$

$$20 : 5 :: 60 : x \therefore x = \frac{5 \times 60}{20} = 15$$

Como se ve, no puede ofrecernos dificultad la regla de oro cuando se nos da escrita la incógnita en una proporción; pues sólo hay que hacer dos operaciones: una multiplicación y una división (1).

Lo que tal vez no se presenta obvio es el planteamiento de la proporción correspondiente, porque el problema resultará insoluble si los términos no se colocan proporcionalmente.

Por ejemplo:

Yo sé que 16 metros de paño han costado 176 pesetas: necesito 27 metros al mismo precio y de la misma calidad, y quiero saber si tengo bastante dinero para comprarlos: ¿cuánto habré de pagar?

Es evidente que los 16 metros son á su precio como los 27 al suyo;

Y digo: si 16 metros han costado 176 pesetas, ¿27 cuánto costarán?

---

(1) O bien, una división y una multiplicación; pues á veces conviene para mayor facilidad de las operaciones aritméticas empezar dividiendo.
Por ejemplo:

$$21 : 7 :: x : 17$$

Más fácil es partir de memoria 21 entre 7 y multiplicar en seguida el cuociente 3 por 17, lo que, desde luego, da 51 para valor de x, que no hacer las operaciones conforme á la regla general:

$$\frac{21 \times 17}{7} = 51.$$

Luego se verá que en el sistema llamado de *reducción á la unidad*, la teoría exige que se empiece dividiendo.

$$16 : 176 :: 27 : x.$$

$$\therefore x = \frac{176 \times 27}{16} = 297$$

Pero la proporción no habría estado bien establecida habiendo dicho «si 16 metros cuestan 176 :: ¿cuánto costarán 27?», y habiendo escrito en consecuencia de tal enunciación

$$16 : 176 :: x : 27,$$

por no ser verdad que una cosa es á su precio :: el precio de otra es á ella misma.

Al establecer una proporción, hay, por tanto, que cuidar de que los antecedentes y los consecuentes se correspondan respectivamente.

También habría estado bien planteada la proporción diciendo:

176 pesetas han costado 16 metros :: ¿cuántas costarán 27?

$$176 : 16 :: x : 27.$$

$$\therefore x = \frac{176 \times 27}{16} = 297.$$

Pero no habría podido hallarse la solución planteando la proporción como sigue:

$$176 : 16 :: 27 : x$$

Asimismo habría resultado bien la proporción diciendo:

El número de pesetas que busco es al de pesetas que conozco, como el número de los metros que quiero comprar es al de los metros ya comprados.

$$x : 176 :: 27 : 16$$

$$\therefore x = 176 \times \frac{27}{16} = 297$$

Y habría resultado mal, procediendo de este otro modo:

$$x : 176 :: 16 : 27$$

Aunque (como se acaba de ver) hay muchos modos de plantear bien una proporción, facilita grandemente ese planteamiento el que cada razón resulte constituida por términos de la misma denominación.

Es decir, que, en el problema propuesto, una razón ha de aparecer formada con los precios, y con los metros otra.

Y también, contra lo que se acostumbra (1), conviene empezar por la incógnita, colocando los términos como sigue:

Pesetas.	Metros.
x	27
176	16

Resultan así dos razones

$$\frac{x}{176} \text{ y } \frac{27}{16}$$

y entonces la solución se obtiene mediante esta sencillísima regla:

La incógnita es igual á su denominador multiplicado por la otra razón de los datos conocidos:

$$x = 176 \times \frac{27}{16}$$

También es de gran importancia simplificar los datos cuanto se pueda antes de ejecutar las operaciones definitivas.

$$x = 176 \times \frac{27}{16} = 11 \times 27 = 297.$$

---

(1) Regularmente los maestros de cuentas escriben las proporciones á que da lugar la regla de tres de tal manera que la incógnita resulta ser el cuarto término; esto es, el último de los extremos; pero semejante uso ni facilita los cálculos ni puede presentarse como obligatoria prescripción. La incógnita puede ocupar cualquiera de los cuatro lugares, si bien el más conveniente sea el primero.

¿Cuánto me costarán 27 metros de paño, si 16 cuestan 176 pesetas?

$$x : 176 :: 27 : 16$$

Para comprar 27 metros de paño ¿cuánto habré de desembolsar en el supuesto de que 16 cuestan 176 pesetas?

$$27 : x :: 16 : 176$$

Si he comprado 16 metros con 176 pesetas ¿cuántos podré comprar con 297?

$$16 : 176 :: x : 297$$

Si con 176 pesetas compré 16 metros, con 297 ¿cuántos compraré?

$$176 : 16 :: 297 : x$$

El último procedimiento, que consiste, por una parte, en formar dos razones cada una con términos de la misma denominación, é iniciar la primera con la incógnita; y, por otra parte, en simplificarlas hasta donde sea posible, resulta de capital importancia, no por ser esencial, sino por el mucho tiempo que ahorra al calculador. No es esencial (repitámoslo) sino expeditivo; y claro es que, en el caso presente, nada se opone á que el problema se resuelva según es de costumbre y aconsejan muchos autores, colocando la incógnita al fin.

$$16 : 27 :: 176 : x$$

metros : á metros : : pesetas : á pesetas

ó bien

$$16 : 176 :: 27 : x$$

metros : á su precio : : los otros metros : al suyo, etc.

Lo único absolutamente preciso al plantear una proporción es que los términos se correspondan proporcionalmente; esto es, que, si tratándose de términos directamente proporcionales (1), una razón empieza por el término mayor, empiece también la otra por el correlativo mayor (ó viceversa). Así, pues, para plantear bien la última proporción, no habría bastado con decir:

pesetas : á pesetas : : metros : á metros

sino

el $>$ n.° de ptas. : al $<$ n.° de ptas. : : el $>$ n.° de metr. : al $<$ n.° de metr.

ó viceversa

el $<$ n.° de ptas. : al $>$ n.° de ptas. : : el $<$ n.° de metr. : al $>$ n.° de metr.

Pero, puesto que siempre conviene empezar por la incógnita, lo mejor es la formación de las dos razones, de igual denominación cada una.

Pesetas		Metros
x pesetas que buscamos : á pesetas conocidas,	: :	metros que queremos comprar : á los metros ya comprados;

(1) Véase el fin de esta Lección.

de donde sale directamente

$$x = \text{pesetas de lo comprado} \times \frac{\text{metros que se han de comprar}}{\text{metros ya comprados}}$$

De lo dicho resulta que en todo problema que haya de resolverse por la regla de oro entran cuatro cantidades proporcionales: tres conocidas y una incógnita: que dos de esas cuatro cantidades son de una denominación y dos de otra: que la proporción ha de plantearse de modo que los términos se correspondan proporcionalmente, y que conviene mucho empezar por la incógnita

	Denominaciones iguales á la de la incógnita.		Denominaciones distintas de la de la incógnita.
	x		Cantidad conocida.
	:	: :	:
	término de la misma denominación.		Cantidad conocida.
$\therefore\ x =$	al término conocido de la denominación de la incógnita.	$\times$	por la razón formada por los datos de la otra denominación.

Las proporciones de la clase de la propuesta no corresponden á la clase de aquellas en que las sumas son proporcionales á los sumandos respectivos, iguales en número, sino á la clase de las en que las sumas son proporcionales á los números de sumandos, idénticos en ambas sumas.

La proporción

$$176 : 16 :: x : 27$$

ó sea

$$176 : 16 :: 297 : 27$$

representa las siguientes sumas:

$$\begin{array}{rl} & 11 \text{ pesetas} \\ + & 11 \\ + & 11 \\ + & \left.\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{hasta completar}\\ \text{16 sumandos de}\\ \text{11 pesetas cada}\\ \text{uno.}\end{array} \\ \hline = & 176 \text{ pesetas.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 11 \text{ pesetas.} \\ + & 11 \\ + & 11 \\ + & \left.\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{hasta completar}\\ \text{27 sumandos de}\\ \text{11 pesetas cada}\\ \text{uno.}\end{array} \\ \hline = & 297 \text{ pesetas.} \end{array}$$

Como se ve, los sumandos son idénticos en ambas sumas: siempre 11 pesetas. Y los números proporcionales son las sumas 176 pesetas, y 16 sumandos, juntamente con 297 pesetas y 27 sumandos. Para formar la proporción ha sido, pues, necesario (obsérvese esto bien) considerar como puros (esto es, como repeticiones) á los números modulares 16 metros y 27 metros; pues, no prescindiendo de la denominación modular, habría carecido de sentido aritmético la proporción

176 pesetas : 16 : : 297 pesetas : 27

Hay dos clases de razones: directas ó inversas.

Los resultados obtenidos del problema propuesto han estado en razón directa de los datos conocidos.

Si 16 metros de tela me han costado 176 pesetas, claro es que más metros de la misma tela me costarán más dinero; ó bien, que por menos metros habré de desembolsar menos.

Cuando á *más* de una cosa corresponde siempre *más* de otra relacionada proporcionalmente con ella, y á *menos menos*, se dice que las razones son *directas*.

Pero no siempre sucede así; y cuando, en cosas relacionadas también proporcionalmente, al *más* corresponde *menos*, y al *menos* corresponde *más*, se dice que los datos están en razón *inversa*.

6 hombres han hecho cierto trabajo en 20 días; ¿cuántos hombres harán otro trabajo igual en 5 días?

Aquí es evidente que á *menos* días corresponden *más* hombres, y que el resultado ha de estar en razón *inversa* de los datos conocidos.

Sentemos los datos

Hombres.	Días.
x	5
6	20

Pero, como los días han de estar en razón inversa de los hombres, habrá que corregir del modo siguiente:

Hombres.	Días.
x	20
6	5

Y ahora, corregida así la razón de los días, podremos establecer la proporción correspondiente:

$$x : 6 : : 20 : 5 \ \therefore \ x = 6 \times \frac{20}{5} = 24 \text{ hombres.}$$

ó bien deducir directamente y sin planteamiento de proporción ninguna

$$x = 6 \times \frac{20}{5} = 6 \times 4 = 24 \ (1)$$

Hay, pues, dos clases de razones: directas é inversas.

Para conocer expeditivamente si dos razones son directa ó inversamente proporcionales, se duplica una de ellas; y, si para la subsistencia de la proporción es necesario duplicar también la otra, entonces ambas razones son directamente proporcionales (2); mas, si duplicando una hay que tomar la mitad de la otra para que los datos sigan siendo proporcionales, entonces las razones están en razón inversa.

Así, andando con movimiento uniforme un móvil en 5 segundos 35 metros, claro es que andando 10 segundos recorrerá 70; y, por tanto, las fracciones

$$\frac{5}{35} \text{ y } \frac{10}{70}$$

están en razón directa.

Mas, si un móvil que anda con movimiento uniforme en un segundo 7 metros ha tardado 6 minutos en recorrer cier-

---

(1) También para plantear un problema de razones inversas se pueden escribir como medios los datos conocidos no ligados á la incógnita

6 hombres : : 20 días

y después poner por extremos la incógnita y el otro dato conocido, ligado á ella; todo de modo que resulte una proporción de razones inversas:

x hombres : 6 hombres : : 20 días : 5 días.

$$\therefore \ x = 6 \times \frac{20}{5} = 24$$

(2) Esta regla no es más que un medio expeditivo: en vez de multiplicar por dos una de las dos razones, se la podía triplicar, cuadruplicar... etcétera, y bien se conoce que, á causa solamente de la facilidad de computar el doble ó la mitad de una cantidad, es por lo que se aconseja la multiplicación por 2.

ta distancia, es de evidencia que, andando á razón de 14 metros, tardará en recorrer la misma distancia la mitad del tiempo, esto es, 3 minutos (1).

Por último: ha de tenerse en todo caso muy presente que no siempre hay proporción cuando al *más* corresponde constantemente *más*, y al *menos menos*.

Para obtener números proporcionales es preciso que

$$\text{al doble de una razón corresponda el} \left\{ \begin{array}{c} \text{doble} \\ \text{ó} \\ \text{la mitad} \end{array} \right\} \text{de la otra razón (1).}$$

Mas, cuando es otra la ley de los aumentos correlativos, entonces no resulta proporcional el *más* de una denominación con el *más* de otra, ni el *menos* con el *menos*.

Por ejemplo: mientras más tiempo está cayendo un grave, más camino recorre; pero los caminos recorridos no son proporcionales á los tiempos; porque á doble tiempo no corresponde doble camino, sino muchísimo más; pues si un grave baja un espacio tal como 1 en el primer segundo, recorrerá un espacio tal como 3 en el segundo segundo, y un espacio tal como 5 en el tercer segundo, siempre conforme á la serie de los números impares 7, 9, 11, 13, 15, 17...; de donde sale la famosa ley de que los caminos recorridos son como los cuadrados de los tiempos, á que está sometido el universo de los astros. De modo que, si en 5 segundos ha recorrido un grave en su caída 25 espacios, bajará en 10, no el doble 50, sino el cuadrado de 10, ó sea 100 espacios.

A más radio corresponde siempre mayor esfera, pero no según la ley de las proporciones; pues, si á un radio tal como 1 corresponde una esfera como *uno*, á un radio 2 corresponde otra esfera como *ocho*, y á un radio 3 otra esfera como 27... según la ley de los cubos de los diámetros, etc., etc.

(1) Véase la nota (2) de la página anterior.

LECCIÓN VII

Planteamiento de las proporciones.

De lo expuesto en la Lección anterior sobre las razones directas é inversas, se deduce que dos fracciones de igual denominador están en razón directa de sus numeradores, y dos fracciones de igual numerador en razón inversa de sus denominadores.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{20}{5} : \frac{15}{5} :: 20 : 15 \\ \therefore\ 4 : 3 :: 20 : 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Razón directa:}\\ \text{A mayor numerador mayor valor.}\end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 4 \\ + & 4 \\ + & 4 \\ + & 4 \\ + & 4 \\ \hline = & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3 \\ + & 3 \\ + & 3 \\ + & 3 \\ + & 3 \\ \hline = & 15 \end{array}$$

A mayor dividendo mayor cuociente en igualdad de divisores:
A mayor suma mayor sumando en igualdad de sumandos.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{20}{5} : \frac{20}{4} :: 4 : 5 \\ \therefore\ 4 : 5 :: 4 : 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Razón inversa:}\\ \text{A mayor denominador menor valor del quebrado.}\end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 4 \\ + & 4 \\ + & 4 \\ + & 4 \\ + & 4 \\ \hline = & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ \hline = & 20 \end{array}$$

A mayor divisor menor cuociente en igualdad de dividendos.
A mayor sumando menor número de ellos en igualdad de sumas.

En toda proporción la incógnita ha de ser uno de los cuatro términos de la misma proporción

$$x : 48 :: 4 : 12 \therefore x = 48 \times \frac{4}{12} = 48 \times \frac{1}{3} = 16$$

Pero no sería proporción

$$x^2 : 48 :: 4 : 12 \therefore x^2 = 48 \times \frac{4}{12} = 48 \times \frac{1}{3} = 16$$

$$\therefore x = \sqrt{16} = 4.$$

Desde luego se ve que

$\sqrt{16}$, esto es, 4, no es á $48 :: 4 : 12$:

ni tampoco sería proporción, por análogo motivo,

$$\sqrt{x} : 48 :: 4 : 12 \therefore \sqrt{x} = 48 \times \frac{4}{12} = 48 \times \frac{1}{3} = 16$$

$$\therefore \quad x = 16 \times 16 = 256$$

La incógnita, pues, no ha de ser en la regla de tres ni potencia ni raíz.

En realidad toda proporción planteada para resolver una regla de tres es una condensación de otras dos proporciones referidas á la unidad.

Si he pagado 176 pesetas por 16 metros, ¿cuántas pagué por 1?

$$176 : 16 :: x : 1 \therefore x = \frac{176}{16} = 11$$

Ahora bien: si he pagado 11 pesetas por 1 metro, ¿cuántas habré de pagar por 27?

$$11 : 1 :: x : 27 \therefore x = 27 \times 11 = 297$$

Las dos operaciones que se acaban de hacer han sido

Una división, $\frac{176}{16}$ ó bien $176 \,\underline{|\; 16}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad |= 11$

Y una multiplicación, $27 \times 11 = 297$

Y, efectivamente, al condensar en una sola regla de tres las dos proporciones, nos resultó en la Lección anterior

$$\frac{176 \times 27}{16} = 176 \times \frac{27}{46} \text{ (1).}$$

Este método de cálculo se denomina: *Método de reducción á la unidad.*

De aquí que, cuando una proporción se plantea diciendo

Una cosa ya comprada : á su costo : : otra que ha de comprarse : al suyo x,

resultan los dos términos de la primera razón divisibles de tal modo, que la cosa comprada queda reducida á la unidad

16 metros : 176 pesetas : : 27 : x

La primera razón $\frac{16}{176}$ es evidentemente divisible por 16, lo que nos dará el precio de un metro, y tendremos:

$$1 : 11 : : 27 : x \therefore x = 27 \times 11 = 297 \text{ pesetas.}$$

Y de aquí también el que, constantemente casi, se puedan fácilmente simplificar dos de los términos correlativos de una proporción como las anteriores

12 hombres han hecho cierto trabajo en 40 días, ¿cuántos hombres harán otro trabajo igual en 5 días?

Hombres.	Días.
x	5
12	40
	A menos días más hombres: razón inversa. $= \frac{40}{5}$

$$x = 12 \times \frac{40}{5} = 12 \times 8 = 96 \text{ días.}$$

Por el método de reducción á la unidad habría que decir:

Si 12 hombres necesitan 40 días, ¿cuántos un hombre solo?

Claro es que habrá que multiplicar 12 por 40 = 480 días. Y decir ahora:

Si 1 hombre necesita 480 días, ¿cuántos 5?

Habrá que partir 480 por 5 = 96.

(1) Véase la correspondiente nota de la Lección anterior.

Para que al plantear una proporción resulten fácilmente dos razones, cada una de igual denominación, no es necesario escribir materialmente los datos y la incógnita en dos renglones (según ya se ha visto), sino que bastará con imaginarlos en cuanto el hábito dé seguridad.

Sea el problema: si 50 toneladas de carbón han costado 6 200 pesetas, ¿cuántas costarán 75 toneladas?

Pesetas.	Toneladas.
x	75
6200	50
	á más toneladas más pesetas: razón directa.

Esta disposición debe verse de memoria, y, vista, formar desde luego la correspondiente proporción,

$$x : 6200 :: 75 : 50$$

ó bien (y es lo mejor) deducir inmediatamente el valor de la incógnita

$$x = 6200 \times \frac{75}{50} = 6200 \times \frac{3}{2} = 3100 \times 3 = 9300 \text{ pesetas.}$$

Pero, mientras no pueda imaginarse con entera seguridad la disposición anterior, lo mejor será escribirla.

Si 5 hombres hacen 7 metros de cimientos, ¿cuántos se necesitarán para hacer 35?

Hombres.	Cimientos.
x	35
5	7
	á más metros más hombres: directa.

$$\therefore x = 5 \times \frac{35}{7} = 5 \times \frac{5}{1} = 25 \text{ hombres.}$$

Una guarnición de 3 000 hombres, sitiada en una plaza de guerra, tiene víveres hasta la primavera próxima, en que vendrá á levantar el cerco un gran ejército detenido ahora por las nieves. Para asegurar la resistencia de los sitiados, han recibido éstos un refuerzo de 2 000 hombres. ¿Cuánto habrá que reducir la ración de cada uno durante el mismo número de días?

Ración de cada hombre.	Soldados.
x	5000
1	3000
	á más soldados menor ración: razón inversa. $= \frac{3}{5}$

Luego habrá que corregir como sigue:

Ración.	Soldados.
x	3000
1	5000

$$\therefore x = 1 \times \frac{3000}{5000} = \frac{3}{5} \text{ (1)}$$

Un móvil anda en 5 segundos 35 metros: ¿cuántos andará en 9 segundos?

Metros.	Segundos.
x	9
35	5
	directa.

$$\therefore x = 35 \times \frac{9}{5} = 7 \times 9 = 63 \text{ metros (2)}$$

(1) Como en la nota anterior pudiera haberse planteado la proporción inversa escribiendo primeramente los medios

$$3000 :: 1$$

y después completando con los extremos

$$5000 : 3000 :: 1 : x.$$

(2) Reducción á la unidad:
Si en 5 segundos anda una locomotora 35 metros, ¿cuántos andará en 1?

Metros.	Segundos.
x	1
35	5

$$\therefore x = 35 \times \frac{1}{5} = 7$$

Ahora bien; si en 1 segundo anda 7 metros, ¿cuántos andará en 9?

Metros.	Segundos.
x	9
7	1
	directa.

$$\therefore x = 7 \times \frac{9}{1} = 63.$$

Un móvil que camina 7 metros por segundo tarda 10 en andar cierta distancia: ¿cuánto tardará en recorrer la misma distancia caminando 8 metros por segundo?

Segundos.	Metros.	
x	8	
10	7	
	á más metros por segundo, menos tiempo para igual distancia: proporción inversa	$= \frac{7}{8}$

$$\therefore\ x = 10 \times \frac{7}{8} = \frac{70}{8} = 8 \text{ segundos} + \frac{6}{8}$$

25 hectólitros de trigo han costado 550 pesetas: ¿cuántas costarán 77?

Pesetas.	Hectólitros.	
x	77	
550	25	
	á más hectólitros más pesetas: razón directa	$= \frac{77}{25}$

$$x = 550 \times \frac{77}{25} = 1694 \text{ pesetas (1).}$$

20 hombres desaguaron un pantano en 36 días. El pantano ha vuelto á llenarse como antes: ¿en cuántos días lo desaguarán 45 hombres?

Días.	Hombres.	
x	45	
36	20	
	á más hombres menos días: razón inversa.	$= \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$

$$x = 36 \times \frac{4}{9} = 16 \text{ días (2).}$$

(1) $550 \times \frac{77}{25} = \frac{550}{25} \times 77 = 22 \times 77 = 1694$

(2) $36 \times \frac{20}{45} = 36 \times \frac{4}{9} = \frac{36}{9} \times 4 = 4 \times 4 = 16$

Una fuente ha dado en 14 horas 2825 litros de agua: ¿cuántos producirá en 23 horas?

Litros.	Horas.
x	23
2825	14
	á más horas más litros: razón directa.

$$x = 2825 \times \frac{23}{14} = 4641 \frac{1}{14}$$

Una plaza sitiada tiene víveres para 15 días: ¿qué ración debe darse á cada soldado para resistir 25 dias?

Ración.	Días.
x	25
1	15
	á más días menos ración: razón inversa $= \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$$x = 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Una sala se ha empapelado con 200 metros de papel de 75 centímetros de ancho: ¿cuántos metros se necesitarán de otro papel cuyo ancho sea de 66,66... centímetros?

Metros.	Centímetros.
x	66,66...
200	75,
	mientras menos anchura más papel: razón inversa $= \frac{75}{66,66...}$

$$x = 200 \times \frac{75}{66,66...} = 225 \text{ metros. (1).}$$

(1) $200 \times \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = 200 \times \dfrac{\frac{9}{12}}{\frac{8}{12}} = 200 \times \frac{9}{8} = \frac{200}{8} = 25 \times 9 = 225$

La regla de oro se llama regla de tres simple cuando el valor de la incógnita depende del de tres cantidades conocidas, relacionadas entre sí proporcionalmente.

De otro modo:

El valor de la incógnita depende en la regla de oro de la formación de dos razones iguales (1).

(1) Hay libros que contienen numerosos problemas de la regla de tres. El maestro que no quiera entretenerse en imaginarlos para ponerlos á sus discípulos, en interés ante variedad, puede acudir á esas obras. Muchos de los anteriores ejemplos están tomados de ellas.

LECCIÓN VIII

Regla de tres compuesta.

Muchas veces el valor de una incógnita depende de la formación de más de dos razones iguales. Y, cuando tal sucede, el problema se resuelve por dos (ó más) reglas de tres *simples*, y por eso al procedimiento se le da el nombre de regla de tres *compuesta* (1).

7 albañiles han ganado en 8 días 168 pesetas, ¿cuánto ganarán 5 albañiles al mismo jornal durante 14 días?

Escribamos los datos, empezando por la incógnita, de modo que se correspondan los de la misma denominación

Pesetas.	Albañiles.	Días.
x	5	14
168	7	8

Prescindamos por el pronto de los días, lo que equivale á resolver este otro problema auxiliar:

Si 7 albañiles han ganado 168 pesetas, ¿5 cuánto ganarán?

Pesetas.	Hombres.
x	5
168	7

(1) Obsérvese lo impropio de estas denominaciones.

de modo que resultará una proporción de términos en razón directa con los de la en que está la incógnita:

$$\therefore x = 168 \times \frac{5}{7} \text{ pesetas.}$$

Ahora bien:

Si 5 hombres ganan en 8 días $168 \times \frac{5}{7}$ ¿cuánto ganarán en 14?

Pesetas.	Días
x	14
$168 \times \frac{5}{7}$	8

de donde sale esta otra proporción, también de términos en razón directa:

$$x = \left(168 \times \frac{5}{7}\right) \times \frac{14}{8}$$

$$\therefore x = 168 \times \frac{5}{7} \times \frac{14}{8} = 210 \text{ pesetas (1)}$$

Obsérvese que en la solución entran como factores en razón directa de los de la razón en que está la incógnita, las dos razones que contienen sólo datos, multiplicadas por el término conocido ó denominador de la razón en que está la incógnita.

Las tres razones de la misma denominación resultaron

$$\frac{x}{168};\ \frac{5}{7} \text{ y } \frac{14}{8}$$

Y la incógnita es

$$x = 168 \times \frac{5}{7} \times \frac{14}{8}$$

Los problemas resolubles por la regla de tres compuesta contienen varias cantidades proporcionales, siempre en número par, y de la misma denominación dos á dos, inclusa la incógnita respecto de su denominador.

40 hombres han abierto en 24 días 600 metros de un canal; ¿en cuántos abrirán 25 hombres otros 500 metros?

Escribamos estos datos, empezando por la incógnita, de modo que se correspondan los de una misma denominación.

(1) $168 \times \frac{5}{7} \times \frac{14}{8} = 168 \times 5 \times \frac{2}{8} = 21 \times 5 \times 2 = 21 \times 10 = 210$ pesetas.

Días.	Metros.	Hombres.
x	500	25
24	600	40

Resultan, pues, tres razones para resolver el problema:

Una contiene la incógnita, y dos contienen sólo datos conocidos;

Días.	Metros.	Hombres.
$\frac{x}{24}$	$\frac{500}{600}$;	$\frac{25}{40}$;

Los denominadores son todos datos conocidos; y se han de leer así:

En 24 días han abierto 600 metros de canal 40 hombres.

Supongamos ahora que los 25 hombres deban hacer, no 500 metros, sino también 600. Entonces tendremos este otro problema auxiliar.

Si 40 hombres han abierto 600 metros de canal en 24 días, ¿cuántos días emplearán 25 hombres en hacer otro tanto?

Días.	Hombres.
x	25
24	40.

Pero, como 25 hombres necesitarán más tiempo, será preciso invertir la razón de los operarios; por lo cual habrá que corregir como sigue, por resultarnos inversa una de las razones:

Días.	Hombres.
$\frac{x}{24}$	$\frac{40}{25}$

Y tendremos

$$x : 24 :: 40 : 25 \;.\cdot.\; x = 24 \times \frac{40}{25}$$

Claro es que podemos ahora simplificar el valor de x; pero no hay necesidad, diciendo: Si 25 hombres han invertido $\left(24 \times \frac{40}{25}\right)$ días en abrir 600 metros, ¿cuántos días invertirán los mismos hombres en abrir 500?

Designemos por x' esta nueva incógnita (que es la del problema), y resultará:

Días.	Metros.
x'	500
$24 \times \frac{40}{25}$	600

Y, como á menos metros menos días, formaremos la proporción siguiente de términos en razón directa:

$$x : 24 \times \frac{40}{25} : : 500 : 600$$

Por consiguiente,

$$x = 24 \times \frac{40}{25} \times \frac{500}{600} = 32 \ (1)$$

Obsérvese que en la solución entran como factores las dos razones que contienen sólo datos; pero una de ellas invertida, por haber habido en el problema una razón de términos en razón inversa con los de la razón en que la incógnita se encuentra:

$$\frac{40}{25} \text{ y } \frac{500}{600}$$

De modo que, si en vez de haber escrito, al iniciarse la solución del problema,

Días.	Metros.	Hombres.
x	500	25
24	600	40

hubiésemos escrito

Días.	Metros.	Hombres.
x	500	40
24	600	25

habríamos hallado directamente el valor de x multiplicando el denominador, término conocido, de la razón donde está la incógnita, por las otras dos razones de sólo datos conocidos (una de ellas invertida).

$$24 \times \frac{500}{600} \times \frac{40}{25} = 32$$

Un gran vapor de los que atraviesan el Atlántico en 7 días ha perdido en un ciclón las hélices, parte del aparejo y todos los recursos alimenticios que llevaba sobre cubierta. El

(1) Simplificando, tendremos:

$$x = 24 \times \frac{40}{25} \times \frac{500}{600} = 24 \times \frac{8}{5} \times \frac{5}{6} = 4 \times 8 = 32$$

vapor conduce 200 pasajeros, y el capitán calcula que no quedan víveres más que para diez días. En esto llegan al vapor 200 náufragos de otros buques: el capitán los recibe, y, continuando su viaje á la vela, observa que tardará 20 días en llegar á puerto. ¿Qué ración es la que puede dar á los pasajeros que lleva á bordo?

Sentemos los datos empezando por la incógnita: ¿qué ración habrá que dar á 400 hombres en 20 días si sólo hay víveres para 200 en 10?

Ración.	Pasajeros.	Días.
x	400	20
1	200	10

Observando que á más pasajeros corresponde menos ración, y también que habrá menos que comer en mayor número de días, será preciso invertir las correspondientes razones anteriores, y corregir como sigue, por haber dos razones de términos en razón inversa respecto de los de la razón de la incógnita.

Ración.	Pasajeros.	Días.
x	200	10
1	400	20

y entonces tendremos que la ración que habrá que dar á cada persona será

$$x = 1 \times \frac{200}{400} \times \frac{10}{20} = \frac{1}{4} \text{ (1)}$$

En esta solución entran como factores, pero invertidas, las dos razones que contienen sólo datos, y su producto se halla multiplicado por el denominador ó término conocido de la razón en que aparece la incógnita. Las razones, al sentarse los datos de modo que se correspondiesen los de igual denominación, eran

$$\frac{x}{1}, \quad \frac{400}{200} \quad \text{y} \quad \frac{20}{10}$$

y el valor de la incógnita es

$$x = 1 \times \frac{200}{400} \times \frac{10}{20}$$

Hay aquí dos razones invertidas, porque del problema re-

(1) $x = 1 \times \frac{200}{400} \times \frac{10}{20} = 1 \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

sultan dos razones cuyos términos están en razón inversa de los términos de la razón en que se encuentra la incógnita.

Según acabamos de ver, los problemas que dan lugar á la regla de tres compuesta, se resuelven:

1.° Disponiendo los términos de modo que, empezándose por la incógnita, se correspondan los de la misma denominación;

2.° Si los términos conocidos están en razón directa de los que constituyen la razón en que está la incógnita, ésta es igual al término conocido ó denominador de su propia razón, multiplicado por las otras razones de términos conocidos;

3.° Si los términos conocidos están en razón inversa de los que constituyen la razón en que está la incógnita, se invierten primero las razones de términos conocidos, y, hecho esto, la incógnita resulta igual al término conocido de su propia razón, multiplicado por las otras razones invertidas;

4.° Si de los términos conocidos unos están en razón directa y otros en razón inversa de los que constituyen la razón en que está la incógnita, se dejan intactos los de razón directa, y se invierten los de razón inversa; y, finalmente, se halla el valor de la incógnita multiplicando el término conocido de su razón por las otras razones directas é invertidas.

Aplíquense las precedentes reglas á los siguientes ejemplos presentados como clásicos por diferentes autores.

Con 60 kilogramos de hilo se han tejido 5 piezas de tela de 27 metros de largo y 50 centímetros de ancho, ¿con cuántos kilogramos del mismo hilo se tejerán 9 piezas de 30 metros de largo y 75 centímetros de ancho?

Sentemos estos datos, empezando por la incógnita, según antes se ha hecho.

Kilogramos.	Piezas.	Largo.	Ancho.
x	9	30	75
60	5	27	50

¿Habrá que invertir alguna de las razones? No; porque todas están en razón directa de la razón donde está la incógnita, $\frac{x}{60}$. En efecto, para hacer 9 piezas se necesita más material que para 5; para que tengan 30 metros de largo, más que para que tengan 27; para que tengan 75 centímetros de ancho, más que para obtenerlas de 50.

$$\therefore x = 60 \times \frac{9}{5} \times \frac{30}{27} \times \frac{75}{50} = 180 \quad (1).$$

Supongamos ahora que los datos hubiesen sido como sigue:

Con 60 kilogramos de hilo se han tejido 5 piezas, cada una de 27 metros de largo y 75 centímetros de ancho; ¿con cuántos kilogramos se obtendrán 9 piezas de 30 metros de largo y 50 centímetros de ancho? Y tendremos:

Kilográmos.	Piezas.	Largo	Ancho.
x	9	30	50
60	5	27	75

¿Habrá que invertir alguna de las razones? Tampoco. La incógnita tiene que ser respecto de 60 como 9 respecto de 5, porque á mayor número de piezas corresponde más material que el necesario para 5; tiene por análoga consideración que ser como 30 á 27; y, por último, ha de ser respecto de 60 como 50 á 75, porque á menos ancho corresponde menos hilo. Por consiguiente, habiendo de estar la incógnita respecto del 60, como las otras razones, resultará

$$x = 60 \times \frac{9}{5} \times \frac{30}{27} \times \frac{50}{75} = 80 \quad (2)$$

40 hombres trabajando 7 horas diariamente han hecho 300 metros en 8 días; ¿cuántos días tardarán 51 hombres si trabajan 6 horas diariamente para hacer 459 metros?

Días.	Hombres.	Horas.	Metros.
x	51	6	459
8	40	7	300
	A más hombres menos días. Inversa.	A menos horas más días. Inversa.	A más metros más días. Directa.

$$\therefore x = 8 \times \frac{40}{51} \times \frac{7}{6} \times \frac{459}{300} = 11\frac{1}{5} \quad (3).$$

(1) $60 \times \frac{9}{5} \times \frac{30}{27} \times \frac{75}{50} = 12 \times 9 \times \frac{10}{9} \times \frac{3}{2} = 12 \times 5 \times 3 = 12 \times 15 = 180$

(2) $60 \times \frac{9}{5} \times \frac{30}{27} \times \frac{50}{75} = 12 \times 9 \times \frac{10}{9} \times \frac{2}{3} = 4 \times 10 \times 2 = 80$

(3) $8 \times \frac{40}{51} \times \frac{7}{6} \times \frac{459}{300} = 8 \times \frac{40}{51} \times \frac{7}{6} \times \frac{153}{100} = 8 \times 4 \times \frac{7}{6} \times \frac{3}{10}$
$= 8 \times 4 \times \frac{7}{2} \times \frac{1}{10} = 8 \times 2 \times 7 \times \frac{1}{10} = 16 \times 7 \times 0{,}1 = 11{,}2$

18 piezas de tela de 1,50 metros han costado 5986 pesetas, ¿cuánto costarán 11 piezas de igual calidad y largo, pero de 1,25 de ancho?

Pesetas.	Piezas	Ancho.
x	11	1,25
5986	18	1,50
	A menos piezas menos dinero. Razón directa.	A menos ancho menos dinero. Razón directa.

$$\therefore\ x = 5986 \times \frac{11}{18} \times \frac{1,25}{1,50} = 3048\frac{28}{54} \quad (1)$$

25 zapadores trabajando 9 horas por día han invertido 12 días en cavar un foso de 50 metros de largo, 4 de ancho y 6 de profundidad en un terreno de resistencia igual á 1, ¿cuántos zapadores se necesitarán para que trabajando 10 horas al día durante 18 días, caven otro foso de 100 metros de largo por 3 de ancho y 4 de profundidad en un terreno de doble resistencia?

Zapadores.	Horas.	Días.	Metros.	Ancho.	Profundidad	Resistencia
x	10	18	100	3	4	2
25	9	12	50	4	6	1
	A más horas menos hombres. Razón inversa.	A más días menos hombres. Inversa.	A más metros más hombres. Directa.	A menos ancho menos hombres. Directa.	A menos prof. menos hombres. Directa.	A más resistencia más hombres. Directa.

Por consiguiente

$$x = 25 \times \frac{9}{10} \times \frac{12}{18} \times \frac{100}{50} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{1} = 30. \quad (2)$$

Un estanque se llena de agua en 9 días por 2 caños que están abiertos 12 horas al día: cada uno arroja 100 litros

(1) $5986 \times \frac{11}{18} \times \frac{125}{150} = 5986 \times \frac{11}{18} \times \frac{5}{6} = 2993 \times \frac{55}{54} = 3048\frac{23}{54}$,

(2) $25 \times \frac{9}{10} \times \frac{12}{18} \times \frac{100}{50} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{6} \times 2 = 25 \times \frac{1}{10} \times \frac{12}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2$
$= \frac{5}{2} \times 6 \times 2 = 5 \times 6 = 30.$

por hora. ¿Cuántos días tardará en llenarse el mismo estanque por 4 caños que estén abiertos 15 horas al día, si arroja cada uno 75 litros por hora?

Días.	Caños.	Horas.	Litros.
x	4	15	75
9	2	12	100

Registrados los datos como se ve, se comparan los días con cada una de las otras especies, y se halla que están en razón inversa de todas ellas: por consiguiente, resulta

$$x = 9 \times \frac{2}{4} \times \frac{12}{15} \times \frac{100}{75} = \frac{24}{5} \text{ días} = 4^{d}\,19^{h}\,12^{m}.$$

Han abierto 78 operarios, en 15 días, 3 zanjas de 42 metros de longitud, 14 de anchura y 5 de profundidad, en un terreno cuya resistencia se expresa por 4, trabajando 10 horas al día, con una fuerza expresada por 168. ¿Cuántos operarios abrirán en 12 días 8 zanjas, de 45 metros de longitud, 11 de anchura y 2 de profundidad, en un terreno cuya resistencia es 7, trabajando 9 horas al día, con una fuerza expresada por 200?

Preparado el problema como se ve á continuación,

Operarios.	Días.	Zanjas.	Largo.	Ancho.	Hondo.	Resistencia.	Horas.	Fuerza.
x	12	8	45	11	2	7	9	200
78	15	3	42	14	5	4	10	168

se compara la especie de la incógnita, que es operarios, con cada una de las otras, y se halla que está en razón inversa de los días, directa de las zanjas, directa del largo, directa del ancho, directa del hondo, directa de la resistencia, inversa de las horas, é inversa de la fuerza. Por consiguiente, resulta

$$x = 78 \times \frac{15}{12} \times \frac{8}{3} \times \frac{45}{42} \times \frac{11}{14} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} \times \frac{10}{9} \times \frac{168}{200} = 143 \text{ operarios}.$$

Por medio de la regla de tres se resuelven muchas complicadas cuestiones de proporcionalidad referentes á interés del dinero, giros, ganancias y pérdidas, repartos de capitales, mezclas, etc.

Estas cuestiones son todas de mera aplicación y tienen un carácter técnico tan marcado que resultan ajenas al objeto de esta obra. El discípulo debe estudiarlas en las Aritméticas Comerciales ó en las de índole industrial, donde estén tratadas con gran extensión y minuciosidad de pormenores respecto á los pesos, medidas y monedas de los países donde no rige todavía el sistema métrico decimal. Es estudio sumamente laborioso, y en que pocos, pocos llegan á maestros. Y no por las dificultades de teoría (que en esas cuestiones no las hay), sino por la multitud de noticias que reclaman, y la rapidez y seguridad que requieren del operador; pues la equivocación más insignificante cuesta siempre el dinero al industrial, al comerciante, al bolsista... que la comete.

Estudie, pues, con suma detención el discípulo que aspire á la especialidad en los negocios:

La regla de compañía,
interés simple,
interés compuesto,
anualidades,
imposiciones,
seguros,
descuentos,
barata,
ganancias y pérdidas,
averías,
tara,
aligación,
falsa posición, sencilla y doble,
conjunta,
cambios,
arbitrajes,

y las especialidades á que dan lugar las industrias y las aduanas.

Hay que repetirlo. El estudio de estas especialidades requiere mucha aplicación, mucha práctica y mucho tiempo, y de ninguna manera merecen el desdén con que las miran hasta profesores que las ignoran.

LECCIÓN IX

Progresiones.—Preliminares.

Cuando comparamos una magnitud con otra, podemos proponernos dos fines:

Ver cuál de las dos es mayor ó menor,

O bien

Ver cuántas veces la menor está comprendida en la mayor.

Si nos proponemos, por ejemplo, saber cuál es mayor de las dos líneas siguientes A B y C D

$\overline{\text{A} \qquad\qquad\qquad \text{B}}$ $\overline{\text{C} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{D}}$ $\overline{\text{E} \quad \text{F}}$

pondremos la A B sobre la C D, observaremos que la C D es más larga y diremos que entre una y otra hay la diferencia E F.

Si podemos expresar por números esas magnitudes, midiéndolas, observamos que

A B = 30 milímetros; C D = 40 milímetros; y E F = 10 milímetros

y, entonces, decimos que esas líneas están en la *razón por diferencia* de 30 á 40. Y llamamos *razón por diferencia* al 10 milímetros, cantidad en que difieren ambas magnitudes.

Si nos proponemos averiguar cuántas veces cabe I J en G H

$\overline{\text{G} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{H}}$ $\overline{\text{I J}}$

mediremos G H con I J; y, viendo que I J cabe 7 veces en G H, diremos que la *razón geométrica* de G H á I J es = 7

$$\frac{\text{G H}}{\text{I J}} = 7$$

Y si, medidas esas magnitudes, encontrásemos que

$$G\,H = 35 \text{ milímetros, y } I\,J = 5 \text{ milímetros,}$$

diríamos que la *razón geométrica* de G H á I J es = 7:

$$\frac{35}{5} = 7$$

Hay, pues, dos clases de razones:

Razones por diferencia ó aritméticas (1),

Razones por cuociente ó geométricas (1).

Las razones por diferencia pueden prescindir de los valores numéricos: sin necesidad de contar el número de milímetros, es posible señalar en una cinta la magnitud en que una longitud excede á otra (2); pero la razón por cuociente necesita el número: «esto pesa cinco veces más que esto otro», etcétera (3).

Siempre que las razones pueden expresarse por números, se prefiere la forma fraccionaria; y, así, en vez de las expresiones

$$A\,B - C\,D = E\,F \quad \text{(razón aritmética)}$$

$$\frac{G\,H}{I\,J} = 7 \qquad \text{(razón geométrica)}$$

se adoptan las numéricas, sus iguales,

$$35 - 30 = 5$$

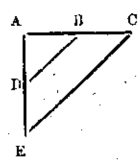
$$\frac{35}{5} = 7;$$

(1) Sin propiedad ninguna se llama *aritméticas* á las razones por diferencia, y *geométricas* á las razones por cuociente.

(2) «Esta es la Aritmética de los sastres y de las costureras», recuerdo haber leído en un artículo humorístico.

Ninguna costurera sabe, por lo común, multiplicar, ni falta que le hace. Si algo sobra en un vestido, cortan el sobrante, cuando, superpuestas las prendas al cuerpo de quien visten, observan un excedente. Y, si viceversa, ensanchan. Pero nunca hacen mediciones numéricas.

(3) Sin embargo, en geometría las líneas proporcionales pueden prescindir del número.



A B : B C :: A D : D E, etc.

Pero la idea de número está realmente sobrentendida en razones como la precedente.

de modo que un problema lineal, siempre muy concreto, se transforma en otro numérico muy general; pues, en vez de decir individualmente: «la razón aritmética entre esta línea de 35 milímetros y esta otra de 30 es igual á 5», podemos generalizar á todos los casos, diciendo: «Cualquier magnitud (*longitud*, *peso*, *tiempo*,... etc.), igual á 35 es aritméticamente á otra de su especie igual á 30, como 35 — 30», ó bien (pasando al otro ejemplo) «cualquier magnitud igual á 35 está respecto de otra igual á 5, como $\frac{35}{5} = 7$».

Es inmensa la importancia de las razones, especialmente de las geométricas; porque hay magnitudes que no pueden expresarse directamente, sino por relaciones numéricas.

Por ejemplo: la densidad de un cuerpo depende de su masa, ó sea del número de sus moléculas en un volumen dado: como no podemos contar esas moléculas, porque hasta ellas no llegan nuestros medios de investigación, calculamos la masa por el peso, ó sea por la fuerza con que la tierra atrae el cuerpo; y, por consiguiente, la densidad se determina por la relación del peso al volumen (á condición de ser números puros los números expresivos del volumen y del peso).

Llamamos *fuerza* á la causa desconocida que pone en movimiento un cuerpo. Consideramos como evidente que, mientras mayor sea la masa de ese cuerpo, esto es, mientras mayor sea el número de sus moléculas, más grande ha de ser la fuerza que lo impulse. También miramos como evidente que para que la velocidad del movimiento sea mayor, mayor ha de ser la fuerza. Por consiguiente, la cantidad de movimiento ha de ser igual á la masa por la velocidad. ¡Relaciones puramente numéricas de cosas desconocidas!

Y, en general, resultan de *razones geométricas* las fórmulas de electricidad, de mecánica, y demás de la física:

$$\text{Velocidad uniforme} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$$

y tantas, tantas otras que aquí sería fuera de propósito citar.

Con dos *razones por diferencia* se obtienen *proporciones por diferencia*.

Denomínaselas EQUIDIFERENCIAS.

Y se define la equidiferencia diciendo que es la igualdad de dos razones por diferencia.

Una equidiferencia se escribe como sigue:

$$5 \,.\, 3 : 17 \,.\, 15$$

separando por un punto los términos de cada razón, y deslindando las razones por dos puntos.

Las equidiferencias se leen como las proporciones geométricas: por ejemplo:

5 es á 3 como 17 es á 15

El primer término de cada razón por diferencia recibe el nombre de *antecedente* y el segundo de *consecuente*.

Llámanse *medios* los dos términos del centro; esto es, el consecuente de la primera razón aritmética y el antecedente de la segunda; y se denominan extremos los otros dos términos. Así, en el ejemplo anterior, 3 y 17 son los medios, y 5 y 15 los extremos.

La propiedad fundamental de toda equidiferencia es

la suma de los medios, es igual á la suma de los extremos.

Y, con efecto, en el ejemplo tenemos

$$5 + 15 = 3 + 17. \quad (1)$$

Si es cero la diferencia entre la suma de dos sumandos y la suma de otros dos sumandos, los cuatro sumandos forman una

---

(1) En la equidiferencia propuesta

$$5 \,.\, 3 : 17 \,.\, 15$$

los antecedentes son respectivamente iguales á sus consecuentes + la razón 2.

De modo que esa equidiferencia es igual á esta otra

$$(3 + 2) : 3 : (15 + 2) \,.\, 15$$

Por tanto, la suma de los medios se halla siempre compuesta de los mismos sumandos que la de los extremos:

$$(3 + 2) + 15 = 3 + (15 + 2)$$

Y, como esta es propiedad independiente de los números propuestos, resulta que siempre la suma de medios es en las equidiferencias igual á la de los extremos.

equidiferencia, si los sumandos de una suma se ponen como medios y los de otra como extremos.

$$\begin{array}{l} 141+\ 17=158 \\ \ 34+124=158 \\ \therefore\ 141\ .\ 34\ :\ 124\ .\ 17 \end{array} \Big\} \ 158-158=0$$

En efecto

$$141-\ 34=107;\ 124-17=107$$

De las propiedades anteriores resultan variantes análogas á las estudiadas en las proporciones geométricas, sumamente fáciles de hallar por el alumno.

En toda equidiferencia

Un medio es igual á la suma de los extremos menos el otro medio;

Y un extremo es igual á la suma de los medios menos el otro extremo.

Si

$$\begin{array}{rl} & 14\ .\ \ 9\ :\ 21\ .\ 16 \\ \therefore & 14=(\ 9+21)-16 \\ & 9=(14+16)-21 \\ & 21=(16+14)-\ 9 \\ & 16=(\ 9+21)-14 \end{array}$$

Por consiguiente, nada más fácil que

Dados tres términos de una equidiferencia, hallar el cuarto.

$$\begin{array}{l} x\ .\ 5\ :\ 291\ .\ 289\ \therefore\ x=(5+291)-289=\ 7 \\ 7\ .\ x\ :\ 291\ .\ 289\ \therefore\ x=(7+289)-291=\ 5 \\ 7\ .\ 5\ :\ x\ .\ 289\ \therefore\ x=(7+289)-\ 5=291 \\ 7\ .\ 5\ :\ 291\ .\ x\ \therefore\ x=(5+291)-\ 7=289 \end{array}$$

Se llama continua la equidiferencia cuyos medios son iguales

$$10\ .\ 7\ :\ 7\ .\ 4$$

Si la incógnita ocupase los medios

$$10\ .\ x\ :\ x\ .\ 4$$

tendríamos

$$10+4=x+x=2\times x$$

$$\therefore\quad x=\frac{10+4}{2}=7$$

De manera que en una equidiferencia continua, la incógnita es = á la semisuma de los extremos (1).

(1) Las demás propiedades de las equidiferencias son análogas á las de las proporciones geométricas y han de ser evidentes para quien hubiere estudiado estas proporciones.

La semisuma entre dos números se llama *media diferencial* entre los mismos. También se le da el nombre de *media aritmética*.

¿Cuál es la media diferencial de 24 y 46?

$$\frac{24 \times 46}{2} = \frac{70}{2} = 35 \therefore 24 \,.\, 35 : 35 \,.\, 46; \text{ razón } 11$$

¿Cuál la de a y b?

$$\frac{a + b}{2}$$

Recuérdese (Lección I de las proporciones por cuociente) que en ellas se llama *media factorial* no á una semisuma, sino á la raíz cuadrada del producto de dos números.

¿Cuál es la media factorial entre 5 y 80?

$$\sqrt{5 \times 80} = \sqrt{400} = 20$$

Y, en efecto,

$$5 : 20 :: 20 : 80; \text{ razón} = 4$$

¿Cuál es la media factorial entre a y b?

$$\sqrt{a \times b}$$

La media diferencial entre dos números es $>$ que la media factorial entre los mismos.

¿Cuál es la media diferencial entre 3 y 75?

$$\therefore \frac{3 + 75}{2} = \frac{78}{2} = 39$$

$$\therefore 3 \,.\, 39 : 39 \,.\, 75; \text{ razón} = 36$$

¿Cuál es la media factorial entre los mismos números 3 y 75?

$$\sqrt{3 \times 75} = \sqrt{225} = 15$$

$$\therefore 3 : 15 :: 15 : 75; \text{ razón} = 5$$

Digo que necesariamente la media diferencial 39 ha de ser $>$ que la media factorial 15, y que el resultado no es propiedad especial de los números dados 3 y 75.

En efecto: el mayor de los números dados, que es el 75, resulta evidentemente igual á la suma del menor, y de la diferencia entre mayor y menor.

Diferencia entre mayor y menor $= 75 - 3 = 72$

El mayor es la suma del menor con la diferencia;

$$\therefore\ 75 = 3 + 72$$

Por tanto, las fórmulas anteriores pueden ponerse en la siguiente forma:

$$\text{Media diferencial} = \frac{3+75}{2} = \frac{3+(3+72)}{2} = \frac{(2\times 3)+72}{2} = \frac{2\times 3}{2} + \frac{72}{2} = 3 + \frac{72}{2}$$

$$\text{Media factorial} = \sqrt{3\times 75} = \sqrt{3\times(3+72)} = \sqrt{3^2 + (3\times 72)}$$

Elevemos al cuadrado los miembros de las 2 fórmulas anteriores, y tendremos:

$$(\text{Media diferencial})^2 = 3^2 + \left[2\times\left(3\times\frac{72}{2}\right)\right] + \frac{72^2}{2^2} = 3^2 + (3\times 72) + \frac{72^2}{2^2}$$

$$(\text{Media factorial})^2 = 3^2 + 3\times 72$$

Restemos una ecuación de otra

$$(\text{Media dif.})^2 - (\text{media fact.})^2 = \left(3^2 + (3\times 72) + \frac{72^2}{2^2}\right) - [3^2 + (3\times 72)] = \frac{72^2}{4}$$

Donde vemos que la diferencia de los cuadrados de las medias aritmética y geométrica es igual á la 4.ª parte de la diferencia entre las 2 medias (1).

(1) Se sabe por el Algebra y la Geometría que la diferencia entre dos cuadrados es igual á la suma $\times$ por la diferencia de los números de que se trata.

$$a^2 - b^2 = (a+b)\times(a-b) \qquad \begin{array}{r} a + b \\ \times\ a - b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ -\ ab - b^2 \\ \hline = a^2 - b^2 \qquad \end{array}$$

Pues bien, llamemos M á la media diferencial;
llamemos m á la media factorial,

y la fórmula anterior se transformará en la siguiente:

$$M^2 - m^2 = \frac{\text{á la diferencia } 72^2}{4}$$

$$\therefore\ (M+m)\times(M-m) = \frac{(\text{diferencia})^2}{4}$$

$$\therefore\ M - m = \frac{(\text{diferencia})^2}{4\times(M+m)}$$

De donde resultará en el ejemplo propuesto

$$M - m = 39 - 15 = 24 = \frac{72^2}{4\times(39+15)} = \frac{72\times 72}{4\times 54} = \frac{5184}{216} = 24$$

De donde resulta que la media diferencial excede siempre á la factorial

$$\frac{\text{en el cuadrado de la diferencia entre ambas medias}}{\text{por 4 veces la suma de las mismas medias.}}$$

Y en efecto,

Cuadrado de la media dif. 39 — cuadrado de la media fact. $15 = 39^2 - 15^2$

$$\therefore\ 39^2 - 15^2 = 1521 - 225 = 1296$$

Ahora bien, la diferencia 72 entre 3 y 75 elevada al cuadrado y partida por 4 es =

$$\frac{72^2}{4} = \frac{5184}{4} = 1296$$

Y, como estas propiedades no son exclusivas de los números 3 y 75, resulta que, si los cuadrados de las medias diferenciales son mayores que los de las medias factoriales, también lo serán por necesidad las mismas medias sin cuadrar (1).

Se llama progresión á una serie de números consecutivos continuamente proporcionales.

---

(1) Los ejemplos anteriores de medias aritméticas y geométricas, ó, mejor dicho, de medias diferenciales y factoriales, son casos particulares de reglas más comprensivas.

La suma de n números dividida por el mismo n es la media diferencial entre dichos números.

Un hombre ganó el lunes 3 pesetas, el martes 7, el miércoles 5, el jueves 15, el viernes 17, el sábado 2 y el domingo nada: ¿cuál es la media proporcional entre esos números? O bien, ¿cuál fué la ganancia media?

Lunes	3	Ganancia término medio: $\frac{49}{7} = 7$ pesetas.
Martes	+ 7	
Miércoles	+ 5	
Jueves	+ 15	
Viernes	+ 17	
Sábado	+ 2	
Domingo	+ 0	
	= 49	

Análogamente: la raíz n del producto de n factores es la media factorial de dichos n números.

¿Cuál es la media factorial de los n números

$$a, b, c, d, \ldots u?$$

$$\sqrt[n]{a \times b \times c \times d \times \ldots \times u}$$

Los problemas aritméticos rara vez necesitan el empleo de esta fórmula, que exige el uso de las tablas de logaritmos.

Y lo mismo acontece con otros teoremas de las medias proporcionales.

Como hay dos clases de razones, hay también dos clases de progresiones:

Progresiones por diferencia, llamadas también *aritméticas*, y

Progresiones por cuociente, llamadas también *geométricas*.

÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11... progresión aritmética, cuya razón es 2

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : ... progresión geométrica, cuya razón es 2

Las progresiones son ascendentes ó descendentes:

Son ascendentes cuando el 1.er término es el menor de todos los de la serie:

Son descendentes cuando el 1.er término es el mayor de todos.

Las dos progresiones anteriores son ascendentes.

Las dos que siguen, descendentes:

÷ 95 . 90 . 85 . 80 . 75... razón aritmética = 5

∺ 15625 : 3125 : 625 : 125 : 25... razón geométrica = 5

El modo de escribir las progresiones es como queda visto en los ejemplos.

Por tanto,

Una progresión aritmética es una serie de números, cada uno de los cuales es igual al inmediato anterior aumentado ó disminuido en una cantidad constante, la cual se llama razón aritmética de la serie. En la de los números impares, primero presentada como ejemplo de progresión aritmética ascendente, cada término es mayor en dos unidades que el término precedente inmediato. Así,

$$3 = 1 + 2;\ 5 = 3 + 2;\ 7 = 5 + 2;\ 9 = 7 + 2;\ldots \text{ etc.}$$

Y en el ejemplo de progresión aritmética descendente, cada término es cinco unidades más chico que el inmediato anterior.

$$90 = 95 - 5;\ 85 = 90 - 5;\ 80 = 85 - 5;\ldots \text{ etc.}$$

Análogamente:

Una progresión geométrica es una serie de números, cada uno de los cuales es igual al inmediato anterior multiplicado ó dividido por una cantidad constante, la cual se llama razón geométrica de la serie. En la primera serie geométrica ascendente, puesta como ejemplo, cada término es doble del precedente inmediato; y en la segunda serie geométrica, que es la descendente, cada término es la quinta parte de su contiguo á la izquierda.

$$2 = 1 \times 2;\ 4 = 2 \times 2;\ 8 = 4 \times 2;\ 16 = 8 \times 2; \ldots$$

$$15625 \div 5 = 3125;\ 3125 \div 5 = 625; \ldots$$

LECCIÓN X

Proporciones por diferencia. – Intercalación de términos.

Tres términos consecutivos de una progresión por diferencia forman una proporción continua por diferencia.

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 \ldots$$

tomemos tres términos cualesquiera, por ejemplo

$$5 . 7 . 9$$

y tendremos

$$5 . 7 : 7 . 9 \therefore 5 + 9 = 7 + 7$$

Por eso tal progresión puede enunciarse

1 es 3 como 3 es á 5, como 5 es á 7, como 7 es á 9, etc.

Pero regularmente se dice, por abreviar,

progresión por diferencia: 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc.

Sabemos que todo término de una progresión por diferencia es igual al inmediato anterior, más ó menos la razón de la serie, según ésta sea creciente ó decreciente.

Por tanto, todos los términos pueden referirse al primero. (Véase el teorema inicial de la inmediata Lección.)

$$\div 12 . 18 . 24 . 30 . 36 . 42 \ldots \text{ razón} = 6.$$
$$\therefore \div 12 . (12+6) . [12+(6\times2)] . [12+(6\times3)] . [12+(6\times4)] . [12+(6\times5)] \ldots$$

De donde resulta que

un término cualquiera = al 1.º ± (la razón × por el número de términos anteriores al que se busca).

¿Cuál es el sexto término de una progresión creciente por diferencia, cuyo primer término es 12 y cuya razón es 6?

12 + (6 × por 5, que son los términos que hay antes del 6.º)
$\therefore 12 + (6 \times 5) = 12 + 30 = 42.$

¿Cuál es el octavo término de una progresión decreciente por diferencia, cuyo primer término es 15 y cuya razón es 2?

$$15 - (2 \times 7) = 15 - 14 = 1$$

Y, en efecto,

$$\div\ 15 \,.\, 13 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1$$

De la precedente fórmula concreta, resulta la general, porque,

Si a es el primer término de una progresión por diferencia,
u el último que se busca,
r la razón diferencial, y
n el número total de los términos;

tendremos, según sea ascendente ó descendente la progresión,

$$u = a \pm [r \times (n - 1)]$$

Verdaderamente en la práctica no es necesaria esta doble fórmula, porque toda progresión aritmética descendente puede considerarse como ascendente, si se toma el último término, esto es, el más chico, como si fuera el primero, con lo cual pueden uniformarse las cuestiones, quedando las dos fórmulas

$$u = a + [r \times (n - 1)] \text{ y } u = a - [r \times (n - 1)]$$

reducidas á una sola; á la primera:

$$u = a + [r \times (n - 1)]$$

Únicamente hay que considerar como incógnita al término a, y no al u, cuando la progresión fuere descendente; en lo que no puede haber dificultad ninguna, pues en la fórmula anterior puede ser desconocida cada una de las 4 cantidades que entran en ella.

Y, en efecto, podemos resolver los 4 problemas siguientes:

Fórmula 1.ª Hallar el último término: $u = a + [r \times (n - 1)]$

Fórmula 2.ª Hallar el primer término: $a = u - [r \times (n - 1)]$ (1)

Fórmula 3.ª Hallar la razón: $r = \frac{u - a}{n - 1}$ (2)

Fórmula 4.ª Hallar el núm. de términos: $n = \frac{u - a}{r} + 1$ (3)

¿Cuál es el octavo término de la progresión ascedente por diferencia, cuyo primer término es 7 y cuya razón es 3?

Por la fórmula primera tendremos:

$$\text{Ultimo término} = a + [r \times (n - 1)]$$

$$\therefore\ x = 7 + [3 \times (8 - 1)] = 7 + (3 \times 7) = 28$$

Y, en efecto, resulta

$$\div 7.10.13.16.19.22.25.28$$

---

(1) En la 1.ª de las cuatro fórmulas, a es un sumando; y como un sumando es igual á la suma menos el otro sumando, tendremos:

$$a = u - [r \times (n - 1)]$$

(2) En la misma fórmula 1.ª es $r \times (n - 1)$ otro sumando; y, como un sumando es igual á la suma menos el otro sumando, tendremos

$$r \times (n - 1) = u - a$$

Pero ya en esta fórmula, r es un factor; y, como un factor es igual al producto partido por el otro factor, resultará

$$r = \frac{u - a}{n - 1}$$

(3) En la 1.ª fórmula $r \times (n - 1)$ es un sumando,

$$\therefore\ r \times (n - 1) = u - a$$

Pero ahora, en ésta, $(n - 1)$ es un factor que será igual al dividendo $u - a)$ partido por el otro factor,

$$\therefore\ n - 1 = \frac{u - a}{r}$$

Y, por último, aquí u es minuendo, y será igual al sustraendo más el resíduo,

$$\therefore\ n = \frac{u - a}{r} + 1$$

¿Cuál es el octavo término de la progresión descendente por diferencia, cuyo primer término es 34 y cuya razón es 3?

Como la progresión es descendente, haremos uso de la segunda fórmula y buscaremos a como incógnita, con lo que tendremos,

$$a = \text{Primer término} = u - [r \times (n-1)]$$

$$\therefore\ x = 34 - [3 \times (8-1)] = 34 - 21 = 13$$

Y, en efecto,

$$\div 13.16.19.22.25.28.31.34;$$

ó bien, según se pedía,

$$\div 34.31.28.25.22.19.16.13$$

¿Cuál es la razón de la progresión por diferencia, cuyos extremos son 11 y 36 y el número de cuyos términos es 6?

Haremos uso de la fórmula tercera.

$$\text{Razón } r = x = \frac{u - a}{n - 1}$$

$$\therefore\ x = \frac{36 - 11}{6 - 1} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\div 11.16.21.26.31.36$$

¿Cuál es el número de términos de la progresión por diferencia, cuyos extremos son 49 y 5 y cuya razón diferencial es 4?

Por la fórmula cuarta tendremos

$$\text{Número de términos} = \frac{u - a}{r} + 1$$

$$\therefore\ x = \frac{49 - 5}{4} + 1 = \frac{44}{4} + 1 = 11 + 1 = 12$$

$$\div 5.9.13.17.21.25.29.33.37.41.45.49$$

Las cuatro anteriores fórmulas pueden utilizarse en la resolución de otros problemas. Por tanto, nunca se recomendará bastante que el discípulo encomiende á la memoria las cuatro fórmulas siguientes:

Ultimo término:

$= 1.^{\circ} + [\text{razón} \times (\text{por el núm. de ellos} - 1)]$ ó bien $u = a + [r \times (n - 1)]$

Primer término:

$= \text{últ.}^{\circ} - [\text{razón} \times (\text{por el núm. de ellos} - 1)]$ ó bien $a = u - [r \times (n - 1)]$

La razón:

$= \dfrac{\text{último} - 1.^{\circ}}{\text{número de ellos} - 1}$ ó bien $r = \dfrac{u - a}{n - 1}$

El número de términos:

$= \dfrac{\text{último} - 1.^{\circ}}{\text{razón}} + 1$ ó bien $n = \dfrac{u - a}{r} + 1$

Intercalar entre dos números dados un número determinado de medias diferenciales;

O bien

Intercarlar entre los datos un número dado de términos, de modo que todos formen una progresión por diferencia.

Sean los datos 7 y 15; esto es $\left\{ \begin{array}{l} \text{7 el 1.}^{\text{er}} \text{ término de la progresión y} \\ \text{15 el otro.} \end{array} \right.$

Sea 3 el número de las medias diferenciales que han de intercalarse entre 7 y 15.

Claro es que el total de términos de la serie será, después de la intercalación, igual á 5; 3 que han de ocupar el centro y los 2 de los extremos que nos son conocidos, 7 y 15.

Únicamente tenemos que encontrar la razón, que nos será dada por la fórmula tercera

$$r = \frac{u - a}{n - 1}$$

$$x = \frac{15 - 7}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$$

Y, en efecto,

$$\div\ 7.\underbrace{9.11.13}_{\text{Los 3 intercalados.}}.15$$

Intercalar 11 términos entre 1 y 49.

Siendo 13 el número total de los términos que ha de tener la progresión, resultará

$$x = \frac{49 - 1}{13 - 1} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\div\ 1.\underbrace{5.9.13.17.21.25.29.33.37.41.45}_{\text{Los 11 términos intercalados.}}.49.$$

Si entre cada dos términos de una progresión por diferencia se intercala el mismo número de medios diferenciales, la serie de todas las progresiones parciales constituye una sola y misma progresión; pero la nueva razón es la de cada serie intercalar.

Intercalemos 3 términos entre cada 2 de la siguiente progresión por diferencia, cuya razón es 8

$$\div 1.9.17.25.33.41.49$$

Intercalemos las 3 medias diferenciales entre cualesquiera dos términos de la progresión; por ejemplo entre el tercero y el cuarto, para lo cual sólo necesitamos hallar la razón correspondiente; y, según la fórmula tercera, tendremos

$$x = \frac{25-17}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$$

La nueva razón es 2 y, por tanto, la nueva progresión será

$$\div 1.\underbrace{3.5.7}.9.\underbrace{11.13.15}.17.\underbrace{19.21.23}.25.\underbrace{27.29.31}.33.\text{ etc.}$$

SUMA DE LAS PROGRESIONES

En toda progresión por diferencia, la suma de dos términos cualesquiera igualmente distantes de los extremos es igual á la de esos mismos extremos.

$$\div 1.4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34$$

$$1 + 34 = 35;\ 4+31=35;\ 7 + 28 = 35; \ldots\ 16 + 19 = 35.$$

Sabemos que

$$\begin{array}{ll}
\text{el 1}^{\text{er}}\text{ término de una progresión} & = a \\
\text{el 2.}^{\circ} & = a + (r \times 1) \\
\text{el 3.}^{\circ} & = a + (r \times 2) \\
\text{el 4.}^{\circ} & = a + (r \times 3) \\
\text{el 5.}^{\circ} & = a + (r \times 4)
\end{array}$$

Sabemos también que

$$\begin{array}{ll}
\text{el último término} & = a + [r \times (n-1)] \\
\text{el penúltimo} & = a + [r \times (n-2)] \\
\text{el antepenúltimo} & = a + [r \times (n-3)] \\
\text{el ante-antepenúltimo} & = a + [r \times (n-4)] \\
\text{el ante-ante-antepenúltimo} & = a + [r \times (n-5)] \ldots
\end{array}$$

Pues sumemos ahora los términos correspondientemente y tendremos:

El 1.º + el último

$$= [a \qquad) + (a + r) \times (n - 1)] = 2\,a + [r \times (n - 1)]$$

El 2.º + el penúltimo

$$= [a + (r \qquad) + (a + r) \times (n - 2)] = 2\,a + [r \times (n - 1)]$$

El 3.º + el antepenúltimo

$$= [a + (r \times 2) + (a + r) \times (n - 3)] = 2\,a + [r \times (n - 1)]$$

El 4.º + el ante-antepenúltimo

$$= [a + (r \times 3) + (a + r) \times (n - 4)] = 2\,a + [r \times (n - 1)]$$

etc.

Donde se ve que lo que en el segundo miembro aumenta el primer paréntesis es precisamente lo que disminuye del segundo.

Si la progresión por diferencia tiene un número impar de términos, el de enmedio resulta = á la semisuma de los dos de los extremos (ó de cualesquiera otros dos equidistantes de los mismos extremos).

$$\div\, 12 . 19 . 26 . 33 . 40 . 47 . 54$$

1.º y último	$= 12 + 54 = 66$
2.º y penúltimo	$= 19 + 47 = 66$
3.º y antepenúltimo	$= 26 + 40 = 66$
El del centro	$= \frac{66}{2} = 33$

O bien, el término del centro multiplicado por 2 es = á la suma de los extremos, ó de dos términos cualesquiera equidistantes de los extremos.

De lo expuesto se deduce fácilmente que

La suma de los términos de una progresión por diferencia es igual al producto de la suma del primero y el último multiplicada por la mitad del número de términos.

$$\text{Suma} = (1.^{\text{o}} + \text{último}) \times \frac{n}{2}$$

¿Cuál es la suma de los 12 términos de la progresión por diferencia

$$\div\, 1 . 4 . 7 \ldots 28 . 31 . 34?$$

$$\text{Suma} = (1 + 34) \times \frac{12}{2} = 35 \times 6 = 210$$

¿Cuál es la suma de los 7 términos de la progresión por diferencia

$$\div 12.19 \dots 47.54?$$

$$\text{Suma} = (12 + 54) \times \frac{7}{2} = 66 \times \frac{7}{2} = 33 \times 7 = 231$$

Y, en general,

$$\text{Suma} = (1.^{\circ} + \text{último}) \times \frac{n}{2}$$

En esta fórmula de la suma hay 4 cantidades, cada una de las cuales puede ser desconocida.

Esto da lugar á cuatro problemas, á cada uno de los cuales corresponde una fórmula difícil, que el discípulo ha de encomendar á la memoria, como las otras cuatro de la página 282. Más importantes son todavía éstas que aquéllas.

Fórmula A.—Si la suma es desconocida, ya sabemos que

$$x = \text{á la suma} = (1.^{\circ} + \text{último}) \times \frac{n}{2}$$

ó bien, poniendo S y u en vez de suma y último,

$$x = S = (a + u) \times \frac{n}{2}$$

Fórmula B.—Si el primer término es desconocido, tendremos:

$$x\text{, que es ahora el primer término,} = \frac{2\,S}{n} - \text{último (1)}$$

$$\therefore\ x = \frac{2\,S}{n} - u$$

---

(1) $$\text{Suma} = (x + \text{último}) \times \frac{n}{2}$$

ó bien

$$S = (x + u) \times \frac{n}{2}$$

Aquí x está en un paréntesis que hace de factor, y, como un factor es igual al producto partido por el otro factor, tendremos:

$$\therefore\ (x + u) = S \div \frac{n}{2} = \frac{2 \times S}{n};$$

Ahora x resulta como sumando

$$\therefore\ x = \frac{2 \times S}{n} - u;$$

porque un sumando es igual á la suma menos el otro sumando.

Fórmula C.—Si el último término es el desconocido,

$$x\text{, que es ahora el último término,} = \frac{2\,S}{n} - \text{primero (1)}$$

$$\therefore\ x = \frac{2\,S}{n} - a$$

Fórmula D.—Si el número de términos es desconocido,

$$x\text{, que es ahora el número de términos,} = \frac{2 \times S}{1.^{o} + \text{último}}\ (2)$$

$$\therefore\ x = \frac{2 \times 5}{a + u}$$

Ejemplos de las fórmulas.

¿Cuál es la suma de los 10 términos de la progresión por diferencia

$$\div\ 21.26.31 \ldots 66\ ?$$

Según la fórmula A,

$$S = (21 + 66) \times 5 = 87 \times 5 = 435$$

Con efecto,

$$\div\ 21.26.31.36.41.46.51.56.61.66$$

---

(1) $$\text{Suma} = (1.^{o} + x) \times \frac{n}{2}$$

x está en un paréntesis que hace de factor.

$$\therefore\ (1.^{o} + x) = \frac{2\,S}{n}$$

Pero aquí resulta ahora x como sumando.

$$\therefore\ x = \frac{2\,S}{n} - a;$$

porque un sumando es igual á la suma menos el otro sumando.

(2) $$\text{Suma} = (1.^{o} + \text{último}) \times \frac{x}{2}$$

Aquí x está en una expresión que hace de factor.

$$\therefore\ \frac{x}{2} = \frac{\text{Suma}}{1.^{o} + \text{último}};$$

porque un factor es igual al producto partido por el otro factor.

$$\therefore\ x = \frac{2 \times S}{1.^{o} + \text{último}};$$

porque x hace ahora de dividendo, y el dividendo $=$ divisor $\times$ por el cuociente.

¿Cuál es el primero de los 11 términos de una progresión por diferencia cuya suma es igual á 396, cuyo último término es 61 y cuya razón es 5?

Según la fórmula B, que es

$$a = \frac{2S}{n} - u$$

tendremos:

$$x = \frac{396 \times 2}{11} - 61 = \frac{792}{11} - 61$$

$$= 72 - 61 = 11$$

$$\div\ 11.16.21.26.31.36.41.46.51.56.61$$

¿Cuál es el último de los 7 términos de la progresión por diferencia cuya suma es igual á 217, cuyo primer término es 16 y cuya razón es 5?

Según la fórmula C, que es

$$u = \frac{2 \times S}{n} - a,$$

resulta

$$x = \frac{2 \times 217}{7} - 16 = \frac{434}{7} - 16 = 62 - 16 = 46$$

$$\div\ 16.21.26.31.36.41.46$$

¿Cuál es el número de términos de una progresión por diferencia cuya suma es igual á 469, cuyo primer término es 1 y el último 66, y cuya razón es 5?

Apliquemos la fórmula D, que es

$$n = \frac{2 \times S}{a + u}$$

$$x = \frac{469 \times 2}{1 + 66} = \frac{938}{67} = 14$$

$$\div\ 1.6.11.16.21.26.31.36.41.46.51.56.61.66$$

En la fórmula general de la suma,

$$\text{Suma} = (1.^{\circ} + \text{último}) \times \frac{n}{2},$$

se puede referir el último término al primero. La fórmula del último término, según hemos visto al principio de esta Lección, es

$$\text{Último} = 1.^{\circ} + [r \times (n - 1)]$$

Y, sustituyendo en la fórmula de la suma, resultará:

$$\text{Suma} = \{1.^\circ + [1.^\circ + (r \times (n-1))]\} \times \frac{n}{2}$$

$$\therefore \quad \text{Suma} = \{2 \text{ veces el } 1.^\circ + [r \times (n-1)]\} \times \frac{n}{2}$$

Por medio de esta fórmula basta, para calcular la suma, conocer el primer término, el número de ellos, y la razón.

En esta fórmula hay cuatro cantidades, cada una de las cuales puede ser desconocida:

1.ª Ya conocemos la fórmula si la suma es desconocida

$$S = [(2 \times a) + (r \times (n-1)] \times \frac{n}{2} \quad \text{Fórmula Sigma 1.}^{\text{a}}$$

2.ª Si el primer término es desconocido, tendremos:

$$a = \frac{S}{n} - \frac{r \times (n-1)}{2} \quad (1) \quad \text{Fórmula Sigma 2.}^{\text{a}}$$

3.ª Si la razón es desconocida resultará

$$r = \frac{2 \times S}{n \times (n-1)} - \frac{2a}{n-1} \quad (2) \quad \text{Fórmula Sigma 3.}^{\text{a}}$$

---

(1) En la fórmula

$$S = [(a \times 2) + (r \times (n-1)] \times \frac{n}{2}$$

el paréntesis donde está a es factor

$$\therefore (a \times 2) + [r \times (n-1)] = S \div \frac{n}{2};$$

porque todo factor es = producto partido por el otro factor.

Ahora $2 \times a$ es sumando;

$$\therefore 2 \times a = + \frac{2 \times S}{n} - [r \times (n-1)]$$

porque un sumando es = á la suma menos el otro sumando.

Ahora a es factor;

$$\therefore a = \frac{S}{n} - \frac{r \times (n-1)}{2}; \quad \text{porque un factor es} = \text{al } \frac{\text{Producto}}{\text{el otro factor}}$$

(2) En la fórmula

$$S = [(2 \times a) + (r \times (n-1)] \times \frac{n}{2},$$

el paréntesis en que esta r es factor

$$\therefore (2 \times a) + [r \times (n-1)] = \frac{2 \times S}{n}$$

Ahora es sumando la expresión en que está r

$$\therefore r \times (n-1) = \frac{2 \times S}{n} - (2 \times a)$$

Ahora r es factor

$$\therefore r = \frac{2 \times S}{n \times (n-1)} - \frac{2 \times a}{n-1}$$

4.ª Este caso referente al número de los términos no puede con esta fórmula resolverse sin el auxilio del Algebra, pues da lugar á una ecuación de segundo grado.

Calcular la suma de los 100 primeros términos de la progresión por diferencia de los números impares.

$$\div 1.3.5...$$

Sigma 1.ª
$$\begin{aligned}\text{Suma} &= [1.^{\text{er}} \text{ término } 2 \text{ veces} + \text{razón } 2 \times (100 - 1)] \times \frac{100}{2} \\ &= [2 + (2 \times 99)] \times 50 \\ &= (2 + 198) \times 50 \\ &= 200 \times 50 \\ &= 10000\end{aligned}$$

¿Cuál es la suma de los 1000 números primeros de la serie natural

$$\div 1.2.3.4.5...?$$

Siendo 1 el término primero, y 1 la razón de la progresión, tendremos:

Sigma 1.ª $S = [(1 \times 2) + (1 \times 999)] \times 500 = 1001 \times 500 = 500500$

¿Cuál es el primer término de una progresión por diferencia cuyos términos suman 210, cuyo número es 12, y cuya razón es 3?

Por la fórmula Sigma 2.ª tendremos:

$$\frac{210}{12} - \frac{3 \times 11}{2} = \frac{210 \times 2 - 33 \times 12}{24} = \frac{420-396}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

$$\div 1.4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34$$

¿Cuál es la razón aritmética de una progresión por diferencia cuyos términos son 12, cuya suma es 210, y cuyo primer término es 1?

Por la fórmula Sigma 3.ª vendrá:

$$r = \frac{210 \times 2}{12 \times 11} - \frac{2 \times 1}{11} = \frac{420}{132} - \frac{2}{11} = \frac{420-24}{132} = \frac{396}{132} = 3$$

$$\div 1.4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34$$

LECCIÓN XI

La serie de los números naturales.

La serie de los números naturales es el fundamento común de todas las progresiones por diferencia, de modo que, refiriendo éstas á aquella serie, se obtienen fórmulas más expeditivas á veces que las usuales y propiedades nuevas, que es preciso conocer.

Toda progresión por diferencia, de n términos, es igual á dos sumandos:

1.° A la suma de n sumandos todos iguales al primer término de la progresión;

2.° Y á la suma de los $(n-1)$ primeros términos de la serie de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5,... multiplicada por la razón.

Por ejemplo: sea la progresión de 8 términos, cuya razón es 2,

$$\div 5.7.9.11.13.15.17.19.$$

Coloquemos estos 8 términos en columna y resultará:

$$\begin{array}{rl}
5 = & 5 \\
+\ 7 = & +5+1 \text{ vez la razón } 2 \\
+\ 9 = & +5+2 \text{ veces íd.} \\
+11 = & +5+3 \text{ veces íd.} \\
+13 = & +5+4 \text{ veces íd.} \\
+15 = & +5+5 \text{ veces íd.} \\
+17 = & +5+6 \text{ veces íd.} \\
+19 = & +5+7 \text{ veces íd.} \\
\hline
=96 = & (8\times 5)+[(1+2+3+4+5+6+7)\times 2] \\
= & (8\times 5)+\left[(1+7)\times \frac{7}{2}\right]\times 2 \\
= & (8\times 5)+\left[\left(8\times \frac{8-1}{2}\right)\times 2\right] \\
= & 40+(28\times 2) \\
= & 40+56=96
\end{array}$$

Por consiguiente, el fondo y la esencia de toda progresión por diferencia es la serie de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5,.....

Otro ejemplo:

¿Cuál es la suma de la progresión de 11 términos?

$$\div 12.19.26.33.40.47.54.61.68.75.82?$$

Según lo anterior:

Suma = 11 veces el primer término 12
+ la suma de los 10 primeros de la serie de los números naturales
× por la razón 7.

$$\therefore \text{Suma} = (11 \times 12) + [(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) \times 7]$$
$$= (11 \times 12) + \left[(1+10) \times \frac{10}{2}\right] \times 7 = 517$$

EXPLANACIÓN.

$$\begin{array}{rcl}
12 = & 12 & \\
+\ 19 = & +\ 12 + & 1 \text{ vez la razón } 7 \\
+\ 26 = & +\ 12 + & 2 \text{ veces íd.} \\
+\ 33 = & +\ 12 + & 3 \text{ veces íd.} \\
+\ 40 = & +\ 12 + & 4 \text{ veces íd.} \\
+\ 47 = & +\ 12 + & 5 \text{ veces íd.} \\
+\ 54 = & +\ 12 + & 6 \text{ veces íd.} \\
+\ 61 = & +\ 12 + & 7 \text{ veces íd.} \\
+\ 68 = & +\ 12 + & 8 \text{ veces íd.} \\
+\ 75 = & +\ 12 + & 9 \text{ veces íd.} \\
+\ 82 = & +\ 12 + & 10 \text{ veces íd.} \\
\hline
= 517 = & 11 \text{ veces } 12 + & [(1+10) \times 10] \times 7 \\
= & 132 + (11 \times 5) \times 7 & \\
= & 132 + (55 \times 7) = 132 + 385 = 517 &
\end{array}$$

El segundo miembro de la suma anterior, que es

$$(11 \times 12) + \left[(1+10) \times \frac{10}{2}\right] \times 7$$

puede transformarse como sigue:

$$\text{Suma} = (11 \times 12) + [11 \times (11 - 1] \times \frac{7}{2}.$$

$$\therefore \text{Suma} = 11 \times 12 + (11^2 - 11) \times \frac{7}{2}$$

de donde resulta la siguiente fórmula general:

Suma = número de términos × por el primero de la progresión
+ (cuadrado del número de términos — el mismo número) × por la mitad de la razón.

fórmula muy cómoda cuando se conoce

el número de los términos, n;
el primero de ellos, a; y
la razón, r.

¿Cuál es la suma de los 10 términos de la progresión por diferencia cuya razón es 5?

$$\div 21.26.31.36.41.46.51.56.61.66?$$

Según la última fórmula

$$S = (n \times a) + (n^2 - n) \times \frac{r}{2}$$

tendremos:

$$\begin{aligned} x &= (10 \times 21) + \left[(10^2 - 10) \times \frac{5}{2}\right] \\ &= 210 + \left(90 \times \frac{5}{2}\right) \\ &= 210 + (45 \times 5) = 210 + 225 = 435 \end{aligned}$$

Las 3 series

de los números naturales,
de los números pares, y
de los números impares,

tienen propiedades muy dignas de ser conocidas.

Números naturales	÷	1.2.3.4. 5. 6. 7. 8. 9.10.....
— pares	÷	2.4.6.8.10.12.14 16.18.20.....
— impares	÷	1 3.5 7. 9.11.13.15.17.19.....

En la serie de los números naturales el lugar ocupado por cada término está expresado por el número mismo.—¿Qué lugar ocupa el 3? Pues el tercero.—¿Cuál es el séptimo término? Pues el 7.—¿Cuál el centésimo? Pues el término 100, etc.

En la serie de los números pares, el lugar ocupado por cada término está expresado por su mitad.—¿Qué lugar ocupa el término 4? El segundo.—¿Y el 14? El 7.º—¿Cuál es el lugar del término 20? El décimo.—¿Y el del 222? El 111, etc.

En la serie de los números impares cada término ocupa el lugar expresado por la mitad entera de la suma de sí mismo + 1. —¿Qué lugar ocupa el número 3? La mitad entera de 3 + 1; esto es, el segundo.—¿Qué lugar ocupa el término 7? La mitad entera de 7 + 1, el cuarto.—¿Qué lugar ocupa el 15? El octavo, ó sea la mitad entera de 15 + 1.—¿Y el término 199? El lugar centésimo, mitad entera de 199 + 1, etc.

La suma de los n primeros términos de la serie de los números impares es igual al cuadrado de n.

Sea la progresión de números impares con 2 términos

$\div$ 1.3 $\therefore$ suma $= 2^2 = 4$

Sea la de 3 términos

$\div$ 1.3.5 $\therefore$ suma $= 3^2 = 9$

Sea la de 4 términos

$\div$ 1.3.5.7 $\therefore$ suma $= 4^2 = 16$

Sea la de 5 términos

$\div$ 1.3.5.7.9 $\therefore$ suma $= 5^2 = 25$

Sea la de 6 términos

$\div$ 1.3.5.7.9.11 $\therefore$ suma $= 6^2 = 36$

Sea la de 7 términos

$\div$ 1.3.5.7.9.11.13 $\therefore$ suma $= 7^2 = 49$

Sea la de 8 términos

$\div$ 1.3.5.7.9.11.13.15 $\therefore$ suma $= 8^2 = 64$

Sea la de 100 términos

$\div$ 1.3.5.7.9............... $\therefore$ suma $= 100^2 = 10000$

Et sic de ceteris.

En efecto,

Sabemos que en toda progresión por diferencia la suma de cualesquiera dos términos equidistantes de los extremos es igual á la suma de los extremos mismos.

Así en la progresión de 4 términos

$\div$ 1.3.5.7

tenemos las dos parejas, de igual valor numérico,

1 + 7 = 8 = al doble del número de términos = 4 + 4
3 + 5 = 8 = íd. íd. = 4 + 4

De modo que la suma

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 4 = 4^2 = 16$$

Así también, en la progresión de 6 términos

$\div$ 1.3.5.7.9.11

nos resultan las tres parejas

$$\begin{array}{llll}
1 + 11 = 12 = & \text{al doble del número} & \text{de términos} & = 6 + 6 \\
3 + 9 = 12 = & \text{íd.} & \text{íd.} & = 6 + 6 \\
5 + 7 = 12 = & \text{íd.} & \text{íd.} & = 6 + 6
\end{array}$$

donde

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 6 = 6^2 = 36$$

Igualmente en la progresión de 8 términos

$$\div\ 1.3.5.7.9.11.13.15$$

aparecen las cuatro parejas

$$\begin{array}{llll}
1 + 15 = 16 = & \text{al doble del número} & \text{de términos} & = 8 + 8 \\
2 + 13 = 16 = & \text{íd.} & \text{íd.} & = 8 + 8 \\
5 + 11 = 16 = & \text{íd.} & \text{íd.} & = 8 + 8 \\
7 + 9 = 16 = & \text{íd.} & \text{íd.} & = 8 + 8
\end{array}$$

Y, por tanto,

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8 \times 8 = 8^2 = 64$$

El valor, pues, de cada pareja es siempre igual al doble del número de términos, porque todas las parejas son iguales entre sí, y á la suma del 1.° + el último; el cual es igual al doble del número de términos en cuanto se le agrega el 1, principio de la serie.

Si la progresión no diese un número completo de parejas tendríamos lo análogo.

$$\div\ 1\,.\,3\,.\,5$$

$$\begin{array}{r}
1 + 5 = 6 = 3 + 3 \\
3 = 3 = 3 \\
\therefore\ 1 + 3 + 5 = 3 + 3 + 3 = 3 \times 3 = 3^2 = 9
\end{array}$$

$$\div\ 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9$$

$$\begin{array}{r}
\therefore\ 1 + 9 = 10 = 5 + 5 \\
2 + 7 = 10 = 5 + 5 \\
5 = 5 = 5
\end{array}$$

$$\therefore\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 5 = 5^2 = 25$$

$$\div\ 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13$$

$$\begin{array}{r}
\therefore\ 1 + 13 = 14 = 7 + 7 \\
3 + 11 = 14 = 7 + 7 \\
5 + 9 = 14 = 7 + 7 \\
7 = 7 = 7
\end{array}$$

$$\therefore\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 7 = 7^2 = 49.$$

Tenemos, pues, en general que

Si n es el número de los términos de una progresión de números impares, $\frac{n}{2}$ tiene que ser el número de las parejas.

Y, como cada pareja vale el doble del número de los términos, cada media pareja es $= n$

Y, como hay tantas medias parejas como términos, resulta que toda progresión de impares es equivalente á

n medias parejas, cada una $= n$

Y, por consiguiente, resulta la

$$\text{Suma} = n \times n = n^2$$

De modo que la suma de toda serie de números impares que empieza por 1 es igual al cuadrado del número de los términos de la serie. (1)

Si comparamos correspondientemente una serie de números impares con otra serie de números pares,

$$\div\ 1.3.5.7.\ 9.11\ldots.$$
$$\div\ 2.4.6.8.10.12\ldots.$$

Veremos que cada término de la de los pares excede en un unidad al correspondiente de la de los impares

$$\div\ 1.\quad 3.\quad 5.\quad 7.\quad 9.\quad 11\ldots\ldots.$$
$$\div\ 1+1.\ 3+1.\ 5+1.\ 7+1.\ 9+1.\ 11+1\ldots.$$

De modo que la suma de los pares es

$$= (1+1) + (3+1) + (5+1) + (7+1) + (9+1) + (11+1) + \ldots\ldots\ldots$$
$$= (1+3+5+7+9+11+\ldots\ldots) + (1+1+1+1+1+1+\ldots.)$$

Y, por consiguiente, siendo n el número de términos de la serie, resultará

$$\text{La suma} = n^2 + n$$

La suma, pues, de n términos de la serie de los números

(1) Téngase presente que puede haber series de números impares incompletas, ó que no empiecen por 1

$$\div\ 7.9.11\ldots$$
$$\div\ 99.101.103\ldots.\ \text{etc.}$$

pares es el cuadrado del número de términos más el número de términos.

¿Cuál es la suma de los 10 primeros términos de la serie de los números pares

$$\div\ 2.4.6\ 8\ldots\ldots?$$

$$\text{Suma} = 10^2 + 10 = 110$$

Y ¿cuál será la suma de los 253 primeros números pares?

$$S = 253^2 + 253 = 64009 + 253 = 64262$$

De lo dicho se deduce que la suma de n términos de la serie de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5,... es igual á la mitad de la suma del cuadrado del número de términos más el número mismo.

$$\div\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{12^2+12}{2}$$
$$= \frac{144+12}{2}$$
$$= \frac{156}{2} = 78$$

La razón es de evidencia. Cada término de la serie de los números naturales es la mitad que el correspondiente de la de los pares

$$\div\ 1.2.3.4.5\ldots\ldots$$
$$\div\ 2.4\ 6\ 8\ 10\ldots.$$

¿Cuánto suman los 100000 términos primeros de la serie de los números naturales?

$$\text{Suma} = \frac{100000^2 + 100000}{2} = 5000050000$$

La serie de los números naturales, la de los pares y la de los impares pueden dársenos incompletas.

$$\div\ 11.12.13.14.15.16,$$
$$\div\ 20.22.24.26.28\ 30,$$
$$\div\ 17.19\ 21.23.25.27, \text{ etc.}$$

Y, entonces, para aplicarles respectivamente las fórmulas

$S = \dfrac{n^2+n}{2}$, referente á los números naturales,

$S = n^2 + n$, referente á los pares, y

$S = n^2$, referente á los impares,

es necesario completar las series; empezando desde el 1 (y en los pares desde el 2); calcularlas en totalidad, y restar después la parte agregada para completar las fórmulas.

Completemos las tres progresiones últimas.

$$\div\ \mathit{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}.11.12.13.14.15.16.\ \text{Suma} = \frac{16^2+16}{2} - \frac{10^2+10}{2}$$
$$= \frac{256+16}{2} - \frac{100+10}{2}$$
$$= \frac{272}{2} - \frac{110}{2}$$
$$= 136 - 55 = 81$$

$$\div\ \mathit{2.4.6.8.10.12.14.16.18}.20.22.24.26.28.30.\ \text{Suma} = (15^2+15)-(9^2+9)$$
$$= (225+15)-(81+9)$$
$$= 240 - 90 = 150$$

$$\div\ \mathit{1.3.5.7.9.11.13.15}.17.19.21.23.25.27.\ \text{Suma} = 14^2 - 8^2$$
$$= 196 - 64 = 132$$

Claro es que deben plantearse de memoria todas estas cuestiones.

¿Cuánto suman los quince términos de la serie de los números naturales que empieza por

$$\div\ 21.22.23\ldots?$$

$$x = \frac{35^2+35}{2} - \frac{20^2+20}{2}$$
$$= \frac{1225+35}{2} - \frac{400+20}{2}$$
$$= \frac{1260}{2} - \frac{420}{2} = 630 - 210 = 420$$

¿Cuánto suman los 40 términos de la serie de los pares

$$\div\ 22.24.26\ldots?$$

$$\text{Suma} = (50^2+50)-(10^2+10)$$
$$= (2500+50)-(100+10)$$
$$= 2550 - 110 = 2440$$

¿Cuál es la suma de la serie de los números impares

$$\div\ 99.101.103\ldots 161?$$

$$\text{Suma} = (\div\ 1.3.5\ldots 161) - (\div\ 1.3.5\ldots 97)$$
$$= 81^2 - 49^2 = 6561 - 2401 = 4160$$

LECCIÓN XII

Progresiones por cuociente.—Intercalación de términos

Sabemos (Lección VIII) que una progresión por cuociente (ó progresión geométrica), es una serie de números, cada uno de los cuales es el inmediato anterior multiplicado, ó dividido, por una cantidad constante, la cual se llama razón geométrica de la progresión.

La serie se llama ascendente cuando cada término es múltiplo del inmediato anterior, y descendente cuando submúltiplo (1).

Se escriben como ya se ha visto, y se leen como las progresiones aritméticas:

$\div\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : ... progresión ascendente, razón 2
$\div\div$ 15625 : 3125 : 625 : 125... progresión descendente, razón 5.

Ambas se leerán así:

Progresión por cuociente } 1 es á 2, es á 4, es á 8, es á 16, es á...

Progresión por cuociente } 15625 es á 3125, es á 625, es á...

(1) Defínense también las propiedades de ascendente ó descendente refiriéndolas á la razón. Y así se dice que, si la razón es > que la unidad, la progresión es ascendente, y, si <, descendente.

Por tanto, la progresión

$$\div\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : ...$$

es ascendente, porque la razón 3 es > que 1; y la progresión

$$\div\div\ 1296 : 324 : 81 : ...$$

es descendente, porque la razón $\frac{1}{4}$ es < que 1.

Para uniformidad de los cálculos (aunque no por precisión) las progresiones geométricas descendentes suelen disponerse como ascendentes, tomando en cada una el término más chico como si fuera el primero.

Y así en vez de

$$\div\div\ 243 : 81 : 27 : 9 : 3 : 1$$

se dispone el cálculo escribiendo (aunque esto tampoco es preciso)

$$\div\div\ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243$$

Tres términos consecutivos de una progresión por cuociente forman una proporción geométrica continua.

$$\div\div\ 15625 : 3125 : 625 : 125 : 25 : 5 : 1$$

Tomemos tres términos cualesquiera, por ejemplo,

$$625 : 125 : 25$$

Y tendremos

$$625 : 125 :: 125 : 25$$
$$\therefore\ 625 \times 25 = 125 \times 125 = 15625$$

Si todo término en una progresión por cuociente es igual al anterior multiplicado por la razón, claro es que todos los términos pueden ser referidos al primero.

Sean las progresiones geométricas, cuya razón es 5

$$\div\div\ 5 : 25 : 125 : 625 : 3125 : 15625 : 78125$$
$$\div\div\ 2 : 10 : 50 : 250 : 1250 : 6250 : 31250$$

$$\begin{array}{rl}
25 = 5 \times 5^1 & 10 = 2 \times 5^1 \\
125 = 5 \times 5^2 & 50 = 2 \times 5^2 \\
625 = 5 \times 5^3 & 250 = 2 \times 5^3 \\
3125 = 5 \times 5^4 & 1250 = 2 \times 5^4 \\
15625 = 5 \times 5^5 & 6250 = 2 \times 5^5 \\
78125 = 5 \times 5^6 & 31250 = 2 \times 5^6
\end{array}$$

De modo que cada término es

= al primero × por la razón elevada al número de términos − 1

$$\begin{array}{l}
\therefore\ 2.^{\circ}\ \text{término} = 1.^{\circ} \times r^{2-1} = 1.^{\circ} \times r^{1} \\
\quad 3.^{er}\ \text{término} = 1.^{\circ} \times r^{3-1} = 1.^{\circ} \times r^{2} \\
\quad 4.^{\circ}\ \text{término} = 1.^{\circ} \times r^{4-1} = 1.^{\circ} \times r^{3} \\
\quad 5.^{\circ}\ \text{término} = 1.^{\circ} \times r^{5-1} = 1.^{\circ} \times r^{4} \\
\text{enésimo término} = 1.^{\circ} \times r^{n-1} \\
\text{Luego } u = a \times r^{n-1}
\end{array}$$

O bien:

> Un término cualquiera t de una progresión por cuociente es igual al primer término multiplicado por la razón elevada á una potencia igual al número de términos que hay antes de t.

¿Cuál es el quinto término de la progresión geométrica creciente cuyo primer término es 125 y cuya razón es 5?

$$\begin{aligned} x &= 125 \times 5^4 \\ &= 125 \times 625 = 78125 \end{aligned}$$

¿Cuál es el cuarto término de la progresión por cuociente cuyo primer término es 48 y cuya razón es 4?

$$\begin{aligned} x &= 48 \times 4^3 \\ &= 48 \times 64 = 3072 \end{aligned}$$

$$48 : 192 : 768 : 3072$$

Hay cuatro cantidades en la fórmula

$$\text{Término de lugar } n = 1.^{\circ} \times r^{n-1}$$

O bien

$$u = a \times r^{n-1};$$

donde

a es el primer término de una progresión por cuociente
u el último que se busca ó hasta el cual llega el cómputo, aunque haya más;
r la razón por cuociente y
n el número total de los términos hasta el último u.

Y, como cada una de esas cuatro cantidades puede ser incógnita, cabe que se presenten los cuatro problemas siguientes:

1.º hallar el último término $u = a \times r^{n-1}$

2.º hallar el primer término $a = \frac{u}{r^{n-1}}$ (1);

3.º hallar la razón $r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ (2)

---

(1) a es factor en la fórmula primera; y como un factor es igual al producto partido por el otro factor, resulta:

$$a = \frac{u}{r^{n-1}}$$

(2) En la fórmula primera la razón hace de factor en el segundo miembro

$$\therefore r^{n-1} = \frac{u}{a}.$$

4.° hallar el número de términos $n =$ (1)

EJEMPLOS.

¿Cuál es el sexto término de la progresión por cuociente que empieza por 768 y cuya razón es 4?

Por la fórmula primera, $u = a \times r^{n-1}$

tendremos

$$\begin{aligned} x &= 768 \times 4^5 = 768 \times (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) \\ &= 768 \times 1024 = 786432 \end{aligned}$$

¿Cuál es el primero dé los seis términos de la progresión por cuociente cúyo último término es 3145728 y cuya razón es 4?

Según la fórmula segunda, $a = \frac{u}{r^{n-1}}$.

nos resultará:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3145728}{4^5} = \frac{3145728}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} \\ &= \frac{3145728}{1024} = 3072 \end{aligned}$$

Por la fórmula tercera puede intercalarse un medio proporcional geométrico entre cada dos términos de una progresión por cuociente. Y los términos intercalados forman con los de la serie dada una nueva progresión cuya razón es la $\sqrt{}$ de la primitiva.

Intercalar un medio proporcional geométrico entre cada dos de la serie siguiente, cuya razón es 16.

$$\div\!\!\div\ 3 : 48 : 768 : 12288 : 196608 : 3145728$$

Para resolver el problema, se necesita averiguar cuál es la

---

ahora r^{n-1} está elevada á una potencia

$$\therefore\ r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

Este problema no puede resolverse generalmente por los medios aritméticos.

(1) Este problema no puede resolverse por los medios usuales de la Aritmética

razón del medio entre 48 y 3 (ó bien entre cualesquiera otros dos términos),

Según la fórmula tercera, $r = \sqrt{\frac{48}{3}}$

$$\therefore\ x = \sqrt{16} = 4$$

Siendo 4 la razón, la nueva progresión será como sigue:

$\div\!\div$ 3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072 : 12288 : 49152 : 196608 : 786432 : 3145728. (1)

La misma razón se obtendría calculando cualesquiera otros dos términos, por ejemplo

$$x = \sqrt{\frac{12288}{768}} = \sqrt{16} = 4 \text{ etc.}$$

Supongamos que se quieran intercalar m términos entre cada dos de una progresión por cuociente

$$\div\!\div\ a : b : c : d : e : f : \ldots$$

por ejemplo, entre a y b.

El nuevo trozo será de la forma

$$\div\!\div\ a : t : t' : t'' : t''' : \ldots : b$$

Y naturalmente se compondrá de los m términos intercalares $+ 2$: estos dos serán a y b.

$$\therefore\ n - 1 \text{ será} = m + 1$$

Y la fórmula tercera se convertirá en

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{u}{a}}$$

Luego la razón de los nuevos términos, cuando haya que intercalar otros m más, se obtendrá dividiendo uno por otro los dos términos entre quienes haya de verificarse la intercalación, y extrayendo luego del cuociente una raíz de un gra-

(1) Análogamente á lo que sucede en las progresiones por diferencia, si entre cada dos términos de una progresión por cuociente se intercala un mismo número de medios proporcionales geométricamente, la serie de todas las progresiones parciales formadas por los medios proporcionales constituye con los términos primitivos una sola proporción.

Pero los problemas fundados en esta propiedad necesitan de los logaritmos.

do igual al número de términos intercalares + 1, ó sea igual á $m + 1$ (1).

Intercalar dos medios proporcionales geométricos entre los términos de la progresión por cuociente

$$\div\div\ 3 : 24 : 192 : \ldots$$

La fórmula se convierte para este caso en

$$r = \sqrt[2+1]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

La nueva progresión será

$$\div\div\ 3 : \underbrace{6 : 12}_{} : 24 : \underbrace{48 : 96}_{} : 192 : 384 : \ldots$$

Intercalar tres medios entre los términos de la progresión por cuociente

$$\div\div\ 5 : 405 : 32805 : \ldots$$

La fórmula es ahora

$$r = \sqrt[3+1]{\frac{405}{5}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$$

y la nueva progresión es

$$\div\div\ 5 : \underbrace{15 : 45 : 135}_{} : 405 : \underbrace{1215 : 3645 : 10905}_{} : 32805 : \ldots$$

Intercalar siete medios proporcionales geométricamente entre los términos de la progresión

$$\div\div\ 1 : 256 : 32768 : \ldots$$

La fórmula se hace ahora

$$r = \sqrt[7+1]{\frac{256}{1}} = \sqrt[8]{256} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\therefore\ \div\div\ 1 : \underbrace{2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128}_{} : 256 : \underbrace{512 : 1024 : 2048 : 4096 : 8192 : 16384}_{} : 32768 : \ldots$$

(1) Téngase en cuenta, cuando se llegue á la formación de las Tablas de logaritmos, la observación siguiente:

Si se quisiera intercalar entre dos términos de una progresión geométrica un billón de otros términos proporcionales, habría que dividir el segundo de aquellos dos términos por el primero, y extraer luego del cuociente la raíz del grado

un billón + 1;

lo cual daría la razón de la nueva progresión con el billón de intercalares.

¡Operación impracticable, por conveniente que fuera! ¡Qué hombre tiene vida para hacer un billón de cosas!!!

Este problema, por los medios hasta ahora disponibles, sólo es resoluble en casos particulares, como los anteriores. En general no es soluble sino por medio de los logaritmos. (Véanse.)

En toda progresión por cuociente el producto de dos términos tomados á igual distancia de los extremos es igual al producto de esos mismos extremos.

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$$

$$2 \times 1458 = 2916;\ 6 \times 486 = 2916;\ 18 \times 162 = 2916$$

Si hay un término central, ese término es la $\sqrt{\ }$ del producto de los términos extremos ó de las parejas similares.

$$\therefore\ 54 \times 54 = 2916;\quad \text{ó bien}\quad \sqrt{2916} = 54$$

En efecto: Sabemós que en toda proporción por cuociente

El 1.er término	$= a$	El último término	$= a \times r^{n-1}$
El 2.º término	$= a \times r^1$	El penúltimo	$= a \times r^{n-2}$
El 3.er término	$= a \times r^2$	El antepenúltimo	$= a \times r^{n-3}$
El 4.º término	$= a \times r^3$	El anteantepenúltimo	$= a \times r^{n-4}$

Multipliquemos ordenadamente estos términos, y tendremos:

1.º $\times$ último	$= a \times (a \times r^{n-1}) = a^2 \times r^{n-1}$
2.º $\times$ penúltimo	$= (a \times r^1) \times (a \times r^{n-2}) = a^2 \times r^{n-1}$
3.º $\times$ antepenúltimo	$= (a \times r^2) \times (a \times r^{n-3}) = a^2 \times r^{n-1}$
4.º $\times$ anteantepenúltimo	$= (a \times r^3) \times (a \times r^{n-4}) = a^2 \times r^{n-1}$

Donde se ve que los productos en todas las parejas son el cuadrado del primer término multiplicado por la razón elevada al número de términos menos 1; porque lo que en el segundo miembro aumenta un paréntesis es precisamente lo que disminuye el otro.

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 : 4374$$

$$\begin{aligned} 2 \times 4374 &= 2^2 \times 3^7 = 4 \times 2187 = 8748 \\ 6 \times 1458 &= 2^2 \times 3^7 = 8748 \\ 18 \times 486 &= 2^2 \times 3^7 = 8748 \\ 54 \times 162 &= 2^2 \times 3^7 = 8748 \end{aligned}$$

$$\div\!\div\ 25 : 125 : 625 : 3125 : 15625 : 78125$$

$$\begin{aligned} 25 \times 78125 &= 25^2 \times 5^5 = 625 \times 3125 = 1953125 \\ 125 \times 15625 &= 25^2 \times 5^5 \\ 625 \times 3125 &= 25^2 \times 5^5 \end{aligned}$$

El producto de todos los términos de una progresión por cuociente es igual al producto de los dos extremos elevado á una potencia igual á la mitad del número de términos de la progresión.

Sea la progresión por cuociente

$$\div\!\div\; a : b : c : d : e : f$$

y tendremos que el producto

$$P = (a \times f) \times (b \times e) \times (c \times d)$$

y, como el producto de cada pareja de términos equidistantes de los extremos es igual al producto de extremos,

$$P = (a \times f) \times (a \times f) \times (a \times f)$$

$$= (a \times f)^{\frac{n}{2}}, \text{ siendo } n \text{ el número de términos.}$$

¿Cuál es el producto de los términos de la progresión por cuociente

$$\div\!\div\; 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 \,?$$

$$P = (2 \times 486)^3 = 972^3 = 918330048$$

La suma de todos los términos de una progresión por cuociente puede referirse á los dos términos extremos de la progresión, ó al primero.

Fórmula referida á los términos extremos:

$$\text{Suma} = \frac{(\text{último} \times r) - 1.^{\circ}}{r - 1}$$

La suma de todos los términos de una progresión por cuociente se obtiene, pues, multiplicando el último término por la razón, restando de este producto el primer término, y partiendo el resto resultante por la razón — 1.

Sea la progresión por cuociente

$$\div\!\div\; a : b : c : d : e : f :$$

La suma será

$$S = a + b + c + d + e + f$$

Multipliquemos ambos miembros por la razón y vendrá:

$$S \times r = (a \times r) + (b \times r) + (c \times r) + (d \times r) + (e \times r) + (f \times r)$$

Como todo término es igual al anterior $\times$ por la razón, tendremos:

$$S \times r = b + c + d + e + f + (f \times r)$$

Si restamos ahora de esta igualdad la primera, nos resultará

$$(S \times r) - S = -a + (b - b) + (c - c) + (d - d) + (e - e) + (f - f) + (f \times r)$$

$$\therefore S \times r - S = (f \times r) - a$$

$$\therefore S \times (r - 1) = (f \times r) - a$$

$$\therefore \text{Suma} = \frac{(f \times r) - a}{r - 1}$$

Fórmula referida al primer término:
Sustituyamos en la fórmula anterior

$$\text{Suma} = \frac{(f \times r) - a}{r - 1}$$

el valor de f (ó sea el del último término) referido al primero, y tendremos

$$\text{Suma} = \frac{[(a \times r^{n-1}) \times r] - a}{r - 1}$$

$$\therefore \text{Suma} = \frac{a \times r^n - a}{r - 1} = \frac{a \times (r^n - 1)}{r - 1}$$

La suma, pues, de todos los términos de una progresión por cuociente referida al término primero, es igual á este primer término multiplicado por la diferencia entre la razón elevada al número de términos y 1: todo partido por la razón $-$ 1.

¿Cuánto suman, según la primera fórmula

$$S = \frac{(u \times r) - a}{r - 1},$$

los términos de la progresión por cuociente

$$\div 12 : 48 : 192 : 768 : 3072 : 12288?$$

$$x = \frac{(12288 \times 4) - 12}{4 - 1} = \frac{49152 - 12}{3} = 16380$$

¿Cuánto suman los mismos términos según la segunda fórmula

$$S = \frac{a \times (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$x = \frac{12 \times (4^6 - 1)}{r - 1} = \frac{12 \times (4096 - 1)}{3} = 4 \times 4095 = 16380$$

En las fórmulas anteriores cada una de las cantidades puede ser incógnita, y, despejadas, pueden resolverse los correspondientes problemas.

Haciendo

$S =$ á la suma,
$a =$ al primer término,
$u =$ al último,
$r =$ á la razón, y
$n =$ al número de términos,

las fórmulas son, respectivamente,

$$S = \frac{(u \times r) - a}{r - 1} \qquad S = \frac{a \times (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$a = (u \times r) - [S \times (r - 1)] \qquad a = \frac{S \times (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$u = \frac{S \times (r - 1) + a}{r} \qquad r = \frac{S - a}{S - u}$$

$r =$ no se puede resolver por los medios puramente aritméticos.
$n =$ no se puede resolver por los medios puramente aritméticos.

¿Cuál es el primer término de la progresión por cuociente, cuya suma es 16380, cuyo último término es 12288, y cuya razón es 4?

Según la fórmula

$$a = (u \times r) - S \times (r - 1)$$

tendremos

$$x = (12288 \times 4) - 16388 \times 3$$

$$= 49152 - 49164 = 12$$

¿Cuál es el último término de la progresión por cuociente, cuya suma es 16380, cuyo primer término es 12 y cuya razón es 4?

Según la fórmula

$$u = \frac{S \times (r - 1) + a}{r}$$

tendremos

$$x = \frac{[16380 \times (4 - 1)] + 12}{4}$$

$$= \frac{49140 + 12}{4} = \frac{49152}{4} = 12288$$

¿Cuál es la razón de la progresión por cuociente cuya suma es 16380, cuyo primer término es 12 y el último 12288?

Según la fórmula

$$r = \frac{S - a}{S - u}$$

tendremos

$$x = \frac{16330 - 12}{16380 - 12288} = \frac{16368}{4092} = 4$$

PARTE SEGUNDA

SECCIÓN SEGUNDA

ARITMÉTICA POR APROXIMACIÓN

LIBRO I

INCONMENSURABLES

INCONMENSURABLES

LECCIÓN I

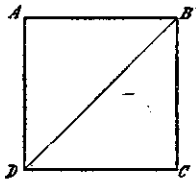
De los inconmensurables.

Hemos visto (Lección I de esta Parte II) que la índole misma de los módulos de medir acostumbra á los matemáticos á concesiones reñidas con el rigor científico.

Por la falibilidad de nuestros sentidos y la imperfección de nuestros pesos y medidas (balanzas, metros, instrumentos de reflexión,... etc.) sabemos que en toda magnitud queda siempre mal medida una porción imperceptible (ya en más, ya en menos); de modo, que los números expresivos de nuestras mediciones no resultan nunca exactos. Si una longitud nos aparece de 5 centímetros, tenemos perfecta seguridad de que el largo en cuestión estará entre 4,9 y 5,1; ó bien entre 4,99 y 5,01;... ó bien entre 4,9999 y 5,0001,... conforme al esmero y minuciosidad de la operación y á la precisión de nuestros aparatos de medir.

Prácticamente, pues, todas las magnitudes son conmensurables, ya que todas pueden medirse (y al parecer se miden) con los módulos á nuestro alcance; y el hábito de verlo y de pensarlo así está arraigado tan profundamente en nuestras convicciones, que en los comienzos de nuestros estudios aritméticos, nos resistimos á la creencia de que pueda realmente haber cantidades inconmensurables entre sí.

Los que no han estudiado Geometría juzgan imposible que no haya alguna magnitud capaz de medir conjuntamente al lado y á la diagonal de un cuadrado un número exacto de veces.



B C lado.
B D diagonal (1).

Figura 16.

¡Pues, qué! dicen: concedo que no pueda yo medir con toda exactitud, porque mis ojos no son lo suficientemente perspicaces ni mis módulos de medir están bastante bien hechos. Pero á mí me parece necesario el concebir aquí en mi imaginación que, perfeccionados unos y otros, la medición sería exacta. Y, ¿cómo no? Si el lado B C se divide en un número grandísimo de partes, ¿no ha de encontrarse alguna al fin que quepa en la diagonal B D un número exacto de veces? Esta es objeción que se oye siempre á quien por primera vez se hace cargo de la dificultad, y entiende su enunciado.

Uno de los más prodigiosos triunfos de la razón sobre la imperfección de los sentidos ha sido el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. En ningún intento de medición podría jamás fundarse la demostración de la existencia de cantidades sin común medida. Pero la verdad es que los inconmensurables existen; y, existiendo, ya no es lícito á ningún geómetra fundar la exactitud de su geometría en el hecho de no ser sensiblemente errónea, por poderse siempre reducir el error á una cantidad tan extraordinariamente pequeña que la inexactitud sea invisible, y, hasta imperceptible aun utilizando los mejores instrumentos de precisión.

La necesidad en que se encuentra todo el que mide, de contentarse con los resultados erróneos de las observaciones,

(1) Es de suponer que el lector posea siquiera las nociones de un artesano, quien, si no geométricamente, conoce por lo menos *de visu* lo que se denomina *triángulo, cuadrado, diagonal, polígono,...* etc.

no autoriza, pues, á nadie á introducir incorrecciones ni en el lenguaje, ni en los métodos, ni en la dialéctica de las Matemáticas; porque todos los que las estudian con un fin verdaderamente científico aspiran á distinguir lo verdadero de lo falso, á no dejarse seducir por inferencias falaces que ocupen el lugar de las verdaderas demostraciones, y á entrar en posesión de la verdad, no de su apariencia.

De aquí la necesidad de no consentir paralogismos en las ideas, ni incorrecciones en los enunciados. De aquí la obligación de interpretar lógicamente todos los procedimientos mal expuestos, aunque, no obstante, conduzcan á resultados intachables en la práctica.

Inconmensurables se dice de dos (ó más) cantidades que no tienen común medida, aunque cada una de ellas la tenga separadamente.

Toda magnitud, aislada, es mensurable: por su mitad, por su tercio,.. por su cienava parte, su milésima, su millonésima... Pero no se trata de esto. Se trata de que hay magnitudes tales que no se pueden medir con los mismos módulos que miden exactamente á otras.

Evidenciemos estas ideas por la virtud de algunos ejemplos.

Cada uno de los números naturales

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,... etc.,

multiplicado por sí mismo, da la serie de los cuadrados

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,... etc.

Y, si cada uno de estos cuadrados se multiplica por el mismo número que lo engendró, se producirán los respectivos cubos

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331,... etc.

Multiplicados los cubos, como antes los cuadrados, resultarían las cuartas potencias,... y así sucesivamente las quintas, las sextas...

Vista la formación aritmética de los cuadrados, de los cubos,... etc., se ve cuán escaso es su número. En los 100 primeros grados de la escala de la pluralidad no hay más que 10 cuadrados;

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100.

Ni tampoco hay más que 10 cubos en los 1000 primeros grados de la escala;

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 y 1000.

Percíbese, pues, con toda evidencia que los números intermedios son *irracionales,* esto es, carecen de raíz; ó, más claramente, que no hay entero ninguno que, multiplicado por sí mismo, dé el 2, ni el 3, ni el 5, ni el 6, ni el 7, ni el 8; ni, en general, los números intermedios entre dos cuadrados, dos cubos, etc., consecutivos.

En efecto; si 1×1 da 1, y 2×2 da 4, claro es que no queda entre 1 y 2 entero ninguno que multiplicado por sí mismo pueda dar los números 2 y 3, intermedios de los dos primeros cuadrados 1 y 4. Luego los números 2 y 3 carecen de raíz, esto es, no se pueden obtener por multiplicación. Luego $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son símbolos aritméticos de una imposibilidad numérica.

Continuemos: si 2×2 da 4 y 3×3 da 9, evidente es que los números intermedios 5, 6, 7 y 8 no pueden ser cuadrados de enteros que entre 2 y 3 no existen en la escala de la pluralidad. Ningún entero, pues, multiplicado por sí mismo, puede dar como producto 5, ni 6, ni 7, ni 8; y, por tanto, los números 5, 6, 7 y 8 carecen de raíz, y las expresiones $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{8}$ son símbolos también de imposibilidades aritméticas.

Y lo mismo sucede con 10, 11, 12, 13, 14 y 15, números intermedios entre 9 y 16, cuadrados de 3 y 4, respectivamente.

Y así de los demás; pues, como acabamos de ver, 90 de los 100 primeros grados de la escala de la pluralidad son irracionales, ya que solamente 10 son los cuadrados,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Por consiguiente, todos los números intermedios entre los cuadrados, entre los cubos, entre las cuartas potencias,... carecen de raíz, por no haber número ninguno que, multiplicado por sí mismo, pueda darlos como producto.

Pedir, pues, la raíz cuadrada de 2, ó la de 3, ó la de 8, ó la de 101,... ó bien pedir la raiz cúbica de 740... ó la raíz 4.ª de 2939, etc., etc., es pedir una imposibilidad aritmética.

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{3},\quad \sqrt{8},\quad \sqrt{101};\ldots\quad \sqrt[3]{740};\ldots\quad \sqrt[4]{2939};\ldots$$

son símbolos de operaciones numéricas que no se pueden realizar.

Hay, pues, números irracionales. Casi todos lo son (1).

Supongamos ahora un triángulo, tal como el siguiente A B C,

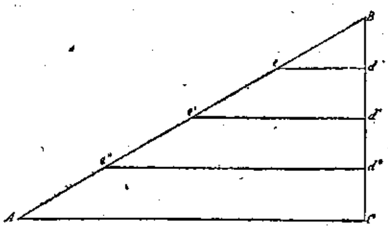


Figura 17.

construído de manera que B C sea igual (ó deba serlo, si en la práctica no resulta) á 4, y B A igual á 8. Es evidente que B d, si es igual á 1, medirá exactamente á B C y á B A; pues cabrá con toda exactitud 4 veces en B C y 8 veces en B A, y, que, por tanto, B e será de doble longitud que B d, etc., de modo que B d será común medida de B C y de B A. Si el triángulo fuera como el D E F,

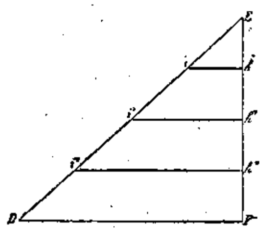
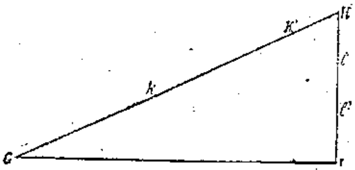


Figura 18.

(1) Irracional (ἄλογα en griego), significaría por su origen «que carece de *ratio*» (ó *razón* entre dos números), nó que carece de *radix*, *raíz*.

en el cual E F deba ser por raciocinio, aunque no resulte de la imperfección de las mediciones, igual á 4, y E D igual á 6, también la longitud E h será común medida de los dos lados E D y E F; pues E i será igual á E $h + \frac{Eh}{2}$ ó sea igual á 1 $^1/_2$... etc.

Así, cuando uno de los lados es igual á otro lado repetido cierto número exacto de veces, ó bien cierto número exacto de veces + una fracción, ambos lados son conmensurables porque siempre esa fracción del lado más pequeño mide á este lado, y también al otro.



Si en el triángulo G H I, el lado G H contiene dos veces al lado H I con más un sobrante k'H $= \frac{HI}{3}$, de modo que,

$$G\,k = k\,k' = \text{H I; y}$$
$$G\,H = G\,k + k\,k' + k'\,H = H\,I + H\,I + \frac{H\,I}{3} = 2\,\frac{1}{3}\,H\,I,$$

entonces claro es que la fracción H l = k'H es la medida común de los dos lados H I y G H, por caber exactamente 3 veces en H I y 7 veces en G H.

Por consiguiente, cuando un lado es múltiplo de otro, ó de alguna de las partes alícuotas de éste, entonces ambas magnitudes son conmensurables entre sí.

Pero si, medidos ambos lados (no precisamente con los módulos á nuestra disposición, pero sí en virtud de raciocinios del entendimiento), resulta que uno de los lados es irracional, entonces no hay manera ninguna de conseguir que

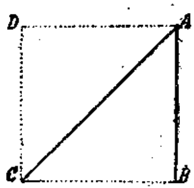


Figura 20.

ni con uno de los lados ni con ninguna de sus partes alícuotas pueda medirse aritméticamente el otro lado.

Si en el triángulo C A B el lado C A es la diagonal del cuadrado D A B C entonces, según demuestra la geometría elemental por medio del teorema de Pitágoras, tendremos que el cuadrado construído sobre la hipotenusa C A es igual á la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos C B y B A; propiedad que aritméticamente se expresa

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$$

Y, como son iguales los lados de todo cuadrado, resultará

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = 2\,\overline{AB}^2$$

De donde, si hacemos igual á 1 el lado del cuadrado, saldrá

$$\text{Diagonal}^2 = 1 + 1 = 2$$

Y, extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros,

$$\text{Diagonal del cuadrado} = \sqrt{2}.$$

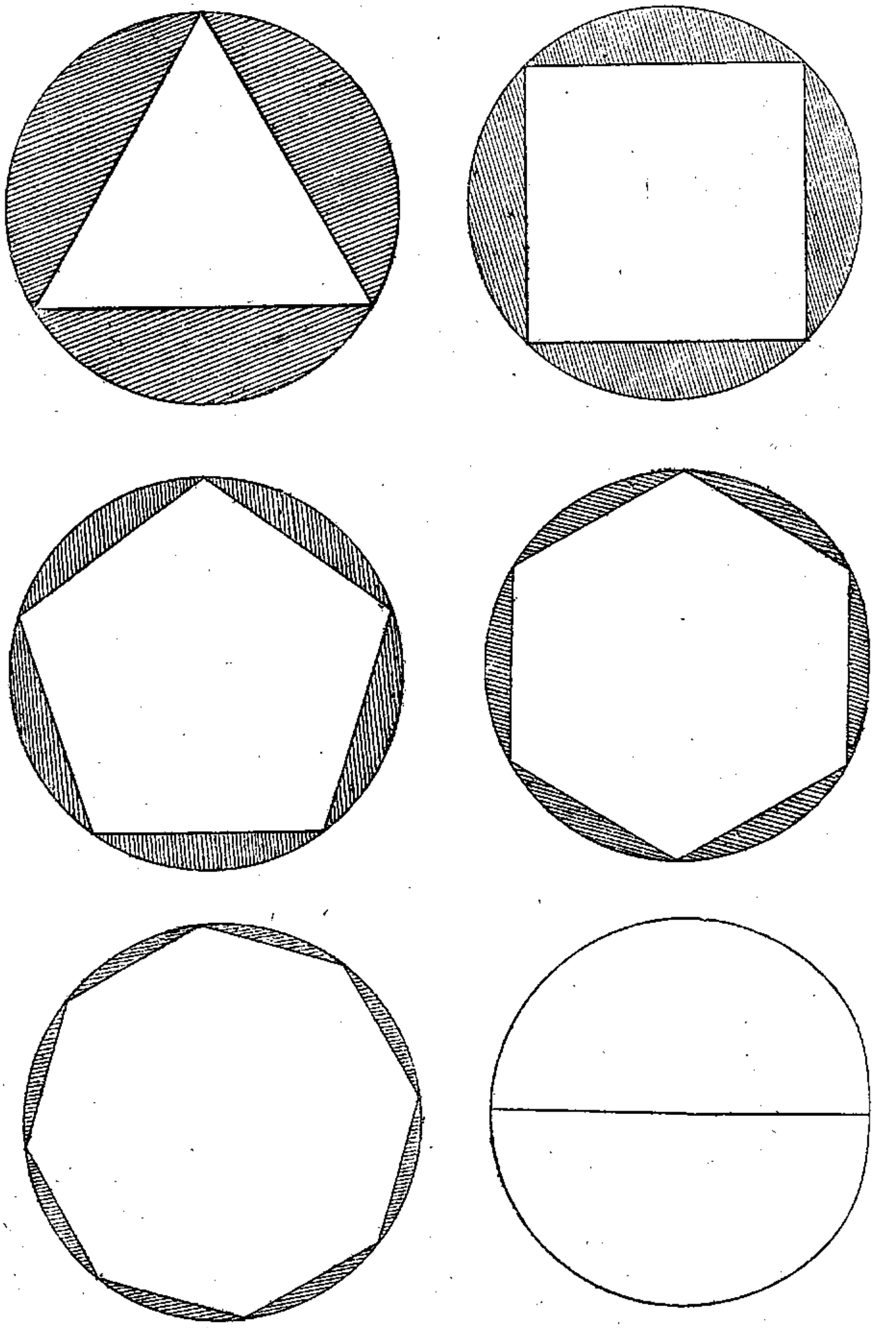
Pero, como no hay ni puede haber número ninguno que multiplicado por sí mismo dé 2, resulta que no hay ni puede haber medida común de la diagonal y del lado del cuadrado.

Luego esa diagonal y ese lado son inconmensurables.

Luego hay cantidades inconmensurables.

Y su número es inmenso (1).

(1) Pero téngase siempre en la memoria que, de que una cantidad no pueda medir á otra, no se deduce que, aisladas, no tengan medida. El diámetro no mide á la circunferencia; pero el radio es = $\frac{1}{2}$ diámetro.



Figuras 21 á 26.

Ni con el lado del triángulo regular inscripto en el correspondiente círculo, ni con el lado del cuadrado inscripto, ni con el del pentágono regular inscripto, ni con el del octógono, ni con el de ningún otro polígono de mayor número de lados se puede medir el radio del círculo correspondiente, por pequeñas que sean las partes alícuotas en que los lados de los polígonos se dividan, ó se conciban divididas.

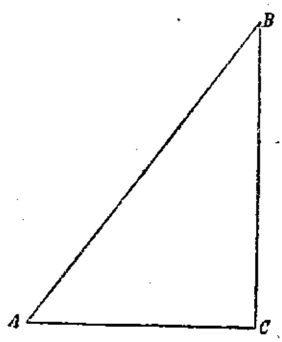
Ni con el radio del círculo, ni con el diámetro, ni con ninguna de las partes en que se dividan ó se imaginen divididos, puede medirse exactamente la circunferencia.

La geometría demuestra todas estas imposibilidades (cuyos pormenores son ajenos al objeto de esta obra), y muchas, muchas, muchísimas más, por lo cual hay que renunciar en Aritmética modular á expresar la diagonal del cuadrado por medio de fracciones del lado, ó el radio por medio de fracciones del lado de los polígonos inscriptos (1) ó la circunferencia por medio de fracciones del diámetro, etc., etc.

Todas estas magnitudes son, pues, inconmensurables entre sí.

De que dos ó más cantidades sujetas á cierta ley sean conmensurables entre sí, no se deduce que lo sean las demás formadas análogamente.

El triángulo sagrado de los antiguos egipcios tenía los lados iguales á 3, 4 y 5 respectivamente.



A B = 5
B C = 4
C A = 3

Figura 27.

(1) Excepto el lado del hexágono, que, como se sabe por todos, es igual al radio.

Y en ese triángulo se verifica el teorema de Pitágoras con lados conmensurables entre sí.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$
$$25 = 16 + 9$$

lo cual no ocurre con ningunos otros lados de triángulos rectángulos (1).

Pero, si los catetos no son 3 y 4 sino otros números cualesquiera, ya la hipotenusa es irracional. En efecto, sean los catetos 3 y 5

Y tendremos

$$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$

Y 34 no tiene raíz: ningún número multiplicado por sí mismo da 34.

(1) Si los lados son equimúltiplos de 3, 4 y 5, también los lados de los triángulos rectángulos resultantes son conmensurables entre sí. Por ej.:

10, 8 y 6		5×2, 4×2, 3×2
15, 12 y 9	O sea	5×3, 4×3, 3×3
20, 16 y 12		5×4, 4×4, 3×4
Etc., etc.		Etc., etc.

En efecto

$$10^2 = 8^2 + 6^2; \quad 100 = 64 + 36$$
$$15^2 = 12^2 + 9^2; \quad 225 = 144 + 81 \text{ etc.}$$

Pero, como se ve, la inmensidad de equimúltiplos de 3, 4 y 5 son en realidad los mismos 3, 4 y 5 del triángulo sagrado; dobles, triples, cuádruplos, quíntuplos, etc.

Las caras de las pirámides egipcias están constituídas por dos triángulos sagrados yuxtapuestos.

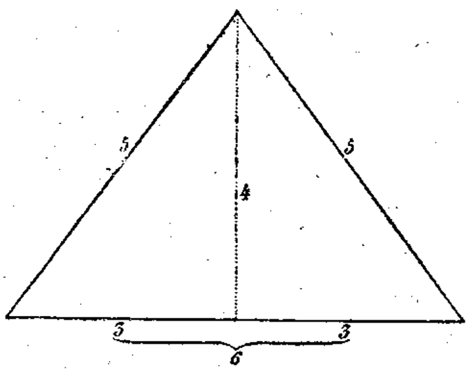


Figura 23.

Las dimensiones, pues, de las pirámides son

3, 4, 5, 6 y la altura del sólido $\sqrt{7}$

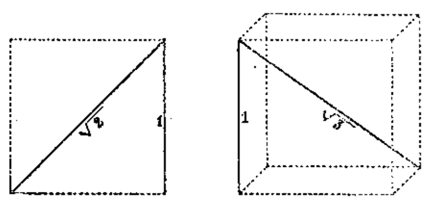
Las magnitudes inconmensurables son, pues, cantidades de las cuales una no puede ser medida con el módulo que mide á la otra, ni con parte alícuota ninguna de tal módulo (1).

La Aritmética, de consiguiente, no puede expresar esas magnitudes irracionales, ni por medio de números enteros ni tampoco por medio de quebrados; y, por tanto, los inconmensurables carecen de numeración; y, careciendo de numeración, ha sido imposible someterlos á leyes que abarquen la generación de todos ellos.

Solamente es posible hallar en cada caso concreto fracciones que se les aproximen.

Pero, de que la Aritmética no pueda resolver numéricamente ciertos problemas, no se deduce que esos problemas sean insolubles en absoluto.

$\sqrt{2}$ no tiene sentido numéricamente, porque se pide un imposible aritmético: se pide un entero que multiplicado por sí mismo dé 2; lo cual no es hacedero, porque 1×1 da 1, y 2×2 da 4; y, como entre 1 y 2 no queda entero ninguno, claro es que los números 2 y 3 no tienen raíz. Pero la solución no es imposible geométricamente, porque $\sqrt{2}$ es la diagonal de un cuadrado cuyo lado es 1, y $\sqrt{3}$ es la diagonal de un cubo cuyo lado es también 1.



Figuras 29 y 30.

(1) Pero no se olvide que se pueden medir con otros módulos. La diagonal del cuadrado no se deja medir con el lado ni con parte alícuota ninguna del lado; pero esa diagonal puede medirse con su mitad, ó con su tercio, ó con su centésima parte, ó su milésima,... ó con una parte cualquiera alícuota de sí propia. Tal vez la falibilidad de nuestros sentidos, ó la imperfección de nuestros instrumentos, ó ambas cosas á la vez, no nos consientan hallar exactamente una determinada parte alícuota; pero siempre es posible hallarla por medio del raciocinio. Lo que hay que comprender es que no existe, ni puede existir, medida común para lado y diagonal; por lo cual lado y diagonal resultan inconmensurables, etc.

APÉNDICE.

Hay muchos cómputos á que no alcanza la Aritmética.

Ni la Aritmética pura ni la modular abarcan todos los medios de cálculo que el hombre tiene á su disposición. No entran en ellos ni la Geometría, ni la Cinemática, ni la Descriptiva, ni en rigor los Cálculos de las matemáticas sublimes. El papel de la Aritmética es, por tanto, muy restringido, por más que sin Aritmética sería imposible la existencia de la actual civilización.

Lo que no está determinado por números, exacta ó aproximadamente, queda fuera de la Aritmética, y por eso hay tantas y tantas operaciones con cantidades no reducidas á número.

Sin saber el número de metros que tienen dos escaleras de mano, agregan los bomberos la una á la otra para subir en un incendio hasta un balcón, á cuya altura no alcanza ninguna de las dos sola. Cálculo ha habido, pero no numérico (si bien pudo haberlo).

Sin computar el número de kilogramos que pesa una espuerta de tierra, llena un carrero su carro hasta la altura que le parece suficiente á que sus mulas puedan hacer el arrastre en buenas condiciones. También en esto hay cálculo, pero no por medio de los números; si bien no era imposible haberlo hecho.

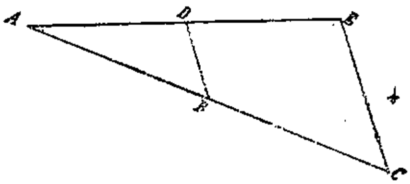
A veces, cosas expresadas por números en un concepto se suman ó se restan en otro excluído de la cuenta. Por ejemplo: varios millares de ladrillos, computados como piezas propias para construír, se cargan en una carreta, en cuya conducción se utiliza una yunta ó más de bueyes, ignorándose por completo el peso de los ladrillos en kilogramos y la fuerza de tracción en kilográmetros que puedan los bueyes desarrollar. Si se ve que la carga es demasiada, se descargan *(restan)* unos cuantos cientos de ladrillos; y, si la tracción resulta fácil, se agregan *(suman)* varios cientos más á la carga primitiva.

En Geometría pueden sumarse ó restarse dos líneas no medidas, esto es, no referidas á ningún módulo.

Suma ——— más ——— = ———

Resta ——— menos ——— = ———

Y, sin medirlas tampoco, se conoce la razón en que están las líneas proporcionales



AB : AC : : AD : AE

Figura 31.

En Mecánica puede decirse, sin necesidad de medición ninguna previa, que tocarán el suelo simultáneamente dos proyectiles iguales, 1.° si el uno B cae verticalmente desde una altura igual á la que haya desde la boca de un cañón al suelo; 2.° y si al mismo tiempo de empezar la caída del B sale horizontalmente del ánima de la pieza el otro proyectil A, impulsado por los gases de la pólvora. Aunque el B sólo tenga que recorrer la corta vertical BB′, tocará el suelo en el mismo instante en que el A termine su enorme trayectoria hasta A′.

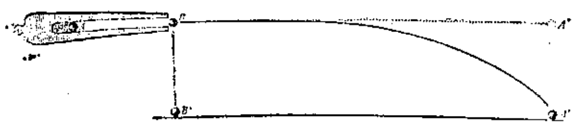


Figura 32.

En efecto:

Por causa de la gran fuerza de la pólvora, el proyectil A debe llegar hasta A″ en el tiempo necesario para caer desde B á B′. Por consiguiente, A, que ha de estar en B′ en el mismo instante que en A″, obedeciendo á ambas fuerzas, la de la pólvora y la de la gravedad, recorre la trayectoria BA′. De modo que

Fuerza de la gravedad + Fuerza de la pólvora = Trayectoria BA′

Y, como éstos, otros miles y miles de ejemplos en que hay que sumar y restar cantidades no expresadas por medio de los números.

La geometría de los movimientos de las máquinas exige las más potentes facultades de los hombres de la invención, y cálculos mentales profundísimos; pero la Aritmética no tiene, á veces, nada que ver con ellos. Por un cambio de excéntricas va para adelante ó para atrás la locomotora. Por el movimiento de la hélice atraviesan los mares los buques de vapor... El tornillo es una cuña en espiral...

La Aritmética no puede efectuar ninguna de esas operaciones mentales, por no serle posible realizar cálculo alguno sin el auxilio de los números.

Y, sin embargo, muchas de las imposibilidades aritméticas, ¡cuán fáciles resultan de resolver por otros medios!

La siguiente espiral realiza geométricamente los símbolos irracionales

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ldots \text{ Etc.}$$

si son rectos los ángulos $a, b, c, d, e, \ldots$ é iguales á 1 los lados

$$0a = ab = bc = cd = de = \ldots$$

ESPIRAL DE IRRACIONALES

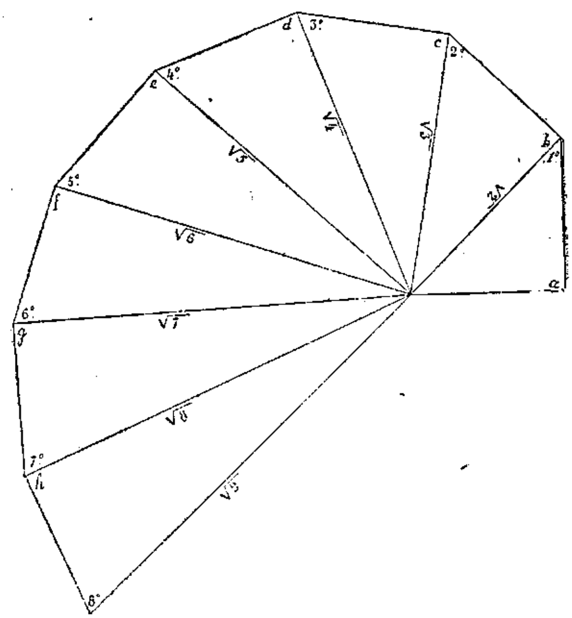


Figura 33.

En efecto: en el

triángulo 1.º tenemos;	$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$	$\therefore\ x = \sqrt{2}$
2.º	$: (x_1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$	$\therefore\ x_1 = \sqrt{3}$
3.º	$: (x_2)^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$	$\therefore\ x_2 = \sqrt{4} = 2$
4.º	$: (x_3)^2 = (\sqrt{4})^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$	$\therefore\ x_3 = \sqrt{5}$
5.º	$: (x_4)^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 = 5 + 1 = 6$	$\therefore\ x_4 = \sqrt{6}$
6.º	$: (x_5)^2 = (\sqrt{6})^2 + 1^2 = 6 + 1 = 7$	$\therefore\ x_5 = \sqrt{7}$
7.º	$: (x_6)^2 = (\sqrt{7})^2 + 1^2 = 7 + 1 = 8$	$\therefore\ x_6 = \sqrt{8}$
8.º	$: (x_7)^2 = (\sqrt{8})^2 + 1^2 = 8 + 1 = 9$	$\therefore\ x_7 = \sqrt{9} = 3$

Etc., etc.

Esta posibilidad de soluciones por unos medios y no por otros no debe causar extrañeza.

La esencia del número es la repetición, la discontinuidad, la individualidad, la posibilidad de una cosa + otra + otra + otra,... sin término ni fin.

La esencia de lo extenso es la continuidad.

Por consiguiente, no cabe en la Aritmética pura lo que no suponga la individualidad y la repetición.

Ni tampoco en la Aritmética modular.

De aquí la necesidad de la Aritmética de aproximación.

LECCIÓN II

De los límites.

Si inscribimos en un círculo un polígono regular, por ejemplo, un triángulo, un hexágono,

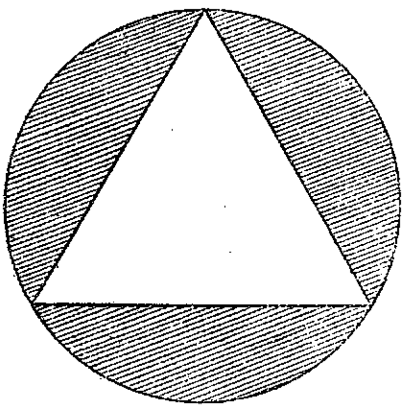


Figura 34.—Triángulo.

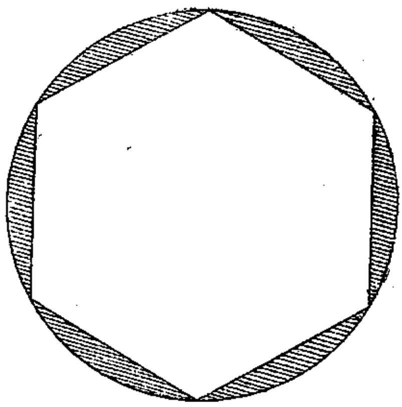


Figura 35.—Hexágono.

observaremos que el triángulo y el hexágono no llenan ni con mucho todo el círculo, pues quedan sin cubrir los espacios indicados por las rayas. Pero, si duplicamos sucesivamente el número de los lados del polígono, é inscribimos en el círculo un dodecágono, un polígono de 24 lados, uno de 48, uno de 96, uno de 192, 384, 768, 1536,...

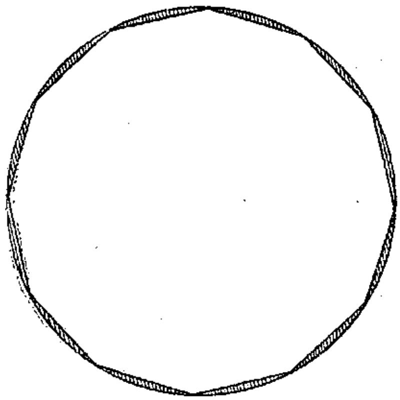


Figura 36.—Dodecágono.

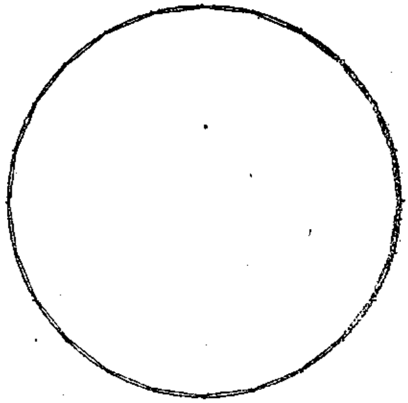


Figura 37.—Polígono de 24 lados.

vemos que, mientras mayor es el número de los lados, menos queda en el círculo sin cubrir; y concebimos que, multiplicando indefinidamente el número de los lados, cada polígono sucesivo se irá acercando más y más á la circunferencia, hasta igualarla casi y como confundirse con ella, aunque sin llegar jamás á coincidir con la curva misma, por más que no haya manera en la práctica de trazar líneas tan delicadas como sería necesario para lograr que los ojos, armados de microscopios potentísimos—mucho más de lo que podemos imaginar—percibiesen que las rectas del polígono no constituyen nunca una curva circular.

El continuo é incesante aumento de una magnitud no implica, pues, necesariamente que la magnitud haya de llegar á ser mayor que toda cantidad asignable. Estamos acostumbrados á calcular los aumentos únicamente por la operación de sumar y por acumulaciones sucesivas (1), y no nos hace-

(1) *El Imparcial* publicó en Enero de 1895 los siguientes ejemplos de aumentos incesantes no sujetos á ninguna ley de limitación:

«Hace tres meses publicaron los periódicos de Londres la noticia de haber entrado en posesión de una herencia casi fabulosa un individuo de la Cámara de los Comunes.

Su tío, banquero muy conocido, había muerto hacía siete años, dejándole la friolera de tres millones de libras esterlinas (300 millones de reales, en números redondos); pero antojándosele poco dinero para los gustos, en extremo dispendiosos, de su sobrino, había dispuesto que éste no entrase en posesión de la herencia hasta pasados siete años, para que, durante eso mos fácilmente cargo de lo que pueden ser los aumentos indefinidos sujetos á leyes de limitación.

Mientras mayor es el número de los lados, mayor es la extensión de círculo que los polígonos abarcan dentro de su perímetro: siempre con el aumento del número de los lados esa extensión aumenta; pero jamás llega á igualar á la superficie total del círculo mismo; porque el crecimiento está subordinado á la condición de que RECTAS POLIGONALES limiten en todo caso la superficie interior, creciente sin cesar con el número de los lados. Mientras más lados, los lados son menores y mayor resulta la extensión interna, pero siempre tiene que estar encerrada tal extensión dentro de límites rectilíneos; y estos límites, por el hecho de no poder dejar de ser precisamente rectilíneos, no pueden nunca coincidir ni confundirse con ninguna curva.

---

tiempo, los tres millones de libras fuesen acumulando intereses compuestos. Cuando llegó para el sobrino el feliz momento de cobrar la herencia, se encontró con que poseía cien millones de reales más de los que le había dejado el tío; pues los tres millones de libras se habían convertido en cuatro.

Los individuos de la *Royal Statistical Society*, sugestionados por tan hermosa manifestación del poder del interés compuesto, se han pasado meses haciendo cálculos, y una serie de los más curiosos ha visto la luz pública en el último número del *Strand Magazine*.

Supongamos un padre que no puede dar á su hijo para que busque fortuna más que 5000 duros. Si al nacer el niño pone á interés compuesto esta cantidad, el hijo se encontrará á los treinta y seis años con una fortuna de 24000 duros, sin haber tenido que hacer otra cosa más que no tocar al capital ni á los intereses hasta entonces.

Un filántropo que pusiera á 5 por 100 de interés compuesto, en el año presente de 1895, un simple *penny*, moneda que vale muy poco más de un perro grande, encargando se le dejase acumular intereses durante mil años, legaría á *cada uno* de los habitantes que tuviese la tierra el año 2890 la colosal fortuna de 29 millones y pico de libras (29286364 libras esterlinas), calculando que la tierra tenga entonces una población de 220 000 millones de almas.

El curioso cálculo de lo que hubiera producido la misma moneda de 1 *penny*, puesta á interés compuesto el primer año de la Era Cristiana, ha sido formulado con exactitud hasta el año presente, por varios calculistas de Londres.

El resultado es tal, que hay que tomar aliento para leer la cifra:

59 362 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

de libras esterlinas. ¡Más de 59 sextillones!

¿Se quiere formar idea de lo que representaría ese dinero en oro? Pues se podrían formar con él 25000 millones de esferas de oro macizo, cada una de ellas del tamaño de la tierra, y á cada uno de los habitantes que hoy tiene el mundo, le corresponderían dieciséis globos de esos, y todavía sobrarían esferas.»

Unicamente nos faltaría una cosa: almacén para guardarlas.

Y, como la circunferencia lo es, jamás ningún polígono regular, por más que á ella se aproxime, será, ni podrá ser, la circunferencia misma.

En este modo de irse ensanchando más y más, y más aún, sucesivamente, las superficies poligonales, el aumento nunca tiene fin; y, sin embargo, jamás el aumento puede llegar á la magnitud del círculo. Hay, pues, aumento indefinido, pero jamás tal aumento llega á cierto límite.

Supongamos una persona que en un mes aumenta la mitad de su capital, y en cada uno de los meses sucesivos le incorpora la mitad que el anterior. El capital irá creciendo siempre, siempre: jamás dejará de haber aumento; pero jamás se duplicará el fondo primitivo.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots \text{ siempre} < 2.$$

$$1 + \frac{64}{128} + \frac{32}{128} + \frac{16}{128} + \frac{8}{128} + \frac{4}{128} + \frac{2}{128} + \frac{1}{128} = \left(1 + \frac{127}{128}\right) < 2$$

Supongamos que un hombre gasta en un mes la mitad de lo que tiene, y en cada uno de los meses siguientes la mitad de lo que le queda: el capital irá disminuyendo siempre; pero nunca llegará á ser cero.

Supongamos que el largo de una regla está representado por la expresión

$$1 + \frac{1}{v},$$

Y que v puede tomar todos los valores crecientes posibles.

Si damos á v el valor de 2, tendremos:

$$1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ metros}$$

Y la regla resultará $\frac{1}{2}$ metro > 1, pues tendremos 150 centímetros.

Demos á v el valor de 10, y resultará

$$1 + \frac{1}{10} = 1\frac{1}{10}$$

Y la suma distará $\frac{1}{10}$ de ser igual á 1 metro; pues representará 110 centímetros: habiendo aumentado v, ha disminuido el valor de la fórmula.

Sea 100 el valor de v, y tendremos:

$$1 + \frac{1}{100} = 101 \text{ centímetros.}$$

Ahora á la expresión le sobra sólo un centímetro para ser = 1 metro.

Valga v ahora 1000, y

$$1 + \frac{1}{1000} \text{ será 1 metro y 1 milímetro,}$$

de manera que el sobrante no será ya más que de solo 1 milímetro.

Sea $v = 1000000$, y á la expresión

$$1 + \frac{1}{1000000}$$

solo le sobrará la milésima parte de 1 milímetro para ser = 1 metro. ¡Tamaño ya inapreciable para nuestros modos comunes de medir!

En verdad que con poderosísimos microscopios podría reconocerse (y eso tomando multitud de precauciones) que al metro le sobraba 1 milésimo de milímetro; pero, si v fuese igual á 1 billón, á 1 trillón,... á 1 sextillón... no habría ya manera de percibir con los ojos materiales ni con microscopio ninguno, que al metro le sobraba algo; pero con los ojos del entendimiento veríamos con suma claridad que

$$1 + \frac{1}{\text{billón}} > 1;\ 1 + \frac{1}{\text{trillón}} > 1;\ 1 + \frac{1}{\text{sextillón}} > 1;\ \text{etc.}$$

Así, mientras mayor vaya siendo el denominador, más se van acercando las fórmulas á ser iguales á 1. Pero, por grande que sea v, jamás tendremos 1.

La cantidad que, por su naturaleza, ó por su ley de formación, cambia de valor (estando referida siempre al mismo módulo) se llama *variable*;

Y la que, por oposición á una *variable*, conserva siempre el mismo valor, se llama *constante*.

Si, conforme á su ley, los valores sucesivos de una variable se van acercando á una constante, sin poder igualarla nunca, la constante toma el nombre de *límite*.

En la fórmula

$$1 + \frac{1}{v},$$

v es la variable y 1 es el límite á que nunca puede llegarse por causa de la variable; pues mientras $\frac{1}{v}$ sea algo,

$$\left(1 + \frac{1}{v}\right) \text{ será} > 1.$$

El límite se llama *superior* ó *inferior*, según que la fórmula en que esté la variable, resulte $>$ ó $<$ que el límite.

1 es, pues, el límite inferior de

$$1 + \frac{1}{v}$$

2 es el límite superior de la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

La unidad es, pues, el límite superior de todos los quebrados propios

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \frac{999}{1000}, \frac{99999999}{100000000}$$

Y la unidad es también el límite inferior de todos los quebrados impropios

$$\frac{100}{2}, \frac{100}{3}, \frac{100}{4}, \ldots \frac{100}{97}, \frac{100}{98}, \frac{100}{99}, \frac{1000000}{999990}, \frac{10000000}{9999999}$$

La generatriz de una decimal periódica es el límite superior de esa decimal.

¿Cuál es el límite de

$$\frac{1+v}{2+v}?$$

$$\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}; \; \frac{1+2}{2+2} = \frac{3}{4}; \; \frac{1+3}{2+3} = \frac{4}{5}; \; \frac{1+100}{2+100} = \frac{101}{102}; \; \frac{1+1 \text{ billón}}{2+1 \text{ billón}} = \text{casi } 1$$

Luego 1 es el límite superior de la fórmula

$$\frac{1+v}{2+v}.$$

¿Cuál es el límite de

$$\frac{7+v}{13+v}?$$

También 1; 1 es el límite superior, porque casi es 1 la fórmula

$$\frac{7 + 1 \text{ sextillón}}{13 + 1 \text{ sextillón}}.$$

¿Cuál es el límite inferior de

$$\frac{3 + v}{2 + v}?$$

También 1, porque apenas difiere de 1 el quebrado impropio

$$\frac{1000000000003}{1000000000002} \quad (1)$$

La idea de límite no es absoluta: es correlativa con la de variable. En el concepto de círculo no entra la idea de límite hasta correlacionarlo con polígonos de creciente número de lados. La unidad es lo que es, pero no límite hasta correlacionarla con cantidades fraccionarias, como las presentadas en los ejemplos anteriores.

Límite, pues, es una magnitud fija á la cual puede irse acercando cuanto se quiera (aunque sin igualarla nunca) otra magnitud variable.

Para que una magnitud pueda llamarse límite hay, pues, que llenar dos condiciones:

v nunca ha de poder ser l;

v ha de poder acercarse á l, indefinidamente y todo cuanto se quiera (2).

---

(1) Conviene repetirlo. Una cantidad puede ir siempre creciendo ó siempre disminuyendo sin llegar á ser mayor que cualquier cantidad imaginable, ó bien sin reducirse nunca á cero. Para ello basta que estén sujetos á leyes de limitación los incrementos ó las disminuciones.

(2) Entendidas bien estas ideas, se ve lo incorrecto, y, sobre todo, lo innecesario de ciertas expresiones indebidamente usadas en Matemáticas.

Por ejemplo: el círculo es un polígono de *infinito* número de lados. En vez de esta expresión absurda, debe entenderse lo que sigue: si el número de los lados de los polígonos regulares inscriptos aumenta indefinidamente, los polígonos se van acercando á igualar al círculo indefinidamente y sin límite.

En vez de: una cantidad partida por cero, es igual al infinito,

$$\frac{a}{o} = \infty$$

debe decirse: si, permaneciendo constante el numerador de una fracción, La expresión «por pequeña que sea una cantidad» implica la idea de límite.

(Véase en la siguiente Lección III «LÍMITES imaginarios».)

aumenta indefinidamente el denominador, la fracción disminuye indefinidamente y sin límite.

En vez de: un arco infinitamente pequeño es igual á su cuerda debe decirse: si el arco de una curva disminuye indefinidamente, la fracción

$$\frac{\text{Arco}}{\text{Cuerda}}$$

se acerca á 1 indefinidamente y sin límite.

La voz *infinito* y sus derivadas son impropias, aun cuando hayan de entenderse en el sentido de límite inconcebible (no real) de una variable.

Es necesario repetirlo: el estudio de las Matemáticas es más importante que por las verdades individuales que enseña, por ser el método de formar dialécticamente el entendimiento, para hacerlo juez entre lo verdadero y lo falso y guía seguro en el descubrimiento de la verdad. Debemos, pues, estar precavidos, no sólo contra toda inexactitud, sino contra toda apariencia de rigor científico, más insidiosa siempre que el error. En la idea de *infinito*, rebajada á la categoría de *límite*, resultan las falacias y paralogismos más temibles, cuyo influjo trasciende á la vida usual.

No hay nada peor que la falta de los hábitos que enseñan á razonar con exactitud.

LECCIÓN III

Cantidades por aproximación.

No bien se ensancha la noción de los quebrados hasta llegar á poder explicar satisfactoriamente sus funciones en la operación de multiplicar, entra la Aritmética en posesión de medios bastantes para expresar numéricamente, *no los límites de magnitudes á que no se puede nunca llegar*, pero sí cantidades tan próximas á esos límites que casi se confundan con ellos, aunque ellos sean irracionales.

Ya hemos visto que, si á un módulo ($=1$) se agrega la mitad de otro, y luego la mitad de la mitad sobrante, y en seguida la mitad del cuarto restante, y después la mitad de lo que hubiere quedado... y así sucesivamente, obtendremos sumas tales como, por ejemplo, la siguiente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\ldots;$$

de manera que siempre nos iremos acercando á un total próximo á 2, aunque nunca $=2$; porque jamás con ese procedimiento ilimitado de incrementos limitados podremos llegar al 2.

Siempre, pues, es posible por medio de los quebrados hallar expresiones exactas de números fraccionarios muy próximos á límites que jamás pueden tocarse, dada una especial generación de magnitudes por incrementos limitados. Entiéndase esto bien.

Los sumandos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}$$

no dan 2, sino la suma exacta $1+\frac{1023}{1024}$, que difiere de su límite 2 (inasequible con ese modo de generación) en solo $\frac{1}{1024}$

Pero, si menos de una milésima no nos parece todavía aproximación bastante, podemos siempre aproximarnos al límite (2 en el caso actual) aumentando el número de los quebrados

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1024}+\frac{1}{2048}+\frac{1}{4096}+\frac{1}{8192}+\frac{1}{16384}+\frac{1}{32768}+\frac{1}{65536}+\frac{1}{131072}$$
$$=1+\frac{131071}{131072}$$

expresión aritmética exacta de una suma que difiere del límite 2 mucho menos de una cienmilésima.

Y, agregando á los quebrados anteriores (si la aproximación no se estima todavía suficiente) los sumandos

$$\frac{1}{262144}+\frac{1}{524288}+\ldots$$

puede siempre llegarse á una aproximación tan eficaz como se desee.

Lo mismo cabe decir de las magnitudes irracionales.

Si 1×1 da 1, y 2×2 da 4, es evidente que no hay entero ninguno que multiplicado por sí mismo dé el producto 2 ni el producto 3.

Tampoco ningún entero multiplicado por sí mismo da 5, ni 6, ni 7, ni 8, ni 10, ni 11, ni..., en general, los números intermedios entre dos cuadrados consecutivos, ni entre dos cubos..., ni entre dos potencias seguidas de grado alguno superior.

Pero en todo caso pueden encontrarse quebrados que multiplicados por sí mismos den números todo lo próximos que se quiera á 2, á 3, á 5, á 6, á 7, á 8, á 10, á 11..., y, en general, á todos los números carentes de raíz, ó irracionales (1).

(1) Siempre deben hacerse mentalmente las pruebas de la cifra máxima. Pero, tratándose de la extracción de las raíces es imprescindible verificarlas, so pena de no llegar sin error al fin de las operaciones, y haber de

En efecto; $\sqrt{2}$ es una expresión irracional. Pero

$$1{,}4142 \times 1{,}4142$$

da un producto igual á 1,99996164, cuadrado exacto, que dista de 2 menos de una diezmilésima. El quebrado impropio decimal 1,4142 es la raíz exacta del producto 1,99996164: pero no la raíz de 2. Es la raíz de un quebrado de magnitud asignable; pero no la raíz de un imposible aritmético: 1,4142 no es la raíz de 2, sino de un número que dista de 2 menos de una diezmilésima. Mas supongamos que esa aproximación no baste para la exactitud de un cálculo esmerado, y que la necesitemos cien veces mayor. Pues nos la dará el producto

$$1{,}4142135 \times 1{,}4142135 = 1{,}99999982358225,$$

quebrado que ciertamente no es $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, mas al cual le falta solamente una fracción de millonésima para alcanzar el límite 2.

Pero supongamos todavía necesaria una aproximación 1 millón de veces mayor; pues nos la dará la fracción decimal

$$1{,}41421356237309,$$

que es la raíz exacta, no de 2, que no la tiene, sino del producto de ese quebrado por sí mismo,

$$= 1{,}9999999999999857198823561481$$

cuadrado al cual le falta menos de una diezbillonésima para ser $= \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ (1).

Si fuera necesaria mayor aproximación, se lograría de modo análogo.

Y así sucesivamente.

volver á empezarlas después de llegar erroneamente al fin. En el libro VII de la primera parte se recomendó esta necesidad de las pruebas multitud de veces. Ahora ha de bastar esta sola nueva recomendación.

(1) Aunque algebráicamente (y sin álgebra ninguna) $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ sea igual á 2, sin embargo, no ha de olvidarse que $\sqrt{2}$ es un mero símbolo de una imposibilidad aritmética, por no haber nada que $\times$ por sí misma dé 2.

```
              1,41421356237309
              1,41421356237309
              ----------------
              1272792206135781
             4242640687119270
             989949493661163
            424264068711927
           282842712474618
          848528137423854
         707106781186545
        424264068711927
       141421356237309
      282842712474618
     565685424949236
    141421356237309
   565685424949236
  141421356237309
------------------------------
1,9999999999999857198323561481
```

Continuemos.

La circunferencia, considerada como dividendo, no se puede partir exactamente por el diámetro, considerado como divisor, por ser circunferencia y diámetro magnitudes inconmensurables entre sí. Pero otras magnitudes, casi iguales á la circunferencia y conmensurables con el diámetro, han podido ya partirse por el diámetro; y de ese modo han podido obtenerse cuocientes más y más aproximados á su límite, según la exactitud de las operaciones. Así, la razón del diámetro á la circunferencia es

3,1415................ con un error de menos de $\frac{1}{10000}$

3,141592.... .... con un error menor que $\frac{1}{1000000}$

3,141592653539......... con un error menor que 1 billonésima

3,141592653589793238... con un error menor que 1 trillonésima

3,141592653589793238462664338237950288419716
con un error menor que una septillonésima

De lo expuesto se deduce uno de los conceptos más abstrusos que cabe imaginar respecto de la idea de límite: la concepción de límites imaginarios ó imposibles de existencia real, numéricamente. Por ejemplo, $\sqrt{2}$.

Raíz de 2 es numéricamente un imposible aritmético (1).

(1) No geométrico. Ya hemos visto que la diagonal del cuadrado resuelve el problema en la ciencia de la extensión.

$\sqrt{2}$ es meramente un símbolo de algo sin existencia; y, cuando se dice que los quebrados

1,4142, ó bien 1,4142135, ó bien 1,41421356237309, etc.

tienen por límite el símbolo $\sqrt{2}$, se enuncia una cosa ininteligible, ó que necesita de imprescindible interpretación.

En efecto, sin interpretación es un absurdo decir que $\sqrt{2}$ es el límite de los quebrados

1,4142; 1,414213; 1,4142135; etc.,

porque $\sqrt{2}$ es una expresión imaginaria, no de una cosa real.

Se concibe que los polígonos de muchísimos lados tengan al círculo por límite, sin poder llegar jamás á ese límite, realmente existente; pero no cabe concebir que ninguna clase de quebrados se aproxime á un límite sin existencia.

Pues bien: lo que se quiere decir es que, si existiera $\sqrt{2}$, los quebrados anteriores tendrían por límite al imaginario símbolo; porque lo que fuera realmente igual al símbolo daría 2, si se multiplicaba por sí propio. Por consiguiente, deben considerarse como aproximaciones á ese límite imaginario los quebrados que multiplicados por sí mismos den próximamente 2, límite real; lo cual pasa efectivamente con los productos de las multiplicaciones

$$\begin{array}{r} 1{,}4142 \\ \times\ 1{,}4142 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}41423 \\ \times\ 1{,}41423 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}414235 \\ \times\ 1{,}414235 \\ \hline \end{array} \quad \text{Etc.}$$

Estas decimales, pues, no tienen por límite á $\sqrt{2}$; mas sus productos tienen por límite el número 2.

Y lo dicho del 2 ha de entenderse de la inmensidad de símbolos imaginarios

$$\begin{array}{llll} \sqrt{3}; & \sqrt{5}; & \sqrt{26};\ldots & \\ \sqrt[3]{10}; & \sqrt[3]{14}; & \sqrt[3]{112};\ldots & \\ \sqrt[4]{5}; & \sqrt[4]{6}; & \sqrt[8]{8};\ldots & \text{Etc., etc.} \end{array}$$

Los quebrados correspondientes no tienen por límites á esos símbolos sin realidad; pero los respectivos productos de esos quebrados $\times$ por sí propios, tienen por límites á

$$\begin{array}{llll} 3; & 5; & 26;\ldots & \\ 10; & 14; & 112;\ldots & \text{Etc.} \end{array}$$

Hay, pues, explicados de este modo, inmensidad de límites imaginarios.

La Aritmética, pues, no puede hacer cálculos con los irracionales, porque éstos carecen de numeración; pero puede computar cantidades muy aproximadas á esos irracionales, y calcular luego esos números aproximados como si fueran los irracionales mismos. En lo cual hay siempre inexactitud, por mucha que sea la aproximación obtenida; pero no absurdo.

La Aritmética no sabe, por tanto, calcular más que las relaciones de aquellas cantidades formadas por la agregación de magnitudes reales y efectivas iguales entre sí.

La Aritmética no es, pues, la ciencia de todas las magnitudes correlacionadas entre sí.

Una magnitud cuya relación con algún módulo de medir no puede expresarse numéricamente (esto es, por un entero ó por una fracción exacta ó periódica) es un imposible aritmético; es una magnitud irracional. Por eso, $x^2 = 2$ es aritméticamente imposible (aunque no geométricamente). Ningún número multiplicado por sí mismo da 2. Pero la diagonal del cuadrado es la expresión geométrica de $\sqrt{2}$ exactamente.

Y, por tanto, hay magnitudes que no están en relación de un número á otro número, por más que puedan estarlo de otro modo.

No hay números que expresen la relación del diámetro á la circunferencia; por más que geométricamente estén las circunferencias relacionadas con sus radios, y que los círculos sean entre sí como los cuadrados de los radios. Etc., etc.

De aquí el que toda cantidad sea magnitud y que toda magnitud no sea cantidad. Lo que tiene tamaño (sea numerable ó no), líneas, superficies, volúmenes, pesos, fuerzas,... es magnitud; pero sólo aquello que resulta numerable es cantidad. Las cantidades siempre responden, ó pueden responder, á la pregunta: *¿Cuántas* veces contiene esto á aquello? *Tantas* veces. Las magnitudes no siempre pueden satisfacer á esa cuestión. ¿Cuántas veces contiene la diagonal al lado del cuadrado? ¿Cuántas veces contiene la circunferencia al diámetro? No hay manera de dar solución á estas cuestiones, porque no todo es cuantitativo ó relacionado con la pregunta

Pero, ¿quién podrá negar que la diagonal y la circunferencia son magnitudes? (1)

Hay, pues, infinidad de magnitudes inconmensurables con otras, y cuyo tamaño se necesita referir precisamente á uno de los inconmensurables mismos. A nadie interesa saber el tamaño de una circunferencia, ó de un círculo, ó de una esfera, referido á módulos cualesquiera, sino referido precisamente al radio. Nadie se figuraría desde luego y claramente lo que es una bola de 65 450 centímetros cúbicos, mientras que en el acto se forman todos idea de lo que es un globo de 50 centímetros de diámetro.

No pudiendo, pues, calcularse los inconmensurables, se calculan los conmensurables que les son próximos.

De donde nace la ARITMÉTICA POR APROXIMACIÓN.

(1) Si (verdaderamente con demasiada frecuencia) *magnitud* y *cantidad* se emplean como sinónimos, es por sinécdoque muy natural, y, en tal sentido, no censurable; por más que de usar los términos correctamente á usarlos sin precisión va la diferencia de la exactitud á la inexactitud, de la lógica á su apariencia.

LECCIÓN IV

Las raíces inconmensurables son el objeto de la Aritmética de aproximación.

El cálculo aritmético de los inconmensurables (según hemos visto) se reduce al cálculo de números conmensurables que aproximadamente los representan y sustituyen; y claro es que con tales sustitutos conmensurables pueden ya hacerse, conforme á las reglas establecidas, todas las operaciones aritméticas de sumar, restar, multiplicar y partir, y, además, las de elevar á potencias y extraer raíces. Sólo habrá de tenerse en consideración que las operaciones se efectúan con datos aproximados y no con los datos mismos; y que (por consecuencia ineludible) las operaciones nos conducirán á resultados conmensurables de aproximación, nunca rigorosamente exactos; por más que el error sea, casi siempre en la práctica, enteramente despreciable, aun en el caso de suponérseles límites imaginarios.

En efecto, los resultados de aproximación son conmensurables.

Los números puros, como 2, 3, 4, 20, 47, 153, 1000,... son repeticiones, conjuntos ó agregados del 1 incorpóreo, principio y base de la escala de la pluralidad.—Los números artificiales de mensura, esencialmente humanos, ó de invención humana, como 2 palmos, 3 pies, 4 codos, 5 pasos, 10 brazas, 14 litros, 15 kilos, 23 metros, 100 pesetas,... 15 gramos, 36 kilográmetros,... son asimismo repeticiones, conjuntos ó agregados de magnitudes conocidas, enteramente iguales unas á otras, tomadas como módulos de medir, ó bien repeticiones de partes iguales, ó alícuotas, ó fraccionarias de tales y tales módulos.—Y los números procedentes de la cuenta de objetos discontinuos, 2 dedos, 5 estrellas, 20 árboles, 10 soldados, 100 flores... (que ciertamente no implican la idea de igualdad de los componentes ni á veces su fraccionabilidad), entrañan también el concepto de repetición, de conjunto, de agregación de objetos discontinuos comprendidos mentalmente bajo una misma denominación. En todas las operaciones aritméticas entran, pues, datos conmensurables, y, por consiguiente, en todas se llega á resultados conmensurables; porque todos los datos son repeticiones, conjuntos ó agregados de *algos iguales* ó análogos, que les sirven de mensura. Y, por tanto, siendo conmensurables los números aproximados á las magnitudes irracionales, la Aritmética de aproximación dará siempre resultados conmensurables, porque siempre servirá de mensura el *algo* que, repetido, forma el conjunto ó la agregación.

Todas las operaciones aritméticas dan, pues, resultados conmensurables.—La suma desde luego los da, porque en ella siempre se trata de agregar *algos* de una denominación á otros de su mismo género.—La multiplicación tiene también que darlos, por ser una suma abreviada de sumandos iguales.—Y en el mismo caso se halla la elevación á potencias, por ser á su vez una suma abreviada de productos iguales.—El carácter y esencia de estas tres operaciones es la repetición de cosas iguales ó análogas, y cada una de las cosas repetidas es, y tiene que ser, mensura del conjunto; ya se trate de unidades incorpóreas de las que constituyen la escala de los números puros; ya de seres materiales discontinuos, como los que forman los agregados de objetos de igual denominación; ya, en fin, de módulos inventados por el hombre, ó de partes alícuotas de semejantes módulos.

Las operaciones de restar, dividir y extraer raíces tienen que dar igualmente resultados conmensurables en cuanto se limiten á *deshacer* los resultados de una suma ó de una multiplicación ó de una elevación á potencias *previamente efectuadas*.

1.º Si yo realmente he efectuado la suma de varias partidas que he recibido y de otras que he pagado, y veo que aquéllas importaron 312 pesetas y éstas 287, estoy autoriza-do para preguntar *¿cuánto me queda?* $312 - 287 = 25$. Pero, sin conocer los totales, tal pregunta puede resultar absurda; pues, si he recibido $27 + 39 + 46$ y tengo que pagar $57 + 14 + 62$, lejos de quedarme algo, me faltarán 21 pesetas.

2.º Si realmente se ha ejecutado una multiplicación, y de ella resulta un producto igual á 1107, siendo 27 uno de los factores, con razón puedo preguntar *¿cuál es el otro factor?*

$$\begin{array}{r|l} 1107 & 27 \\ \cdot\,\cdot\, 2\,\cdot & \overline{} \\ \cdot & = 41 \end{array}$$

Pero, si tomo dos números cualesquiera *ad libitum*, tal pregunta puede no ser contestable sin interpretación. Por ejemplo: si un producto es 59 y 5 uno de los factores *¿cuál es el otro factor?* No hay ningún entero que, multiplicado por otro, dé 59; y, así, hay que responder que 59 era una suma de 11 sumandos iguales á 5, á la cual se había agregado otro sumando menor igual á 4.

3.º Si realmente he elevado un número á una potencia, tengo derecho á preguntar *¿cuál es la raíz de esa potencia?*

Por ejemplo:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81; \text{ cuál es la } \sqrt[4]{81}? = 3.$$

Pero si pregunto, á capricho y al azar, «*¿cuál es la raíz de un número cualquiera?*» con toda probabilidad preguntaré por una imposibilidad numérica, como sucederá si escojo cualquiera de los números existentes entre dos cuadrados, ó dos cubos, ó dos potencias consecutivas de grado superior.

Ahora bien: si siendo el sustraendo $>$ que el minuendo pregunto «*¿cuánto me sobrará?*» hago una mala pregunta; al revés. Pero, si, rectificándola, pregunto nuevamente «*¿cuánto me faltará?*» planteo bien la cuestión y la respuesta me será dada en un número conmensurable.—Si figurándome que un dividendo es una suma exacta de sumandos iguales, pregunto «*¿cuántos sumandos iguales lo formaron?*» el resultado me demostrará el error del supuesto, y me dirá, no solamente que uno de los sumandos no es igual á los demás, sino también que es menor y en cuánto lo es. La respuesta me será también dada en un número conmensurable.—Pero, si pregunto

«¿cuál es la raíz de un número comprendido entre dos potencias sucesivas?», pregunto una imposibilidad numérica, y me resultará un *inconmensurable*.

Así, pues, las seis operaciones aritméticas dan resultados conmensurables. Desde luego los dan las operaciones de integración: sumar, multiplicar y elevar á potencias, en las cuales nunca hay imposibilidad aritmética. Los dan también las de restar, partir y extraer raíces, cuando son operaciones de disgregación de sumas, multiplicaciones y elevaciones á potencias *hechas previamente*.

Sin esta condición, puede pedirse tal vez una resta imposible ó una división no procedente de una suma de sumandos todos iguales; pero, *aun en estos casos*, los resultados son conmensurables.

En Aritmética, pues, solamente da resultados irracionales la extracción de raíces cuando se pide el imposible numérico de que un número multiplicado por sí mismo arroje como producto cualquiera de los números comprendidos entre dos cuadrados sucesivos, ó dos cubos, ó bien dos potencias seguidas de grado superior.

La extracción de raíces es, por tanto, la única operación aritmética que puede dar resultados conmensurables é inconmensurables.

La Aritmética de aproximación no trata de la extracción de raíces de los cuadrados perfectos, ni de los cubos perfectos, ni de las potencias reales de grado superior: no son, pues, de su incumbencia ejemplos tales como

$\sqrt{4}$ = al número conmensurable 2

$\sqrt{64}$ = » » 8

$\sqrt[3]{27}$ = » » 3

$\sqrt[3]{125}$ = » » 5

$\sqrt[5]{32}$ = » » 2

$\sqrt[6]{729}$ = » » 3

Etc., etc.

Todas estas son raíces conmensurables, y su estudio corresponde á la Aritmética pura.

La Aritmética de aproximación sólo trata de las raíces inconmensurables.

APÉNDICE

Se da el nombre de *números inconmensurables* á los símbolos de expresiones inconmensurables: así

$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,,\ \sqrt[4]{17}\,,\ \sqrt[45]{101}\,,\ldots$$

(que no tienen raíz) se denominan números inconmensurables.

Como se ve, no puede darse expresión más impropia ni más contradictoria, puesto que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,... son símbolos de imposibilidades numéricas que ningún número puede realizar. (1). Así $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,... no son ni enteros ni fracciones, y,

(1) Si bien pueden realizarse por otros medios. Recuérdese la espiral de irracionales.

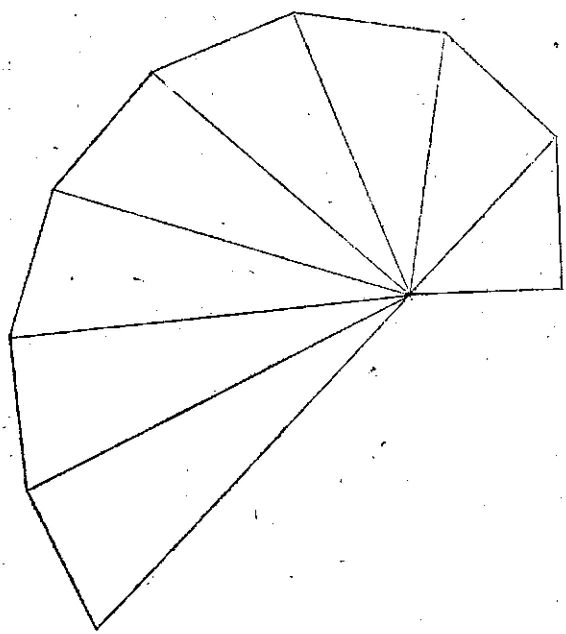


Figura 38.

por consiguiente, no son números, aunque se los llame *números inconmensurables.*

1,4142 no es la raíz cuadrada de 2, porque $\sqrt{2}$ no la tiene: 1,4142 es la raíz exacta del cuadrado $(1{,}4142)^2$; cuadrado que no dista mucho de 2, pero que no es 2.

Mas, en fin, esos símbolos tienen el nombre de *números;* si bien sería el mayor de los errores imaginar que efectivamente lo son.

Pero no se deduzca de aquí que los símbolos de imposibilidades aritméticas no puedan representar magnitudes efectivas. Podrá no ser dable expresar numéricamente la diagonal A B

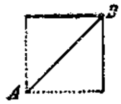


Figura 39.

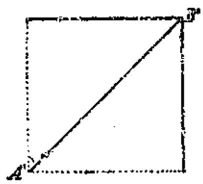


Figura 40.

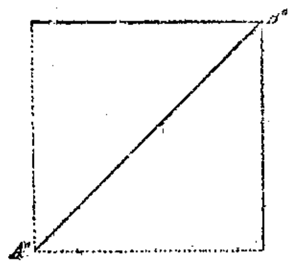


Figura 41.

relacionándola con el lado igual á 1 del correspondiente cuadrado; pero no hay duda de que la diagonal A′ B′ de otro cuadrado de lado doble que el primero, será

= 2 veces A B, y triple la de un cuadrado de lado triple, etc.

$$A' B' = 2 \times A B;$$
$$A'' B'' = 3 \times A B, \text{ etc.}$$

Una diagonal puede ponerse á continuación de otra, y otra y otra y otra, y así lograremos una línea de una longitud igual á 5 diagonales;... una diagonal puede restarse de otra;... la cantidad igual á 20 veces una diagonal puede ser repetida 4, 6, 8, 10, 1000... veces por medio de una multiplicación;... y ese producto, considerado como dividendo, puede dar lugar á todas las operaciones del dividir, supuestos los correspondientes divisores no inconmensurables. Los quebrados también resultan de la comparación de unas diagonales con otras. Si consideramos á A″ B″ como módulo, entonces

$$A B = \frac{1}{3} \text{ de } A'' B'', \text{ y } A' B' = \frac{2}{3} \text{ de } A'' B'', \text{ etc.}$$

Por manera que, aun sin conocer el valor numérico de A B, no ha habido inconveniente ninguno en hacer operaciones lógicamente exactas y de un rigor matemático incuestionable, sea el que fuere ese valor. (Véase la última Lección del tomo II.)

Esta doctrina causa ciertamente extrañeza al principiante cuando se trata de símbolos que acaba de ver calificados de imposibilidades numéricas; pero es la misma de los objetos discontinuos. ¿No sumamos *estrellas con estrellas*, y *soldados con soldados* y *flores con flores*...? Y desde ciertos puntos de vista, ¿no resultan imposibilidades numéricas *flores*, *soldados* y *estrellas*...?

No es, pues, necesario conocer si son numerables en sí ciertas magnitudes para sujetarlas á cálculos aritméticos, aun siendo ellas en sí imposibilidades aritméticas, únicamente cognoscibles por aproximación.

Y en este sentido, pues, la Aritmética pura puede estudiar y estudia ciertas operaciones á que se prestan los radicales, sean inconmensurables ó no.

(Véase la citada última Lección del tomo II.)

LECCIÓN V

Cálculo de las aproximaciones á la raíz cuadrada.

Explicadas en la Lección final del tomo II las operaciones relacionadas con los radicales, pero independientes de su valor numérico, toca ahora tratar del cálculo de aproximación á esos valores en el caso de ser irracionales; pues del caso de ser racionales (esto es, del caso de ser cuadrados perfectos las cantidades subradicales) se trató ya largamente en las Lecciones correspondientes de la Parte I, así como, en las Lecciones restantes, del caso de ser cubos perfectos.

Allí, deducidos de la elevación á potencias, se expusieron varios métodos para la extracción de las raíces cuadrada y cúbica, que conviene repase bien el discípulo, para que las premiosidades de la práctica no le sean ahora obstáculos en la inteligencia de lo que haya que agregar á las reglas estudiadas allí.

Dejemos para más adelante las relativas á la $\sqrt[3]{\ }$, y bástenos por el momento recordar que dos de los métodos de extracción de la raíz cuadrada se fundan totalmente en la *composición* de las cantidades elevadas al cuadrado, y uno en el uso promiscuo tanto de las Tablas de cuadrados y cubos como en esa *composición misma*. A este método de las Tablas (por más expedito en muchos casos) se dará á menudo preferencia en estas Lecciones, referentes al valor numérico que represente á los irracionales, ya que éstos no lo tienen.

El discípulo recordará que, dado un guarismo cuya $\sqrt{\ }$ ha de extraerse, se le divide en períodos de á dos cifras de derecha á izquierda, y que, cuando es par el número de las cifras del guarismo dado, se busca en las Tablas el más próximo cuadrado entre los de seis cifras; y cuando impar, entre los de cinco.

El discípulo ha de recordar también lo que se dijo acerca de las raíces de los números que no son cuadrados perfectos:

Rara vez se nos dará un cuadrado perfecto para extraerle la $\sqrt{\ }$; pues, como ya se ha recordado varias veces, en el millón primero de la escala de la pluralidad sólo hay 1000 cuadrados exactos; de modo que, si entre 1 y 1000000 sacásemos números al azar, sólo una vez de cada mil daríamos con el producto de un número por sí mismo. De modo que el problema, en general, de la extracción de raíces se debe enunciar en estos términos:

Dado un grado cualquiera de la escala de la pluralidad, hallar el mayor cuadrado contenido en él, y además la demasía que va desde el cuadrado al número propuesto, la cual puede ser cero (1).

	$\sqrt{264307}$	514 *Raíz.*
Cuadrado de 514 según las tablas,	264196	
	111 *Demasía.*	

De modo que

$$264307 = (214)^2 + 111$$

Todo número, pues, aritméticamente considerado, es igual á una potencia de otro número menor, más una demasía (que rara vez es cero). (2)

---

(1) Este problema es análogo al de la operación de partir:

Dado un número cualquiera como dividendo, hallar cuántas veces está contenido en él exactamente el divisor como sumando; ó bien, si el dividendo no está compuesto de un número exacto de veces el divisor, hallar también el otro sumando menor que con el total de los sumandos iguales al divisor integra el dividendo.

Primer caso	Segundo caso
$\begin{array}{r\|l} 40 & 10 \\ \hline & = 4 \end{array}$;	$\begin{array}{r\|l} 43 & 10 \\ 3 & \\ \hline & = 4 \end{array}$

$40 = 10 + 10 + 10 + 10$, exactamente. $43 = 10 + 10 + 10 + 10 + 3$

(2) En el primer millón sólo hay 1000 cuadrados y 100 cubos.

Este modo de considerar los cuadrados es una consecuencia de la teoría del sumar.

$$5^2 = 5 \times 5 = (5+5+5+5+5) + \text{ cero de demasía.}$$
$$28 = 5^2 + 3 = (5 \times 5) + 3 = (5+5+5+5+5) + 3 \text{ de demasía.}$$
$$35 = 5^2 + 10 = (5 \times 5) + 10 = (5+5+5+5+5) + 10 \text{ de demasía.}$$

La demasía puede siempre llegar á ser el doble del número que se multiplica por sí mismo; porque la diferencia entre dos cuadrados consecutivos a^2 y $(a+1)^2$ es igual al (doble de a) $+ 1$, ó bien, á la suma de las dos raíces consecutivas.

$$(a+1)^2 - a^2 = (a^2 + 2a + 1) - a^2 = 2a + 1 = a + (a+1)$$

Mientras se considere á los números como compuestos, *por suma*, de un cuadrado y una demasía (que será cero cuando el cuadrado sea perfecto), no puede temerse que aparezcan los *irracionales*. Tanto los *cuadrados* como las demasías serán en todo caso números conmensurables entre sí, y, por tanto, conjuntos ó agregados de *algos* que les servirán de mensura. Las sumas de conmensurables no pueden dar inconmensurables.

Pero el conflicto surge en cuanto se pretende lo que no es; que todos los números aparezcan, no como formados por *sumandos*, sino por *productos* de otros números menores multiplicados por sí propios; lo cual es un imposible numérico, respecto de los grados de la escala comprendidos entre dos potencias consecutivas cualesquiera (1).

$$\sqrt{37} = \sqrt{(6 \times 6) + (1 \text{ de demasía})}; \text{ formación por suma.}$$
$$\sqrt{37} = \sqrt{x \times x}; \text{ imposible numérico.}$$

---

(1) En la operación de dividir no aparecen los quebrados, mientras los dividendos se consideran como constituídos por sumandos todos iguales menos uno menor.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & = 4 \end{array} = (3+3+3+3) + (\text{un sumando menor} = 2).$$

Pero los quebrados tienen que aparecer en cuanto se quiere lo que no es; que todos los dividendos estén formados siempre por multiplicación.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} & = 4 + \frac{2}{3} \end{array} \quad \therefore 4\,\frac{2}{3} \times 3 = 12 + \frac{6}{3} = 12 + 2 = 14$$

No tienen, pues, $\sqrt{}$ los grados de la escala de la pluralidad existentes entre dos cuadrados consecutivos. (Véase luego.) Pero, por el artificio de los quebrados, se les atribuye una raíz aproximada, que tampoco tienen.

El número 4 es el cuadrado de 2; (2×2);

El número 9 es el cuadrado de 3; (3×3);

Entre los dos cuadrados 4 y 9 están los números 5, 6, 7 y 8, ¿cuál puede ser la raíz de estos números? Claro es que no hay ningún grado de la escala de la pluralidad que multiplicado por sí mismo dé, ni pueda dar, el número 5, ni el 6, ni el 7, ni el 8; pero, agregando quebrados convenientes á la imaginaria raíz 2, se llega á expresiones que multiplicadas por sí mismas, dan productos conmensurables próximos al 5, al 6, al 7 y al 8.

Para esto se supone que tengan raíz los núms. 5000000, 6000000, 7000000 y 8000000, por ejemplo, que son 1000000 de veces mayores que 5, 6, 7 y 8. Se extrae la raíz de esos números enormes, se desprecia la demasía, la raíz se parte luego por mil (raíz de 1000000), y se considera á los cuocientes resultantes como raices aproximadas de esos números que no la tienen; pues $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$,... son símbolos de conceptos imaginarios.

Claro es que en vez de agregar 6 ceros, pueden agregarse á los números inconmensurables 8 ceros, ó 10, ó 12, ó 14... ó más, siempre en número par, tratándose de la $\sqrt{}$, con tal de que luego en la raíz se separen tantas cifras como pares de ceros se hayan agregado.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & \sqrt{5\dot{0}0\dot{0}0\dot{0}0} & 2236 \\
 & 4 & 4 \\
\hline
 & 10.0 & 44 \\
 & 84 & 446 \\
\hline
 & 160.0 & \\
 & 1329 & \\
\hline
 & 2710.0 & \\
 & 26796 & \\
\hline
\textit{Demasía} & 304 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr|c}
 & \sqrt{5\dot{0}0\dot{0}0\dot{0}0} & 2236 \\
\left.\begin{array}{l}\text{cuadr.}\\ \text{de } 223\\ \text{s. l. t.}\end{array}\right\} & \begin{array}{r} 49729 \\ \hline 27100 \end{array} & 446\ (6) \\
 & 304\ \textit{Demasía} &
\end{array}
$$

Luego $\sqrt{5} = 2{,}236$

El guarismo 5000000 contiene, pues, al cuadrado de 2236 + una demasía de 304. En efecto:

$$(2236)^2 + 304 = 4999696 + 304 = 5000000$$

Y adviértase esto bien:

2236 no es la √ de 5 millones; pero lo es de un número próximo como 4999696.

Luego, si partimos por 1000 la raíz 2236, el cuociente 2,236 multiplicado por sí mismo, no dará nunca el núm. 5, pero sí una expresión que le sea muy próxima.

Y, efectivamente,

$(2,236)^2$	2,236
26796	× 2,236
1329	13416
84	6708
4	4472
4,999696	4472
	$4 + \frac{999}{1000}$ Falta una milésima para que este número mixto sea = 5.

Todavía la aproximación sería mayor (evidentemente), si en vez de agregar al 5 seis ceros, le hubiésemos agregado ocho ó diez, ó muchos más, veinte, treinta ó cuarenta, por ejemplo.

De la misma manera encontraríamos expresiones que, multiplicadas por sí mismas, se acercasen en sus productos al 6, al 7, al 8, y

En general, á los grados de la pluralidad intermedios entre dos cuadrados consecutivos cualesquiera.

Hallar la raíz de 72:

√72000000000000	8485281
64	16
80.0	
656	168
1440.0	1696
13504	16970
8960.0	
84825	169704
477500	1697056
339404	
13809600	
13576384	
23321600	
16970561	
Demasía. 6351039	

	$\sqrt{72000000000000}$	8485281
Tablas	719104	1696 (5)
	89600	16970 (2)
	477500	
	13819600	169704 (8)
	23321600	
Demasía.	6351039	1697056 (1)

La raíz hallada 8485281 no es la raíz del enorme número

72000000000000;

pero lo es del mayor cuadrado contenido en él. Dividamos esa raíz por 1000000 y el guarismo

8,485281

se llamará, porque en eso consiste la ficción matemática, la raíz aproximada del 72 (aunque 72 no la tiene, ni exacta ni aproximada).

En efecto:

Calculando con cinco decimales (1), tendremos que el cuadrado de 8,48528 es casi 72.

$(8{,}48528)^2$	$8{,}48528 \times 8{,}48528$
13576384	6788224
339404	1697056
84825	4242640
13504	6788224
656	3394112
64	6788224
71,9999766784	71,999976....

Se ve, pues, que la supuesta raíz hallada, multiplicada por sí misma no da 72 (lo cual es imposible); pero sí un número tan aproximado como 71,9999, al cual sólo faltan $\frac{24}{100000}$ para ser el número propuesto.

(1) Cinco decimales son los que de ordinario contienen las tablas no destinadas á cómputos que exijan extraordinaria aproximación.

SIGNOS DE IRRACIONALIDAD DE LA RAÍZ DE UN CUADRADO

No es necesario extraer materialmente la $\sqrt{\ }$ de un guarismo del sistema decimal para saber si es ó no cuadrado perfecto en los casos siguientes:

1.° Cuando acaba en 2, 3, 7 y 8: ningún productillo cuadrado acaba en esas cifras;

2.° Cuando termina en un número impar de ceros; porque todo guarismo acabado en cualquier número de ceros, multiplicado por sí mismo tiene en el producto pares de ceros:

$$10 \times 10 = 100;\ 100 \times 100 = 10000;\ 1000 \times 1000 = 1000000, \text{ etc.}$$

3.° Cuando no acaba en 25, aunque termine en 5. En efecto,

$$5 \times 5 = 25$$

.....05	15	25	35	45
×...05	×...15	×...25	×...35	×...45
.....25	75	25	75	25
.....0	5	0	5	0
.....25	25	25	25	25

.....55	65	75	85	95
×...55	×...65	×...75	×...85	×...95
.....75	25	75	25	75
.....5	0	5	0	5
.....25	25	25	25	25

4.° No es racional ningún guarismo cuyos factores primos no tienen exponentes pares. Porque ningún primo sin exponente es cuadrado; y porque, tenga el exponente que tuviere, todo primo multiplicado por sí mismo, resulta con exponente par

$$a^1 \times a^1 = a^{1+1} = a^2$$
$$a^2 \times a^2 = a^{2+2} = a^4$$
$$a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^6 \text{ etc.}$$

5.° Por consiguiente, todo guarismo par no divisible por 4 es irracional por no entrar en él el factor 2^2, sino el factor 2^1; y

6.º Por consiguiente también, todo guarismo impar que, disminuido en 1, no sea divisible por 4, es irracional. Porque la raíz no puede ser par, según lo anterior; ni tampoco puede ser par, porque

$$\begin{aligned}(\text{Número par} + 1)^2 &= [(2 \times n + 1)^2] \\ &= (2 \times n)^2 + [2 \times (2\,n \times 1)] + 1^2 \\ &= 4\,n^2 + 4\,n + 1 \\ &= \text{múltiplo de } 4 + 1\end{aligned}$$

LECCIÓN VI

Extracción de la raíz cuadrada por las tablas y por grupos.

Por su expedición, se da regularmente preferencia en la práctica al método promiscuo que utiliza las tablas en la extracción de la $\sqrt{\ }$ por grupos y por división. Obtenidas siempre tres cifras con el auxilio de las tablas, se logran las dos siguientes por división: habiendo ya cinco, se calculan cuatro más por división también; ya con nueve, se pueden computar del mismo modo otras ocho... etc., según todo se explicó en el Libro VII de la Parte I.

Pero entonces, por no poderse tratar allí de las demasías en cuanto ellas son el origen de la irracionalidad de los guarismos que no son cuadrados perfectos, se dejó para esta ocasión el explicar las razones de tal procedimiento, que debe usarse con sumo discernimiento, gran prudencia y gran precaución, por no ser exacto cuando hay demasías y estas demasías alcanzan ciertos valores.

Procedamos á la correspondiente explicación.

Obtenida por cualquiera de los métodos ordinarios más de la primera mitad a de las cifras de la $\sqrt{\ }$ de un número N, que por ahora supondremos cuadrado perfecto, la otra parte b de la $\sqrt{\ }$ se puede hallar por medio de la operación de partir, por ser igual esa otra parte del cuadrado al cuociente que se obtenga dividiendo la diferencia $N - a^2$ por el doble de a.

Esta división dará un residuo, que será igual b^2.

$$\mathrm{N}\left(\begin{smallmatrix}\text{cuadrado perfecto}\\ \text{por hipótesis.}\end{smallmatrix}\right) = \left(a\left[\begin{smallmatrix}\text{seguido de tantos ceros}\\ \text{como cifras tenga } b\end{smallmatrix}\right] + b\right)^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{N} = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{N} - a^2 = 2\,a\,b + b^2$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{N} - a^2}{2\,a} = b + \frac{b^2}{2\,a}$$

O bien:

$$\begin{array}{lc|l} \text{Dividendo,} & \mathrm{N} - a^2 & 2\,a,\ \text{divisor} \\ \cline{3-3} \text{Residuo,} & b^2 & b,\ \text{cuociente} \end{array}$$

Elijamos para comprobación numérica un caso de lo más desfavorable que se pueda, tal como el cuadrado 101989801. Este caso es muy desfavorable, porque la $\sqrt{\ }$ de ese número es 10099, cuyas primeras tres cifras (mitad + 1) son el número 100 (que es el menor posible de tres cifras) y cuya otra parte es 99 (número el mayor posible de dos cifras).

Tendremos, pues,

$$\begin{array}{r} 10099 \\ \times\ 10099 \\ \hline 90891 \\ 90891 \\ 10099 \\ \hline 101989801 \end{array}$$

N (cuadrado) = $(10099)^2 = 101989801$

$a^2 = (100 \text{ con dos ceros})^2 = 100000000$

$b^2 = (99)^2 = 9801$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

Todo lo cual dará:

$$\frac{101989801 - 100000000}{20000} = 99 + \frac{9801}{20000}$$

$$\frac{1989801}{200000} = 99 + \frac{9801}{20000}$$

$$\begin{array}{r|l} (\mathrm{N} - a^2) = 1989801 & 20000 \ = (2 \times a) \\ \cline{2-2} 189801 & \\ \text{Residuo} = b^2 = (99)^2 = 9801 & 99 \quad\ \ = b \end{array}$$

Hasta aquí no hay dificultad ninguna, y esto pudo muy bien haberse dicho en el Libro VII de la Parte I, por estar todo ello dentro de los principios de la extracción de la $\sqrt{}$ de los cuadrados perfectos, ó sea de los conmensurables.

Pero supongamos que N no sea cuadrado. Tendremos entonces otro guarismo N′, que contendrá al cuadrado $(a + b)$ y además una demasía.

$$N' = (a\ [\text{con tantos ceros como cifras tenga } b] + b)^2 + \text{una demasía};$$
$$N' = (a^2 + 2\,a\,b + b^2) + \text{una demasía};$$

de donde resultará

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} = N' - a^2 + \text{demasía} & 2a \left(\begin{smallmatrix}\text{con tantos ceros como}\\ \text{cifras tenga } b\end{smallmatrix}\right) \text{ divisor.} \\ \cline{2-2} \text{Residuo} = b^2 + \text{demasía} & b\text{, cuociente} \end{array}$$

La demasía, según sabemos, puede ser igual á todos los números comprendidos entre 1 y el doble de la raíz. Por consiguiente, mientras la demasía y b^2 no lleguen á componer una suma que aumente el dividendo en una cantidad $= 2\,a$, no variará, evidentemente, el cuociente b. Pero, en cuanto la demasía unida á b^2 aumente el dividendo en una cantidad igual á $2\,a$, ó en una cantidad mayor todavía que $2\,a$, entonces el cuociente no será ya b, sino $b + 1$.

Sea la demasía $= 1$;
Sea $N' = 101989102$;
Sea $a = 100$ (con dos ceros);
Sea $b = 99$;

y tendremos:

$$\frac{101989102 - 100000000}{20000} = 99 + \frac{9801}{20000} + \frac{1}{20000} \text{ de demasía}$$

$$\begin{array}{r|l} N' - a^2 = 1989102 & 20000 \\ \cline{2-2} 189802 & \\ \text{Residuo} = b^2 + 1 = (99)^2 + 1 = 9802 & 99\text{; como antes.} \end{array}$$

Sea ahora la demasía $= 1000$

$$N' - a^2 = \frac{(101989801) + 1000 - 100000000}{20000} = 99 + \frac{10801}{20000}$$

$$\frac{101990801 - 100000000}{20000} = 99 + \frac{9901}{20000}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} = 1990801 & 20000 \text{ divisor} \\ \cline{2-2} 190801 & \\ \text{Residuo} = b^2 + 1000 = (99)^2 + 1000 = 10801 & 99\text{; como antes.} \end{array}$$

Aun con ser 1000 la demasía, el cuociente es 99.

Sea la demasía ahora $= 10199$, y tendremos

$$101989801 + 10199 = 102000000$$

$$N' - a^2 = 102000000 - (100 \text{ con dos ceros})^2$$

$$= 2000000 \;\big|\; 20000$$

$$\underline{}\; 100, \text{y no } 99 \text{ como antes; ó bien} = 99 + 1$$

Se ve, pues, que cuando b^2 y la demasía aumentan el dividendo en una cantidad igual á $2a$, aumenta el cuociente b en una unidad.

Y con mucha más razón sucederá lo mismo, si la demasía es aún mayor, como puede serlo, pues, en el caso actual, puede llegar á ser $=$ al doble de la raíz 10099; esto es, $= 20198$.

$$(101989801 + 20198) - (100 \text{ con dos ceros})^2 = 2009999$$

$$N' - a^2 + \text{demasía} = 2009999 \;\big|\; 20000$$

$$0009999 \quad 100 = 99 + 1$$

Se ve, por tanto, que, cuando hay demasía, el sistema de hallar la $\sqrt{}$ por división y por grupos puede dar un cuociente exacto, ó bien un cuociente mayor en 1 que el verdadero; y que esto sucede en cuanto el residuo b^2 (igual al cuadrado del segundo término que no se descuenta por el sistema de grupos y división), unido á la demasía, iguala ó excede á la primera parte de las cifras de la $\sqrt{}$, la cual primera parte contiene siempre una cifra más que la otra parte.

Y, si esto sucede ya cuando la primera parte de la raiz contiene una cifra más que la segunda parte, con mayor razón sucedería si las dos partes fueran de igual número de cifras, ó la segunda tuviese más cifras que la primera.

De todo lo cual resulta que el teorema en que se funda el sistema de extracción de la $\sqrt{}$ por grupos y por división debe enunciarse como sigue:

Obtenida por cualquiera de los métodos ordinarios más de la primera mitad a de las cifras de la $\sqrt{}$ de un número N, la otra parte b es igual, si N es un cuadrado perfecto, al cuociente resultante de dividir la diferencia $N - a^2$ por el duplo de a, división en la cual aparecerá b^2 como residuo. Pero, si hay demasía, la división dará en el cuociente unas veces la segunda parte b exacta de la raíz, y otras veces dará $b+1$. Dará b cuando el residuo b^2, unido con la demasía, no aumente el dividendo en una cantidad $=2\,a$; y dará $b+1$ cuando sumen $2\,a$, ó una cantidad $>2\,a$.

El sistema expeditivo no debe, pues, usarse sin gran discernimiento, ni por calculadores que carezcan del tino práctico que se llega á adquirir únicamente á fuerza de operar.

Los que no tengan motivo para confiar en su destreza, deben, por tanto, reducirse á hallar por las tablas las tres primeras cifras de la $\sqrt{\ }$, y obtener las demás por el método de condensación.

	102000000	100 99
Tablas $100^2=$	10000	
	20000	2009
	191900	
Demasía	10199	20189

$$102000000=(10099)^2+10199$$

	102009999	100 99
$(100)^2$ *tablas*,	10000	
	20099	2009
	201899	
Demasía máxima $=$	20198	20189

LECCIÓN VII

Raíces por defecto y por exceso.

La demasía, según sabemos, puede llegar á ser doble de la raíz hallada; por consiguiente, todos los números desde el siguiente al primero de dos cuadrados consecutivos hasta el inmediato al segundo de los dos cuadrados, pueden aparecer como demasías. Por ejemplo, entre 4^2 y 5^2,

$$
\begin{aligned}
16 &= 4^2 + \text{cero de demasía} \\
17 &= 4^2 + 1 \text{ de demasía} \\
18 &= 4^2 + 2 \text{ de demasía} \\
19 &= 4^2 + 3 \text{ de demasía} \\
20 &= 4^2 + 4 \text{ de demasía} \\
21 &= 4^2 + 5 \text{ de demasía} \\
22 &= 4^2 + 6 \text{ de demasía} \\
23 &= 4^2 + 7 \text{ de demasía} \\
24 &= 4^2 + 8 \text{ de demasía.} \\
25 &= 5^2
\end{aligned}
$$

Tratándose de aproximaciones (no de exactitudes) es claro que la raíz de 17 (la cual no existe), es más bien 4 que no 5; y que la raíz de 24 (que tampoco existe) es más bien 5 que no 4.

No teniendo raíces los números existentes entre dos cuadrados consecutivos, se buscan otros números que las representen, y hagan aproximadamente los oficios que esas raíces imaginarias harían, si existieran. Con tal fin se agregan á los números carentes de raíz muchos pares de ceros, se extrae la raíz de esos guarismos, se desprecia la última demasía y se parte el resultado por una potencia de 10 igual al número de pares de ceros, ó sea á la mitad de todos los ceros agregados. Así las llamadas raíces de 17, 18, 19,... 24, se obtienen, con tres decimales, como sigue:

$\sqrt{17} = 17000000$	4123	$\therefore \sqrt{17} = 4{,}123$	4,123
Tablas 169744	824 (3)		× 4,123
25600			12369
Demasía 871			8246
			4123
			16492
			16,999129

$\sqrt{18} = 18000000$	4242	$\therefore \sqrt{18} = 4{,}242$	4,242
Tablas 179776	848 (2)		× 4,242
22400			8484
Demasía 5436			16968
			8484
			16968
			17,994564

$\sqrt{19} = 19000000$	4358	$\therefore \sqrt{19} = 4{,}358$	4,358
Tablas 189225	870 (8)		× 4,358
77500			34864
Demasía 7836			21790
			13074
			17432
			18,992164

$\sqrt{20} = 20000000$	4472	$\therefore \sqrt{20} = 4{,}472$	4,472
Tablas 199809	894 (2)		× 4,472
19100			8944
Demasía 1216			31304
			17888
			17888
			19,998784

$\sqrt{21} = 21000000$	4582	$\therefore \sqrt{21} = 4{,}582$	4,582
Tablas 209764	916 (2)		× 4,582
23600			9164
Demasía 5276			36656
			22910
			18328
			20,994724

$\sqrt{22} = 22000000$	4690	$\therefore \sqrt{22} = 4{,}690$	4,69
Tablas 219961.	938 (0)		× 4,69
Demasía 3900			4221
			2814
			1876
			21,9961

$\sqrt{23} = 23000000$	4795	$\therefore \sqrt{23} = 4{,}795$	4,795
Tablas 229441	958 (5)		× 4,795
55900			23975
Demasía 7975			43155
			33575
			19180
			22,992025

$\sqrt{24} = 24000000$	4898	$\therefore \sqrt{24} = 4{,}898$	4,898
Tablas 239121	978 (8)		× 4,898
87900			39184
Demasía 9596			44082
			39184
			19592
			23,990404

Las ocho llamadas raíces (sin serlo) de los ocho números

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 24,

resultan (de los procedimientos anteriores) ser, respectivamente, los quebrados

4,123 (*); 4,242; 4,358; 4,472; 4,582; 4,690; 4,795, 4,898.

Todas estas supuestas raíces se llaman *raíces por defecto;* porque multiplicadas por sí mismas, dan productos menores que los números de que se dicen raíces.

$(4{,}123)^2$, supuesta raíz de 17, no da 17, sino 16,999; falta 0,001
$(4{,}242)^2$, supuesta raíz de 18, no da 18, sino 17,994; faltan 0,006
$(4{,}358)^2$, supuesta raíz de 19, no da 19, sino 18,992; faltan 0,008
$(4{,}472)^2$, supuesta raíz de 20, no da 20, sino 19,998; faltan 0,002
$(4{,}582)^2$, supuesta raíz de 21, no da 21, sino 20,994; faltan 0,006
$(4{,}690)^2$, supuesta raíz de 22, no da 22, sino 21,996; faltan 0,004
$(4{,}795)^2$, supuesta raíz de 23, no da 23, sino 22,992; faltan 0,008
$(4{,}898)^2$, supuesta raíz de 24, no da 24, sino 23,990; faltan 0,010

Desde luego se echa de ver lo escaso de la aproximación de estas supuestas raíces; lo cual no debe extrañarse, atendiendo al corto número de pares de ceros agregados al 17, al 18, al 19,... Para una aproximación que algo satisfaga en los cálculos esmerados á las exigencias de la práctica, se necesita agregar, cuando menos, á los números cuyas raíces se buscan, de diez á doce ceros. Aun el suponerlos billones es á veces insuficiente todavía.

Pero, por mucho que llame la atención tal deficiencia (que siempre está en nuestra mano disminuír hasta hacerla inapreciable), más de seguro la llamará (y con mucha mayor razón) lo desigual de las aproximaciones. A una raíz le falta solo 1 milésima, á otra 2, á otra 4, á otras 6, á otras 3, á otras 10!!

Necesariamente, esta clase de disparidades hubo de hacer

(*) Pero no se olvide nunca que, cuando se dice, por ejemplo, que

$$\sqrt{17} = 4{,}123$$

no ha de entenderse que 17 tiene $\sqrt{\ }$, sino que

$$4{,}123 \times 4{,}123$$

da un producto conmensurable que no dista mucho de 17, 16,999, etc.

pensar en acortar diferencias; y esto dió por resultado las llamadas *raíces por exceso* (aunque tampoco sean raíces). Las *raíces por exceso* son números que, multiplicados por sí propios, dan guarismos mayores que aquellos cuyas raíces se buscan; pero que distan menos de ellos que los productos de las correspondientes *raíces por defecto.*

Por ejemplo:

La *raíz por defecto* de 24 es (según antes consta), 4,898, cuyo producto por sí misma, es 23,990404, al cual habría que agregar, nueve mil quinientas noventa y seis millonésimas para obtener el 24;

$$\begin{array}{r} 23{,}990404 \\ +0{,}009596 \\ \hline 24\phantom{{,}000000} \end{array}$$

Pues bien: si en vez de considerar como raíz de 24 al quebrado 4,898, tomamos por raíz al quebrado 4,899, y lo multiplicamos por sí mismo, obtendremos por producto 24,000201; guarismo mayor que el 24 en solas 201 millonésimas. De modo que á la raíz *por defecto* de 24 le faltan 9596 millonésimas, mientras que á la raíz *por exceso* del mismo 24 le sobran 201 millonésimas.

$$\begin{array}{r} 4{,}899 \\ +\ 4{,}899 \\ \hline 44091 \\ 44091 \\ 39192 \\ 19596 \\ \hline 24{,}000201 \end{array}$$

No puede, pues, caber duda ninguna de que la llamada raíz *por exceso* dista muchísimo menos del 24 que la correspondiente *por defecto.*

Generalizando esta evidencia, se sustituyen las *raíces por defecto* con las *raíces por exceso*, siempre que éstas están más cerca que aquéllas del número cuya raíz se busca.

Al efecto, se hace el cálculo como antes, ***buscando constantemente raíces por defecto;*** y, en cuanto se ha llegado ya al número de cifras para la raíz que se considera suficiente, se aumenta en una unidad la última cifra de la raíz hallada *cuando la última demasía es* MAYOR *que esa misma raíz.*

Así las llamadas raíces de los números 17, 18, 19,... han de ser, no precisamente las antes registradas, sino las que siguen:

$\sqrt{17} = 4{,}123$, como antes, porque la última demasía 871 es $<$ que la raíz hallada 4,123

$\sqrt{18} = 4{,}243$, en vez 4,242, porque la última demasía 5,436 es $>$ que la raíz hallada 4,242

$\sqrt{19} = 4{,}359$, en vez de 4,358, porque $7{,}836 > 4{,}538$

$\sqrt{20} = 4{,}472$, como antes, porque $1{,}216 < 4{,}472$

$\sqrt{21} = 4{,}583$, en vez de 4,582, porque $5{,}276 > 4{,}582$

$\sqrt{22} = 4{,}690$, como antes, porque $39 < 469$

$\sqrt{23} = 4{,}796$, en vez de 4,795, porque $7{,}975 > 4{,}795$

$\sqrt{24} = 4{,}899$, en vez de 4,898, porque $9{,}596 > 4{,}898$.

Ciertamente no es necesario poner frente á frente los resultados de las *raíces por defecto* y de las *raíces por exceso*, para ver la conveniencia de éstas sobre aquéllas en el caso de ser las últimas demasías $>$ que las raíces por defecto calculadas. Sin embargo, deben estudiarse las consecuencias de tal comparación, para que las ventajas aparezcan gráficamente, y se fijen en la imaginación.

$\sqrt{18}$ por defecto,	4,242	$\sqrt{18}$ por exceso,	4,243	
	$\times$ 4,242		$\times$ 4,243	
	8484		12729	
	16968		16972	
	8484		8486	
	16968		16972	
	17,994564		18,003049	
Faltan para 18,	0,005436	Sobran de 18,	0,003049	Ventaja, 0,002387
	18		18	

$\sqrt{19}$ por defecto,	4,358	$\sqrt{19}$ por exceso,	4,359	
	× 4,358		× 4,359	
	34864		39231	
	21790		21795	
	13074		13077	
	17432		17436	
	18,992164		19,000881	
Faltan para 19,	0,007836	Sobran de 19,	881	Ventaja, 0,006955
	19		19	

$\sqrt{21}$ por defecto,	4,582	$\sqrt{21}$ por exceso,	4,583	
	× 4,582		× 4,583	
	9164		13749	
	36656		36664	
	22910		22915	
	18328		18332	
	20,994724		21,003889	
Faltan para 21,	0,005276	Sobran de 21,	0,003889	Ventaja, 0,001387
	21		21	

$\sqrt{23}$ por defecto,	4,795	$\sqrt{23}$ por exceso,	4,796	
	× 4,795		× 4,796	
	23975		28776	
	43155		43164	
	33575		33572	
	19180		19184	
	22,992025		23,001616	
Faltan para 23,	0,007975	Sobran de 23,	1616	Ventaja, 0,006359
	23		23	

$\sqrt{24}$ por defecto,	4,898	$\sqrt{24}$ por exceso,	4,899	
	× 4,898		× 4,899	
	39184		44091	
	44082		44091	
	39184		39192	
	19592		19596	
	23,990404		24,000201	
Faltan para 24,	0,009596	Sobran de 24,	201	Ventaja, 0,009395
	24		24	

Este procedimiento de las raíces por defecto y por exceso es el empleado constantemente en el cálculo de los números aproximados que representan á los guarismos carentes de raíz. La última cifra de cada decimal es en una unidad mayor de lo que resulta de la extracción de raíces por defecto, siempre que así la aproximación aparece mayor. Por lo cual la última cifra de las tablas nunca es de fiar, por ignorarse si es, ó no es, la que naturalmente resultó de la extracción de raíces por defecto.

Y, por esta razón misma, cuando queremos calcular con menos cifras decimales que las que traen las tablas, hay que aumentar un 1 á la última cifra decimal cuando la cifra siguiente á la que deja de utilizarse es > 5.

Por ejemplo: En las tablas de raíces cuàdradas tenemos los datos siguientes con 7 decimales:

$$\sqrt{17} = 4{,}1231056$$
$$\sqrt{18} = 4{,}2426407$$
$$\sqrt{19} = 4{,}3588989$$
$$\sqrt{20} = 4{,}4721360$$
$$\sqrt{21} = 4{,}5825757$$
$$\sqrt{22} = 4{,}6904158$$
$$\sqrt{23} = 4{,}7958315$$
$$\sqrt{24} = 4{,}8989795$$

Pues, si en vez de siete decimales, creyésemos suficiente calcular con cuatro, cinco, ó bien con seis, deberíamos, en los casos necesarios, adoptar los números siguientes, en lugar de los respectivos tabulares.

Con 4 decimales	Con 5 decimales	Con 6 decimales
$\sqrt{17} = 4{,}1231$	$\sqrt{17} = 4{,}12310$	$\sqrt{17} = 4{,}123106$
$\sqrt{18} = 4{,}2426$	$\sqrt{18} = 4{,}24264$	$\sqrt{18} = 4{,}242641$
$\sqrt{19} = 4{,}3589$	$\sqrt{19} = 4{,}35890$	$\sqrt{19} = 4{,}358899$
$\sqrt{20} = 4{,}4721$	$\sqrt{20} = 4{,}47214$	$\sqrt{20} = 4{,}472136$
$\sqrt{21} = 4{,}5826$	$\sqrt{21} = 4{,}58258$	$\sqrt{21} = 4{,}582576$
$\sqrt{22} = 4{,}6904$	$\sqrt{22} = 4{,}69042$	$\sqrt{22} = 4{,}690416$
$\sqrt{23} = 4{,}7958$	$\sqrt{23} = 4{,}79583$	$\sqrt{23} = 4{,}795831$
$\sqrt{24} = 4{,}8990$	$\sqrt{24} = 4{,}89898$	$\sqrt{24} = 4{,}898979$

Este artificio de las *raíces por exceso* acorta las grandes disparidades que ofrece el método exclusivo de las raíces por defecto; pues deja siempre reducido el error á menos de media unidad del último orden decimal computado. Por ejemplo: á la raíz por defecto 4,898 del número 24, le falta (como ya hemos visto) casi una unidad del orden de las milésimas, último computado (exactamente $\frac{9596}{10000}$ de milésima), error de cierto considerable; mientras que á la raíz por exceso 4,899 le sobran sólo $\frac{2}{10000}$, error que ya puede dispensarse en cálculos no esmerados. Las demasías, según sabemos, pueden tener por valores desde 1 hasta el doble de la raíz; esto es, que es posible verlas representadas por un quebrado insignificante ó por un quebrado casi igual á 1.

Que usando promiscuamente, y del modo explicado, raíces por defecto y raíces por exceso, no puede el error en la aproximación pasar de média unidad del último orden decimal computado para la raíz, es punto de casi evidencia, considerando lo que sigue.

Supongamos que la última demasía sea igual á la raíz ya calculada, y que tengamos

.... .	raíz = demasía
.....00	
......00	....
.......00	
demasía	.....
	......
	doble de la raíz ó de la demasía.

Supongamos también que convenga, por exigencias de mayor exactitud, no dar por terminada en ese límite la operación: al efecto, habrá que agregar dos ceros á la demasía, y separar el de la derecha, lo cual equivale á multiplicar la demasía por 10;

......	demasía
.....00	
......00	...
.......00	
demasía 0.0	....
	.....
	doble de la demasía.

Y, por consiguiente, para continuar la operación habrá que dividir la expresión *demasía* $\times$ *10* por la expresión *doble de la demasía.*

$$\frac{\text{demasía} \times 10}{\text{demasía} \times 2}$$

lo que, evidentemente, dará un cuociente $= 5$; $(0{,}5)$

Así, pues, cuando la demasía sea, no ya igual á la raíz hasta entonces computada, sino $>$ que ella, habrá de resultar siempre > 5 la cifra que haya de agregarse á la derecha de los decimales de la raíz ya hallada; esto es, que la agregación será igual á 5 y un quebrado, ó bien á alguna de las cifras superiores á 5, tales como 6, 7, 8 ó 9.

Pero, no bien la cifra decimal de la derecha es $>$ que 5 en una raíz, ó, lo que es lo mismo, no bien la última demasía es $>$ que la raíz hallada, se adopta ya al dar por terminado el cálculo la correspondiente raíz por exceso; de modo que nunca el error puede pasar de 5 por defecto, ni exceder de 5 por exceso. Luego las disparidades de aproximación no pueden pasar de $\frac{1}{2}$ unidad del orden decimal que se compute suficiente para la relativa exactitud de los cálculos numéricos.

Y, como regularmente las tablas ordinarias suelen tener 7 cifras decimales, claro es que los mayores desvíos ó discrepancias de aproximación nunca pueden exceder de $\frac{1}{2}$ diez millonésima, desvío despreciable en los cómputos comunes. Y, si en los cálculos se emplean menos cifras decimales (como suele acontecer), el error no excederá de $\frac{1}{2}$ millonésima cuando se utilicen 6 cifras, ni de $\frac{1}{2}$ cienmilésima cuando 5.

Compárense con atención los resultados inscritos al pie de la anterior página 367.

$$\sqrt{17} = 4{,}1231 \quad \sqrt{17} = 4{,}12310 \quad \sqrt{17} = 4{,}123106$$

$$\sqrt{18} = 4{,}2426 \quad \sqrt{18} = 4{,}24264 \quad \sqrt{18} = 4{,}242641$$

Etc. Etc. Etc.

Por último, es de notar que las diferencias de un decimal á otro de los que hacen oficios de irracionales (sin serlo), disminuyen á medida que crecen los guarismos cuyas raíces se buscan.

	Diferencias.	Incrementos.
$\sqrt{16} = 4,0000000$		
$\sqrt{17} = 4,1231056$	1231056	
$\sqrt{18} = 4,2426407$	1195351	35705
$\sqrt{19} = 4,3588989$	1162582	32769
$\sqrt{20} = 4,4721360$	1132371	30211
$\sqrt{21} = 4,5826757$	1104397	27974
$\sqrt{22} = 4,6904158$	1078401	25996
$\sqrt{23} = 4,7958315$	1054157	24244
$\sqrt{24} = 4,8989795$	1031480	22677

No están, pues, igualmente distribuídas ni las diferencias ni los incrementos entre los sustitutos de los irracionales (1).

(1) En los mejores autores se lee como teorema el enunciado siguiente, ú otro que sólo difiere de él en las palabras, pero no en el concepto:

«Las dos raíces cuadradas por defecto y por exceso están desigualmente aproximadas á la *raíz cuadrada exacta.*»

Pero, si sólo hay raíces aproximadas por defecto y por exceso cuando se trata de irracionales, ¿cómo se da por sentado que en tal caso, haya raíces *exactas?* Así es, que, tanto el enunciado, como la demostración de ese llamado teorema, son en realidad ininteligibles.

Sin duda lo que se quiere dar á entender es que de las dos raíces, por defecto y por exceso, la más aproximada resultará siempre aquella cuyo cuadrado diste menos del irracional cuya raíz, aunque imposible, se pide. Y, pudiendo la demasía ser igual, á dos veces la raíz por defecto, claro es que esta raíz por defecto multiplicada por sí misma, dará un producto más cercano al irracional propuesto, cuando sea menor que ella misma la demasía resultante, y que, cuando la demasía aparezca mayor que la raíz por defecto, distará menos del citado irracional el producto resultante de la raíz por exceso multiplicada por sí misma.

LECCIÓN VIII

Fracciones aperiódicas.

Las fracciones decimales (según tenemos estudiado en el Libro I de la Parte II), son:

ó exactas,
ó periódicas.

Son exactas las correspondientes á los quebrados comunes que tienen 2, ó 5 en el denominador:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5; \quad \frac{1}{5} = 0{,}2; \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \times 5} = 0{,}05.$$

Y son periódicas las que tienen otros factores en el respectivo denominador.

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots; \quad \frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots; \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3} = 0{,}16666\ldots$$

Las fracciones periódicas no representan, pues, una *imposibilidad absoluta*, sino pura y simplemente una *imposibilidad de transformación* fraccionaria; $\frac{1}{3}$ es una cosa real; es una de las tres partes en que se ha dividido un módulo; es siempre una magnitud conocida; un submódulo representado fielmente por su denominador y su numerador, $\frac{1}{3}$.

Pero esa magnitud no puede ser expresada por el 2, ni por el 5, que no han concurrido á su generación. Un tercio es siempre una fracción determinada y efectiva de un módulo de medir, expresable exacta y directamente en forma de quebrado $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$,... siempre que el 3 esté como factor en el denominador, pero INTRANSFORMABLE en otra expresión cuyo denominador no cuente al 3 como factor.

Pero, cuando se pide la expresión de un número que, multiplicado por sí propio, dé un producto igual á uno cualquiera de los guarismos comprendidos entre dos cuadrados... se pide, no una imposibilidad de transformación, sino una imposibidad *en absoluto*. Y de ahí una característica especial de las fracciones de aproximación que representan á los irracionales: el no ser quebrados comunes ni tampoco fracciones decimales periódicas, sino fracciones inacabables y APERIÓDICAS.

Las fracciones ordinarias intransformables exactamente en decimales, tienen que ser periódicas, porque en el intento de transformación han de presentarse necesariamente (en virtud de la rotación de cifras explicada en la Lección XII del Libro I de la Parte II) la misma serie de residuos en las divisiones parciales necesarias para la intentada transformación. Pero semejante periodicidad de residuos no cabe en las operaciones de dividir que requiere el cálculo de las aproximaciones á las ilusorias raíces de los límites expresados por los números irracionales, que no pueden ser formados por involución; pues en tales divisiones no hay residuos ningunos que fatalmente hayan de reaparecer en el curso de los cálculos, y, porque, si aparecieran, resultaría que una fracción común (la correspondiente al período), realizaría el imposible de existir algo que, multiplicado por sí mismo, una ó varias veces, diera un producto igual á un cuadrado, ó un cubo, ó una potencia de todo punto imposible.

De donde el carácter distintivo de las fracciones que hacen el oficio de irracionales, sin serlo en modo alguno: la APERIODICIDAD.

Por lo cual, cuando una fracción decimal no es exacta ni periódica, puede darse por seguro que esa fracción aperiódica representa lo que sin serlo se da por raíz de un irracional.

Ejemplo de ello notable es la relación del diámetro á la circunferencia, que, calculada hasta las septillonésimas, es como sigue:

3,141592653589793238462643383279502884197169399

Jamás se ve en ella ni asomo de periodicidad (1).

Las fracciones aperiódicas son cuocientes de números abstractos que se suponen muy próximas á límites imaginarios. Estos supuestos límites son imposibilidades aritméticas, porque se pretende realizar con ellos la quimera de que todos los grados de la escala de la pluralidad sean productos por involución de fantásticas raíces. Las fracciones aperiódicas son aproximaciones á límites imaginarios.

En realidad, no bien se toma de esas fracciones inacabables el número de cifras que se considera bastante para un cálculo, los conjuntos de tales cifras resultan raices exactas de cuadrados, ó cubos, ó potencias superiores muy próximas en cada caso á cada uno de los grados de la pluralidad no formables por involución (pues de los cuadrados, cubos y potencias exactas es evidente que no hay para qué hablar aquí). Aquí se habla de los números intermedios entre dos potencias de dos números consecutivos: no hay entero ninguno que multiplicado por sí mismo dé 2, ni que, entrando en un producto 3 veces como factor, dé 3, ni 5, ni 6, ni 7, ni... etc.

2 no tiene $\sqrt{}$; pero

$(1,4142)^2 = 1,4142 \times 1,4142$ es igual á 1,99996164, potencia tan próxima á 2, que solamente le falta para ser 2 una fracción $<$ que $\frac{1}{2}$ cienmilésima.

5 no tiene $\sqrt[3]{}$; pero

$(1,71)^3 = 1,71 \times 1,71 \times 1,71$ es igual á 5,000221, con un desvío de 5 por exceso $<$ que 0 diezmilésima: (exactamente $=$ 0,000221).

Estos desvíos son denominados errores en muchos libros, lo que parece imposible, pues en ellos no hay error ninguno: son realidades numéricas de la mayor exactitud, porque (en los casos particulares que estamos examinando)

$(1,4142)^2$ es exactamente 1,99996164; y
$(1.71)^3$ es sin error ninguno 5,000221.

A todo grado de la escala de la pluralidad corresponden, pues, fracciones aperiódicas que por involución dan potencias muy próximas á ese grado. Y nótese que está enunciado

(1) En la práctica se emplea el decimal por exceso 3,1416, al cual sobran menos de 0,000008 para ser 3,141592, mientras que, tomando el decimal por defecto 3,1415 se cometería un error de más de 0,000092.

en plural el hecho de la correspondencia de que se trata, pues, efectivamente, á cada grado corresponden muchas fracciones, en número inasignable. En efecto:

5 está representado por $(2,236)^2 = 4,99696$; cuadrado muy próximo al 5.
5 también está representado por $(1,71)^3 = 5,000211$; cubo muy próximo al 5.
5 está igualmente representado por $(1,4953)^4 = 4,999\ldots$; 4.ª potencia muy próxima al 5, etc., etc.

El número de fracciones aperiódicas correspondientes á cada grado es inasignable; porque lo es el número de potencias, si bien para cada grado hay únicamente una sola fracción aperiódica de cierto número de decimales.

Sin razón ninguna, pues, y sólo por una confusión inconcebible de análisis, se denominan irracionales estas fracciones aperiódicas que en cada caso particular dan una potencia exacta muy próxima á un número verdaderamente irracional.

La teoría de las fracciones aperiódicas se funda en las evidencias siguientes:

1.ª Siempre es posible un número que difiera de otro en una décima, ó en una centésima,... ó en una millonésima,... ó en una billonésima...

6 difiere en $\frac{1}{10}$ de 5,9 ; ó bien de 6,1
$\frac{1}{100}$ de 5,99 ; ó bien de 6,01
$\frac{1}{1000}$ de 5,999 ; ó bien de 6,001
$\frac{1}{10000}$ de 5,9999 ; ó bien de 6,0001
$\frac{1}{100000}$ de 5,99999 ; ó bien de 6,00001
$\frac{1}{1000000}$ de 5,999999; ó bien de 6,000001 etc., etc.

2.ª Siempre ha de haber un cuadrado, un cubo, una 4.ª potencia, una 5.ª, una 6.ª,... que empiece por un entero seguido de nueves, ó bien de ceros en el número que se desee para una aproximación satisfactoria;

$\left.\begin{matrix} n,9999999 \\ n,0000000 \end{matrix}\right\}$ seguidos de las cifras necesarias para formar potencia.

Así tendremos siempre quebrados cuyos denominadores representarán las porciones alícuotas de un módulo dividido en partes tan diminutas como el polvo de los caminos; y, tomando de ese polvo modular el suficiente número de partes, podremos, repitiéndolo por multiplicación ó por involución, formar en todo caso una magnitud que dé una potencia tan próxima como se quiera á cualquier número irracional. Y, si el cálculo se hace por fracciones decimales, la resultante final será aperiódica.

Ejemplos:

38 es un número que no tiene $\sqrt{}$; pero

$$37{,}999999963396 = (6{,}164414)^2$$

es un cuadrado tan próximo, que sólo difiere de 38 en menos de $\frac{1}{2}$ cienmillonésima. (1)

86 no tiene $\sqrt[3]{}$; pero la tiene el quebrado aperiódico

$$85{,}999719994 = (4{,}414)^3$$

La diferencia es $< \frac{1}{10000}$. (2)

---

(1)

```
         6,164414
         6,164414
         --------
         24657656
        6164414
       24657656
      24657656
     36986484
    6164414
   36986484
   --------------
   37,999999963396
```

(2)

```
         4,414
         4,414
        ------
         17656
         4414
        17656
       17656
      --------
      19,483396
          4,414
      ---------
       77933584
      19483396
     77933584
    77933584
    -----------
    85,999719944
```

Pero, si se quisiese aproximación mayor, la daría el cubo perfecto

$$85{,}9999963502191405376 49 = (4{,}4140049)^3 \quad (1)$$

Claro es que forzando la unidad se pueden obtener en muchos casos aproximaciones más aceptables; pero la teoría no cambia;

70 no tiene $\sqrt{\ }$; pero la tiene (por exceso)

$$70{,}00000057996009 = (8{,}3666003)^2 \quad (2)$$

Y (como siempre) si una aproximación hasta las millonésimas no se estima suficiente para un cálculo esmerado, siempre el operador puede llevar la aproximación hasta donde las exigencias del cómputo lo requieran: milmillonésimas, billonésimas, etc.

---

(1)

4,4140049 (³
4,4140049
397260441
176560196
17656019600
44140049
176560196
176560196
19,48343925722401
4,4140049
175350953331501609
77933757028896 04
7793375702889604 00
1948343925722401
77933757028896 04
7793375702889604
85,9999963502191405376 49

(2)

8,3666003
8,3666003
250998009
50199601800
501996018
501996018
250998009
669328024
70,00000057996009

69 no tiene $\sqrt[3]{\ }$; pero la tiene (por exceso)

69,000008594672408249781 (1)

Propóngase el discípulo dos ó tres ejemplos de aproximación por medio de la $\sqrt{\ }$ hasta las milmillonésimas, ó las billonésimas.

---

(1)

```
               4,1015661
               4,1015661
               ---------
                41015661
              246093966
             246093966
            205078305
            41015661
          410156610
        164062644
        ----------------
       16,82284447266921
               4,1015661
       -----------------
        1682284447266921
      10093706683601526
     10093706683601526
     8411422236334605
    1682284447266921
  16822844472669210
 6729137789067684
------------------------
69,000008594672408249781
```

LECCIÓN IX

Tablas.

La dificultad que ofrece la extracción de raíces, y, más que la dificultad, la precisión de ahorrar el tiempo que se necesita invertir en operaciones tan frecuentes como las de las raíces cuadradas y las cúbicas, han hecho indispensable la formación de

TABLAS,

donde el aritmético se encuentra ya ejecutadas esas operaciones para un gran número de casos: regularmente desde el 2 al 1000.

La aproximación en las Tablas siguientes sólo alcanza hasta las diezmillonésimas; lo que es bastante para los cálculos más frecuentes y que no exijan una extraordinaria precisión.

Téngase siempre en cuenta que en la última cifra decimal va forzada la unidad cuando, forzándola, la aproximación resulta mayor.

Y no se olvide nunca que (esté forzada ó no) jamás esas fracciones aperiódicas, multiplicadas por sí mismas, darán los cuadrados en los cubos de que se dicen raíces, sino guarismos tan próximos á ellos, que puedan considerarse como iguales, aunque siempre con error.

Así, no da 70 el producto de

$$8{,}3666003 \times 8{,}3666003$$

sino

$$70{,}00000057996009;$$

y que esto mismo ocurre SIN EXCEPCIÓN con todas las fracciones aperiódicas.

Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
1	1·0000000	1·0000000	58	7·6157731	3·8708766
2	1·4142136	1·2599210	59	7·6811457	3·8929965
3	1·7320508	1·4422496	60	7·7459667	3·9148676
4	2·0000000	1·5874011	61	7·8102497	3·9304972
5	2·2360680	1·7099759	62	7·8740079	3·9578915
6	2·4494897	1·8171206	63	7·9372539	3·9790571
7	2·6457513	1·9129312	64	8·0000000	4·0000000
8	2·8284271	2·0000000	65	8·0622577	4·0207256
9	3·0000000	2·0800837	66	8·1240384	4·0412401
10	3·1622777	2·1544347	67	8·1853528	4·0615480
11	3·3166248	2·2239801	68	8·2462113	4·0816551
12	3·4641016	2·2894286	69	8·3066239	4·1015661
13	3·6055513	2·3513347	70	8·3666003	4·1212853
14	3·7416574	2·4101422	71	8·4261498	4·1408178
15	3·8729833	2·4662121	72	8·4852814	4·1601676
16	4·0000000	2·5198421	73	8·5440037	4·1793390
17	4·1231056	2·5712816	74	8·6023253	4·1983364
18	4·2426407	2·6207414	75	8·6602540	4·2171633
19	4·3588989	2·6684016	76	8·7177979	4·2358236
20	4·4721360	2·7144177	77	8·7749644	4·2543210
21	4·5825757	2·7589243	78	8·8317609	4·2726586
22	4·6904158	2·8020393	79	8·8881944	4·2908404
23	4·7958315	2·8438670	80	8·9442719	4·3088695
24	4·8989795	2·8844991	81	9·0000000	4·3267487
25	5·0000000	2·9240177	82	9·0553851	4·3444815
26	5·0990195	2·9624960	83	9·1104336	4·3620707
27	5·1961524	3·0000000	84	9·1651514	4·3795191
28	5·2915026	3·0365889	85	9·2195445	4·3968296
29	5·3851648	3·0723168	86	9·2736185	4·4140049
30	5·4772256	3·1072325	87	9·3273791	4·4310476
31	5·5677644	3·1413806	88	9·3808315	4·4479692
32	5·6568542	3·1748021	89	9·4339811	4·4647451
33	5·7445626	3·2075343	90	9·4868330	4·4814047
34	5·8309519	3·2396118	91	9·5393920	4·4979414
35	5·9160798	3·2710663	92	9·5916630	4·5143574
36	6·0000000	3·3019272	93	9·6436508	4·5306549
37	6·0827625	3·3322218	94	9·6953597	4·5468359
38	5·1644140	3·3619754	95	9·7467943	4·5629026
39	6·2449980	3·3912114	96	9·7979590	4·5788570
40	6·3245553	3·4199519	97	9·8488578	4·5947009
41	6·4031242	3·4482172	98	9·8994949	4·6104363
42	6·4807407	3·4760266	99	9·9498744	4·6260650
43	6·5574385	3·5033981	100	10·0000000	4·6415888
44	6·6332496	3·5303483	101	10·0498756	4·6570095
45	6·7082039	3·5568933	102	10·0995049	4·6723287
46	6·7823300	3·5830479	103	10·1488916	4·6875482
47	6·8556546	3·6088261	104	10·1980390	4·7026694
48	6·9282032	3·6342411	105	10·2469508	4·7176940
49	7·0000000	3·6593057	106	10·2956301	4·7326235
50	7·0710678	3·6840314	107	10·3440804	4·7474594
51	7·1414284	3·7084298	108	10·3923048	4·7622032
52	7·2111026	3·7325111	109	10·4403065	4·7768562
53	7·2801099	3·7562858	110	10·4880885	4·7914199
54	7·3484692	3·7797631	111	10·5356538	4·8058995
55	7·4161985	3·8029525	112	10·5830052	4·8202845
56	7·4833148	3·8258624	113	10·6301458	4·8345881
57	7·5498344	3·8485011	114	10·6770783	4·8488076

Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
115	10·7238053	4·8629442	172	13·1148770	5·5612978
116	10·7703296	4·8769990	173	13·1529464	5·5720546
117	10·8166538	4·8909732	174	13·1909060	5·5827702
118	10·8627805	4·9048681	175	13·2287566	5·5934447
119	10·9087121	4·9186847	176	13·2664992	5·6040787
120	10·9544512	4·9324242	177	13·3041347	5·6146724
121	11·0000000	4·9460874	178	13·3416641	5·6252263
122	11·0453610	4·9596757	179	13·3790882	5·6357408
123	11·0905365	4·9731898	180	13·4164079	5·6462162
124	11·1355287	4·9866310	181	13·4536240	5·6566528
125	11·1803399	5·0000000	182	13·4907376	5·6670511
126	11·2249722	5·0132979	183	13·5277493	5·6774114
127	11·2694277	5·0265257	184	13·5646600	5·6877340
128	11·3137085	5·0396842	185	13·6014705	5·6980192
129	11·3578167	5·0527743	186	13·6381817	5·7082675
130	11·4017543	5·0657970	187	13·6747943	5·7184791
131	11·4455231	5·0787531	188	13·7113092	5·7286543
132	11·4891253	5·0916434	189	13 7477271	5·7387936
133	11·5325626	5·1044687	190	13·7840488	5·7488971
134	11·5758369	5·1172299	191	13·8202750	5·7589652
135	11·6189500	5·1299278	192	13·8564065	5·7689982
136	11·6619038	5·1425632	193	13·8924400	5·7789966
137	11·7046999	5·1551367	194	13·9283883	5·7889604
138	11·7473401	5·1676493	195	13·9642400	5·7988900
139	11·7898261	5·1801015	196	14·0000000	5·8087857
140	11·8321596	5·1924941	197	14·0356688	5·8186479
141	11·8743421	5·2048279	198	14·0712473	5·8284867
142	11·9163753	5·2171034	199	14·1067360	5·8382725
143	11·9582607	5·2293215	200	14·1421356	5·8480355
144	12·0000000	5·2414828	201	14·1774469	5·8577660
145	12·0415946	5·2535879	202	14·2126704	5·8674673
146	12·0830460	5·2656374	203	14·2478068	5·8771307
147	12·1243557	5·2776321	204	14·2828569	5·8867653
148	12·1655251	5.2895725	205	14·3178211	5·8963685
149	12·2065556	5·3014592	206	14·3527001	5·9059406
150	12·2474487	5·3132928	207	14·3874946	5·9154817
151	12·2882057	5·3250740	208	14·4222051	5·9249921
152	12·3288280	5·3368033	209	14·4568323	5·9344721
153	12·3693169	5·3484812	210	14·4913767	5·9439220
154	12·4096736	5·3601084	211	14·5258390	5·9533418
155	12·4498996	5·3716854	212	14·5602198	5·9627320
156	12·4899960	5·3832126	213	14·5945195	5·9720926
157	12·5299641	5·3946907	214	14·6287388	5·9814240
158	12·5698051	5·4061202	215	14·6628783	5·9907264
159	12·6095202	5·4175015	216	14·6969385	6·0000000
160	12·6491106	5·4288352	217	14·7309199	6·0092450
161	12·6885775	5·4401218	218	14·7648231	6·0184617
162	12·7279221	5·4513618	219	14·7986486	6·0276502
163	12·7671453	5·4625556	220	14·8323970	6·0368107
164	12·8062485	5 4737037	221	14·8660687	6·0459435
165	12·8452326	5·4848066	222	14·8996644	6·0550489
166	12·8840987	5·4958647	223	14·9331845	6·0641270
167	12·9228480	5·5068784	224	14·9666295	6·0731779
168	12·9614814	5·5178484	225	15·0000000	6·0824020
169	13·0000000	5·5287748	226	15·0332964	6·0991991
170	13·0384048	5·5396583	227	15·0665192	6·1001702
171	13·0766968	5·5504991	228	15·0996689	6 1091147

Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
229	15·1327460	6·1180332	286	16·9115345	6·5885323
230	15·1657509	6·1269257	287	16·9410743	6·5962023
231	15·1986842	6·1357924	288	16·9705627	6·6038545
232	15·2315462	6·1446337	289	17·0000000	6·6114890
233	15·2643375	6·1534495	290	17·0293864	6·6191060
234	15·2970585	6·1622401	291	17·0587221	6·6267054
235	15·3297097	6·1710058	292	17·0880075	6·6342874
236	15·3622915	6·1797466	293	17·1172428	6·6418522
237	15·3948043	6·1884628	294	17·1464282	6·6493998
238	15·4272486	6·1971544	295	17·1755640	6·6569302
239	15·4596248	6·2058218	296	17·2046505	6·6644437
240	15·4919334	6·2144650	297	17·2336879	6·6719403
241	15·5241747	6·2230843	298	17·2626765	6·6794200
242	15·5563492	6·2316797	299	17·2916165	6·6868831
243	15·5884573	6·2402515	300	17·3205081	6·6943295
244	15·6204994	6·2487998	301	17·3493516	6·7017593
245	15·6524758	6·2573248	302	17·3781472	6·7091729
246	15·6843871	6·2658266	303	17·4068952	6·7165700
247	15·7162336	6·2743054	304	17·4355958	6·7239508
248	15·7480157	6·2827613	305	17·4642492	6·7313155
249	15·7797338	6·2911946	306	17·4928557	6·7386641
250	15·8113883	6·2996053	307	17·5214155	6·7459967
251	15·8429795	6·3079935	308	17·5499288	6·7533134
252	15·8745079	6·3163596	309	17·5783958	6·7606143
253	15·9059737	6·3247035	310	17·6068169	6·7678995
254	15·9373775	6·3330256	311	17·6351921	6·7751690
255	15·9687194	6·3413257	312	17·6635217	6·7824229
256	16·0000000	6·3496042	313	17·6918060	6·7896613
257	16·0312195	6·3578611	314	17·7200451	6·7968844
258	16·0623784	6·3660968	315	17·7482393	6·8040921
259	16·0934769	6·3743111	316	17·7763888	6·8112847
260	16·1245155	6·3825043	317	17·8044938	6·8184620
261	16·1554944	6·3906765	318	17·8325545	6·8256242
262	16·1864141	6·3988279	319	17·8605711	6·8327714
263	16·2172747	6·4069585	320	17·8885438	6·8399037
264	16·2480768	6·4150687	321	17·9164729	6·8470213
265	16·2788206	6·4231583	322	17·9443584	6·8541240
266	16·3095064	6·4312276	323	17·9722008	6·8612120
267	16·3401346	6·4392767	324	18·0000000	6·8682855
268	16·3707055	6·4473057	325	18·0277564	6·8753433
269	16·4012195	6·4553148	326	18·0554701	6·8823888
270	16·4316767	6·4633041	327	18·0831413	6·8894188
271	16·4620776	6·4712736	328	18·1107703	6·8964345
272	16·4924225	6·4792236	329	18·1383571	6·9034359
273	16·5227116	6·4871541	330	18·1659021	6·9104232
274	16·5529454	6·4950653	331	18·1934054	6·9173964
275	16·5831240	6·5029572	332	18·2208672	6·9243556
276	16·6132477	6·5108300	333	18·2482876	6·9313088
277	16·6433170	6·5186839	334	18·2756669	6·9382321
278	16·6733320	6·5265189	335	18·3030052	6·9451496
279	16·7032931	6·5343351	336	18·3303028	6·9520533
280	16·7332005	6·5421326	337	18·3575598	6·9589434
281	16·7630546	6·5499116	338	18·3847763	6·9658198
282	16·7928556	6·5576722	339	18·4119526	6·9726826
283	16·8226038	6·5654144	340	18·4390889	6·9795321
284	16·8522995	6·5731385	341	18·4661853	6·9863681
285	16·8819430	6·5808443	342	18·4932420	6·9931906

Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
343	18·5202592	7·0000000	400	20·0000000	7·3680630
344	18·5472370	7·0067962	401	20·0249844	7·3741979
345	18·5741756	7·0135791	402	20·0499377	7·3803227
346	18·6010752	7·0203490	403	20·0748599	7·3864373
347	18·6279360	7·0271058	404	20·0997512	7·3925418
348	18·6547581	7·0338497	405	20·1246118	7·3986363
349	18·6815417	7·0405860	406	20·1494417	7·4047206
350	18·7082869	7·0472987	407	20·1742410	7·4107950
351	18·7349940	7·0540041	408	20·1990099	7·4168595
352	18·7616630	7·0606967	409	20·2237484	7·4229142
353	18·7882942	7·0673767	410	20·2484567	7·4289589
354	18·8148877	7·0740440	411	20·2731349	7·4349938
355	18·8414437	7·0806988	412	20·2977831	7·4410189
356	18·8679623	7·0873411	413	20·3224014	7·4470343
357	18·8944436	7·0939709	414	20·3469899	7·4530399
358	18·9208879	7·1005885	415	20·3715488	7·4590359
359	18·9472953	7·1071937	416	20·3960781	7·4650223
360	18·9736660	7·1137866	417	20·4205779	7·4709991
361	19·0000000	7·1203674	418	20·4450483	7·4769664
362	19·0262976	7·1269360	419	20·4694895	7·4829242
363	19·0525589	7·1334925	420	20·4939015	7·4888724
364	19·0787840	7·1400370	421	20 5182845	7·4948113
365	19·1049732	7·1465695	422	20·5426386	7·5007406
366	19·1311265	7·1530901	423	20·5669638	7·5066607
367	19·1572441	7·1595988	424	20·5912603	7·5125715
368	19·1833261	7·1660957	425	20·6155281	7·5184730
369	19·2093727	7·1725809	426	20·6397674	7·5243652
370	19·2353841	7·1790544	427	20·6639783	7·5302482
371	19·2613603	7·1855162	428	20·6881609	7·5361221
372	19·2873015	7·1919663	429	20·7123152	7·5419867
373	19·3132079	7·1984050	430	20·7364414	7·5478423
374	19·3390796	7·2048322	431	20·7605395	7·5536888
375	19·3649167	7·2112479	432	20·7846097	7·5595263
376	19·3907194	7·2176522	433	20·8086520	7·5653548
377	19·4164878	7·2240450	434	20·8326667	7·5711743
378	19·4422221	7·2304268	435	20·8566536	7·5769849
379	19·4679223	7·2367972	436	20·8806130	7·5827865
380	19·4935887	7·2431565	437	20·9045450	7·5885793
381	19·5192213	7·2495045	438	20·9284495	7·5943633
382	19·5448203	7·2558415	439	20·9523268	7·6001385
383	19·5703858	7·2621675	440	20·9761770	7·6059049
384	19·5959179	7·2684824	441	21·0000000	7·6116626
385	19·6214169	7·2747864	442	21·0237960	7·6174116
386	19·6468827	7·2810794	443	21·0475652	7·6231519
387	19·6723156	7·2873617	444	21·0713075	7·6288837
388	19·6977156	7·2936330	445	21·0950231	7·6346067
389	19·7230829	7·2998936	446	21·1187121	7·6403213
390	19·7484177	7·3061436	447	21·1423745	7·6460272
391	19·7737199	7·3123828	448	21·1660105	7·6517247
392	19·7989899	7·3186114	449	21·1896201	7·6574138
393	19·8242276	7·3248295	450	21·2132034	7·6630943
394	19·8494332	7·3310369	451	21·2367606	7·6687665
395	19·8746069	7·3372339	452	21·2602916	7·6744303
396	19·8997487	7·3434205	453	21·2837967	7·6800857
397	19·9248588	7·3495966	454	21·3072758	7·6857328
398	19·9499373	7·3557624	455	21·3307290	7·6913717
399	19·9749844	7·3619178	456	21·3541565	7·6970023

Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
457	21·3775583	7·7026246	514	22·6715681	8·0104032
458	21·4009346	7·7082388	515	22·6936114	8·0155946
459	21·4242853	7·7138448	516	22·7156334	8·0207794
460	21·4476106	7·7194426	517	22·7376341	8·0259574
461	21·4709106	7·7250325	518	22·7596134	8·0311287
462	21·4941853	7·7306141	519	22·7815715	8·0362935
463	21·5174348	7·7361877	520	22·8035085	8·0414515
464	21·5406592	7·7417532	521	22·8254244	8·0466030
465	21·5638587	7·7473109	522	22·8473193	8·0517479
466	21·5870331	7·7528606	523	22·8691933	8·0568862
467	21·6101828	7·7584023	524	22·8910463	8·0620180
468	21·6333077	7·7639361	525	22·9128785	8·0671432
469	21·6564078	7·7694620	526	22·9346899	8·0722620
470	21·6794834	7·7749801	527	22·9564806	8 0773743
471	21·7025344	7·7804904	528	22·9782506	8·0824800
472	21·7255610	7·7859928	529	23·0000000	8·0875794
473	21·7485632	7·7914875	530	23·0217289	8·0926723
474	21·7715411	7·7969745	531	23·0434372	8·0977589
475	21·7944947	7·8024538	532	23·0651252	8·1028390
476	21·8174242	7·8079254	533	23·0867928	8·1079128
477	21·8403297	7·8133892	534	23·1084400	8·1129803
478	21.8632111	7·8188456	535	23·1300670	8·1180414
479	21·8860686	7·8242942	536	23·1516738	8·1230962
480	21·9089023	7·8297353	537	23·1732605	8·1281447
481	21·9317122	7·8351688	538	23·1948270	8·1331870
482	21·9544984	7·8405949	539	23·2163735	8·1382230
483	21·9772610	7·8460134	540	23·2379001	8·1432529
484	22·0000000	7·8514244	541	23·2594067	8·1482765
485	22·0227155	7·8568281	542	23·2808935	8·1532939
486	22·0454077	7·8622242	543	23·3023604	8·1583051
487	22·0680765	7·8676130	544	23·3238076	8·1633102
488	22·0907220	7·8729944	545	23·3452351	8·1683092
489	22·1133444	7·8783684	546	23·3666429	8·1733020
490	22·1359436	7·8837352	547	23·3880311	8·1782888
491	22·1585198	7·8890946	548	23·4093998	8·1832695
492	22·1810730	7·8944468	549	23·4307490	8·1882441
493	22·2036033	7·8997917	550	23·4520788	8·1932127
494	22·2261108	7·9051294	551	23·4733892	8·1981753
495	22·2485955	7·9104599	552	23 4946802	8·2031319
496	22·2710575	7·9157832	553	23·5159520	8·2080825
497	22·2934968	7·9210994	554	23·5372046	8·2130271
498	22·3159136	7·9264085	555	23·5584380	8·2179657
499	22·3383079	7·9317104	556	23·5796522	8·2228985
500	22·3606798	7·9370053	557	23·6008474	8·2278254
501	22·3830293	7·9422931	558	23·6220236	8·2327463
502	22·4053565	7·9475739	559	23·6431808	8·2376614
503	22·4276615	7·9528477	560	23·6643191	8·2425706
504	22·4499443	7·9581144	561	23·6854386	8·2474740
505	22·4722051	7·9633743	562	23·7065392	8·2523715
506	22·4944438	7·9686271	563	23·7276210	8·2572635
507	22·5166605	7·9738731	564	23·7486842	8·2621492
508	22·5388553	7·9791122	565	23·7697286	8·2670294
509	22·5610283	7·9843444	566	23·7907545	8·2719039
510	22·5831796	7·9895697	567	23·8117618	8·2767726
511	22·6053091	7·9947883	568	23·8327506	8·2816255
512	22·6274170	8·0000000	569	23·8537209	8·2864928
513	22·6495033	8·0052049	570	23.8746723	8·2913444

Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
571	23·8956063	8·2961903	628	25·0599282	8·5635377
572	23·9165215	8·3010304	629	25·0798724	8·5680807
573	23·9374184	8·3058651	630	25·0998008	8·5726189
574	23·9582971	8·3106941	631	25·1197134	8·5771523
575	23·9791576	8·3155175	632	25·1396102	8·5816809
576	24·0000000	8·3203353	633	25·1594913	8·5862247
577	24·0208243	8·3251475	634	25·1793566	8·5907288
578	24·0416306	8·3299542	635	25·1992063	8·5952380
579	24·0624188	8·3347553	636	25·2190404	8·5997476
580	24·0831891	8·3395509	637	25·2388589	8·6042525
581	24·1039416	8·3443410	638	25·2586619	8·6087526
582	24·1246762	8·3491256	639	25·2784493	8·6132480
583	24·1453929	8·3539047	640	25·2982213	8·6177388
584	24·1660919	8·3586784	641	25·3179778	8·6222248
585	24·1867732	8·3634466	642	25·3377189	8·6267063
586	24·2074369	8·3682095	643	25·3574447	8·6311830
587	24·2280829	8·3729668	644	25·3771551	8·6356551
588	24·2487113	8·3777188	645	25·3968502	8·6401226
589	24·2693222	8·3824653	646	25·4165302	8·6445855
590	24·2899156	8·3872065	647	25·4361947	8·6490437
591	24·3104996	8·3919428	648	25·4558441	8·6534974
592	24·3310501	8·3966729	649	25·4754784	8·6579465
593	24·3515913	8·4013981	650	25·4950976	8·6623911
594	24·3721152	8·4061180	651	25·5147013	8·6668310
595	24·3926218	8·4108326	652	25·5342907	8·6712665
596	24·4131112	8·4155419	653	25·5538647	8·6756974
597	24·4335834	8·4202460	654	25·5734237	8·6801237
598	24·4540385	8·4249448	655	25·5929678	8·6845456
599	24·4744765	8·4296383	656	25·6124969	8·6889630
600	24·4948974	8·4343267	657	25·6320112	8·6933759
601	24·5153013	8·4390098	658	25·6515107	8·6977843
602	24·5356883	8·4436877	659	25·6709953	8·7021882
603	24·5560583	8·4483605	660	25·6904652	8·7065877
604	24·5764115	8·4530281	661	25·7099203	8·7109827
605	24·5967478	8·4576906	662	25·7293607	8·7153734
606	24·6170673	8·4623479	663	25·7487864	8·7197596
607	24·6373700	8·4670001	664	25·7681975	8·7241414
608	24·6576560	8·4716471	665	25·7875939	8·7285187
609	24·6779254	8·4762892	666	25·8069758	8·7328918
610	24·6981781	8·4809261	667	25·8263431	8·7372604
611	24·7184142	8·4855579	668	25·8456960	8·7416246
612	24·7386338	8·4901848	669	25·8650343	8·7459846
613	24·7588368	8·4948065	670	25·8843582	8·7503401
614	24·7790234	8·4994233	671	25·9036677	8·7546913
615	24·7991935	8·5040350	672	25·9229628	8·7590383
616	24·8193473	8·5086417	673	25·9422435	8·7633809
617	24·8394847	8·5132435	674	25·9615100	8·7677192
618	24·8596058	8·5178403	675	25·9807621	8·7720532
619	24·8797106	8·5224321	676	26·0000000	8·7763830
620	24·8997992	8·5270189	677	26·0192237	8·7807084
621	24·9198716	8·5316009	678	26·0384331	8·7850296
622	24·9399278	8·5361780	679	26·0576284	8·7893466
623	24·9599679	8·5407501	680	26·0768096	8·7936593
624	24·9799920	8·5453173	681	26·0959767	8·7979679
625	25·0000000	8·5498797	682	26·1151297	8·8022721
626	25·0199920	8·5544372	683	26·1342687	8·8065722
627	25·0399681	8·5589899	684	26·1533937	8·8108681

Números	Raíz cuadrada.	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
685	26·1725047	8·8151598	742	27·2396769	9·0531831
686	26·1916017	8·8194474	743	27·2580263	9·0572482
687	26·2106848	8·8237307	744	27·2763634	9·0613098
688	26·2297541	8·8280099	745	27·2946881	9·0653677
689	26·2488095	8·8322850	746	27·3130006	9·0694220
690	26·2678511	8·8365559	747	27·3313007	9·0734726
691	26·2868789	8·8408227	748	27·3495887	9·0775197
692	26·3058929	8·8450854	749	27·3678644	9·0815631
693	26·3248932	8·8493440	750	27·3861279	9·0856030
694	26·3438797	8·8535985	751	27·4043792	9·0896352
695	26·3628527	8·8578489	752	27·4226184	9·0936719
696	26·3818119	8·8620952	753	27·4408455	9·0977010
697	26·4007576	8·8663375	754	27·4590604	9·1017265
698	26·4196896	8·8705757	755	27·4772633	9·1057485
699	26·4386081	8·8748099	756	27·4954542	9·1097669
700	26·4575131	8·8790400	757	27·5136330	9·1137818
701	26·4764046	8·8832661	758	27·5317998	9·1177931
702	26·4952826	8·8874882	759	27·5499546	9·1218010
703	26·5141472	8·8917063	760	27·5680975	9·1258053
704	26·5329983	8·8959204	761	27·5862284	9·1298061
705	26·5518361	8·9001304	762	27·6043475	9·1338034
706	26·5706605	8·9043366	763	27·6224546	9·1377971
707	26·5894716	8·9085387	764	27·6405499	9·1417874
708	26·6082694	8·9127369	765	27·6586334	9·1457742
709	26·6270539	8·9169311	766	27·6767050	9·1497576
710	26·6458252	8·9211214	767	27·6947648	9·1537375
711	26·6645833	8·9253078	768	27·7128129	9·1577139
712	26·6833281	8·9294902	769	27·7308492	9·1616869
713	26·7020598	8·9336687	770	27·7488739	9·1656565
714	26·7207784	8·9378433	771	27·7668868	9·1696225
715	26·7394839	8·9420140	772	27·7848880	9·1735852
716	26·7581763	8·9461809	773	27·8028775	9·1775445
717	26·7768557	8·9503438	774	27·8208555	9·1815003
718	26·7955220	8·9545029	775	27·8388218	9·1854527
719	26·8141754	8·9586581	776	27·8567766	9·1894018
720	26·8328157	8·9628095	777	27·8747197	9·1933474
721	26·8514432	8·9669570	778	27·8926514	9·1972897
722	26·8700577	8·9711007	779	27·9105715	9·2012286
723	26·8886593	8·9752406	780	27·9284801	9·2051641
724	26·9072481	8·9793766	781	27·9463772	9·2090962
725	26·9258240	8·9835089	782	27·9642629	9·2130250
726	26·9443872	8·9876373	783	27·9821372	9·2169505
727	26·9629375	8·9917620	784	28·0000000	9·2208726
728	26·9814751	8·9958899	785	28·0178515	9·2247914
729	27.0000000	9·0000000	786	28·0356915	9·2287068
730	27·0185122	9·0041134	787	28·0535203	9·2326189
731	27·0370117	9·0082229	788	28·0713377	9·2365277
732	27·0554985	9·0123288	789	28·0891438	9·2404333
733	27·0739727	9·0164309	790	28·1069386	9·2443355
734	27·0924344	9·0205293	791	28·1247222	9·2482344
735	27·1108834	9·0246239	792	28·1424946	9·2521300
736	27·1293199	9·0287149	793	28·1602557	9·2560224
737	27·1477149	9·0328021	794	28·1780056	9·2599114
738	27·1661554	9·0368857	795	28·1957444	9·2637973
739	27·1845544	9·0409655	796	28·2134720	9·2676798
740	27·2029140	9·0450419	797	28·2311884	9·2715592
741	27·2213152	9·0491142	798	28·2488938	9·2754352

Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
799	28·2665881	9·2793081	856	29·2574777	9·4949188
800	28·2842712	9·2831777	857	29·2745623	9·4986147
801	28·3019434	9·2870444	858	29·2916370	9·5023078
802	28·3196045	9·2909072	859	29·3087018	9·5059980
803	28·3372546	9·2947671	860	29·3257566	9·5096854
804	28·3548938	9·2986239	861	29·3428015	9·5133699
805	28·3725219	9·3024775	862	29·3598365	9·5170515
806	28·3901391	9·3063278	863	29·3768616	9·5207303
807	28·4077454	9·3101750	864	29·3938769	9·5244063
808	28·4253408	9·3140190	865	29·4108823	9·5280794
809	28·4429253	9·3178599	866	29·4278779	9·5317497
810	28·4604989	9·3216975	867	29·4448637	9·5354172
811	28·4780617	9·3255320	868	29·4618397	9·5390818
812	28·4956137	9·3293634	869	29·4788059	9·5427437
813	28·5131549	9·3331916	870	29·4957624	9·5464027
814	28·5306852	9·3370167	871	29·5127091	9·5500589
815	28·5482048	9·3408386	872	29·5296461	9·5537123
816	28·5657137	9·3446575	873	29·5465734	9·5573630
817	28·5832119	9·3484731	874	29·5634910	9·5610108
818	28·6006993	9·3522857	875	29·5803989	9·5646559
819	28·6181760	9·3560952	876	29·5972972	9·5682782
820	28·6356421	9·3599016	877	29·6141858	9·5719377
821	28·6530976	9·3637049	878	29·6310648	9·5755745
822	28·6705424	9·3675051	879	29·6479342	9·5792085
823	28·6879716	9·3713022	880	29·6647939	9·5828397
824	28·7054002	9·3750963	881	29·6816442	9·5864682
825	28·7228132	9·3788373	882	29·6984848	9·5900937
826	28·7402157	9·3826752	883	29·7153159	9·5937169
827	28·7576077	9·3864600	884	29·7321375	9·5973373
828	28·7749891	9·3902419	885	29·7489496	9·6009548
829	28·7923601	9·3940206	886	29·7657521	9·6045696
830	28·8097206	9·3977964	887	29·7825452	9·6081817
831	28·8270706	9·4015691	888	29·7993289	9·6117911
832	28·8444102	9·4053387	889	29·8161030	9·6153977
833	28·8617394	9·4091054	890	29·8328678	9·6190017
834	28·8790582	9·4128690	891	29·8496231	9·6226030
835	28·8963666	9·4166297	892	29·8663690	9·6262016
836	28·9136646	9·4203873	893	29·8831056	9·6297975
837	28·9309523	9·4241420	894	29 8998328	9·6333907
838	28·9482297	9·4278936	895	29·9165506	9·6369812
839	28·9654967	9·4316423	896	29·9332591	9·6405690
840	28·9827535	9·4353800	897	29·9498583	9 6441542
841	29·0000000	9·4391307	898	29·9666481	9·6477367
842	29·0172363	9·4428704	899	29·9833287	9·6513166
843	29·0344623	9·4466072	900	30·0000000	9·6548938
844	29·0516781	9·4503410	901	30·0166621	9·6584684
845	29·0688837	9·4540719	902	30·0333148	9·6620403
846	29·0860791	9·4577999	903	30·0499584	9·6656096
847	29·1032644	9·4615249	904	30·0665928	9·6691762
848	29·1204396	9·4652470	905	30·0832179	9·6727403
849	29·1376046	9·4689661	906	30·0998339	9·6763017
850	29·1547595	9·4726824	907	30·1164407	9·6798604
851	29·1719043	9·4763957	908	30·1330383	9·6834166
852	29·1890390	9·4801061	909	30·1496269	9·6869701
853	29·2061637	9·4838136	910	30·1662063	9·6905211
854	29·2232784	9·4875182	911	30·1827765	9·6940694
855	29·2403830	9·4912200	912	30·1993377	9·6976151

Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica	Números	Raíz cuadrada	Raíz cúbica
913	30·2158899	9·7011583	957	30·9354166	9·8545617
914	30·2324329	9·7046989	958	30·9515751	9·8579929
915	30·2489669	9·7082369	959	30·9677251	9·8614218
916	30·2654919	9·7117723	960	30·9838668	9·8648483
917	30·2820079	9·7153051	961	31·0000000	9·8682724
918	30·2985148	9·7188354	962	31·0161248	9·8716941
919	30·3150128	9·7223631	963	31·0322413	9·8751135
920	30·3315018	9·7258883	964	31·0483494	9·8785305
921	30·3479818	9·7294109	965	31·0644491	9·8819451
922	30·3644529	9·7329309	966	31·0805405	9·8853574
923	30·3809151	9·7364484	967	31·0966236	9·8887673
924	30·3973683	9·7399634	968	31·1126984	9·8921749
925	30·4138127	9·7434758	969	31·1287648	9·8955801
926	30·4302481	9·7469857	970	31·1448230	9·8989830
927	30·4466747	9·7504930	971	31·1608729	9·9023835
928	30·4630924	9·7539979	972	31·1769145	9·9057817
929	30·4795013	9·7575002	973	31·1929479	9·9091776
930	30·4959014	9·7610001	974	31·2089731	9·9125712
931	30·5122926	9·7644974	975	31·2249900	9·9159624
932	30·5286750	9·7679922	976	31·2409987	9·9193513
933	30·5450487	9·7714845	977	31·2569992	9·9227379
934	30·5614136	9·7749743	978	31·2729915	9·9261222
935	30·5777697	9·7784616	979	31·2889757	9·9295042
936	30·5941171	9·7819466	980	31·3049517	9·9328839
937	30·6104557	9·7854288	981	31·3209195	9·9362613
938	30·6267857	9·7889087	982	31·3368792	9·9396363
939	30·6431069	9·7923861	983	31·3528308	9·9430092
940	30·6594194	9·7958611	984	31·3687743	9·9463797
941	30·6757233	9·7993336	985	31·3847097	9·9497479
942	30·6920185	9·8028036	986	31·4006369	9·9531138
943	30·7083051	9·8062711	987	31·4165561	9·9564775
944	30·7245830	9·8097362	988	31·4324673	9·9598389
945	30·7408523	9·8131989	989	31·4483704	9·9631981
946	30·7571130	9·8166591	990	31·4642654	9·9665549
947	30·7733651	9·8201169	991	31·4801525	9·9699055
948	30·7896086	9·8235723	992	31·4960315	9·9732619
949	30·8058436	9·8270252	993	31·5119025	9·9766120
950	30·8220700	9·8304757	994	31·5277655	9·9799599
951	30·8382879	9·8339238	995	31·5436206	9·9833055
952	30·8544972	9·8373695	996	31·5594677	9·9866488
953	30·8706981	9·8408127	997	31·5753068	9·9899900
954	30·8868904	9·8442536	998	31·5911380	9·9933289
955	30·9030743	9·8476920	999	31·6069613	9·9966656
956	30·9192477	9·8511280	1000	31·6227766	10·0000000

LECCIÓN X

Raíces de los quebrados.

Hemos visto (Lección V) que la raíz de un quebrado, $\sqrt{\frac{a}{b}}$, es igual á la raíz del numerador partida por la raíz del denominador,

$$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pueden darse cuatro casos:

1.° Que el denominador tenga raíz exacta y también el numerador;

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

2.° Que el denominador también tenga raíz exacta, pero no el numerador;

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

3.° Que el denominador no tenga raíz ni tampoco el numerador;

$$\sqrt{\frac{5}{11}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$$

4.° Que el denominador no la tenga y el numerador sí;

$$\sqrt{\frac{9}{11}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

No se comprende qué es lo que pueda ser un quebrado sin denominador definido ni definible: dividido en determinado número de partes, así sean estas partes pocas, muchas ó muchísimas, resulta siempre un concepto inteligible; pero no cabe concebir un módulo cuyas partes sean inexpresables numéricamente.

Por eso en los dos últimos casos, el denominador se hace cuadrado perfecto multiplicando los dos términos del quebrado por su mismo denominador; con lo que el valor del quebrado no varía.

Caso 3.º

$$\sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{\frac{5 \times 11}{11 \times 11}} = \sqrt{\frac{55}{11^2}} = \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11^2}} = \frac{\sqrt{55}}{11}$$

Caso 4.º

$$\sqrt{\frac{9}{11}} = \sqrt{\frac{9 \times 11}{11 \times 11}} = \sqrt{\frac{99}{11^2}} = \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11^2}} = \frac{\sqrt{99}}{11}$$

Haciendo, pues, cuadrado perfecto el denominador, los cuatro casos quedan reducidos á dos:

Denominador cuadrado y numerador cuadrado;

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Denominador cuadrado y numerador no;

$$\sqrt{\frac{5}{11^2}} = \frac{\sqrt{5}}{11}$$

Así, los dos nuevos casos se interpretan fácilmente:

1.º De un módulo dividido en n partes hay tomadas m;

2.º De un módulo dividido en n partes hay tomadas próximamente $\sqrt{m}$.

Claro es que, á resultar posible, conviene aplicar estos principios á los números más reducidos que quepa obtener, para evitar complicaciones innecesarias; y que, por tanto, los quebrados deben, ante todo, reducirse á su más simple expresión.

¿Cuál es la raíz de los dos quebrados siguientes?

$$\sqrt{\frac{546}{728}};\quad \sqrt{\frac{595}{2295}}$$

Hallemos la más simple expresión de ambas fracciones:

546	2	728	2
273	3	364	2
91	7	182	2
13	13	91	7
		13	13

$$\sqrt{\frac{546}{728}}=\sqrt{\frac{6\times7\times13}{8\times7\times13}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

595	5	2295	3
119	7	765	3
17	17	255	3
		85	5
		17	

$$\sqrt{\frac{595}{2295}}=\sqrt{\frac{7\times5\times17}{27\times5\times17}}=\sqrt{\frac{7}{27}}$$

Según la regla general, debería este último quebrado multiplicarse por el denominador 27, lo que nos daría

$$\sqrt{\frac{7\times27}{27\times27}}=\sqrt{\frac{7\times27}{27^2}}=\frac{\sqrt{7\times27}}{27}=\frac{\sqrt{189}}{27}$$

Pero, considerando que

$$\sqrt{\frac{7}{27}}=\sqrt{\frac{7}{3^3}},$$

se ve que cabe obtener un denominador cuadrado multiplicando por 3 los dos términos del quebrado

$$\sqrt{\frac{7}{3^3}};$$

pues, así, se hará cuadrado exacto el denominador y los términos serán mucho más sencillos. En efecto,

$$\sqrt{\frac{7}{27}}=\sqrt{\frac{7}{3^3}}=\sqrt{\frac{7\times3}{3^3\times3}}=\sqrt{\frac{7\times3}{3^4}}=\frac{\sqrt{21}}{3^2}=\frac{\sqrt{21}}{9}.$$

No puede caber duda de ser mucho más fácil para el cálculo la expresión

$$\frac{\sqrt{21}}{9},$$

que no la

$$\frac{\sqrt{189}}{27}.$$

Y, en general, la ventaja aparecería más considerable, si no se tratara de quebrados tan sencillos.

Por consiguiente: siempre que haya que extraer la $\sqrt{\ }$ de un quebrado, se harán las operaciones siguientes:

1.ª Descomponer los dos términos del quebrado en sus factores primos;

2.ª Reducirlos á su más simple expresión;

3.ª Y multiplicar ambos términos por los factores convenientes para que resulten pares todos los exponentes de los factores primos del denominador.

Así, la extracción siguiente se dispondrá como sigue:

$$\sqrt{\frac{1519479}{580800000}}$$

$$= \sqrt{\frac{3^5 \times 13^2 \times 37}{2^9 \times 3 \times 5^5 \times 11^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3^4 \times 13^2 \times 37}{2^9 \times 5^5 \times 11^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3^4 \times 13^2 \times 37 \times 2 \times 5}{2^{10} \times 5^6 \times 11^2}}$$

$$= \frac{3^2 \times 13 \times \sqrt{37 \times 2 \times 5}}{2^5 \times 5^3 \times 11}$$

$$= \frac{3^2 \times 13}{2^5 \times 5^3 \times 11} \times \sqrt{370}$$

$$= \frac{9 \times 13}{32 \times 125 \times 11} \times \sqrt{370}$$

$$= \frac{117}{44000} \times \sqrt{370}$$

1519479	3
506493	3
168831	3
56277	3
18759	3
6253	13
481	13
37	37

580800000	2
290400000	2
145200000	2
72600000	2
36300000	2
18150000	2
9075000	2
4537500	2
2268750	2
1134375	3
378125	5
75625	5
15125	5
3025	5
605	5
121	11
11	11

Así, si después de simplificado un quebrado y descompuesto en sus factores simples, nos resultase

$$\sqrt{\frac{2 \times 7^2 \times 11}{3^3 \times 5 \times 17^4}}$$

habría que multiplicar denominador y numerador por 3 y por 5, con lo que tendríamos:

$$\sqrt{\frac{2 \times 7^2 \times 11 \times 3 \times 5}{3^4 \times 5^2 \times 17^4}} = \frac{\sqrt{2 \times 7^2 \times 11 \times 3 \times 5}}{3^2 \times 5 \times 17^2} = \frac{\sqrt{16170}}{13005} \quad (1)$$

(1) ¿Habrá de recomendarse nuevamente que haga el operador siempre las pruebas de la cifra máxima?

En virtud de estos procedimientos, nunca hay que sacar más que una sola $\sqrt{\ }$, la del numerador, por el procedimiento empleado en la extracción de los números enteros.

Estos principios se aplican también á las fracciones decimales, que son (casi) las exclusivamente empleadas en el cálculo de los irracionales.

Sólo hay que distinguir si el número de cifras del decimal es par ó impar.

Si es par se procede á la extracción como si se tratara de un entero; y, después, se separan con la coma tantas cifras de la derecha cuantos períodos haya presentado el número.

Y, si es impar, se agrega un cero á la derecha de las cifras decimales, y se procede como en el caso anterior.

Tampoco así hay más que una sola extracción que verificar.

Fácilmente se deduce de los principios consignados en la Lección VIII cuál ha de ser el procedimiento para hallar las raíces *por defecto* y *por exceso* de las cantidades decimales.

Se buscan las raíces por defecto según cualquiera de los métodos descritos en las correspondientes Lecciones del Libro dedicado á la raíz cuadrada en la Parte I; y, si la demasía es menor que la raíz, se dan por suficientemente aproximadas las cifras obtenidas; pero, si la demasía es mayor, se agrega una unidad á la última cifra de la derecha de la raíz.

$$\sqrt{\ }\ 0{,}5840963$$

Se agrega un cero por ser impar el número dado de cifras decimales:

$\sqrt{\ }$	0,58409630	7642	Método de condensación.
	94.0	14	
	649.6	152	
	40030	1528	
Demasía	9466		

Raíz del cuadrado más próximo 7643

$\sqrt{}$ 0,30858136	5555	tercer método.
25	10	
585		
525		$= (5)^2 +$ doble por la cifra anterior.
6081		
5525		$= (5)^2 +$ doble por las dos cifras anteriores.
55636		
55525		$= (5)^2 +$ doble por las tres cifras anteriores
Demasía 111		

Raíz del cuadrado más próximo 5555

$\sqrt{}$ 0,30868024	5555
Tablas 308025	1110
65524	
Demasía 9999	

Raíz del cuadrado más próximo 5556

El mejor procedimiento para hallar raíces cuadradas por aproximación será siempre el de las tablas, habiéndolas, pues por ellas siempre obtendremos expeditivamente las 3 primeras cifras de la raíz. Después es casi indiferente hacer uso del método de condensación, ó bien del de divisiones por grupos. Cada uno de estos dos tiene sus ventajas y sus inconvenientes. El de extracción por grupos presenta con frecuencia el de la interpretación, cuando hay que agregar á una sección ceros, que no aparecen en los cuocientes de cada agrupación.

Método de condensación.

$\sqrt{}$ 0,70321341112	265181
4	4
30.3	52
272.1	530
963.4	5302
43331.1	53036
90871.2	
Demasía 378351	

Raíz por defecto. 0,265181

Método por grupos.

$\sqrt{}$ 0,70321341112		265181
Tablas 70225		
963411	530	
4334	18	
9411		
$(18)^2$ 324		5306
908712		
Demasía 378351		1

Raíz por exceso. 0,265182

Siendo mayor la demasía que la raíz hallada, claro es que la última cifra deberá ser forzada en una unidad y que el cuadrado de la llamada raíz por exceso 0,265182 se hallará más cerca del número dado 0,70321341112, que el cuadrado de la supuesta raíz por defecto, 0,265181.

Y, con efecto, la diferencia por defecto es = 378351 cien mil millonésimas, y la por exceso = 152012 (*)

CÁLCULO POR EL MÉTODO DE CONDENSACIÓN.

	0,38051692748136702549570214368807192	61686054135547284
	36	12
	205	122
	8416	1232
	106092	12336
	746874	1233720
(**)	66788136	12337210
	510211170	123372108
	1672275425	1233721082
	43855434449	12337210826
	684380198057	123372108270
	6751965673202	1233721082710
	58336025967714	12337210827108
	898718265929836	123372108271094
	3511350803222780	1233721082710944
	104390863780089671	12337210827109456
	569317716321408792	
Demasía	75829283237030536	Raíz más aproximada =0,61686054135547285

(*)

265181	265182
×265181	×265182
265181	530364
2121448	2121456
265181	265182
1325905	1325910
1591086	1591092
530362	530364
70320962761	70321493124
70321341112	70321341112
378351	152012

(**) Por el método de los grupos no se ve claramente, como aquí, que hay que poner cero á la raíz.

CÁLCULO POR GRUPOS

0,38051692748136702549570214368O7192 | 616 86 0541 35547284

Cuadrado de 616 según las tablas.......... 379456

10609274 | 1232
7532 | 86
14074
Cuadrado de 86 según las tablas................ 7396

667881367025 | 123372
510213 | 0541
167256
438847025
Cuadrado de 0541 según las tablas..................... 292681

4385543444957021436807192 | 1233721082
6843801989 | 35547284
6751965795
5833603857
8987195290
3511477162
10440349981
5705813254
770928926368O7192
Cuadrado de 35547284 1263609399776656

Demasía...................... 75829283237030536

Raíz más aproximada
= 0,61686054135547285

35547284
× 35547284
142189136
284378272
71094568
248830988
142189136
177736420
177736420
106641852
1263609399776656

(Véase *Raíz cuadrada.*)

La demasía despreciada en las dos extracciones anteriores es insignificante tratándose de decimales; 75 cuatrillonésimas es en la práctica una cantidad inapreciable. Pero, si se tratase de enteros, la demasía ahora despreciada sería de grandísima consideración.

Cuando se trate, pues, de enteros, hay que agregar á su última demasía 12 ceros ó 14 (ó más, si se necesita una aproximación superior á la de las 10 millonésimas); seguir extrayendo hasta bajar el último período, de dos ceros, y entonces solamente cabe prescindir de la última demasía decimal.

Por ejemplo: si en vez del decimal 0,5840963 (cuya raíz fué la primera que se extrajo en esta Lección) se nos hubiese dado el entero 5840963, no habría sido lícito prescindir de la demasía de 3907 enteros, y, por tanto, habría habido que disponer la operación como sigue:

	$\sqrt{584096300000000000000}$	2416,8084326
	4	4 (4)
	18.4	48 (1)
	809	482 (6)
	3286.3	4832 (8)
	39070.0	483360 (8)
	..40760.00.0	4833616 (4)
	.209113600	48336168 (3)
	1576894400	483361686 (2)
	12680.93.5100	4833616864 (6)
Demasía decimal de que	301370137600	
se prescinde........	11353125724	

Siempre, pues, que se nos den á extraer raíces cuadradas de guarismos enteros no cuadrados, se agregarán 12 ceros ó 14 al guarismo, si se quiere una aproximación hasta las millonésimas ó las diezmillonésimas. Sólo no necesitándose tanta aproximación, se podrían agregar menos ceros (siempre en número par).

LECCIÓN XI

Cálculos de las aproximaciones á la raíz cúbica.

En las últimas Lecciones del Libro VII de la Parte I se trató del cálculo de las $\sqrt{\ }$ cuando los números cuya raíz se busca son cubos exactos.

Toca ahora tratar del cálculo aproximado de esas expresiones cuando se nos dan guarismos comprendidos entre dos cubos consecutivos; y, por tanto, irracionales, por ser sus cubos imposibilidades numéricas. Si el cubo de 2 es 8, y el cubo de 3 es 27, ningún entero multiplicado dos veces por sí mismo puede dar (por multiplicación, entiéndase esto bien) los números desde el 9 al 26; y, en general, los guarismos comprendidos entre dos cubos exactos.

Conviene que el discípulo repase aquellas Lecciones para que ahora no le detengan las dificultades de la ejecución, y que se haga bien cargo de lo explicado en las Lecciones últimas, por ser la doctrina en ellas expuesta respecto á la $\sqrt{\ }$ la misma que ha de sentarse ahora respecto á la $\sqrt[3]{\ }$, sin más diferencias que las propias de la involución de los cuadrados y la involución de los cubos.

Rarísima vez, á no ser de propósito, se nos dará un cubo perfecto para extraerle la $\sqrt[3]{\ }$; pues en el primer millón no hay más que 100 cubos exactos.

Por lo cual, en general, hay que enunciar el problema de la evolución cúbica diciendo que consiste en «hallar, dado un guarismo cualquiera, el mayor cubo contenido en él, y, además, la correspondiente demasía (que en 1 millón de casos puede ser cero 100 veces solamente)».

$$\sqrt[3]{}\ 1222 = 10, \text{ con una demasía de } 222.$$

De modo que

$$1222 = 10^3 + 222.$$

Todo número, pues (según ya se ha dicho) es igual á una potencia de un número menor + una demasía.

Mientras se considere á los números como compuestos así, *por suma*, de un cubo y una demasía (que sólo será cero cuando se trate de un cubo exacto), no puede temerse que aparezcan los irracionales, porque siempre las demasías resultarán números conmensurables. Pero el conflicto surgirá en cuanto se pretenda que todos los guarismos aparezcan, no formados por sumandos, sino por productos de otros números menores multiplicados por sí propios una ó varias veces. (En el caso de la $\sqrt[3]{}$, multiplicado 2 veces por sí mismo).

$$28 = \sqrt[3]{(3 \times 3 \times 3)} + (\text{una demasía} = 1) = \sqrt[3]{27} + 1$$

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{x \times x \times x}; \text{ imposible aritmético.}$$

No tienen, pues, $\sqrt[3]{}$ los grados de la escala de la pluralidad existentes entre dos cubos consecutivos.

Pero, por el artificio de los quebrados, se les atribuye una raíz aproximada (que en realidad no es ni puede ser raíz de lo que no la tiene); pero que, multiplicada dos veces por sí misma, da un valor muy próximo al irracional propuesto.

Si pretendemos extraer la $\sqrt[3]{2}$, hallaremos por las tablas el número 1,259921; quebrado que, ciertamente, multiplicado dos veces por sí mismo no da 2, sino el cubo exacto 1,999997623904869 61, al cual le faltan menos de 3 diezmillonésimas para ser $= 2$.

```
          1259921
          1259921
          -------
          1259921
         2519842
       11339289
      11339289
      6299605
     2519842
    1259921
    -------------
    1587400926241
          1259921
    -------------
    1587400926241
   3174801852482
  14286608336169
 14286608336169
 7937004631205
3174801852482
1587400926241
------------------
1,999999762390486961
```

Para hallar la $\sqrt[3]{}$ de los números irracionales, se supone que la tienen cuando se les agregan muchas trincas de ceros (regularmente de 6 á 7; esto es, 18 ceros ó 21: siempre un número de ceros divisible por 3). Con la agregación de tantos ceros los números dados se hacen billones y trillones de veces mayores de lo que son en realidad; se extrae la $\sqrt[3]{}$ de esos números enormes, se desprecia la demasía resultante; se parte luego la raíz por una potencia del 10 igual al número de trincas de ceros agregados; y se considera á los quebrados decimales (ya propios ya impropios) obtenidos de tal manera, como raíces aproximadas de unos números que no la tienen.

¿Cuál es la raíz cúbica de 2? (1)

Para obtener 7 cifras decimales agregamos 21 ceros, ó sea 7 trincas de ceros.

$$\sqrt[3]{2{,}000000000000000000000}$$

Y la operación será como sigue:

(1) Claro es que no hay para qué hacer esta operación, pues el resultado está en las Tablas.

2000000000000000000000 | 125 99 21.
Tablas, cubo de 125, que es el más próximo inferior................ 1953125 | 46875
99 (1)

46875000000
468750
468750000
368507799

1.er divisor, $3a^2=3\times(125)^2$
$=3\times15625=468750000$

1002422010000000000 | 476204403
500132040 | 210
Demasía 239276370000000

$3ab^2=3\times12500\times(99)^2$
$=37500\times9801$
$=367537500$

9801
375
49005
68607
29403
3675375

$b^3=(99)^3=$ 970299

368507799

Se desprecia esta demasía.

Se separan 7 cifras de la raíz y se estima como $\sqrt[3]{2}$ al decimal 1,2599210

12599
12599
113391
113391
62995
25198
12599
158734801
$\times$ 3
477204403

2.° divisor, $3a^2=$ 476204403

Extraer por las tablas y por grupos la $\sqrt[3]{}$ de 98706239271924

Cubo de 462, según las tablas
Cuadrado de 462, tablas 213444
3

$3a^2$, divisor para hallar las cifras 4.ª y 5.ª de la raíz } 640332

$3\ a\ b^2=3\times46200\times14^2$
$=138600\times196$
196
8316
12474
1386
27165600
$b^3=14^3$ tablas 2744
27168344

98706239271924 | 462 14
98611128 | 640332
95111271 | 14
3107807
5464791924
27168344
Demasía. 5437623580

(1) No se puede poner 1 al cuociente, porque entonces no quedaría residuo para restarle el $3\,a\,b^2+b^3$, que faltan para completar la raíz.

Si se quisiera hallar esta demasía en decimales con una aproximación hasta las diezmillonésimas, sería preciso agregarle 21 ceros y continuar la operación hasta obtener siete cifras más, que separadas por la coma, serían diezmillonésimas.

La extracción de la $\sqrt[3]{\ }$ por grupos y por división, aunque expeditiva, necesita (por razones análogas á las expuestas al fin de la Lección VI) en el operador aquel discernimiento y tino que únicamente puede dar la práctica.

En efecto, los cuocientes unas veces son exactos y otras resultan en una unidad mayores de lo que deben ser; lo cual ocurre siempre que el residuo unido á la demasía, aumentan el dividendo en una cantidad igual al divisor ó mayor (1).

Por tanto, el que no esté seguro de dominar esta dificultad y la que pueda aparecer cuando haya que agregar cero al cuociente (ó ceros), debe reducirse á extraer la $\sqrt[3]{\ }$ según el método ordinario de concentración.

Para que un entero sea cubo perfecto, es necesario que sus factores primos estén elevados á una potencia divisible por 3. En efecto, todo cubo de un guarismo es un producto en que el guarismo se multiplica dos veces por sí mismo.

Sea el guarismo

$$(a \times b)$$

multiplíquesele dos veces por sí mismo y resultará:

$$(a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = a^{1+1+1} \times b^{1+1+1} = a^3 \times b^3$$

Sea el guarismo

$$(a^m \times b^n)^3 = a^{m+m+m} \times b^{n+n+n} = a^{3m} \times b^{3n}$$

Por tanto, no tienen $\sqrt[3]{\ }$ y aparecen con los caracteres de irracionalidad:

---

(1) El residuo es $= 3\,a\,b^2 + b^3$.
La demasía puede tener todos los valores desde 1 hasta $3\,a^2 + 3\,a$ (ó sea al triplo del producto de los dos cuadrados consecutivos). Júzguese, pues, de la fácil posibilidad de que la suma $(3\,a\,b^2 + b^3)$ + una parte de la demasía $(3\,a^2 + 3\,a)$ aumenten el dividendo en una cantidad $\geqq$ que el divisor $3\,a^2$.

1.° Los guarismos acabados en un número tal de ceros que no sea múltiplo de 3. Así

20, 200, 20000,... son irracionales.

2.° Aunque un guarismo acabe en tres ceros, ó en 6 ceros, ó en 9 ceros,... será también irracional si el exponente del otro ú otros factores que lo compongan, no es divisible por 3;

$$3000, \text{ no tiene, pues, } \sqrt[3]{}, \text{ ni } 9000;$$

$$\text{pero ya la tiene } 27000 = 3^3 \times 10^3$$

3.° Todo guarismo par es irracional, si no es divisible por 8; pues contendrá al 2^1, ó al 2^2; pero no al 2^3. Y, aun conteniendo al 2^3, será asimismo irracional si los otros factores no tienen exponentes divisibles por 3. Así, 24 es divisible por 8; y, sin embargo, es irracional porque el otro factor 3 no está elevado á 3. Pero ya

$$3^3 \times 2^3 = 216 \text{ tiene raíz; } \sqrt[3]{216} = 6$$

Si se saca la $\sqrt[3]{}$ de varios guarismos consecutivos, todos irracionales, desde luego llama la atención que los cubos de tales raíces distan muy desigualmente de los guarismos respectivos; por lo cual, y para acortar diferencias (como en la $\sqrt{}$) se acude á las raíces cúbicas por exceso. Las $\sqrt[3]{}$ por exceso son guarismos que multiplicados dos veces por sí mismos, dan productos mayores que los números cuyas raíces se buscan, pero que distan menos de ellos que los productos de las correspondientes raíces por defecto.

Por ejemplo: la llamada $\sqrt[3]{2}$ por defecto es, con 2 decimales, igual á 1,25, cuyo cubo es igual á 1,953125;

Y la llamada $\sqrt[3]{2}$ por exceso, también con 2 decimales, es 1,26, cuyo cubo es igual á 2,000376.

A $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ por defecto faltan 46875 millonésimas para ser 2,

Y á $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ por exceso sobran sólo 376 millonésimas.

Claro es que el error que se cometa en los cálculos con la $\sqrt[3]{}$ por exceso, será más de 120 veces menor que con la $\sqrt[3]{}$ por defecto.

En la mayor parte de los casos, para decidir que una $\sqrt[3]{\ }$ lo es por defecto, basta con cerciorarse de que la demasía no llega al triplo de la raíz hallada. Pero si la tal demasía no es mucho mayor precisa un examen más detenido.

Toda raíz por defecto ha de ser menor que la mitad de una unidad del último orden decimal calculado.

$$\sqrt[3]{.}\ \text{que se busca} < \text{Raíz hallada} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\sqrt[3]{\ }\ \text{que se busca}\right)^3 < \left(\text{Raíz hallada} + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$\therefore \quad \text{Número propuesto} < \left(\text{R} + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$\therefore \quad \text{Número propuesto} < \text{R}^3 + 3\,\text{R}^2 \times \frac{1}{2} + 3\,\text{R} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\text{Número propuesto} < \text{R}^3 + \frac{3}{2}\,\text{R}^2 + \frac{3}{4}\,\text{R} + \frac{1}{8}$$

Y, como la demasía es la cantidad que queda después de restar el cubo de un binomio, tendremos

$$\textit{Demasía} = \left(\text{R}^3 + \frac{3}{2}\,\text{R}^2 + \frac{3}{4}\,\text{R} + \frac{1}{8}\right) - \text{R}^3$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 3\,\text{R}^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 3\,\text{R} + \frac{1}{8}\right)$$

resulta que, para que la $\sqrt[3]{\ }$ por defecto sea más aproximada que la $\sqrt[3]{\ }$ por exceso, se necesita que la demasía aparezca $<$ que la suma de la mitad del triplo de la $\sqrt[3]{\ }$ hallada, más el cuarto del triplo de la misma. Si la demasía es $>$ que esa suma la más próxima es la $\sqrt[3]{\ }$ por exceso.

Y, por tanto, se forzará la unidad á la $\sqrt[3]{\ }$ calculada por defecto.

$$\frac{1}{2}(3\,a^2) + \frac{1}{4}\,3\,a$$

$$a^3$$

$$(a+1) = (a^3 + 3\,a^2 \times 1 + 3\,a \times 1^2 + 1^3) - a^3$$

$$= 3\,a^2 + 3\,a + 1$$

$$\frac{3}{2}\,a^2 + \frac{3}{4}\,a$$

De este modo, usando promíscuamente y según queda explicado, las llamadas raíces cúbicas por defecto y por exceso, se está seguro de que el error en las aproximaciones no pasa de $\frac{1}{2}$ unidad del último orden decimal computado en el cálculo de la raíz.

Las tablas que suelen usarse contienen de 5 á 7 cifras decimales; mas, como el último decimal puede estar forzado en una unidad, hay que tener esto siempre en consideración, especialmente si se quiere aquilatar la aproximación en un cálculo delicado, aumentando el número de los decimales de las tablas.

Las fracciones de aproximación á los números que carecen de $\sqrt[3]{\ }$ y que los representan y sustituyen en los cálculos son APERIÓDICAS, como todas las correspondientes á los números irracionales.

Sabemos que la raíz n de un quebrado es el cuociente de

$$\frac{\sqrt[n]{\text{numerador}}}{\sqrt[n]{\text{denominador}}};$$

y que

$$\therefore \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Siendo incomprensible lo que pueda ser un quebrado cuyo denominador no resulte definido ni definible, siempre se hace cubo perfecto el denominador, si ya no lo es. (Véase Lección VIII.)

Claro es que, multiplicados los dos términos de un quebrado por el cuadrado del denominador, resultará siempre cubo perfecto el denominador

$$\frac{a}{b} \times \frac{b^2}{b^2} = \frac{ab^2}{b^3}$$

Pero, en muchas ocasiones, bastará con multiplicar ambos términos por números tales que resulten todos los factores del denominador elevados á un exponente divisible por 3.

$$\frac{a}{b^3} \times \frac{b}{b} = \frac{ab}{b^3}$$

$$\frac{a}{b \times c^4 \times d^2 \times e^6} \times \frac{b^2 \times c^2 \times d}{b^2 \times c^2 \times d} = \frac{a \times b^2 \times c^2 \times d}{b^3 \times c^6 \times d^3 \times e^6}$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{\frac{a \times b^2 \times c^2 \times d}{b^3 \times c^6 \times d^3 \times e^6}} = \frac{\sqrt[3]{a \times b^2 \times c^2 \times d}}{b \times c^2 \times d^3 \times e^2}$$

Así, pues, reducidos los cuatro casos que pueden ocurrir

$$\frac{\sqrt[3]{\text{de un cubo}}}{\sqrt[3]{\text{de un cubo}}}; \quad \frac{\sqrt[3]{\text{de un no cubo}}}{\sqrt[3]{\text{de un cubo}}}; \quad \frac{\sqrt[3]{\text{de un no cubo}}}{\sqrt[3]{\text{de un no cubo}}}; \quad \frac{\sqrt[3]{\text{de un cubo}}}{\sqrt[3]{\text{de un no cubo}}}$$

á sólos los dos siguientes:

$$\frac{\sqrt[3]{\text{de un cubo}}}{\sqrt[3]{\text{de un cubo}}}; \quad \frac{\sqrt[3]{\text{de un no cubo}}}{\sqrt{\text{de un cubo}}},$$

ambos casos tienen ya fácil interpretación:

1.° De un módulo dividido en n partes hay tomadas m.

2.° De un módulo dividido en n partes hay tomadas próximamente $\sqrt[3]{m}$

Por consiguiente, siempre que haya que extraer la $\sqrt[3]{\ }$ de un quebrado habrán de efectuarse las operaciones siguientes:

1.° Descomponer los dos términos del quebrado en sus factores primos;

2.° Reducirlos á su más simple expresión;

3.° Y multiplicar sus dos términos por los factores convenientes para que resulten divisibles por 3 todos los exponentes de los factores primos del denominador.

Extraer la $\sqrt[3]{\ }$ del quebrado $\frac{8944320}{444234375}$

$$\sqrt[3]{\frac{8944320}{444234375}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{2^6 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11^3}{3^7 \times 5^6 \times 13}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{2^6 \times 5 \times 7 \times 11^3 \times 13^3}{3^6 \times 5^6 \times 13^3}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{2^6 \times 5 \times 7 \times 11^3 \times 13^2}{3^2 \times 5^2 \times 13}}$$
$$= \frac{2^2 \times 11 \times \sqrt[3]{5 \times 7 \times 13^2}}{3^2 \times 5^2 \times 13}$$
$$= \frac{2^2 \times 11}{3^2 \times 5^2 \times 13} \times \sqrt[3]{5 \times 7 \times 13^2}$$
$$= \frac{44}{2925} \times \sqrt[3]{5915}$$
$$= \frac{44}{2925} \times 18{,}085$$

8944320	2
4472160	2
2236080	2
1118040	2
559020	2
279510	2
139755	3
46585	5
9317	7
1331	11
121	11
11	11

444234375	3
148078125	3
49359375	3
16453125	3
5484375	3
1828125	3
609375	3
203125	5
40625	5
8125	5
1625	5
325	5
65	5
13	15

```
 5400
   64
------
  216
 324
------
345600
```

$$3\,a\,b = 3 \times 1800 \times 8^2 = 5400 \times 64 = 345600$$
$$b^3 = 8^3 = 512$$
$$\text{suma: } 346112$$

```
9 × 25 × 13      5 × 7 × 169
  225                     35
   13                   -----
 -----                   845
  675                    507
  225                   -----
 -----                  5915
 2925
```

$$3\,a^2 = 3 \times (180)^2 = 3 \times 32400 = 97200$$
$$3\,a^2 = 3 \times (1808)^2 = 3 \times 3268864 = 9806592$$

```
5915000000000 | 180 84
5832000       |-------
------------- |
  83000000    |  97200
  5240000     |-------
   346112     |
------------- | 9806592
  4893888000  |-------
```

Concluída la operación, resulta una demasía de 970383296, que se desprecia; se toma por $\sqrt[3]{\ }$ por exceso el núm. 18085, se separan 3 cifras de la derecha y se considera como $\sqrt[3]{\ }$ el decimal 18,085.

Haciendo, pues, cubo perfecto el denominador de cada quebrado cuya $\sqrt[3]{\ }$ se pida, nunca hay que hacer más que una sola extracción.

De estos mismos principios aplicados á los decimales, sale la regla de que, si el número de cifras decimales no es múltiplo de 3, se agregue á ellas un cero, ó bien dos; y, siendo ya divisible el decimal propuesto en períodos de á tres cifras, se procede á la extracción de su $\sqrt[3]{\ }$, como si se tratara de un número entero.

$$\sqrt[3]{0{,}531441} = 0{,}81 \text{ exacta}$$

$$\sqrt[3]{0{,}53201} = \sqrt[3]{0{,}532010} = 0{,}81 \text{ por defecto}$$

$$\sqrt[3]{0{,}5499} = \sqrt[3]{0{,}549900} = 0{,}82 \text{ por exceso}$$

Resuelva el discípulo los problemas siguientes:

$$\sqrt[3]{51{,}478848} =$$

$$\sqrt[3]{0{,}198155287} =$$

$$\sqrt[3]{3{,}141592653} =$$

$$\sqrt[3]{3{,}141592} =$$

$$\sqrt[3]{0{,}000000103823} =$$

(*) $\sqrt[3]{1{,}03823} =$

(*) Las llamadas $\sqrt[3]{\ }$ de estos números son, respectivamente,

3,72; 0,583; 1,464; 1,464; 0,0047; 1,01

PARTE SEGUNDA

SECCIÓN SEGUNDA

ARITMÉTICA POR APROXIMACIÓN

LIBRO II

LOGARITMOS

LOGARITMOS

LECCIÓN I

Logaritmos

Las dificultades que presenta la extracción de la $\sqrt[3]{\ }$ son muy poca cosa comparadas con las que por medios análogos ofrecería la extracción de las raíces de grados superiores. La determinación de un término cualquiera de una progresión por cuociente, ó bien el producto de un número cualquiera de sus términos, serían casi impracticables con los recursos de la Aritmética común. La inserción de un gran número dado de medios proporcionales geométricamente entre dos números sería incalculable por los medios ordinarios...

Por manera que la Aritmética, no sólo se encontraba con magnitudes no numerables (como la diagonal del cuadrado respecto del lado, ó la circunferencia respecto del radio...), sino con la imposibilidad, ó casi imposibilidad, de computar muchas de las magnitudes numerables.

Parecía imposible salir de tantas y tantas dificultades, rayanas en muchos casos con la imposibilidad, cuando en 1614, publicó el Barón Napier, escocés, su *Mirifici logarithmorum canonis descriptio;* si admirable por la profundidad del invento, admirable también por la ejecución, dada la escasez de medios de que entonces disponía la ciencia.

Logaritmo (del griego λόγος ἀριθμός) quiere decir *el núme-*

ro correspondiente á la razón; porque logaritmo es el índice de la potencia á que se ha de elevar un número constante, llamado *base*, para producir un guarismo dado. Los logaritmos son, pues, los exponentes de una base, constante en cada sistema logarítmico, la cual ha de producir por involución todos los números de la escala de la pluralidad.

$$\left.\begin{array}{l}10^0 = 1 \\ 10^1 = 10 \\ 10^2 = 100 = 10 \times 10 \\ 10^3 = 1000 = 10 \times 10 \times 10 \\ 10^4 = 10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ 10^5 = 100000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ 10^6 = 1000000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \text{ etc.}\end{array}\right\}\text{involución.}$$

Cero, 1, 2, 3, 4, 5... son los logaritmos respectivamente en la base 10 de los números 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000...

Como se ve, no es lo mismo exponente que logaritmo.

Exponente es el índice de la potencia á que ha de elevarse un número cualquiera: 6^2; 17^3; 454^5; 1000^{21}...;

Logaritmo es el índice de la potencia á que ha de elevarse sucesivamente un sólo número (10 en los ejemplos anteriores).

De manera que todo logaritmo es un exponente; pero no todo exponente es un logaritmo.

Antes de seguir adelante conviene manifestar que, para generalizar los principios, se da en los cálculos logarítmicos la forma de exponentes fraccionarios á los signos que en otras clases de cómputos sirven para indicar la extracción de las raíces. Así,

$$\sqrt{4},\ \sqrt[3]{27},\ \sqrt[4]{625},\dots\ \sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{a^m},\dots$$

se escriben

$$4^{\frac{1}{2}},\ 27^{\frac{1}{3}},\ 625^{\frac{1}{4}},\dots\ a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{m}{n}},\dots$$

ó bien

$$4^{0,5};\ 27^{0,333};\dots\ 625^{0,25};\dots$$
$$4^{0\cdot5};\ 28^{0\cdot333};\dots\ 625^{0\cdot25};\dots$$

Esto, como se ve, no constituye dificultad de ninguna clase para la inteligencia: sólo pide que se aprenda un nuevo modo de notación.

La interpretación de tales expresiones es sumamente clara:

$4^{\frac{1}{2}}$ significa que de 4 se extraiga la $\sqrt{\ }$ $\therefore 4^{\frac{1}{2}} = 2$; ó bien $4^{0.5} = 2$

$2^{\frac{6}{2}}$ quiere decir que la $\sqrt{\ }$ de 2 se eleve á la 6.ª potencia; ó bien que de la 6.ª potencia de 2 se extraiga la $\sqrt{\ }$ $\therefore 64^{\frac{1}{2}} = 8$

$$3^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \sqrt[3]{729} = 729^{\frac{1}{3}} = 27 \text{ etc.}$$

Los denominadores de los exponentes fraccionarios son, pues, índices de raíces, ó de evolución; y los numeradores, índices de involución.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,; \quad 21^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{21^3}$$

Pero los logaritmos (si esta nueva notación se ha entendido) son índices así de potencias como de raíces, no de números cualesquiera, sino de una base dada, ó sea de un solo número especial (del 10 en los logaritmos vulgares)...

Para facilidad de lo que se ha de exponer sobre los logaritmos, resumamos aquí las principales nociones de la involución y de la evolución.

1.º Los exponentes enteros indican el número de veces que una cantidad cualquiera es factor de sí misma en un producto.

$$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$$
$$a^n = a\times a\times a\times a\ldots \text{ hasta } n \text{ veces}$$

2.º El denominador de los exponentes fraccionarios indica el grado de la raíz que ha de extraerse de un número dado cualquiera.

$$4^{0,5}; \text{ ó bien } 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$32^{0,2}; \text{ ó bien } 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

3.° Los exponentes fraccionarios cuyo numerador no es la unidad, indican dos operaciones:

El numerador una involución;
El denominador una evolución.

Así,

$2^{\frac{6}{3}}$ significa $\left\{\begin{array}{l}\text{que del 2 se extraiga la } \sqrt[3]{} \\ \text{y que esta raíz se eleve á la 6.ª potencia}\end{array}\right.$

$$\therefore\ 2^{\frac{6}{3}} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6;$$

ó bien (pues, teóricamente, el orden de las operaciones no varía el resultado)

$$2^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{2^6}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m;\ \text{ó bien } \sqrt[n]{a^m}$$

4.° Admitidos de este modo y con tal sentido los exponentes fraccionarios, se da el nombre de potencia á cualquier cantidad con exponente, sea de la clase que fuere.

Así

a^3 se dice a elevado á 3; ó bien a elevado al cubo; ó bien a elevado á la 3.ª potencia;

$$a^{\frac{1}{3}};\qquad a^{0,333\ldots};\qquad a^{0\cdot 333\ldots};$$

se dice a elevado á $\frac{1}{3}$; ó bien a elevado á la potencia $\frac{1}{3}$

ó bien, y con más exactitud, $\sqrt[3]{}$ de a.

Potencia, en este nuevo sentido, no significa precisamente *involución* (como debiera), sino *cantidad con exponente*.

5.° El producto de dos potencias de a, es otra potencia de a designada por la suma de los exponentes (sean éstos, enteros ó fraccionarios).

$$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 \qquad = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$2^2 \times 2^3 \times 2^5 \quad = 2^{2+3+5} = 2^{10} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \times a^n \times a^p \times a = a^{m+n+p+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 64^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 64^{\frac{6}{12}+\frac{2}{12}} = 64^{\frac{8}{12}} = 64^{\frac{4}{6}} = \left(\sqrt[6]{64}\right)^4 = 2^4 = 16 \\ 64^{0,5} \times 64^{0,1666\ldots} = 64^{0,5+0,1666\ldots} \qquad = 64^{0,666\ldots} \qquad\qquad = 2^4 = 16 \end{array} \right.$$

$$a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{m \times n}}$$

$$a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2+1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

$$32768^{\frac{1}{5}} \times 32768^{\frac{1}{3}} = 32768^{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}} = 32768^{\frac{3}{15}+\frac{5}{15}} = 32768^{\frac{8}{15}} = \left(\sqrt[15]{32768}\right)^8$$

$$= 2^8 = 256$$

$$a^m \times a^{\frac{1}{n}} = a^{m+\frac{1}{n}}$$

$$a^{\frac{1}{n}} \times a^m = a^{\frac{1}{n}+m}$$

$$a^{\frac{m}{p}} \times a^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}}$$

6.º El cuociente de dos potencias de a, es otra potencia de a designada por la diferencia del exponente del dividendo menos el exponente del divisor (sean enteros ó fraccionarios estos exponentes).

$$2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2 \; (= 8 \div 4 = 2)$$

$$3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27 \; (= 243 : 9 = 27)$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$64^{\frac{1}{3}} \div 64^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 64^{\frac{2}{6}-\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = (2 = 4 \div 2 = 2)$$

$$a^{\frac{1}{n}} \div a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{m \times n}}$$

$$64^{\frac{2}{3}} \div 64^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 64^{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$$

$$a^{\frac{m}{p}} \div a^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{m}{p}-\frac{n}{q}} = a^{\frac{(m \times q)-(n \times p)}{p \times q}}$$

$$a^m \div a^{\frac{1}{n}} = a^{m-\frac{1}{n}}$$

$$a^{\frac{1}{n}} \div a^m = a^{\frac{1}{n}-m}$$

7.° Cuando son iguales los exponentes que han de restarse, resulta el exponente $= 0$

$$\frac{a^n}{a^n} = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Es consecuencia de todo lo anterior que $a^0 = 1$ (*)

En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2^3}{2^3} = \text{evidentemente á } 1 \\ \frac{a^3}{a^3} = \text{evidentemente á } 1 \\ \frac{a^n}{a^n} = \text{evidentemente á } 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Porque cuando dividendo y divisor} \\ \text{son iguales, el cuociente es } = 1.\end{array}$$

$$2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1 \left(= \frac{8}{8} = 1\right)$$

$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1$$

$$a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$$

$$a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}} = a^0 = 1$$

El 1, cuociente, puede provenir de la división de infinidad de dividendos por otros tantos divisores iguales (respectivamente) á los dividendos.

De consiguiente, toda cantidad cuyo exponente es cero carece de potencia, siendo incapaz de cambio por medio de la involución.

$$1 \times 1 = 1$$
$$1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \ldots = 1$$
$$2^0 = 1$$
$$6^0 = 1$$
$$(a + 10 + 7)^0 = 1$$
$$(m + n + p)^0 = 1$$
$$\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a}\right)^0 = 1$$

(*) A los tenaces encomiadores del *orden lógico* (?) en los métodos de enseñanza (véase el Apéndice de la página 176, tomo II), hay que volver á preguntarles: ¿Cómo, al empezar la Aritmética, puede hacerse entender á quien nada sabe todavía de la ciencia, que las protoenas son coeficientes, en *todos* los sistemas de numeración, de la *base* respectiva b elevada á cero, ó, lo que es lo mismo, b^0?

8.º Cuando de dos exponentes que han de restarse, el exponente que hace oficio de minuendo es menor que el exponente que hace oficio de sustraendo, el exponente-residuo resulta negativo.

$$a^3 \div a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$$

$$a^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{6}} - a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}} = a^{-\frac{1}{6}}$$

Toda cantidad con exponente negativo es recíproca de un quebrado que tiene por numerador la unidad y por denominador la cantidad, sin exponente negativo.

$$a^{-2} = (a^{-2}) \times 1$$

$$\therefore\ a^{-2} = (a^{-2}) \times a^0 = (a^{-2}) \times \frac{a^2}{a^2}$$

Sabemos que, si una cantidad se multiplica por 1, el resultado no varía;

$$\therefore\ a^{-2} = \frac{a^2 \times a^2}{a^2} = \frac{a^{-2+2}}{a^2} = \frac{a^0}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$\therefore$ El cuociente de la unidad dividido por una cantidad es la recíproca de dicha cantidad.

La recíproca de 6 es $\frac{1}{6}$

La de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$ y la de $\frac{3}{2}$ es $\frac{2}{3}$

9.º La potencia de una potencia de a es otra potencia de a igual al producto de los exponentes:

$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6 = 64\ (= 8^2 = 64)$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(2^6\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{6\times\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8 = \sqrt{2^6}\left(= \sqrt{64} = 8\right) \\ \left(2^6\right)^{0,5} = 2^{6\times 0{\cdot}5} = 2^3 = 8 \end{array}\right.$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$$

$$\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{m\times\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(a^m\right)^{\frac{n}{p}} = a^{m\times\frac{n}{p}}$$

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^m = a^{\frac{1}{p}\times m} = a^{\frac{m}{p}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^n = a^{\frac{m}{p}\times n} = a^{\frac{m\times n}{p}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{m}{p}\times\frac{n}{q}} = a^{\frac{(m\times q)\times(n\times p)}{p\times q}}$$

Pero dejemos estas generalidades para volver á los logaritmos.

Todo cuanto se ha dicho de los exponentes en general, será verdad también de los logaritmos en particular; por no ser los logaritmos otra cosa que exponentes de un número constante escogido como base.

Sea esta base el número 2. Y tendremos:

$$
\begin{array}{lcrl}
2^0 & = & 1 & \\
2^1 & = & 2 & \\
2^2 & = & 4; & (\text{porque } 2 \times 2 = 4) \\
2^3 & = & 8; & (\text{porque } 2 \times 2 \times 2 = 8) \\
2^4 & = & 16; & (\text{porque } 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16) \\
2^5 & = & 32; & (\text{porque etc.}) \\
2^6 & = & 64 & \\
2^7 & = & 128 & \\
2^8 & = & 256 & \\
2^9 & = & 512 & \\
2^{10} & = & 1024 & \\
2^{11} & = & 2048 & \\
2^{12} & = & 4096 & \\
2^{13} & = & 8192 & \\
2^{14} & = & 16384 & \\
2^{15} & = & 32768 & \\
2^{16} & = & 65536 &
\end{array}
$$

Si se supone que ésta sea una TABLA de Logaritmos de la base 2, no hay para qué repetir el 2, y por conveniencias que demuestra la práctica, se da á la Tabla la disposición siguiente:

Números.	Logaritmos.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
etc.	etc.

Obsérvese que los logaritmos de la tabla (?) anterior forman una progresión por diferencia que empieza por 0; y que los números correspondientes, registrados á la izquierda, forman una progresión por cuociente que empieza por 1.

$$
\begin{array}{ll}
\div\!\div\ 1:2:4:8:16:32:64:\ldots & \text{razón geométrica} = 2 \\
\div\ 0.1.2.3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots & \text{razón aritmética} = 1
\end{array}
$$

Claro es que las progresiones pueden ser otras; pero, con tal de que empiecen por 1 y por 0 respectivamente, los términos de la progresión por diferencia resultarán logaritmos de los términos correspondientes de la progresión por cuociente:

$$
\begin{array}{ll}
\div\!\div\ 1:2:4:8:16:32:\ldots & \text{razón geométrica} = 2 \\
\div\ 0.3.6.9.12.15\ldots & \text{razón aritmética} = 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\div\!\div\ 1:5:25:125:625:\ldots & \text{razón geométrica} = 5 \\
\div\ 0.7.14.\ 21.\ 28\ldots & \text{razón aritmética} = 7
\end{array}
$$

Teniendo ya una Tabla de logaritmos, notaremos inmediatamente sus ventajas.

La operación de multiplicar unos por otros los números en ella comprendidos, queda reducida á sumar los respectivos logaritmos.

La de dividir, á restarlos;

La de elevar á potencias, á multiplicar;

La de extraer raíces, á partir.

MULTIPLICACIÓN

¿Cuál es el producto de 16×32?

Busco en la Tabla precedente de la base 2 el logaritmo de 16, y hallo	4
Busco el logaritmo de 32, y hallo........................	5
Sumo ambos logaritmos, y hallo........................	9

Busco el logaritmo 9 y hallo á su izquierda el núm. 512.

$$\therefore\ 16 \times 32 = 512$$

¿Cuál es el producto de 16×128?

$$
\begin{array}{rr}
\text{logaritmo de } 16 = & 4 \\
\text{logaritmo de } 128 = & 7 \\
\hline
\textit{Suma}\ldots\ldots = & 11
\end{array}
$$

Número correspondiente al logaritmo 11 = 2048

$$\therefore\ 16 \times 128 = 2408$$

¿Cuál es el producto de 2×512?

$$\begin{array}{rr} \text{logaritmo de } 2 = & 1 \\ \text{logaritmo de } 512 = & 9 \\ \hline \textit{Suma....} = & 10 \end{array}$$

Número correspondiente al logaritmo 10 = 1 024

$$\therefore\ 2 \times 512 = 1024$$

¿Cuál es el producto de 32×2048?

$$\begin{array}{rr} \text{logaritmo de } 32 = & 5 \\ \text{logaritmo de } 2048 = & 11 \\ \hline \textit{Suma.....} = & 16 \end{array}$$

Número correspondiente al logaritmo 16 = 65536

$$\therefore\ 32 \times 2048 = 65536$$

DIVISIÓN

¿Cuál es el cuociente de $4096 \,|\, 512$?

$$\begin{array}{rr} \text{logaritmo de } 4096 = & 12 \\ \text{logaritmo de } 512 = & 9 \\ \hline \textit{Diferencia....} & 3 \end{array}$$

Número correspondiente al logaritmo 3 = 8

$$\therefore\ 4096 \,|\, 512 = 8$$

¿Cuál es el cuociente de $\frac{32768}{1024}$?

$$\begin{array}{rr} \text{logaritmo de } 32768 = & 15 \\ \text{logaritmo de } 1024 = & 10 \\ \hline \textit{Diferencia....} & 5 \end{array}$$

Número correspondiente al logaritmo 5 = 32

$$\therefore\ \frac{32768}{1024} = 32$$

¿Cuál es el cuociente de $8192 \div 128$?

$$\begin{array}{rr} \text{logaritmo de } 8192 = & 13 \\ \text{logaritmo de } 128 = & 7 \\ \hline \textit{Diferencia....} & 6 \end{array}$$

Número correspondiente al logaritmo $6 = 64$

$$\therefore\ 8192 \div 128 = 64$$

¿Cuál es el cuociente de $\dfrac{65536?}{256}$

$$\begin{array}{rr} \text{logaritmo de } 65536 = & 16 \\ \text{logaritmo de } 256 = & 8 \\ \hline \textit{Diferencia....} & 8 \end{array}$$

Número cuyo logaritmo es $8 = 256$

$$\therefore\ \frac{65536}{256} = 256$$

INVOLUCIÓN

¿Cuál es la quinta potencia de 8?

$$\begin{array}{rr} \text{logaritmo de } 8 = & 3 \\ \times & 5 \\ \hline \textit{Producto..........} & 15 \end{array}$$

Número cuyo logaritmo es $15 = 32768$

$$\therefore\ 8^5 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 32768$$

¿Cuál es el cubo de 32?

$$\begin{array}{rr} \text{logaritmo de } 32 = & 5 \\ \times & 3 \\ \hline \textit{Producto..........} & 15 \end{array}$$

Número cuyo logaritmo es $15 = 32768$

$$\therefore\ 32^3 = 32 \times 32 \times 32 = 32768$$

¿Cuál és la undécima potencia de 2?

$$\begin{array}{lr} \text{logaritmo de } 2 = & 1 \\ & \times\ \underline{11} \\ \textit{Producto} \ldots\ldots\ldots & 11 \end{array}$$

Número cuyo logaritmo es $11 = 2048$

$$\therefore\ 2^{11} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2048$$

¿Cuál es la cuarta potencia de 16?

$$\begin{array}{lr} \text{logaritmo de } 16 = & 4 \\ & \times\ \underline{4} \\ \textit{Producto} \ldots\ldots\ldots & 16 \end{array}$$

Número cuyo logaritmo es $16 = 65536$

$$\therefore\ 16^4 = 16 \times 16 \times 16 \times 16 = 65536$$

EVOLUCIÓN

¿Cuál es la $\sqrt[3]{\ }$ de 4096?

logaritmo de $4096 = 12$
Cuociente.......... $12 \div 3 = 4$

Número cuyo logaritmo es $4 = 16$

$$\therefore\ \sqrt[3]{4096} = 16; \quad (\therefore\ 16^3 = 4096 = 16 \times 16 \times 16)$$

¿Cuál es la $\sqrt[5]{\ }$ de 32768?

logaritmo de $32768 = 15$
Cuociente........... $15 \div 5 = 3$

Número cuyo logaritmo es $3 = 8$

$$\therefore\ \sqrt[5]{32768} = 8; \quad (\therefore\ 8^5 = 32768 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8)$$

¿Cuál es la raiz 15 de 32768?

logaritmo de $32768 = 15$
Cuociente........... $15 \div 15 = 1$

Número cuyo logaritmo es $1 = 2$

$$\therefore\ \sqrt[15]{32768} = 2; \quad (\therefore\ 2^{15} = 32768 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2).$$

¿Cual es la $\sqrt[6]{\ }$ de 4096?

$$\text{logaritmo de } 4096 = 12$$
$$\frac{12}{6} = 2 \quad (12 \div 2 = 2)$$

Número cuyo logaritmo es $2 = 4$

$$\therefore \sqrt[6]{4096} = 4; \quad (\because 4^6 = 4096 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4).$$

Tenemos, pues, que los principios fundamentales de la Aritmética logarítmica son los siguientes:

1.° La suma de los logaritmos de dos números es el logaritmo del producto de esos números.

$$\text{Log. de } 5 + \text{log. de } 4 = \text{log. de } 20;\ \text{ó sea} = \text{log. de } (5 \times 4)$$

2.° La diferencia de los logaritmos de dos números es el logaritmo del cuociente obtenido de la división en que haga de dividendo el número cuyo logaritmo aparece como minuendo y en que haga de divisor el otro número.

$$\text{Log. de } 9 - \text{log. de } 6 = \text{log. de } \frac{9}{6} = \text{log. } 1\frac{1}{2} = \text{log. } 1{,}5$$

3.° El producto del logaritmo de un número multiplicado por el índice de una potencia ó de una raíz es el logaritmo de la potencia á que ha de elevarse dicho número, ó de la raíz que ha de extraérsele.

$$\text{Log. de } 5^3 = 3 \times \text{log. de } 5$$

$$\text{Log. de } 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \text{log. de } 8.$$

LECCIÓN II

Tablas de logaritmos.

Las tablas de logaritmos difieren de las de cuadrados y cubos, así como de las correspondientes á las fracciones decimales, en ser imprescindibles para las operaciones logarítmicas; mientras que el aritmético puede pasarse sin las otras, formadas principalmente para su comodidad y ahorro de tiempo.

Las

TABLAS

que siguen están calculadas para solo cinco cifras decimales, número suficiente en los cómputos comunes y sencillos.

Sin embargo, para las operaciones de este Libro II de la Parte II, se ha hecho uso de las tablas estereotipadas en 1795 de François Callet, corregidas por M. Saigey en 1875. Esas tablas de 1795 están calculadas con siete decimales para los números desde 1 á 108 000; y las operaciones con ellas ejecutadas resultan de mucha más exactitud que las hechas con las tablas que siguen á continuación.

Pero el volumen de las de Callet las hace incompatible con las dimensiones de esta obra.

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389
101	0432	0475	0518	0561	0604	0647	0689	0732	0775	0817
102	0860	0903	0945	0988	1030	1072	1115	1157	1199	1242
103	1284	1326	1368	1410	1452	1494	1536	1578	1620	1662
104	1703	1745	1787	1828	1870	1912	1953	1995	2036	2078
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325	02366	02407	02449	02490
106	2531	2572	2612	2653	2694	2735	2776	2816	2857	2898
107	2938	2979	3019	3060	3100	3141	3181	3222	3262	3302
108	3342	3383	3423	3463	3503	3543	3583	3623	3663	3703
109	3743	3782	3822	3862	3902	3941	3981	4021	4060	4100
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336	04376	04415	04454	04493
111	4532	4571	4610	4650	4689	4727	4766	4805	4844	4883
112	4922	4961	4999	5038	5077	5115	5154	5192	5231	5269
113	5308	5346	5385	5423	5461	5500	5538	5576	5614	5652
114	5690	5729	5767	5805	5843	5881	5918	5956	5994	6032
115	06070	06108	06145	06183	06221	06258	06296	06333	06371	06408
116	6446	6483	6521	6558	6595	6633	6670	6707	6744	6781
117	6819	6856	6893	6930	6967	7004	7041	7078	7115	7151
118	7188	7225	7262	7298	7335	7372	7408	7445	7482	7518
119	7555	7591	7628	7664	7700	7737	7773	7809	7846	7882
120	07918	07954	07990	08027	08063	08099	08135	08171	08207	08243
121	8279	8314	8350	8386	8422	8458	4893	8529	8565	8600
122	8636	8672	8707	8743	8778	8814	8849	8884	8920	8955
123	8991	9026	9061	9096	9132	9167	9202	9237	9272	9307
124	9342	9377	9412	9447	9482	9517	9552	9587	9621	9656
125	09691	09726	09760	09795	09830	09864	09899	09934	09968	10003
126	10037	10072	10106	10140	10175	10209	10243	10278	10312	0346
127	0380	0415	0449	0483	0517	0551	0585	0619	0653	0687
128	0721	0755	0789	0823	0857	0890	0924	0958	0992	1025
129	1059	1093	1126	1160	1193	1227	1261	1294	1327	1361
130	11394	11428	11461	11494	11528	11561	11594	11628	11661	11694
131	1727	1760	1793	1826	1860	1893	1926	1959	1992	2024
132	2057	2090	2123	2156	2189	2222	2254	2287	2320	2352
133	2385	2418	2450	2483	2516	2548	2581	2613	2646	2678
134	2710	2743	2775	2808	2840	2872	2905	2937	2969	3001
135	13033	13066	13098	13130	13162	13194	13226	13258	13290	13322
136	3354	3386	3418	3450	3481	3513	3545	3577	3609	3640
137	3672	3704	3735	3767	3799	3830	3862	3893	3925	3956
138	3988	4019	4051	4082	4114	4145	4176	4208	4239	4270
139	4301	4333	4364	4395	4426	4457	4489	4520	4551	4582
140	14613	14644	14675	14706	14737	14768	14799	14829	14860	14891
141	4922	4953	4983	5014	5045	5076	5106	5137	5168	5198
142	5229	5259	5290	5320	5351	5381	5412	5442	5473	5503
143	5534	5564	5594	5625	5655	5685	5715	5746	5776	5806
144	5836	5866	5897	5927	5957	5987	6017	6047	6077	6107
145	16137	16167	16197	16227	16256	16286	16316	16346	16376	16406
146	6435	6465	6495	6524	6554	6584	6613	6643	6673	6702
147	6732	6761	6791	6820	6850	6879	6909	6938	6967	6997
148	7026	7056	7085	7114	7143	7173	7202	7231	7260	7289
149	7319	7348	7377	7406	7435	7464	7493	7522	7551	7580
150	17609	17638	17667	17696	17725	17754	17782	17811	17840	17869
151	7898	7926	7955	7984	8013	8041	8070	8099	8127	8156
152	8184	8213	8241	8270	8298	8327	8355	8384	8412	8441
153	8469	8498	8526	8554	8583	8611	8639	8667	8696	8724
154	8752	8780	8808	8837	8865	8893	8921	8949	8977	9005
155	19033	19061	19089	19117	19145	19173	19201	19229	19257	19285
156	9312	9340	9368	9396	9424	9451	9479	9507	9535	9562
157	9590	9618	9645	9673	9700	9728	9756	9783	9811	9838
158	9866	9893	9921	9948	9976	20003	20030	20058	20085	20112
159	20140	20167	20194	20222	20249	0276	0303	0330	0358	0385

	43	41	39	37	35	33
1	4	4	4	4	4	3
2	9	8	8	7	7	7
3	13	12	12	11	11	10
4	17	16	16	15	14	13
5	22	21	20	19	18	17
6	26	25	23	22	21	20
7	30	29	27	26	25	23
8	34	33	31	30	28	26
9	39	37	35	33	32	30

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
160	20412	20439	20466	20493	20520	20548	20575	20602	20629	20656
161	0683	0710	0737	0763	0796	0817	0844	0871	0898	0925
162	0952	0978	1005	1032	1059	1085	1112	1139	1165	1192
163	1219	1245	1272	1299	1325	1352	1378	1405	1431	1458
164	1484	1511	1537	1564	1590	1617	1643	1669	1696	1722
165	21748	21775	21801	21827	21854	21880	21906	21932	21958	21985
166	2011	2037	2063	2089	2115	2141	2167	2194	2220	2246
167	2272	2298	2324	2350	2376	2401	2427	2453	2479	2505
168	2531	2557	2583	2608	2634	2660	2686	2712	2737	2763
169	2789	2814	2840	2866	2891	2917	2943	2968	2994	3019
170	23045	23070	23096	23121	23147	23172	23198	23223	23249	23274
171	3300	3325	3350	3376	3401	3426	3452	3477	3502	3528
172	3553	3578	3603	3629	3654	3679	3704	3729	3754	3779
173	3805	3830	3855	3880	3905	3930	3955	3980	4005	4030
174	4055	4030	4105	4130	4155	4180	4204	4229	4254	4279
175	24304	24329	24353	24378	24403	24428	24452	24477	24502	24527
176	4551	4576	4601	4625	4650	4674	4699	4724	4748	4773
177	4797	4822	4846	4871	4895	4920	4944	4969	4993	5018
178	5042	5066	5091	5115	5139	5164	5188	5212	5237	5261
179	5285	5310	5334	5358	5382	5406	5431	5455	5479	5503
180	25527	25551	25575	25600	25624	25648	25672	25696	25720	25744
181	5768	5792	5816	5840	5864	5888	5912	5935	5959	5983
182	6007	6031	6055	6079	6102	6126	6150	6174	6198	6221
183	6245	6269	6293	6316	6340	6364	6387	6411	6435	6458
184	6482	6505	6529	6553	6576	6600	6623	6647	6670	6694
185	26717	26741	26764	26788	26811	26834	26858	26881	26905	26928
186	6951	6975	6998	7021	7045	7068	7091	7114	7138	7161
187	7184	7207	7231	7254	7277	7300	7323	7346	7370	7393
188	7416	7439	7462	7485	7508	7531	7554	7577	7600	7623
189	7646	7669	7692	7715	7738	7761	7784	7807	7830	7852
190	27875	27898	27921	27944	27967	27989	28012	28035	28058	28081
191	8103	8126	8149	8171	8194	8217	8240	8262	8285	8307
192	8330	8253	8375	8398	8121	8443	8466	8488	8511	8533
193	8556	8578	8601	8623	8646	8668	8691	8713	8735	8758
194	8780	8803	8825	8847	8870	8892	8914	8937	8959	8981
195	29003	29026	29048	29070	29092	29115	29137	29159	29181	29203
196	9226	9248	9270	9292	9314	9336	9358	9380	9403	9425
197	9447	9469	9491	9513	9535	9557	9579	9601	9623	9645
198	9667	9688	9710	9732	9754	9776	9798	9820	9842	9863
199	9885	9907	9929	9951	9973	9994	30016	30038	30060	30081
200	30103	30125	30146	30168	30190	30211	30233	30255	30276	30298
201	0320	0341	0363	0384	0406	0428	0449	0471	0492	0514
202	0535	0557	0578	0600	0621	0643	0664	0685	0707	0728
203	0750	0771	0792	0814	0835	0856	0878	0899	0920	0942
204	0963	0984	1006	1027	1048	1069	1091	1112	1133	1154
205	31175	31197	31218	31239	31260	31281	31302	31323	31345	31366
206	1387	1408	1429	1450	1471	1492	1513	1534	1555	1576
207	1597	1618	1639	1660	1681	1702	1723	1744	1765	1785
208	1806	1827	1848	1869	1890	1911	1931	1952	1973	1994
209	2015	2035	2056	2077	2098	2118	2139	2160	2181	2201
210	32222	32243	32263	32284	32305	32325	32346	32366	32387	32408
211	2428	2449	2469	2490	2510	2531	2552	2572	2593	2613
212	2634	2654	2675	2695	2715	2736	2756	2777	2797	2818
213	2838	2858	2879	2899	2919	2940	2960	2980	3001	3021
214	3041	3062	3082	3102	3122	3143	3163	3183	3203	3224
215	33244	33264	33284	33304	33325	33345	33365	33385	33405	33425
216	3445	3465	3486	3506	3526	3546	3566	3586	3606	3626
217	3646	3666	3686	3706	3726	3746	3766	3786	3806	3826
218	3846	3866	3885	3905	3925	3945	3965	3985	4005	4025
219	4044	4064	4084	4104	4124	4143	4163	4183	4203	4223

	31		29		27		25		23		21
1	3	1	3	1	3	1	3	1	2	1	2
2	6	2	6	2	5	2	5	2	5	2	4
3	9	3	9	3	8	3	8	3	7	3	6
4	12	4	12	4	11	4	10	4	9	4	8
5	16	5	15	5	14	5	13	5	12	5	11
6	19	6	17	6	16	6	15	6	14	6	13
7	22	7	20	7	19	7	18	7	16	7	15
8	25	8	23	8	22	8	20	8	18	8	17
9	28	9	26	9	24	9	23	9	21	9	19

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
220	34242	34262	34282	34301	34321	34341	34361	34380	34400	34420
221	4439	4459	4479	4498	4518	4537	4557	4577	4596	4616
222	4635	4655	4674	4694	4713	4733	4753	4772	4792	4811
223	4830	4850	4869	4889	4908	4928	4947	4967	4986	5005
224	5025	5044	5064	5083	5102	5122	5141	5160	5180	5199
225	35218	35238	35257	35276	35295	35315	35334	35353	35372	35392
226	5411	5430	5449	5468	5488	5507	5526	5545	5564	5583
227	5603	5622	5641	5660	5679	5698	5717	5736	5755	5774
228	5793	5813	5832	5851	5870	5889	5908	5927	5946	5965
229	5984	6003	6021	6040	6059	6078	6097	6116	6135	6154
230	36173	36192	36211	36229	36248	36267	36286	36305	36324	36342
231	6361	6380	6399	6418	6436	6455	6474	6493	6511	6530
232	6549	6568	6586	6605	6624	6642	6661	6680	6698	6717
233	6736	6754	6773	6791	6810	6829	6847	6866	6884	6903
234	6922	6940	6959	6977	6996	7014	7033	7051	7070	7088
235	37107	37125	37144	37162	37181	37199	37218	37236	37254	37273
236	7291	7310	7328	7346	7365	7383	7401	7420	7438	7457
237	7475	7493	7511	7530	7548	7566	7585	7603	7621	7639
238	7658	7676	7694	7712	7731	7749	7767	7785	7803	7822
239	7840	7858	7876	7894	7912	7931	7949	7967	7985	8003
240	38021	38039	38057	38075	38093	38112	38130	38148	38166	38184
241	8202	8220	8238	8256	8274	8292	8310	8328	8346	8364
242	8382	8399	8417	8435	8453	8471	8489	8507	8525	8543
243	8561	8578	8596	8614	8632	8650	8668	8686	8703	8721
244	8739	8757	8775	8792	8810	8828	8846	8863	8881	8899
245	38917	38934	38952	38970	38987	39005	39023	39041	39058	39076
246	9094	9111	9129	9146	9164	9182	9199	9217	9235	9252
247	9270	9287	9305	9322	9340	9358	9375	9393	9410	9428
248	9445	9463	9480	9498	9515	9533	9550	9568	9585	9602
249	9620	9637	9655	9672	9690	9707	9724	9742	9759	9777
250	39794	39811	39829	39846	39863	39881	39898	39915	39933	39950
251	9967	9985	40002	40019	40037	40054	40071	40088	40106	40123
252	40140	40157	0175	0192	0209	0226	0243	0261	0278	0295
253	0312	0329	0346	0364	0381	0398	0415	0432	0449	0466
254	0483	0500	0518	0535	0552	0569	0586	0603	0620	0637
255	40654	40671	40688	40705	40722	40739	40756	40773	40790	40807
256	0824	0841	0858	0875	0892	0909	0926	0943	0960	0976
257	0993	1010	1027	1044	1061	1078	1095	1111	1128	1145
258	1162	1179	1196	1212	1229	1246	1263	1280	1296	1313
259	1330	1347	1363	1380	1397	1414	1430	1447	1464	1481
260	41497	41514	41531	41547	41564	41581	41597	41614	41631	41647
261	1664	1681	1697	1714	1731	1747	1764	1780	1797	1814
262	1830	1847	1863	1880	1896	1913	1929	1946	1963	1979
263	1996	2012	2029	2045	2062	2078	2095	2111	2127	2144
264	2160	2177	2193	2210	2226	2243	2259	2275	2292	2308
265	42325	42341	42357	42374	42390	42406	42423	42439	42455	42472
266	2488	2504	2521	2537	2553	2570	2586	2602	2619	2635
267	2651	2667	2684	2700	2716	2732	2749	2765	2781	2797
268	2813	2830	2846	2862	2878	2894	2911	2927	2943	2959
269	2975	2991	3008	3024	3040	3056	3072	3088	3104	3120
270	43136	43152	43169	43185	43201	43217	43233	43249	43265	43281
271	3297	3313	3329	3345	3361	3377	3393	3409	3425	3441
272	3457	3473	3489	3505	3521	3537	3553	3569	3584	3600
273	3616	3632	3648	3664	3680	3696	3712	3727	3743	3759
274	3775	3791	3807	3823	3838	3854	3870	3886	3902	3917
275	43933	43949	43965	43981	43996	44012	44028	44044	44059	44075
276	4091	4107	4122	4138	4154	4170	4185	4201	4217	4232
277	4248	4264	4279	4295	4311	4326	4342	4358	4373	4389
278	4404	4420	4436	4451	4467	4483	4498	4514	4529	4545
279	4560	4576	4592	4607	4623	4638	4654	4669	4685	4700

	20	19	18	17	16	15
1	2	2	2	2	2	2
2	4	4	4	3	3	3
3	6	6	5	5	5	5
4	8	8	7	7	6	6
5	10	10	9	9	8	8
6	12	11	11	10	10	9
7	14	13	13	12	11 (printed row label 4)	11
8	16	15	14	14	13	12
9	18	17	16	15	14	14

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
280	44716	44731	44747	44762	44778	44793	44809	44824	44840	44855
281	4871	4886	4902	4917	4932	4948	4963	4979	4994	5010
282	5025	5040	5056	5071	5086	5102	5117	5133	5148	5163
283	5179	5194	5209	5225	5240	5255	5271	5286	5301	5317
284	5332	5347	5362	5378	5393	5408	5423	5439	5454	5469
285	45484	45500	45515	45530	45545	45561	45576	45591	45606	45621
286	5637	5652	5667	5682	5697	5712	5728	5743	5758	5773
287	5788	5803	5818	5834	5849	5864	5879	5894	5909	5924
288	5939	5954	5969	5984	6000	6015	6030	6045	6060	6075
289	6090	6105	6120	6135	6150	6165	6180	6195	6210	6225
290	46240	46255	46270	46285	46300	46315	46330	46345	46359	46374
291	6389	6404	6419	6434	6449	6464	6479	6494	6509	6523
292	6538	6553	6568	6583	6598	6613	6627	6642	6657	6672
293	6687	6702	6716	6731	6746	6761	6776	6790	6805	6820
294	6835	6850	6864	6879	6894	6909	6923	6938	6953	6967
295	46982	46997	47012	47026	47041	47056	47070	47085	47100	47114
296	7129	7144	7159	7173	7188	7202	7217	7232	7246	7261
297	7276	7290	7305	7319	7334	7349	7363	7378	7392	7407
298	7422	7436	7451	7465	7480	7494	7509	7524	7538	7553
299	7567	7582	7596	7611	7625	7640	7654	7669	7683	7698
300	47712	47727	47741	47756	47770	47784	47799	47813	47828	47842
301	7857	7871	7885	7900	7914	7929	7943	7958	7972	7986
302	8001	8015	8029	8044	8058	8073	8087	8101	8116	8130
303	8144	8159	8173	8187	8202	8216	8230	8244	8259	8273
304	8287	8302	8316	8330	8344	8359	8373	8387	8401	8416
305	48430	48444	48458	48473	48487	48501	48515	48530	48544	48558
306	8572	8586	8601	8615	8629	8643	8657	8671	8686	8700
307	8714	8728	8742	8756	8770	8785	8799	8813	8827	8841
308	8855	8869	8883	8897	8911	8926	8940	8954	8968	8982
309	8996	9010	9024	9038	9052	9066	9080	9094	9108	9122
310	49136	49150	49164	49178	49192	49206	49220	49234	49248	49262
311	9276	9290	9304	9318	9332	9346	9360	9374	9388	9402
312	9415	9429	9443	9457	9471	9485	9499	9513	9527	9541
313	9554	9568	9582	9596	9610	9624	9638	9651	9665	9679
314	9693	9707	9721	9734	9748	9762	9776	9790	9803	9817
315	49831	49845	49859	49872	49886	49900	49914	49927	49941	49955
316	9969	9982	9996	50010	50024	50037	50051	50065	50079	50092
317	50106	50120	50133	0147	0161	0174	0188	0202	0215	0229
318	0243	0256	0270	0284	0297	0311	0325	0338	0352	0365
319	0379	0393	0406	0420	0433	0447	0461	0474	0488	0501
320	50515	50529	50542	50556	50569	50583	50596	50610	50623	50637
321	0651	0664	0678	0691	0705	0718	0732	0745	0759	0772
322	0786	0799	0813	0826	0840	0853	0866	0880	0893	0907
323	0920	0934	0947	0961	0974	0987	1001	1014	1028	1041
324	1055	1068	1081	1095	1108	1121	1135	1148	1162	1175
325	51188	51202	51215	51228	51242	51255	51268	51282	51295	51308
326	1322	1335	1348	1362	1375	1388	1402	1415	1428	1441
327	1455	1468	1481	1495	1508	1521	1534	1548	1561	1574
328	1587	1601	1614	1627	1640	1654	1667	1680	1693	1706
329	1720	1733	1746	1759	1772	1786	1799	1812	1825	1838
330	51851	51865	51878	51891	51904	51917	51930	51943	51957	51970
331	1983	1996	2009	2022	2035	2048	2061	2075	2088	2101
332	2114	2127	2140	2153	2166	2179	2192	2205	2218	2231
333	2244	2257	2270	2284	2297	2310	2323	2336	2349	2362
334	2375	2388	2401	2414	2427	2440	2453	2466	2479	2492
335	52504	52517	52530	52543	52556	52569	52582	52595	52608	52621
336	2634	2647	2660	2673	2686	2699	2711	2724	2737	2750
337	2763	2776	2789	2802	2815	2827	2840	2853	2866	2879
338	2892	2905	2917	2930	2943	2956	2969	2982	2994	3007
339	3020	3033	3046	3058	3071	3084	3097	3110	3122	3135

	16
1	2
2	3
3	5
4	6
5	8
6	10
7	11
8	13
9	14

	15
1	2
2	3
3	5
4	6
5	8
6	9
7	11
8	12
9	14

	14
1	1
2	3
3	4
4	6
5	7
6	8
7	10
8	11
9	13

	13
1	1
2	3
3	4
4	5
5	7
6	8
7	9
8	10
9	12

	12
1	1
2	2
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	10
9	11

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		13
340	53148	53161	53173	53186	53199	53212	53224	53237	53250	53263	1	1
341	3275	3288	3301	3314	3326	3339	3352	3364	3377	3390	2	3
342	3403	3415	3428	3441	3453	3466	3479	3491	3504	3517	3	4
343	3529	3542	3555	3567	3580	3593	3605	3618	3631	3643	4	5
344	3656	3668	3681	3694	3706	3719	3732	3744	3757	3769	5	7
345	53782	53794	53807	53820	53832	53845	53857	53870	53882	53895	6	8
346	3908	3920	3933	3945	3958	3970	3983	3995	4008	4020	7	9
347	4033	4045	4058	4070	4083	4095	4108	4120	4133	4145	8	10
348	4158	4170	4183	4195	4208	4220	4233	4245	4258	4270	9	12
349	4283	4295	4307	4320	4332	4345	4357	4370	4382	4394		
350	54407	54419	54432	54444	54456	54469	54481	54494	54506	54518		
351	4531	4543	4555	4568	4580	4593	4605	4617	4630	4642		
352	4654	4667	4679	4691	4704	4716	4728	4741	4753	4765		
353	4777	4790	4802	4814	4827	4839	4851	4864	4876	4888		
354	4900	4913	4925	4937	4949	4962	4974	4986	4998	5011		
355	55023	55035	55047	55060	55072	55084	55096	55108	55121	55133		
356	5145	5157	5169	5182	5194	5206	5218	5230	5242	5255		12
357	5267	5279	5291	5303	5315	5328	5340	5352	5364	5376	1	1
358	5388	5400	5413	5425	5437	5449	5461	5473	5485	5497	2	2
359	5509	5522	5534	5546	5558	5570	5582	5594	5606	5618	3	4
360	55630	55642	55654	55666	55678	55691	55703	55715	55727	55739	4	5
361	5751	5763	5775	5787	5799	5811	5823	5835	5847	5859	5	6
362	5871	5883	5895	5907	5919	5931	5943	5955	5967	5979	6	7
363	5991	6003	6015	6027	6038	6050	6062	6074	6086	6098	7	8
364	6110	6122	6134	6146	6158	6170	6182	6194	6205	6217	8	10
365	56229	56241	56253	56265	56277	56289	56301	56312	56324	56336	9	11
366	6348	6360	6372	6384	6396	6407	6419	6431	6443	6455		
367	6467	6478	6490	6502	6514	6526	6538	6549	6561	6573		
368	6585	6597	6608	6620	6632	6644	6656	6667	6679	6691		
369	6703	6714	6726	6738	6750	6761	6773	6785	6797	6808		
370	56820	56832	56844	56855	56867	56879	56891	56902	56914	56926		
371	6937	6949	6961	6972	6984	6996	7008	7019	7031	7043		
372	7054	7066	7078	7089	7101	7113	7124	7136	7148	7159		
373	7171	7183	7194	7206	7217	7229	7241	7252	7264	7276		11
374	7287	7299	7310	7322	7334	7345	7357	7368	7380	7392	1	1
375	57403	57415	57426	57438	57449	57461	57473	57484	57496	57507	2	2
376	7519	7530	7542	7553	7565	7576	7588	7600	7611	7623	3	3
377	7634	7646	7657	7669	7680	7692	7703	7715	7726	7738	4	4
378	7749	7761	7772	7784	7795	7807	7818	7830	7841	7852	5	6
379	7864	7875	7887	7998	7910	7921	7933	7944	7955	7967	6	7
380	57978	57990	58001	58013	58024	58035	58047	58058	58070	58081	7	8
381	8092	8104	8115	8127	8138	8149	8161	8172	8184	8195	8	9
382	8206	8218	8229	8240	8252	8263	8274	8286	8297	8309	9	10
383	8320	8331	8343	8354	8365	8377	8388	8399	8410	8422		
384	8433	8444	8456	8467	8478	8490	8501	8512	8524	8535		
385	58546	58557	58569	58580	58591	58602	58614	58625	58636	58647		
386	8659	8670	8681	8692	8704	8715	8726	8737	8749	8760		
387	8771	8782	8794	8805	8816	8827	8838	8850	8861	8872		
388	8883	8894	8906	8917	8928	8939	8950	8961	8973	8984		
389	8995	9006	9017	9028	9040	9051	9062	9073	9084	9095		
390	59106	59118	59129	59140	59151	59162	59173	59184	59195	59207		10
391	9218	9229	9240	9251	9262	9273	9284	9295	9306	9318	1	1
392	9329	9340	9351	9362	9373	9384	9395	9406	9417	9428	2	2
393	9439	9450	9461	9472	9483	9494	9506	9517	9528	9539	3	3
394	9550	9561	9572	9583	9594	9605	9616	9627	9638	9649	4	4
395	59660	59671	59682	59693	59704	59715	59726	59737	59748	59759	5	5
396	9770	9780	9791	9802	9813	9824	9835	9846	9857	9868	6	6
397	9879	9890	9901	9912	9923	9934	9945	9956	9966	9977	7	7
398	9988	9999	60010	60021	60032	60043	60054	60065	60076	60086	8	8
399	60097	60108	0119	0130	0141	0152	0163	0173	0184	0195	9	9

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
400	60206	60217	60228	60239	60249	60260	60271	60282	60293	60304	1 1
401	0314	0325	0336	0347	0358	0369	0379	0390	0401	0412	2 2
402	0423	0433	0444	0455	0466	0477	0487	0498	0509	0520	3 3
403	0531	0541	0552	0563	0574	0584	0595	0606	0617	0627	4 4
404	0638	0649	0660	0670	0681	0692	0703	0713	0724	0735	5 6
405	60746	60756	60767	60778	60788	60799	60810	60821	60831	60842	6 7
406	0853	0863	0874	0885	0895	0906	0917	0927	0938	0949	7 8
407	0959	0970	0981	0991	1002	1013	1023	1034	1045	1055	8 9
408	1066	1077	1087	1098	1109	1119	1130	1140	1151	1162	9 10
409	1172	1183	1194	1204	1215	1225	1236	1247	1257	1268	
410	61278	61289	61300	61310	61321	61331	61342	61352	61363	61374	
411	1384	1395	1405	1416	1426	1437	1448	1458	1469	1479	
412	1490	1500	1511	1521	1532	1542	1553	1563	1574	1584	
413	1595	1606	1616	1627	1637	1648	1658	1669	1679	1690	
414	1700	1711	1721	1731	1742	1752	1763	1773	1784	1794	
415	61805	61815	61826	61836	61847	61857	61868	61878	61888	61899	
416	1909	1920	1930	1941	1951	1962	1972	1982	1993	2003	
417	2014	2024	2034	2045	2055	2066	2076	2086	2097	2107	
418	2118	2128	2138	2149	2159	2170	2180	2190	2201	2211	
419	2221	2232	2242	2252	2263	2273	2284	2294	2304	2315	
420	62325	62335	62346	62356	62366	62377	62387	62397	62408	62418	
421	2428	2439	2449	2459	2469	2480	2490	2500	2511	2521	
422	2531	2542	2552	2562	2572	2583	2593	2603	2613	2624	
423	2634	2644	2655	2665	2675	2685	2696	2706	2716	2726	
424	2737	2747	2757	2767	2778	2788	2798	2808	2818	2829	
425	62839	62849	62859	62870	62880	62890	62900	62910	62921	62931	10
426	2941	2951	2961	2972	2982	2992	3002	3012	3022	3033	1 1
427	3043	3053	3063	3073	3083	3094	3104	3114	3124	3134	2 2
428	3144	3155	3165	3175	3185	3195	3205	3215	3225	3236	3 3
429	3246	3256	3266	3276	3286	3296	3306	3317	3327	3337	4 4
430	63347	63357	63367	63377	63387	63397	63407	63417	63428	63438	5 5
431	3448	3458	3468	3478	3488	3498	3508	3518	3528	3538	6 6
432	3548	3558	3568	3579	3589	3599	3609	3619	3629	3639	7 7
433	3649	3659	3669	3679	3689	3699	3709	3719	3729	3739	8 8
434	3749	3759	3769	3779	3789	3799	3809	3819	3829	3839	9 9
435	63849	63859	63869	63879	63889	63899	63909	63919	63929	63939	
436	3949	3959	3969	3979	3988	3998	4008	4018	4028	4038	
437	4048	4058	4068	4078	4088	4098	4108	4118	4128	4137	
438	4147	4157	4167	4177	4187	4197	4207	4217	4227	4237	
439	4246	4256	4266	4276	4286	4296	4306	4316	4326	4335	
440	64345	64355	64365	64375	64385	64395	64404	64414	64424	64434	
441	4444	4454	4464	4473	4483	4493	4503	4513	4523	4532	
442	4542	4552	4562	4572	4582	4591	4601	4611	4621	4631	
443	4640	4650	4660	4670	4680	4689	4699	4709	4719	4729	
444	4738	4748	4758	4768	4777	4787	4797	4807	4816	4826	
445	64836	64846	64856	64865	64875	64885	64895	64904	64914	64924	
446	4933	4943	4953	4963	4972	4982	4992	5002	5011	5021	
447	5031	5040	5050	5060	5070	5079	5089	5099	5108	5118	
448	5125	5137	5147	5157	5167	5176	5186	5196	5205	5215	
449	5225	5234	5244	5254	5263	5273	5283	5292	5302	5312	
450	65321	65331	65341	65350	65360	65369	65379	65389	65398	65408	9
451	5418	5427	5437	5447	5456	5466	5475	5485	5495	5504	1 1
452	5514	5523	5533	5543	5552	5562	5571	5581	5591	5600	2 2
453	5610	5619	5629	5639	5648	5658	5667	5677	5686	5696	3 3
454	5706	5715	5725	5734	5744	5753	5763	5772	5782	5792	4 4
455	65801	65811	65820	65830	65839	65849	65858	65868	65877	65887	5 5
456	5896	5906	5916	5925	5935	5944	5954	5963	5973	5982	6 5
457	5992	6001	6011	6020	6030	6039	6049	6058	6068	6077	7 6
458	6087	6096	6106	6115	6124	6134	6143	6153	6162	6172	8 7
459	6181	6191	6200	6210	6219	6229	6238	6247	6257	6266	9 8

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
460	66276	66285	66295	66304	66314	66323	66332	66342	66351	66361	1 1
461	6370	6380	6389	6398	6408	6417	6427	6436	6445	6455	2 2
462	6464	6474	6483	6492	6502	6511	6521	6530	6539	6549	3 3
463	6558	6567	6577	6586	6596	6605	6614	6624	6633	6642	4 4
464	6652	6661	6671	6680	6689	6699	6708	6717	6727	6736	5 5
465	66745	66755	66764	66773	66783	66792	66801	66811	66820	66829	6 6
466	6839	6848	6857	6867	6876	6885	6894	6904	6913	6922	7 7
467	6932	6941	6950	6960	6969	6978	6987	6997	7006	7015	8 8
468	7025	7034	7043	7052	7062	7071	7080	7089	7099	7108	9 9
469	7117	7127	7136	7145	7154	7164	7173	7182	7191	7201	
470	67210	67219	67228	67237	67247	67256	67265	67274	67284	67293	
471	7302	7311	7321	7330	7339	7348	7357	7367	7376	7385	
472	7394	7403	7413	7422	7431	7440	7449	7459	7468	7477	
473	7486	7495	7504	7514	7523	7532	7541	7550	7560	7569	
474	7578	7587	7596	7605	7614	7624	7633	7642	7651	7660	
475	67669	67679	67688	67697	67706	67715	67724	67733	67742	67752	
476	7761	7770	7779	7788	7797	7806	7815	7825	7834	7843	
477	7852	7861	7870	7879	7888	7897	7906	7916	7925	7934	
478	7943	7952	7961	7970	7979	7988	7997	8006	8015	8024	
479	8034	8043	8052	8061	8070	8079	8088	8097	8106	8115	
480	68124	68133	68142	68151	68160	68169	68178	68187	68196	68205	
481	8215	8224	8233	8242	8251	8260	8269	8278	8287	8296	
482	8305	8314	8323	8332	8341	8350	8359	8368	8377	8386	
483	8395	8404	8413	8422	8431	8440	8449	8458	8467	8476	
484	8485	8494	8502	8511	8520	8529	8538	8547	8556	8565	9
485	68574	68583	68592	68601	68610	68619	68628	68637	68646	68655	1 1
486	8664	8673	8681	8690	8699	8708	8717	8726	8735	8744	2 2
487	8753	8762	8771	8780	8789	8797	8806	8815	8824	8833	3 3
488	8842	8851	8860	8869	8878	8886	8895	8904	8913	8922	4 4
489	8931	8940	8949	8958	8966	8975	8984	8993	9002	9011	5 5
490	69020	69028	69037	69046	69055	69064	69073	69082	69090	69099	6 5
491	9108	9117	9126	9135	9144	9152	9161	9170	9179	9188	7 6
492	9197	9205	9214	9223	9232	9241	9249	9258	9267	9276	8 7
493	9285	9294	9302	9311	9320	9329	9338	9346	9355	9364	9 8
494	9373	9381	9390	9399	9408	9417	9425	9434	9443	9452	
495	69461	69469	69478	69487	69496	69504	69513	69522	69531	69539	
496	9548	9557	9566	9574	9583	9592	9601	9609	9618	9627	
497	9636	9644	9653	9662	9671	9679	9688	9697	9705	9714	
498	9723	9732	9740	9749	9758	9767	9775	9784	9793	9801	
499	9810	9819	9827	9836	9845	9854	9862	9871	9880	9888	
500	69897	69906	69914	69923	69932	69940	69949	69958	69966	69975	
501	9984	9992	70001	70010	70018	70027	70036	70044	70053	70062	
502	70070	70079	0088	0096	0105	0114	0122	0131	0140	0148	
503	0157	0165	0174	0183	0191	0200	0209	0217	0226	0234	
504	0243	0252	0260	0269	0278	0286	0295	0303	0312	0321	
505	70329	70338	70346	70355	70364	70372	70381	70389	70398	70406	
506	0415	0424	0432	0441	0449	0458	0467	0475	0484	0492	
507	0501	0509	0518	0526	0535	0544	0552	0561	0569	0578	
508	0586	0595	0603	0612	0621	0629	0638	0646	0655	0663	
509	0672	0680	0689	0697	0706	0714	0723	0731	0740	0749	
510	70757	70766	70774	70783	70791	70800	70808	70817	70825	70834	8
511	0842	0851	0859	0868	0876	0885	0893	0902	0910	0919	1 1
512	0927	0935	0944	0952	0961	0969	0978	0986	0995	1003	2 2
513	1012	1020	1029	1037	1046	1054	1063	1071	1079	1088	3 2
514	1096	1105	1113	1122	1130	1139	1147	1155	1164	1172	4 3
515	71181	71189	71198	71206	71214	71223	71231	71240	71248	71257	5 4
516	1265	1273	1282	1290	1299	1307	1315	1324	1332	1341	6 5
517	1349	1357	1366	1374	1383	1391	1399	1408	1416	1425	7 6
518	1433	1441	1450	1458	1466	1475	1483	1492	1500	1508	8 6
519	1517	1525	1533	1542	1550	1559	1567	1575	1584	1592	9 7

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
520	71600	71609	71617	71625	71634	71642	71650	71659	71667	71675
521	1684	1692	1700	1709	1717	1725	1734	1742	1750	1759
522	1767	1775	1784	1792	1800	1809	1817	1825	1834	1842
523	1850	1858	1867	1875	1883	1892	1900	1908	1917	1925
524	1933	1941	1950	1958	1966	1975	1983	1991	1999	2008
525	72016	72024	72032	72041	72049	72057	72066	72074	72082	72090
526	2099	2107	2115	2123	2132	2140	2148	2156	2165	2173
527	2181	2189	2198	2206	2214	2222	2230	2239	2247	2255
528	2263	2272	2280	2288	2296	2304	2313	2321	2329	2337
529	2346	2354	2362	2370	2378	2387	2395	2403	2411	2419
530	72428	72436	72444	72452	72460	72469	72477	72485	72493	72501
531	2509	2518	2526	2534	2542	2550	2558	2567	2575	2583
532	2591	2599	2607	2616	2624	2632	2640	2648	2656	2665
533	2673	2681	2689	2697	2705	2713	2722	2730	2738	2746
534	2754	2762	2770	2779	2787	2795	2803	2811	2819	2827
535	72835	72843	72852	72860	72868	72876	72884	72892	72900	72908
536	2916	2925	2933	2941	2949	2957	2965	2973	2981	2989
537	2997	3006	3014	3022	3030	3038	3046	3054	3062	3070
538	3078	3086	3094	3102	3111	3119	3127	3135	3143	3151
539	3159	3167	3175	3183	3191	3199	3207	3215	3223	3231
540	73239	73247	73255	73263	73272	73280	73288	73296	73304	73312
541	3320	3328	3336	3344	3352	3360	3368	3376	3384	3392
542	3400	3408	3416	3424	3432	3440	3448	3456	3464	3472
543	3480	3488	3496	3504	3512	3520	3528	3536	3544	3552
544	3560	3568	3576	3584	3592	3600	3608	3616	3624	3632
545	73640	73648	73656	73664	73672	73679	73687	73695	73703	73711
546	3719	3727	3735	3743	3751	3759	3767	3775	3783	3791
547	3799	3807	3815	3823	3830	3838	3846	3854	3862	3870
548	3878	3886	3894	3902	3910	3918	3926	3933	3941	3949
549	3957	3965	3973	3981	3989	3997	4005	4013	4020	4028
550	74036	74044	74052	74060	74068	74076	74084	74092	74099	74107
551	4115	4123	4131	4139	4147	4155	4162	4170	4178	4186
552	4194	4202	4210	4218	4225	4233	4241	4249	4257	4265
553	4273	4280	4288	4296	4304	4312	4320	4327	4335	4343
554	4351	4359	4367	4374	4382	4390	4398	4406	4414	4421
555	74429	74437	74445	74453	74461	74468	74476	74484	74492	74500
556	4507	4515	4523	4531	4539	4547	4554	4562	4570	4578
557	4586	4593	4601	4609	4617	4624	4632	4640	4648	4656
558	4663	4671	4679	4687	4695	4702	4710	4718	4726	4733
559	4741	4749	4757	4764	4772	4780	4788	4796	4803	4811
560	74819	74827	74834	74842	74850	74858	74865	74873	74881	74889
561	4896	4904	4912	4920	4927	4935	4943	4950	4958	4966
562	4974	4981	4989	4997	5005	5012	5020	5028	5035	5043
563	5051	5059	5066	5074	5082	5089	5097	5105	3113	5120
564	5128	5136	5143	5151	5159	5166	5174	5182	5189	5197
565	75205	75213	75220	75228	75236	75243	75251	75259	75266	75274
566	5282	5289	5297	5305	5312	5320	5328	5335	5343	5351
567	5358	5366	5374	5381	5389	5397	5404	5412	5420	5427
568	5435	5442	5450	5458	5465	5473	5481	5488	5496	5504
569	5511	5519	5526	5534	5542	5549	5557	5565	5572	5580
570	75587	75595	75603	75610	75618	75626	75633	75641	75648	75656
571	5664	5671	5679	5686	5694	5702	5709	5717	5724	5732
572	5740	5747	5755	5762	5770	5778	5785	5793	5800	5808
573	5815	5823	5831	5838	5846	5853	5861	5868	5876	5884
574	5891	5899	5906	5914	5921	5929	5937	5944	5952	5959
575	75967	75974	75982	75989	75997	76005	76012	76020	76027	76035
576	6042	6050	6057	6065	6072	6080	6087	6095	6103	6110
577	6118	6125	6133	6140	6148	6155	6163	6170	6178	6185
578	6193	6200	6208	6215	6223	6230	6238	6245	6253	6260
579	6268	6275	6283	6290	6298	6305	6313	6320	6328	6335

	9
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	5
7	6
8	7
9	8

	8
1	1
2	2
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	6
9	7

	7
1	1
2	1
3	2
4	3
5	4
6	4
7	5
8	6
9	6

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
												8
580	76343	76350	76358	76365	76373	76380	76388	76395	76403	76410	1	1
581	6418	6425	6433	6440	6448	6455	6462	6470	6477	6485	2	2
582	6492	6500	6507	6515	6522	6530	6537	6545	6552	6559	3	2
583	6567	6574	6582	6589	6597	6604	6612	6619	6626	6634	4	3
584	6641	6649	6656	6664	6671	6678	6686	6693	6701	6708	5	4
585	76716	76723	76730	76738	76745	76753	76760	76768	76775	76782	6	5
586	6790	6797	6805	6812	6819	6827	6834	6842	6849	6856	7	6
587	6864	6871	6879	6886	6893	6901	6908	6916	6923	6930	8	6
588	6938	6945	6953	6960	6967	6975	6982	6989	6997	7004	9	7
589	7012	7019	7026	7034	7041	7048	7056	7063	7070	7078		
590	77085	77093	77100	77107	77115	77122	77129	77137	77144	77151		
591	7159	7166	7173	7181	7188	7195	7203	7210	7217	7225		
592	7232	7240	7247	7254	7262	7269	7276	7283	7291	7298		
593	7305	7313	7320	7327	7335	7342	7349	7357	7364	7371		
594	7379	7386	7393	7401	7408	7415	7422	7430	7437	7444		
595	77452	77459	77466	77474	77481	77488	77495	77503	77510	77517		
596	7525	7532	7539	7546	7554	7561	7568	7576	7583	7590		
597	7597	7605	7612	7619	7627	7634	7641	7648	7656	7663		
598	7670	7677	7685	7692	7699	7706	7714	7721	7728	7735		
599	7743	7750	7757	7764	7772	7779	7786	7793	7801	7808		
600	77815	77822	77830	77837	77844	77851	77859	77866	77873	77880		
601	7887	7895	7902	7909	7916	7924	7931	7938	7945	7952		
602	7960	7967	7974	7981	7988	7996	8003	8010	8017	8025		
603	8032	8039	8046	8053	8061	8068	8075	8082	8089	8097		
604	8104	8111	8118	8125	8132	8140	8147	8154	8161	8168		7
605	78176	78183	78190	78197	78204	78211	78219	78226	78233	78240	1	1
606	8247	8254	8262	8269	8276	8283	8290	8297	8305	8312	2	1
607	8319	8326	8333	8340	8347	8355	8362	8369	8376	8383	3	2
608	8390	8398	8405	8412	8419	8426	8433	8440	8447	8455	4	3
609	8462	8469	8476	8483	8490	8497	8504	8512	8519	8526	5	4
610	78533	78540	78547	78554	78561	78569	78576	78583	78590	78597	6	4
611	8604	8611	8618	8625	8633	8640	8647	8654	8661	8668	7	5
612	8675	8682	8689	8696	8704	8711	8718	8725	8732	8739	8	6
613	8746	8753	8760	8767	8774	8781	8789	8796	8803	8810	9	6
614	8817	8824	8831	8838	8845	8852	8859	8866	8873	8880		
615	78888	78895	78902	78909	78916	78923	78930	78937	78944	78951		
616	8958	8965	8972	8979	8986	8993	9000	9007	9014	9021		
617	9029	9036	9043	9050	9057	9064	9071	9078	9085	9092		
618	9099	9106	9113	9120	9127	9134	9141	9148	9155	9162		
619	9169	9176	9183	9190	9197	9204	9211	9218	9225	9232		
620	79239	79246	79253	79260	79267	79274	79281	79288	79295	79302		
621	9309	9316	9323	9330	9337	9344	9351	9358	9365	9372		
622	9379	9386	9393	9400	9407	9414	9421	9428	9435	9442		
623	9449	9456	9463	9470	9477	9484	9491	9498	9505	9511		
624	9518	9525	9532	9539	9546	9553	9560	9567	9574	9581		
625	79588	79595	79602	79609	79616	79623	79630	79637	79644	79650		
626	9657	9664	9671	9678	9685	9692	9699	9706	9713	9720		
627	9727	9734	9741	9748	9754	9761	9768	9775	9782	9789		
628	9796	9803	9810	9817	9824	9831	9837	9844	9851	9858		
629	9865	9872	9879	9886	9893	9900	9906	9913	9920	9927		
630	79934	79941	79948	79955	79962	79969	79975	79982	79989	79996		6
631	80003	80010	80017	80024	80030	80037	80044	80051	80058	80065	1	1
632	0072	0079	0085	0092	0099	0106	0113	0120	0127	0134	2	1
633	0140	0147	0154	0161	0168	0175	0182	0188	0195	0202	3	2
634	0209	0216	0223	0229	0236	0243	0250	0257	0264	0271	4	2
635	80277	80284	80291	80298	80305	80312	80318	80325	80332	80339	5	3
636	0346	0353	0359	0366	0373	0380	0387	0393	0400	0407	6	4
637	0414	0421	0428	0434	0441	0448	0455	0462	0468	0475	7	4
638	0482	0489	0496	0502	0509	0516	0523	0530	0536	0543	8	5
639	0550	0557	0564	0570	0577	0584	0591	0598	0604	0611	9	5

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
640	80618	80625	80632	80638	80645	80652	80659	80665	80672	80679
641	0686	0693	0699	0706	0713	0720	0726	0733	0740	0747
642	0754	0760	0767	0774	0781	0787	0794	0801	0808	0814
643	0821	0828	0835	0841	0848	0855	0862	0868	0875	0882
644	0889	0895	0902	0909	0916	0922	0929	0936	0943	0949
645	80956	80963	80969	80976	80983	80990	80996	81003	81010	81017
646	1023	1030	1037	1043	1050	1057	1064	1070	1077	1084
647	1090	1097	1104	1111	1117	1124	1131	1137	1144	1151
648	1158	1164	1171	1178	1184	1191	1198	1204	1211	1218
649	1224	1231	1238	1245	1251	1258	1265	1271	1278	1285
650	81291	81298	81305	81311	81318	81325	81331	81338	81345	81351
651	1358	1365	1371	1378	1385	1391	1398	1405	1411	1418
652	1425	1431	1438	1445	1451	1458	1465	1471	1478	1485
653	1491	1498	1505	1511	1518	1525	1531	1538	1544	1551
654	1558	1564	1571	1578	1584	1591	1598	1604	1611	1617
655	81624	81631	81637	81644	81651	81657	81664	81671	81677	81684
656	1690	1697	1704	1710	1717	1723	1730	1737	1743	1750
657	1757	1763	1770	1776	1783	1790	1796	1803	1809	1816
658	1823	1829	1836	1842	1849	1856	1862	1869	1875	1882
659	1889	1895	1902	1908	1915	1921	1928	1935	1941	1948
660	81954	81961	81968	81974	81981	81987	81994	82000	82007	82014
661	2020	2027	2033	2040	2046	2053	2060	2066	2073	2079
662	2086	2092	2099	2105	2112	2119	2125	2132	2138	2145
663	2151	2158	2164	2171	2178	2184	2191	2197	2204	2210
664	2217	2223	2230	2236	2243	2249	2256	2263	2269	2276
665	82282	82289	82295	82302	82308	82315	82321	82328	82334	82341
666	2347	2354	2360	2367	2373	2380	2387	2393	2400	2406
667	2413	2419	2426	2432	2439	2445	2452	2458	2465	2471
668	2478	2484	2491	2497	2504	2510	2517	2523	2530	2536
669	2543	2549	2556	2562	2569	2575	2582	2588	2595	2601
670	82607	82614	82620	82627	82633	82640	82646	82653	82659	82666
671	2672	2679	2685	2692	2698	2705	2711	2718	2724	2730
672	2737	2743	2750	2756	2763	2769	2776	2782	2789	2795
673	2802	2808	2814	2821	2827	2834	2840	2847	2853	2860
674	2866	2872	2879	2885	2892	2898	2905	2911	2918	2924
675	82930	82937	82943	82950	82956	82963	82969	82975	82982	82988
676	2995	3001	3008	3014	3020	3027	3033	3040	3046	3052
677	3059	3065	3072	3078	3085	3091	3097	3104	3110	3117
678	3123	3129	3136	3142	3149	3155	3161	3168	3174	3181
679	3187	3193	3200	3206	3213	3219	3225	3232	3238	3245
680	83251	83257	83264	83270	83276	83283	83289	83296	83302	83308
681	3315	3321	3327	3334	3340	3347	3353	3359	3366	3372
682	3378	3385	3391	3398	3404	3410	3417	3423	3429	3436
683	3442	3448	3455	3461	3467	3474	3480	3487	3493	3499
684	3506	3512	3518	3525	3531	3537	3544	3550	3556	3563
685	83569	83575	83582	83588	83594	83601	83607	83613	83620	83626
686	3632	3639	3645	3651	3658	3664	3670	3677	3683	3689
687	3696	3702	3708	3715	3721	3727	3734	3740	3746	3753
688	3759	3765	3771	3778	3784	3790	3797	3803	3809	3816
689	3822	3828	3835	3841	3847	3853	3860	3866	3872	3879
690	83885	83891	83897	83904	83910	83916	83923	83929	83935	83942
691	3948	3954	3960	3967	3973	3979	3985	3992	3998	4004
692	4011	4017	4023	4029	4036	4042	4048	4055	4061	4067
693	4073	4080	4086	4092	4098	4105	4111	4117	4123	4130
694	4136	4142	4148	4155	4161	4167	4173	4180	4186	4192
695	84198	84205	84211	84217	84223	84230	84236	84242	84248	84255
696	4261	4267	4273	4280	4286	4292	4298	4305	4311	4317
697	4323	4330	4336	4342	4348	4354	4361	4367	4373	4379
698	4386	4392	4398	4404	4410	4417	4423	4429	4435	4442
699	4448	4454	4460	4466	4473	4479	4485	4491	4497	4504

	7
1	1
2	1
3	2
4	3
5	4
6	4
7	5
8	6
9	6

	6
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
7	4
8	5
9	5

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
700	84510	84516	84522	84528	84535	84541	84547	84553	84559	84566		7
701	4572	4578	4584	4590	4597	4603	4609	4615	4621	4628	1	1
702	4634	4640	4646	4652	4658	4665	4671	4677	4683	4689	2	1
703	4696	4702	4708	4714	4720	4726	4733	4739	4745	4751	3	2
704	4757	4763	4770	4776	4782	4788	4794	4800	4807	4813	4	3
705	84819	84825	84831	84837	84844	84850	84856	84862	84868	84874	5	4
706	4880	4887	4893	4899	4905	4911	4917	4924	4930	4936	6	4
707	4942	4948	4954	4960	4967	4973	4979	4985	4991	4997	7	5
708	5003	5009	5016	5022	5028	5034	5040	5046	5052	5058	8	6
709	5065	5071	5077	5083	5089	5095	5101	5107	5114	5120	9	6
710	85126	85132	85138	85144	85150	85156	85163	85169	85175	85181		
711	5187	5193	5199	5205	5211	5217	5224	5230	5236	5242		
712	5248	5254	5260	5266	5272	5278	5285	5291	5297	5303		
713	5309	5315	5321	5327	5333	5339	5345	5352	5358	5364		
714	5370	5376	5382	5388	5394	5400	5406	5412	5418	5425		
715	85431	85437	85443	85449	85455	85461	85467	85473	85479	85485		
716	5491	5497	5503	5509	5516	5522	5528	5534	5540	5546		
717	5552	5558	5564	5570	5576	5582	5588	5594	5600	5606		
718	5612	5618	5625	5631	5637	5643	5649	5655	5661	5667		
719	5673	5679	5685	5691	5697	5703	5709	5715	5721	5727		
720	85733	85739	85745	85751	85757	85763	85769	85775	85781	85788		
721	5794	5800	5806	5812	5818	5824	5830	5836	5842	5848		
722	5854	5860	5866	5872	5878	5884	5890	5896	5902	5908		
723	5914	5920	5926	5932	5938	5944	5950	5956	5962	5968		
724	5974	5980	5986	5992	5998	6004	6010	6016	6022	6028		6
725	86034	86040	86046	86052	86058	86064	86070	86076	86082	86088	1	1
726	6094	6100	6106	6112	6118	6124	6130	6136	6141	6147	2	1
727	6153	6159	6165	6171	6177	6183	6189	6195	6201	6207	3	2
728	6213	6219	6225	6231	6237	6243	6249	6255	6261	6267	4	2
729	6273	6279	6285	6291	6297	6303	6308	6314	6320	6326	5	3
730	86332	86338	86344	86350	86356	86362	86368	86374	86380	86386	6	4
731	6392	6398	6404	6410	6415	6421	6427	6433	6439	6445	7	4
732	6451	6457	6463	6469	6475	6481	6487	6493	6499	6504	8	5
733	6510	6516	6522	6528	6534	6540	6546	6552	6558	6564	9	5
734	6570	6576	6581	6587	6593	6599	6605	6611	6617	6623		
735	86629	86635	86641	86646	86652	86658	86664	86670	86676	86682		
736	6688	6694	6700	6705	6711	6717	6723	6729	6735	6741		
737	6747	6753	6759	6764	6770	6776	6782	6788	6794	6800		
738	6806	6812	6817	6823	6829	6835	6841	6847	6853	6859		
739	6864	6870	6876	6882	6888	6894	6900	6906	6911	6917		
740	86923	86929	86935	86941	86947	86953	86958	86964	86970	86976		
741	6982	6988	6994	6999	7005	7011	7017	7023	7029	7035		
742	7040	7046	7052	7058	7064	7070	7075	7081	7087	7093		
743	7099	7105	7111	7116	7122	7128	7134	7140	7146	7151		
744	7157	7163	7169	7175	7181	7186	7192	7198	7204	7210		
745	87216	87221	87227	87233	87239	87245	87251	87256	87262	87268		
746	7274	7280	7286	7291	7297	7303	7309	7315	7320	7326		
747	7332	7338	7344	7349	7355	7361	7367	7373	7379	7384		
748	7390	7396	7402	7408	7413	7419	7425	7431	7437	7442		
749	7448	7454	7460	7466	7471	7477	7483	7489	7495	7500		
750	87506	87512	87518	87523	87529	87535	87541	87547	87552	87558		5
751	7564	7570	7576	7581	7587	7593	7599	7604	7610	7616	1	1
752	7622	7628	7633	7639	7645	7651	7656	7662	7668	7674	2	1
753	7679	7685	7691	7697	7703	7708	7714	7720	7726	7731	3	2
754	7737	7743	7749	7754	7760	7766	7772	7777	7783	7789	4	2
755	87795	87800	87806	87812	87818	87823	87829	87835	87841	87846	5	3
756	7852	7858	7864	7869	7875	7881	7887	7892	7898	7904	6	3
757	7910	7915	7921	7927	7933	7938	7944	7950	7955	7961	7	4
758	7967	7973	7978	7984	7990	7996	8001	8007	8013	8018	8	4
759	8024	8030	8036	8041	8047	8053	8058	8064	8070	8076	9	5

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
760	88081	88087	88093	88098	88104	88110	88116	88121	88127	88133
761	8138	8144	8150	8156	8161	8167	8173	8178	8184	8190
762	8195	8201	8207	8213	8218	8224	8230	8235	8241	8247
763	8252	8258	8264	8270	8275	8281	8287	8292	8298	8304
764	8309	8315	8321	8326	8332	8338	8343	8349	8355	8360
765	88366	88372	88377	88383	88389	88395	88400	88406	88412	88417
766	8423	8429	8434	8440	8446	8451	8457	8463	8468	8474
767	8480	8485	8491	8497	8502	8508	8513	8519	8525	8530
768	8536	8542	8547	8553	8559	8564	8570	8576	8581	8587
769	8593	8598	8604	8610	8615	8621	8627	8632	8638	8643
770	88649	88655	88660	88666	88672	88677	88683	88689	88694	88700
771	8705	8711	8717	8722	8728	8734	8739	8745	8750	8756
772	8762	8767	8773	8779	8784	8790	8795	8801	8807	8812
773	8818	8824	8829	8835	8840	8846	8852	8857	8863	8868
774	8874	8880	8885	8891	8897	8902	8908	8913	8919	8925
775	88930	88936	88941	88947	88953	88958	88964	88969	88975	88981
776	8986	8992	8997	9003	9009	9014	9020	9025	9031	9037
777	9042	9048	9053	9059	9064	9070	9076	9081	9087	9092
778	9098	9104	9109	9115	9120	9126	9131	9137	9143	9148
779	9154	9159	9165	9170	9176	9182	9187	9193	9198	9204
780	89209	89215	89221	89226	89232	89237	89243	89248	89254	89260
781	9265	9271	9276	9282	9287	9293	9298	9304	9310	9315
782	9321	9326	9332	9337	9343	9348	9354	9360	9365	9371
783	9376	9382	9387	9393	9398	9404	9409	9415	9421	9426
784	9432	9437	9443	9448	9454	9459	9465	9470	9476	9481
785	89487	89492	89498	89504	89509	89515	89520	89526	89531	89537
786	9542	9548	9553	9559	9564	9570	9575	9581	9586	9592
787	9597	9603	9609	9614	9620	9625	9631	9636	9642	9647
788	9653	9658	9664	9669	9675	9680	9686	9691	9697	9702
789	9708	9713	9719	9724	9730	9735	9741	9746	9752	9757
790	89763	89768	89774	89779	89785	89790	89796	89801	89807	89812
791	9818	9823	9829	9834	9840	9845	9851	9856	9862	9867
792	9873	9878	9883	9889	9894	9900	9905	9911	9916	9922
793	9927	9933	9938	9944	9949	9955	9960	9966	9971	9977
794	9982	9988	9993	9998	90004	90009	90015	90020	90026	90031
795	90037	90042	90048	90053	90059	90064	90069	90075	90080	90086
796	0091	0097	0102	0108	0113	0119	0124	0129	0135	0140
797	0146	0151	0157	0162	0168	0173	0179	0184	0189	0195
798	0200	0206	0211	0217	0222	0227	0233	0238	0244	0249
799	0255	0260	0266	0271	0276	0282	0287	0293	0298	0304
800	90309	90314	90320	90325	90331	90336	90342	90347	90352	90358
801	0363	0369	0374	0380	0385	0390	0396	0401	0407	0412
802	0417	0423	0428	0434	0439	0445	0450	0455	0461	0466
803	0472	0477	0482	0488	0493	0499	0504	0509	0515	0520
804	0526	0531	0536	0542	0547	0553	0558	0563	0569	0574
805	90580	90585	90590	90596	90601	90607	90612	90617	90623	90628
806	0634	0639	0644	0650	0655	0660	0666	0671	0677	0682
807	0687	0693	0698	0703	0709	0714	0720	0725	0730	0736
808	0741	0747	0752	0757	0763	0768	0773	0779	0784	0789
809	0795	0800	0806	0811	0816	0822	0827	0832	0838	0843
810	90849	90854	90859	90865	90870	90875	90881	90886	90891	90897
811	0902	0907	0913	0918	0924	0929	0934	0940	0945	0950
812	0956	0961	0966	0972	0977	0982	0988	0993	0998	1004
813	1009	1014	1020	1025	1030	1036	1041	1046	1052	1057
814	1062	1068	1073	1078	1084	1089	1094	1100	1105	1110
815	91116	91121	91126	91132	91137	91142	91148	91153	91158	91164
816	1169	1174	1180	1185	1190	1196	1201	1206	1212	1217
817	1222	1228	1233	1238	1243	1249	1254	1259	1265	1270
818	1275	1281	1286	1291	1297	1302	1307	1312	1318	1323
819	1328	1334	1339	1344	1350	1355	1360	1365	1371	1376

	6
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
7	4
8	5
9	5

	5
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	4
9	5

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		6
820	91381	91387	91392	91397	91403	91408	91413	91418	91424	91429	1	1
821	1434	1440	1445	1450	1455	1461	1466	1471	1477	1482	2	1
822	1487	1492	1498	1503	1508	1514	1519	1524	1529	1535	3	2
823	1540	1545	1551	1556	1561	1566	1572	1577	1582	1587	4	2
824	1593	1598	1603	1609	1614	1619	1624	1630	1635	1640	5	3
825	91645	91651	91656	91661	91666	91672	91677	91682	91687	91693	6	4
826	1698	1703	1709	1714	1719	1724	1730	1735	1740	1745	7	4
827	1751	1756	1761	1766	1772	1777	1782	1787	1793	1798	8	5
828	1803	1808	1814	1819	1824	1829	1834	1840	1845	1850	9	5
829	1855	1861	1866	1871	1876	1882	1887	1892	1897	1903		
830	91908	91913	91918	91924	91929	91934	91939	91944	91950	91955		
831	1960	1965	1971	1976	1981	1986	1991	1997	2002	2007		
832	2012	2018	2023	2028	2033	2038	2044	2049	2054	2059		
833	2065	2070	2075	2080	2085	2091	2096	2101	2106	2111		
834	2117	2122	2127	2132	2137	2143	2148	2153	2158	2163		
835	92169	92174	92179	92184	92189	92195	92200	92205	92210	92215		
836	2221	2226	2231	2236	2241	2247	2252	2257	2262	2267		
837	2273	2278	2283	2288	2293	2298	2304	2309	2314	2319		
838	2324	2330	2335	2340	2345	2350	2355	2361	2366	2371		
839	2376	2381	2387	2392	2397	2402	2407	2412	2418	2423		
840	92428	92433	92438	92443	92449	92454	92459	92464	92469	92474		
841	2480	2485	2490	2495	2500	2505	2511	2516	2521	2526		
842	2531	2536	2542	2547	2552	2557	2562	2567	2572	2578		
843	2583	2588	2593	2598	2603	2609	2614	2619	2624	2629		
844	2634	2639	2645	2650	2655	2660	2665	2670	2675	2681		5
845	92686	92691	92696	92701	92706	92711	92716	92722	92727	92732	1	1
846	2737	2742	2747	2752	2758	2763	2768	2773	2778	2783	2	1
847	2788	2793	2799	2804	2809	2814	2819	2824	2829	2834	3	2
848	2840	2845	2850	2855	2860	2865	2870	2875	2881	2886	4	2
849	2891	2896	2901	2906	2911	2916	2921	2927	2932	2937	5	3
850	92942	92947	92952	92957	92962	92967	92973	92978	92983	92988	6	3
851	2993	2998	3003	3008	3013	3018	3024	3029	3034	3039	7	4
852	3044	3049	3054	3059	3064	3069	3075	3080	3085	3090	8	4
853	3095	3100	3105	3110	3115	3120	3125	3131	3136	3141	9	5
854	3146	3151	3156	3161	3166	3171	3176	3181	3186	3192		
855	93197	93202	93207	93212	93217	93222	93227	93232	93237	93242		
856	3247	3252	3258	3263	3268	3273	3278	3283	3288	3293		
857	3298	3303	3308	3313	3318	3323	3328	3334	3339	3344		
858	3349	3354	3359	3364	3369	3374	3379	3384	3389	3394		
859	3399	3404	3409	3414	3420	3425	3430	3435	3440	3445		
860	93450	93455	93460	93465	93470	93475	93480	93485	93490	93495		
861	3500	3505	3510	3515	3520	3526	3531	3536	3541	3546		
862	3551	3556	3561	3566	3571	3576	3581	3586	3591	3596		
863	3601	3606	3611	3616	3621	3626	3631	3636	3641	3646		
864	3651	3656	3661	3666	3671	3676	3682	3687	3692	3697		
865	93702	93707	93712	93717	93722	93727	93732	93737	93742	93747		
866	3752	3757	3762	3767	3772	3777	3782	3787	3792	3797		
867	3802	3807	3812	3817	3822	3827	3832	3837	3842	3847		
868	3852	3857	3862	3867	3872	3877	3882	3887	3892	3897		
869	3902	3907	3912	3917	3922	3927	3932	3937	3942	3947		
870	93952	93957	93962	93967	93972	93977	93982	93987	93992	93997		4
871	4002	4007	4012	4017	4022	4027	4032	4037	4042	4047	1	0
872	4052	4057	4062	4067	4072	4077	4082	4086	4091	4096	2	1
873	4101	4106	4111	4116	4121	4126	4131	4136	4141	4146	3	1
874	4151	4156	4161	4166	4171	4176	4181	4186	4191	4196	4	2
875	94201	94206	94211	94216	94221	94226	94231	94236	94240	94245	5	2
876	4250	4255	4260	4265	4270	4275	4280	4285	4290	4295	6	2
877	4300	4305	4310	4315	4320	4325	4330	4335	4340	4345	7	3
878	4349	4354	4359	4364	4369	4374	4379	4384	4389	4394	8	3
879	4399	4404	4409	4414	4419	4424	4429	4433	4438	4443	9	4

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
880	94448	94453	94458	94463	94468	94473	94478	94483	94488	94493
881	4498	4503	4507	4512	4517	4522	4527	4532	4537	4542
882	4547	4552	4557	4562	4567	4571	4576	4581	4586	4591
883	4596	4601	4606	4611	4616	4621	4626	4630	4635	4640
884	4645	4650	4655	4660	4665	4670	4675	4680	4685	4689
885	94694	94699	94704	94709	94714	94719	94724	94729	94734	94738
886	4743	4748	4753	4758	4763	4768	4773	4778	4783	4787
887	4792	4797	4802	4807	4812	4817	4822	4827	4832	4836
888	4841	4846	4851	4856	4861	4866	4871	4876	4880	4885
889	4890	4895	4900	4905	4910	4915	4919	4924	4929	4934
890	94939	94944	94949	94954	94959	94963	94968	94973	94978	94983
891	4988	4993	4998	5002	5007	5012	5017	5022	5027	5032
892	5036	5041	5046	5051	5056	5061	5066	5071	5075	5080
893	5085	5090	5095	5100	5105	5109	5114	5119	5124	5129
894	5134	5139	5143	5148	5153	5158	5163	5168	5173	5177
895	95182	95187	95192	95197	95202	95207	95211	95216	95221	95226
896	5231	5236	5240	5245	5250	5255	5260	5265	5270	5274
897	5279	5284	5289	5294	5299	5303	5308	5313	5318	5323
898	5328	5332	5337	5342	5347	5352	5357	5361	5366	5371
899	5376	5381	5386	5390	5395	5400	5405	5410	5415	5419
900	95424	95429	95434	95439	95444	95448	95453	95458	95463	95468
901	5472	5477	5482	5487	5492	5497	5501	5506	5511	5516
902	5521	5525	5530	5535	5540	5545	5550	5554	5559	5564
903	5569	5574	5578	5583	5588	5593	5598	5602	5607	5612
904	5617	5622	5626	5631	5636	5641	5646	5650	5655	5660
905	95665	95670	95674	95679	95684	95689	95694	95698	95703	95708
906	5713	5718	5722	5727	5732	5737	5742	5746	5751	5756
907	5761	5766	5770	5775	5780	5785	5789	5794	5799	5804
908	5809	5813	5818	5823	5828	5832	5837	5842	5847	5852
909	5856	5861	5866	5871	5875	5880	5885	5890	5895	5899
910	95904	95909	95914	95918	95923	95928	95933	95938	95942	95947
911	5952	5957	5961	5966	5971	5976	5980	5985	5990	5995
912	5999	6004	6009	6014	6019	6023	6028	6033	6038	6042
913	6047	6052	6057	6061	6066	6071	6076	6080	6085	6090
914	6095	6099	6104	6109	6114	6118	6123	6128	6133	6137
915	96142	96147	96152	96156	96161	96166	96171	96175	96180	96185
916	6190	6194	6199	6204	6209	6213	6218	6223	6227	6232
917	6237	6242	6246	6251	6256	6261	6265	6270	6275	6280
918	6284	6289	6294	6298	6303	6308	6313	6317	6322	6327
919	6332	6336	6341	6346	6350	6355	6360	6365	6369	6374
920	96379	96384	96388	96393	96398	96402	96407	96412	96417	96421
921	6426	6431	6435	6440	6445	6450	6454	6459	6464	6468
922	6473	6478	6483	6487	6492	6497	6501	6506	6511	6515
923	6520	6525	6530	6534	6539	6544	6548	6553	6558	6562
924	6567	6572	6577	6581	6586	6591	6595	6600	6605	6609
925	96614	96619	96624	96628	96633	96638	96642	96647	96652	96656
926	6661	6666	6670	6675	6680	6685	6689	6694	6699	6703
927	6708	6713	6717	6722	6727	6731	6736	6741	6745	6750
928	6755	6759	6764	6769	6774	6778	6783	6788	6792	6797
929	6802	6806	6811	6816	6820	6825	6830	6834	6839	6844
930	96848	96853	96858	96862	96867	96872	96876	96881	96886	96890
931	6895	6900	6904	6909	6914	6918	6923	6928	6932	6937
932	6942	6946	6951	6956	6960	6965	6970	6974	6979	6984
933	6988	6993	6997	7002	7007	7011	7016	7021	7025	7030
934	7035	7039	7044	7049	7053	7058	7063	7067	7072	7077
935	97081	97086	97090	97095	97100	97104	97109	97114	97118	97123
936	7128	7132	7137	7142	7146	7151	7155	7160	7165	7169
937	7174	7179	7183	7188	7192	7197	7202	7206	7211	7216
938	7220	7225	7230	7234	7239	7243	7248	7253	7257	7262
939	7267	7271	7276	7280	7285	7290	7294	7299	7304	7308

	5
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	4
9	5

	4
1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	4

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
940	97313	97317	97322	97327	97331	97336	97340	97345	97350	97354
941	7359	7364	7368	7373	7377	7382	7387	7391	7396	7400
942	7405	7410	7414	7419	7424	7428	7433	7437	7442	7447
943	7451	7456	7460	7465	7470	7474	7479	7483	7488	7493
944	7497	7502	7506	7511	7516	7520	7525	7529	7534	7539
945	97543	97548	97552	97557	97562	97566	97571	97575	97580	97585
946	7589	7594	7598	7603	7607	7612	7617	7621	7626	7630
947	7635	7640	7644	7649	7653	7658	7663	7667	7672	7676
948	7681	7685	7690	7695	7699	7704	7708	7713	7717	7722
949	7727	7731	7736	7740	7745	7749	7754	7759	7763	7768
950	97772	97777	97782	97786	97791	97795	97800	97804	97809	97813
951	7818	7823	7827	7832	7836	7841	7845	7850	7855	7859
952	7864	7868	7873	7877	7882	7886	7891	7896	7900	7905
953	7909	7914	7918	7923	7928	7932	7937	7941	7946	7950
954	7955	7959	7964	7968	7973	7978	7982	7987	7991	7996
955	98000	98005	98009	98014	98019	98023	98028	98032	98037	98041
956	8046	8050	8055	8059	8064	8068	8073	8078	8082	8087
957	8091	8096	8100	8105	8109	8114	8118	8123	8127	8132
958	8137	8141	8146	8150	8155	8159	8164	8168	8173	8177
959	8182	8186	8191	8195	8200	8204	8209	8214	8218	8223
960	98227	98232	98236	98241	98245	98250	98254	98259	98263	98268
961	8272	8277	8281	8286	8290	8295	8299	8304	8308	8313
962	8318	8322	8327	8331	8336	8340	8345	8349	8354	8358
963	8363	8367	8372	8376	8381	8385	8390	8394	8399	8403
964	8408	8412	8417	8421	8426	8430	8435	8439	8444	8448
965	98453	98457	98462	98466	98471	98475	98480	98484	98489	98493
966	8498	8502	8507	8511	8516	8520	8525	4529	8534	8538
967	8543	8547	8552	8556	8561	8565	8570	8574	8579	8583
968	8588	8592	8597	8601	8605	8610	8614	8619	8623	8628
969	8632	8637	8641	8646	8650	8655	8659	8664	8668	8673
970	98677	98682	98686	98691	98695	98700	98704	98709	98713	98717
971	8722	8726	8731	8735	8740	8744	8749	8753	8758	8762
972	8767	8771	8776	8780	8784	8789	8793	8798	8802	8807
973	8811	8816	8820	8825	8829	8834	8838	8843	8847	8851
974	8856	8860	8865	8869	8874	8878	8883	8887	8892	8896
975	98900	98905	98909	98914	98918	98923	98927	98932	98936	98941
976	8945	8949	8954	8958	8963	8967	8972	8976	8981	8985
977	8989	8994	8998	9003	9007	9012	9016	9021	9025	9029
978	9034	9038	9043	9047	9052	9056	9061	9065	9069	9074
979	9078	9083	9087	9092	9096	9100	9105	9109	9114	9118
980	99123	99127	99131	99136	99140	99145	99149	99154	99158	99162
981	9167	9171	9176	9180	9185	9189	9193	9198	9202	9207
982	9211	9216	9220	9224	9229	9233	9238	9242	9247	9251
983	9255	9260	9264	9269	9273	9277	9282	9286	9291	9295
984	9300	9304	9308	9313	9317	9322	9326	9330	9335	9339
985	99344	99348	99352	99357	99361	99366	99370	99374	99379	99383
986	9388	9392	9396	9401	9405	9410	9414	9419	9423	9427
987	9432	9436	9441	9445	9449	9454	9458	9463	9467	9471
988	9476	9480	9484	9489	9493	9498	9502	9506	9511	9515
989	9520	9524	9528	9533	9537	9542	9546	9550	9555	9559
990	99564	99568	99572	99577	99581	99585	99590	99594	99599	99603
991	9607	9612	9616	9621	9625	9629	9634	9638	9642	9647
992	9651	9656	9660	9664	9669	9673	9677	9682	9686	9691
993	9695	9699	9704	9708	9712	9717	9721	9726	9730	9734
994	9739	9743	9747	9752	9756	9760	9765	9769	9774	9778
995	99782	99787	99791	99795	99800	99804	99808	99813	99817	99822
996	9826	9830	9835	9839	9843	9848	9852	9856	9861	9865
997	9870	9874	9878	9883	9887	9891	9896	9900	9904	9909
998	9913	9917	9922	9926	9930	9935	9939	9944	9948	9952
999	9957	9961	9965	9970	9974	9978	9983	9987	9991	9996

	5
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	4
9	5

	4
1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	4

LECCIÓN III

Característica y mantisa.

Los logaritmos reducen extraordinariamente el trabajo del cálculo aritmético, sustituyendo á la multiplicación la suma, á la división la resta, á la involución la operación de multiplicar y á la evolución la operación de partir (1).

«Duplican la vida de los astrónomos y de los demás matemáticos, disminuyéndoles las dificultades del calcular», decía Laplace.

Cualquier número (excepto la unidad) puede ser tomado como base de un sistema de logaritmos (2).

Pero hay bases más convenientes que otras, y ninguna lo es tanto, en la notación vulgar, como la del sistema común de logaritmos, el cual tiene por base al número 10.

Todos los logaritmos registrados en las TABLAS usuales

---

(1) O bien, cuando se trata de potencias y raíces, sustituyéndoles la operación de multiplicar un índice entero en la involución y fraccionario en la evolución.

(2) La unidad no puede ser base de ningún sistema logarítmico, porque todas las potencias de 1 son 1.

Tampoco (según comprenderán muy bien los que sepan Álgebra) ningún número negativo podría servir de base, porque una cantidad negativa puede en los cálculos dar valores positivos, negativos é imaginarios, lo cual impediría reproducir consecutivamente por involución la serie de los números naturales, ó sea, de los grados consecutivos de la pluralidad.

son, pues, índices de las potencias á que hay que elevar el 10, para obtener la serie de los números naturales.

Los números naturales se consideran, pues, en el sistema de logaritmos comunes como potencias del 10, ya exactas, ya aproximadas.

Lo análogo pasa en cualquier otro sistema: en todos son potencias los grados de la escala: potencias aproximadas (excepto en raros casos) de bases distintas del 10.

Esto es capital, capitalísimo. En todos los sistemas logarítmicos, los grados de la escala de la pluralidad son tenidos por potencias de una base previamente designada. En logaritmos no se considera, pues, formados á los números por suma, sino por involución (1).

Por tanto: No hay para qué decir que el cálculo logarítmico tiene que ser sólo de aproximaciones, pues los casos de exactitud son de una rareza suma.

Log. de 1	= 0	
Log. de 10	= 1	
Log. de 100	= 2	
Log. de 1000	= 3	
Log. de 10000	= 4	
Log. de 100000	= 5	
Log. de 1000000	= 6	Etc.

Como se ve, siendo 10 la base, sólo hay 7 logaritmos exactos en el primer millón. Todos los demás índices tienen que ser y son aproximados.

Y, en efecto, todos los otros logaritmos son decimales aperiódicos, signos de irracionalidad.

Sirva de muestra el siguiente Cuadro:

(1) Involución, en el sentido de considerar como exponentes á los índices fraccionarios, cuando en realidad estos índices son signos de evolución.

$$a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5} = \sqrt{a}$$

$$9^{1,5} = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{9 \times 9 \times 9} = \sqrt{729} = 27$$

TABLA DE LOS LOGARITMOS DE LOS NÚMEROS DESDE 1 A 100

N.os	Logaritmos.	N.os	Logaritmos.	N.os	Logaritmos.	N.os	Logaritmos.	N.os	Logaritmos.
1	0,	21	1,322219	41	1,612784	61	1,785330	81	1,908485
2	0,301030	22	1,342423	42	1,623249	62	1,792392	82	1,913814
3	0,477121	23	1,361728	43	1,633468	63	1,799341	83	1,919078
4	0,602060	24	1,380211	44	1,643453	64	1,806180	84	1,924279
5	0,698970	25	1,397940	45	1,653213	65	1,812913	85	1,929419
6	0,778151	26	1,414973	46	1,662758	66	1,819544	86	1,934498
7	0,845098	27	1,431364	47	1,672098	67	1,826075	87	1,939519
8	0,903090	28	1,447158	48	1,681241	68	1,832509	88	1,944483
9	0,954243	29	1,462398	49	1,690196	69	1,838849	89	1,949390
10	1,	30	1,477121	50	1,698970	70	1,845098	90	1,954243
11	1,041393	31	1,491362	51	1,707570	71	1,851258	91	1,959041
12	1,079181	32	1,505150	52	1,716003	72	1,857332	92	1,963788
13	1,113943	33	1,518514	53	1,724276	73	1,863323	93	1,968483
14	1,146128	34	1,531479	54	1,732394	74	1,869232	94	1,973128
15	1,176091	35	1,544068	55	1,740363	75	1,875061	95	1,977724
16	1,204120	36	1,556303	56	1,748188	76	1,880814	96	1,982271
17	1,230449	37	1,568202	57	1,755875	77	1,886491	97	1,986772
18	1,255273	38	1,579784	58	1,763428	78	1,892095	98	1,991226
19	1,278754	39	1,591065	59	1,770852	79	1,897627	99	1,995635
20	1,301030	40	1,602060	60	1,778151	80	1,903090	100	2,

Con vista de esta tabla, háganse las operaciones siguientes:

¿Cuál es el producto de 4×17?

$$\begin{aligned} \text{Logaritmo de } 4 &= 0{,}602060 \\ + \text{ logaritmo de } 17 &= \underline{1{,}230449} \\ \text{Número de este logaritmo} &= \underline{\underline{1{,}832509}} = 68 \end{aligned}$$

¿Cuál es el producto de 7×14?

$$\begin{aligned} \text{Logaritmo de } 7 &= 0{,}845098 \\ + \text{ logaritmo de } 14 &= \underline{1{,}146128} \\ \text{Número de este logaritmo} &= \underline{\underline{1{,}991226}} = 98 \end{aligned}$$

¿Cuál es el cuociente de $68 \div 17$?

$$\begin{aligned} \text{Logaritmo de } 68 &= 1{,}832509 \\ - \text{ logaritmo de } 17 &= \underline{1{,}230449} \\ \text{Número de este logaritmo} &= \underline{\underline{0{,}602060}} = 4 \end{aligned}$$

¿Cuál es el cuociente de 95 ÷ 19?

$$\begin{array}{rl} \text{Logaritmo de } 95 = & 1{,}977724 \\ -\text{ logaritmo de } 19 = & 1{,}278754 \\ \hline \text{Número de este logaritmo} = & 0{,}698970 = 5 \end{array}$$

¿Cuál es la potencia 3^4?

$$\begin{array}{rl} \text{Logaritmo de } 3 = & 0{,}477121 \\ & \times \quad 4 \\ \hline \text{Número de este logaritmo} = & 1{,}908484 = 81 \end{array}$$

¿Cuál es la $\sqrt[3]{64}$?

$$\begin{array}{rl|l} \text{Logaritmo de } 64 = & 1{,}806180 & 3 \\ \hline \text{Número de este logaritmo} = & & 0{,}602060 = 4 \end{array}$$

Observando la poco extensa TABLA anterior, comprensiva de los solos logaritmos de los números 1 á 100, fácilmente notaremos que las expresiones logarítmicas están compuestas de dos partes: una decimal aperiódica (1), y otra que no lo es.

Llámase característica á la parte no decimal (2),

Y denomínase *mantisa* la parte decimal (3).

Los logaritmos, pues, entre 1 y 10 son

0 + una fracción;

Los logaritmos entre 10 y 100 son

1 + una fracción.

Y, si se recurre á otra TABLA más extensa, se verá que los logaritmos entre 100 y 1000 son

2 + una fracción;

entre 1000 y 10000

3 + una fracción;

entre 10000 y 100000

4 + una fracción;

(1) La característica no es entera en los logaritmos de 1 á 9: faltan mantisas en los logaritmos de 1, 10 y 100. Fácilmente se ve el por qué.

(2) Y también se llaman características los ceros que preceden á los decimales de los logaritmos de los números 1 á 9.

(3) *Mantisa* ó *mantissa* es una palabra latina que significa puñadito, propina, algo que se da de más como obsequio en una venta. Hay quienes han dicho que la etimología de *mantisa* es *mano, manu tensa;* pero tal etimología carece de aceptación. (Véase el Diccionario latino de Forcellini.)

Y así sucesivamente; por manera que la parte entera de cada logaritmo, siendo el 10 la base, es igual

al número de cifras — 1

que tiene el guarismo correspondiente al logaritmo.

Así, pues, la parte entera de los logaritmos de los números dígitos es igual á 0, porque el número de las cifras de cada dígito es 1, y $1-1=0$. Así, la parte entera de los logaritmos de 10, 11, 12..., hasta 99 inclusive, es 1, porque el número de las cifras de las decenas es 2, y $2-1=1$. Así, la parte entera de los logaritmos de todas las centenas desde 100 á 999, ambas inclusive, es $2=3-1$. Así, la parte entera en los millares desde 1000 á 9999 es $3=4-1$, etc.

Y no puede ser de otra manera.

Si el logaritmo de 1 es cero, y el logaritmo de 10 es 1, el logaritmo de 2, no pudiendo llegar á ser $=1$, tendrá que ser

0 + una fracción.

Y, análogamente, y por no poder tampoco llegar á ser 1, tienen también que ser

0 + una fracción

los logaritmos de los otros dígitos 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, conforme hemos visto en la tablita anterior.

Si el logaritmo de 10 es 1 y el de 100 es 2, no pudiendo llegar á ser 2 los logaritmos de los números intermedios 11, 12, 13..., 97, 98 y 99, claro es que habrán de ser iguales, según hemos visto, á

1 + una fracción.

Et sic de ceteris.

Natural era que, viniendo, así, dada la característica en el número mismo de las cifras de todo guarismo, se suprimiesen las características en las tablas de los logaritmos cuya base es 10. Y, efectivamente, así se ha hecho.

Ninguna característica aparece en las tablas comunes. De manera que la tablita anterior comprensiva de los logaritmos de 1 á 100, resulta en la práctica con esta forma:

TABLA DE LOS LOGARITMOS DE LOS NÚMEROS DESDE 1 Á 100

N.os	Logaritmos.	N.os	Logaritmos.	N.os	Logaritmos.	N.os	Logaritmos.	N.os	Logaritmos.
1	000000	21	322219	41	612784	61	785330	81	908485
2	301030	22	342423	42	623249	62	792392	82	913814
3	477121	23	361728	43	633468	63	799341	83	919078
4	602060	24	380211	44	643453	64	806180	84	924279
5	698970	25	397940	45	653213	65	812913	85	929419
6	778151	26	414973	46	662758	66	819544	86	934498
7	845098	27	431364	47	672098	67	826075	87	939519
8	903090	28	447158	48	681241	68	832509	88	944483
9	954243	29	462398	49	690196	69	838849	89	949390
10	000000	30	477121	50	698970	70	845098	90	954243
11	041393	31	491362	51	707570	71	851258	91	959041
12	079181	32	505150	52	716003	72	857332	92	963788
13	113943	33	518514	53	724276	73	863323	93	968483
14	146128	34	531479	54	732394	74	869232	94	973128
15	176091	35	544068	55	740363	75	875061	95	977724
16	204120	36	556303	56	748188	76	880814	96	982271
17	230449	37	568202	57	755875	77	886491	97	986772
18	255273	38	579784	58	763428	78	892095	98	991226
19	278754	39	591065	59	770852	79	897627	99	995635
20	301030	40	602060	60	778151	80	903090	100	000000

Naturalmente, aunque en las tablas falten las características, hay que ponerlas en las operaciones logarítmicas.

Háganse por medio de esta nueva TABLA las operaciones siguientes:

$$\begin{array}{rrl}
16 \times 5 = & \text{log. de } 16 = & 1{,}204120 \\
& + \text{ log. de } 5 = & \underline{0{,}698970} \\
& & \underline{1{,}903090} = 80
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
99 \div 33 = & \text{log. de } 99 = & 1{,}995635 \\
& - \text{ log. de } 33 = & \underline{1{,}518514} \\
& & \underline{0{,}477121} = 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
8^2 = & \text{log. de } 8 = & 0{,}903090 \\
& & \underline{\times \quad 2} \\
& & \underline{1{,}806180} = 64
\end{array}$$

$$\sqrt[6]{64} = \quad \text{log. de } 64 = 1{,}806180 \;\big|\; 6 \qquad = 0{,}301030 = 2$$

La mantisa de un número cualquiera en la base 10, es también la mantisa de los números 10 veces, 100 veces, 1000 veces,... mayores ó menores.

Así, la mantisa es la misma en los números

$$65$$
$$65 \times 10$$
$$65 \times 100$$
$$65 \times 1000...$$
$$65 \times \frac{1}{10}$$
$$65 \times {}^1/100$$
$$65 \times {}^1/1000...$$

log. de 65 = 1,81291
log. de 650 = 2,81291
log. de 6500 = 3,81291
log. de 6,5 = 0,81291

log. de 2222 = 3,34674
log. de 222,2 = 2,34674
log. de 22,22 = 1,34674
log. de 2,222 = 0,34674

log. de 6250 = 3,79588
log. de 625 = 2,79588
log. de 62,5 = 1,79588
log. de 6,25 = 0,79588

En todos los logaritmos anteriores sólo varía la característica.

Veamos la razón de esto.

El logaritmo de un número cualquiera, por ejemplo,

log. de 5729 es = 3 + una fracción.

Dividamos por 10 el número 5729, y tendremos:

log. de 5729 = 3 + una fracción
— log. de 10 = 1

Restemos, y el log. de 572,9 = 2 + la misma fracción

Multipliquemos ahora ese mismo número 5729 por 10 y resultará

log. de 5729 = 3 + una fracción
+ log. de 10 = 1

Y sumando, log. de 57290 = 4 + la misma fracción

Como las características de 10, 100, 1000,... no tienen tras sí mantisa ninguna, claro es que al decuplar, centuplicar,... un número, ó al dividirlo por 10, 100,... no se hace otra cosa que aumentar ó disminuir en 1, 2,... la característica del número que se multiplica, ó se parte, sin tocar á su mantisa.

Y he aquí una inmensa ventaja del sistema de logaritmos cuya base es 10: los cambios introducidos en un número moviendo en él la coma á la derecha ó á la izquierda, no afectan á las mantisas, sino á las características solamente (1).

La característica de una fracción decimal es negativa, pero la mantisa continúa siendo positiva.

Así el

$$\text{log. de } 0{,}625 \text{ es} = \text{log. de } \frac{625}{1000} = \text{log. de } 625 - \text{log. de } 1000$$

$$= (2 + 0{,}79588) - 3$$
$$= -1 + 0{,}79588$$

expresión que en la práctica se escribe

$$\overline{1},79588$$

La característica de una fracción decimal dada expresa el lugar que en la fracción dada ocupa después de la coma la primera cifra no cero de la dicha fracción decimal dada

log. de 0,2000 (2) $= \overline{1},301030$

log. de 0,0200 (3) $= \overline{2},301030$

log. de 0,0020 (4) $= \overline{3},301030$

log. de 0,0002 (5) $= \overline{4},301030$.

(1) En el sistema de logaritmos promulgado por el insigne inventor Nápier,

log. de 6250 es 8,74034
log. de 625 es 6,43775, etc.

donde características y mantisas son en todo diferentes.

Las tablas Neperianas tienen, por tanto, que ser más voluminosas y las operaciones de multiplicar ó dividir por 10, 100,... no pueden efectuarse sino sumando ó restando, como si en la base 10 se tratase de números cualesquiera.

(2) En la fracción 0,2000, el 2 ocupa el primer lugar de los decimales.

(3) En la fracción 0,0200, el 2 ocupa el segundo lugar.

(4) En la fracción 0,0020, el 2 ocupa el tercer lugar.

(5) En la fracción 0,0002, el 2 ocupa el cuarto lugar, etc.

APÉNDICE

FORMACIÓN DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS

Al discípulo sólo incumbe hacer uso de las tablas tales como aparecen ya formadas, pues á nadie puede exigirse la inmensa labor de redactarlas.

Y, como en el programa de esta obra no entra nada de lo relativo á la Aritmética técnica (cálculo mercantil, trigonométrico,... etc.), sólo una muy sucinta información cabe dar aquí del modo de computar y tabular los logaritmos. Y con tanta más razón hay que prescindir de profundizar en la materia, cuanto que los métodos modernos no pueden comprenderse sin el auxilio del Algebra, y del cálculo superior.

Los logaritmos de

$$1, \quad 10, \quad 100, \quad 1000,...$$

son, como sabemos, en el sistema común,

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3,...$$

de modo que la formación de las tablas vulgares tiene sólo por objeto el cálculo de los logaritmos de los números comprendidos

entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000,... etc.

He aquí algo que dé idea de uno de los sistemas que pueden ser empleados para la formación de lae TABLAS.

En primer lugar, hay que hallar el logaritmo de 2, ó el logaritmo de 5; pues, computado uno cualquicra de los dos, el otro puede encontrarse por simple resta.

Supongamos ya hallado el logaritmo de 2, y tendremos

$$\begin{aligned} \text{log. de } \frac{10}{2} &= \text{log. de } 10 - \text{log. de } 2 = \text{log. de } 5 \\ &= 1 - \text{log. de } 2 = \text{log. de } 5. \quad (1) \end{aligned}$$

O bien, suponiendo conocido el logaritmo de 5, resultará

$$\begin{aligned} \text{log. de } \frac{10}{5} &= \text{log. de } 10 - \text{log. de } 5 = \text{log. de } 2 \\ &= 1 - \text{log. de } 5 = \text{log. de } 2 \quad (1) \end{aligned}$$

---

(1) En efecto; la suma de los logaritmos de 2 y de 5 es, según las tablas, = 1;

$$\begin{aligned} \text{log. de } 2 &= 0{,}30103 \\ \text{log. de } 5 &= 0{,}69897 \\ \hline &\ \ 1{,}00000 \end{aligned}$$

Ahora bien. Por una serie de tanteos, busquemos el logaritmo de 500, cuya mantisa ha de resultar la misma que la del logaritmo de 5. Al efecto, tenemos que resolver la ecuación

$$10^{x} = 500.$$

El valor del logaritmo de 500 es necesariamente,

$$> 2 \text{ y } < 3$$

porque

$$10^{2} = 100; \text{ y } 10^{3} = 1000;$$

$$\therefore \text{ log. de } 500 = 2 + \text{una fracción.}$$

De modo que si a es el denominador conveniente de esa fracción, tendremos:

$$10^{2+\frac{1}{a}} = 500$$

$$\therefore\ 10^{2} \times 10^{\frac{1}{a}} = 500$$

$$100 \times 10^{\frac{1}{a}} = 500$$

$$\therefore\ 10^{\frac{1}{a}} = 500 \div 100$$

$$10^{\frac{1}{a}} = 5$$

$$\sqrt[a]{10} = 5; \text{ esto es, raíz del grado } a = 5.$$

Y, elevando ambos miembros al grado a, resultará

$$5^{a} = 10$$

Ahora bien: a tiene que ser > 1 y $<$ que 2; pues

$$5^{1} = 5, \text{ y } 5^{2} = 25.$$

Y 10 está entre 5 y 25. Podemos, por tanto, establecer que

$$a = 1 + \frac{1}{b}$$

Y, por tanto,

$$5^a = 10 \text{ resulta ahora } 5^{1+\frac{1}{b}} = 10$$

$$\therefore\ 5^{\frac{1}{b}} = 10 \div 5$$

$$5^{\frac{1}{b}} = 2$$

$$\sqrt[b]{5} = 2$$

Y elevando ambos miembros á la potencia b

$$2^b = 5.$$

Procediendo análogamente por tanteos, veremos que

$$b \text{ tiene que ser} > 2 \text{ y} < 3$$

pues

$$2^2 = 4 \quad \text{y} \quad 2^3 = 8$$

y 5 está entre 4 y 8. Por consiguiente, supongamos

$$b = 2 + \frac{1}{c}$$

con lo cual

$$2^b = 5 \text{ será } 2^{2+\frac{1}{c}} = 5$$

$$\therefore\ 2^2 \times 2^{\frac{1}{c}} = 5$$

$$4 \times 2^{\frac{1}{c}} = 5.$$

$$2^{\frac{1}{c}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$\sqrt[c]{2} = 1{,}25$$

$$2 = (1{,}25)^c$$

c está entre 3 y 4, porque $(125)^3 = 1{,}953125$ no llega á 2, y $(125)^4 = 2{,}44140625$ pasa ya de 2.

Hagamos

$$c = 3 + \frac{1}{d}$$

y tendremos

$$1{,}25^3 \times 1{,}25^{\frac{1}{d}} = 2;$$

$$1{,}953125 \times 1{,}25^{\frac{1}{d}} = 2;$$

$$1{,}25^{\frac{1}{d}} = \frac{2}{1{,}953125} = 1{,}024$$

$$\sqrt[d]{1{,}25} = 1{,}024$$

$$1{,}024^d = 1{,}25$$

Por el mismo procedimiento, y efectuando las laboriosas operaciones correspondientes, tendremos:

d está entre 9 y 10

$$\therefore\ d = 9 + \frac{1}{e}$$

$$1{,}024^9 \times 1{,}024^{\frac{1}{e}} = 1{,}25$$

$$1{,}024^{\frac{1}{e}} = 1{,}25 \div 1{,}23794$$

$$1{,}009742^e = 1{,}024$$

e está entre 2 y 3 $\therefore$ pongamos

$$e = 2 + \frac{1}{f}$$

$$1{,}009742^{\frac{1}{f}} = 1{,}024 \div 1{,}0195789$$

$$1{,}004336^f = 1{,}009742$$

f está entre 2 y 3 $\therefore$ pongamos

$$f = 2 + \frac{1}{g}$$

$$1{,}004336^{\frac{1}{g}} = 1{,}009742 \div 1{,}00869$$

$$1{\cdot}00104^g = 1{,}004336$$

g está entre 4 y 5, pero, hallándose muy próximo á 4, cesaremos en las aproximaciones, y diremos que *g* es 4.

Por tanto,
Si g se considera como $= 4$, resultará

$$f = 2 + \frac{1}{g} = 2\frac{1}{4}$$
$$e = 2 + \frac{1}{f} = 2\frac{4}{9}$$
$$d = 9 + \frac{1}{e} = 9\frac{9}{22}$$
$$c = 3 + \frac{1}{d} = 3\frac{22}{207}$$
$$b = 2 + \frac{1}{c} = 2\frac{207}{643}$$
$$a = 1 + \frac{1}{b} = 1\frac{643}{1493}$$
$$x = 2 + \frac{1}{a} = 2\frac{1493}{2136} = 2{,}69897003$$

Por consiguiente:

Logaritmo de $500 = 2{,}6989700$, correcto hasta el 7.º decimal.
$\therefore$ Logaritmo de $5 = 0{,}69897003$
Logaritmo de $2 = 0{,}30102997 = 0{,}3010300$

Este procedimiento habría sido demasiado laborioso para la construcción de la tabla de los logaritmos de los números naturales; por más que, computado un logaritmo, sea ya muy fácil hallar los de los múltiplos del nuevo número por los anteriormente calculados. En el caso actual sería ya muy fácil hallar los logaritmos de

$$2 \times 2 = 4; \quad 4 \times 2 = 8; \quad 8 \times 2 = 16 \ldots$$
$$5 \times 5 = 25; \quad 25 \times 5 = 125; \ldots$$
$$4 \times 5 = 20; \quad 20 \times 2 = 40; \ldots$$

Briggs, el matemático insigne que, aun en vida de Nápier, hizo ya progresar la invención imperecedera del gran barón escocés, siguió otro procedimiento de computación, de que tan sólo es una idea lo siguiente:

Con una labor admirable calculó Briggs los 54 primeros términos de la serie geométrica decreciente

$$10^{\frac{1}{2}},\ 10^{\frac{1}{4}},\ 10^{\frac{1}{8}},\ 10^{\frac{1}{16}},\ 10^{\frac{1}{32}}, \ldots$$

ó sea

$$\sqrt[2]{10},\ \sqrt[4]{10},\ \sqrt[8]{10},\ \sqrt[16]{10},\ \sqrt[32]{10}, \ldots$$

ó bien

$$\sqrt{10},\ \sqrt{\sqrt{10}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}, \ldots$$

Al efecto, extrajo la $\sqrt{\ }$ de 10, y luego la $\sqrt{\ }$ de la anterior $\sqrt{\ }$, y después la $\sqrt{\ }$ de la acabada de hallar; y, así sucesivamente, siempre la raíz cuadrada de cada raíz anterior.

De este modo obtuvo los decimales correspondientes á los logaritmos de las sucesivas $\sqrt{\ }$ de la serie.

$$10^{\frac{1}{2}},\ 10^{\frac{1}{4}},\ 10^{\frac{1}{8}},\ 10^{\frac{1}{16}},\ldots$$

ó sea

$$\sqrt{10},\quad \sqrt{\sqrt{10}},\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}},\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}},\ldots$$

¡Labor increible!!!!

La serie hasta el término 24 fué

$\sqrt[2]{10}$	$\sqrt[512]{10}$	$\sqrt[131072]{10}$
$\sqrt[4]{10}$	$\sqrt[1024]{10}$	$\sqrt[262144]{10}$
$\sqrt[8]{10}$	$\sqrt[2048]{10}$	$\sqrt[524288]{10}$
$\sqrt[16]{10}$	$\sqrt[4096]{10}$	$\sqrt[1048576]{10}$
$\sqrt[32]{10}$	$\sqrt[8192]{10}$	$\sqrt[2097152]{10}$
$\sqrt[64]{10}$	$\sqrt[16384]{10}$	$\sqrt[4194304]{10}$
$\sqrt[128]{10}$	$\sqrt[32768]{10}$	$\sqrt[8388608]{10}$
$\sqrt[256]{10}$	$\sqrt[65536]{10}$	$\sqrt[16777216]{10}$

Dando la forma decimal á los exponentes de la serie

$$\because\ 10^{\frac{1}{2}} : 10^{\frac{1}{4}} : 10^{\frac{1}{8}} : 10^{\frac{1}{16}} : \ldots\ 10^{\frac{1}{2097152}} : 10^{\frac{1}{4194304}} : 10^{\frac{1}{8388608}} : 10^{\frac{1}{16777216}}$$

se tendrá

$$\div\ 10^{0,5} : 10^{0,25} : 10^{0,125} : \ldots \qquad : 10^{0,00000011920929} : 10^{0,00000005960464}$$

Aunque parezca de más la advertencia, observe el discípulo que cada exponente es la mitad del anterior; ó bien que los exponentes son

$$:: 2 : 1$$

Para ejemplo del partido que Briggs supo sacar de esta serie sirvan los términos 23 y 24 de la misma (abreviando, por supuesto, el número de las cifras decimales, por no ser necesario para dar idea del procedimiento expresar todas las cifras que él calculó).

La raíz del término

$$23, \text{ correspondiente á } \sqrt[8388608]{10} = 1{,}00000027448957$$

La raíz del término

$$24, \text{ correspondiente á } \sqrt[16777216]{10} = 1{,}00000013724477.$$

Observe el discípulo que la parte decimal de la raíz 24 es casi la mitad de la parte decimal de la raíz 23, ó bien que son muy próximamente entre sí

$$:: 2 : 1 \quad (1).$$

La diferencia entre los términos sucesivos de la serie, tienden á ser la mitad unas de otras, hasta que llegan á serlo (casi) cuando cada parte decimal empieza por seis ceros. Entonces estas diferencias de las raíces, lo mismo que las de los respectivos logaritmos son entre sí

$$:: 2 : 1,$$

y, estando ya unas y otras en la misma razón, pueden considerarse proporcionales, y, por tanto, pueden calcularse conforme á las reglas de las proporciones.

Y, por consiguiente,

$$\left\{\begin{matrix}\text{La diferencia de}\\ \text{una raíz con la}\\ \text{próxima}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{á la de su loga-}\\ \text{ritmo con el}\\ \text{próximo}\end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix}\text{la de otra}\\ \text{raíz}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{á la del}\\ \text{suyo.}\end{matrix}\right.$$

De donde se deduce que el cuociente de los dos primeros términos de la anterior proporción, será el mismo cuociente de los dos segundos (2).

---

(1) Esto no pasa con los primeros términos de la serie

$$\sqrt{10} = 3.16...$$

$\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{3.16...} = 1{,}78...$, que no es ni con mucho la mitad de 3,16..

(2) Recuérdese que

$$\sqrt[16777216]{10} = 1{,}00000013724477$$

$$\text{O bien} \quad 10^{\frac{1}{16777216}} = 1{,}00000013724472$$

$$\text{O bien } 10^{0{,}0000005960464} = 1{,}00000013724472$$

$$\frac{0,00000005960464}{0,00000013724477} = 0,43429445 \quad (1)$$

Y, como, en cuanto llegan á empezar con seis ceros las cifras decimales de las raíces, están entre sí sus diferencias, lo mismo que las de los respectivos logaritmos,

$$::2:1,$$

se deduce también que, dada la parte decimal de una raíz, se hallará su correspondiente logaritmo multiplicando esa parte decimal por el cuociente ó razón

$$0,43429445$$

Por consiguiente:

El logaritmo en la base de

$$1,0000001$$

se hallará multiplicando el decimal

$$0000001 \text{ por } 0,43429445$$

Y, con efecto, verificada la correspondiente multiplicación, resulta

$$\log. 1,0000001 = 0,000000043429445.$$

$$\begin{array}{r} 0,43429445 \\ \times \quad 0,0000001 \\ \hline 0,000000043429445 \end{array}$$

Véase cómo emplea Briggs este procedimiento para en-

---

(1) En efecto:

$$\begin{array}{rl} 0,00000013724477, & \text{d.}^{\text{mal}} \text{ de la raíz} \\ \times \quad 0,43429445, & \text{c.}^{\text{te}} \text{ ó razón.} \\ \hline 68622385 & \\ 54897908 & \\ 54897908 & \\ 123520293 & \\ 27448954 & \\ 54897908 & \\ 41173431 & \\ 54897908 & \\ \hline \end{array}$$

log. del 24 término; 0,00000005960464........ prescindiendo de las 8 últimas cifras decimales de la dra. 19025265 contrar el logaritmo de 1,024, siendo su objeto hallar el logaritmo de 2, que es la raíz décima de 1024:

$$\sqrt[10]{1024} = 2$$

$$2^2=4;\ 2^3=8;\ 2^4=16;\ 2^5=32;\ 2^6=64;\ 2^7=128;\ 2^8=256;\ 2^9=512;\ 2^{10}=1024$$

Al efecto formó la siguiente tabla de las sucesivas raíces cuadradas de 1,024

$$\sqrt[2]{1{,}024} = 1{,}011928851254$$

$$\sqrt[4]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}011928851254} = 1{,}005946743746$$

$$\sqrt[8]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}005946743746} = 1{,}002968964498$$

$$\sqrt[16]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}002968964498} = 1{,}001483382038$$

$$\sqrt[32]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}001483382038} = 1{,}000741416170$$

$$\sqrt[64]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000741416170} = 1{,}000370639398$$

$$\sqrt[128]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000370639398} = 1{,}000185302531$$

$$\sqrt[256]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000185302531} = 1{,}000092646974$$

$$\sqrt[512]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000092646974} = 1{,}000046322414$$

$$\sqrt[1024]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000046322414} = 1{,}000023160939$$

$$\sqrt[2048]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000023160939} = 1{,}000011580402$$

$$\sqrt[4096]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000011580402} = 1{,}000005790184$$

$$\sqrt[8192]{1{,}020} = \sqrt[2]{1{,}000005790184} = 1{,}000002895088$$

$$\sqrt[16384]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000002895088} = 1{,}000001447543$$

$$\sqrt[32768]{1{,}024} = \sqrt[2]{1{,}000001447543} = 1{,}000000723771$$

Encontrada así la raíz de 1,024, correspondiente al grado 32768, cuya parte decimal es muy próximamente la mitad de la parte decimal de la raíz precedente del grado 16384, debe su logaritmo encontrarse multiplicando la parte decimal por 0,43429445, lo que da 0,000000314329... (1)

Logaritmo en la base 10 de la raíz del grado 32768 del número 1,024 = 0,00000031432973 (2)

O bien log. 1,000000723771 = 0,00000031432973

Multiplicando este logaritmo por 32768, se elevará á la potencia 32768 la raíz 1,000000723771, y el nuevo logaritmo lo será del número 1,024 (3)

$$\begin{array}{lll} & \text{log. de } 1{,}024 & = 0{,}0102999566 \\ \therefore & \text{log. de } 1{,}024 & = 3{,}0102999566 \\ \therefore & \text{log. de } 2 & = 0{,}30102999566 \\ \therefore & \text{log. de } 5 = 1 - \text{log. } 2 & = 0{,}69897000434 \end{array}$$

Todos estos logaritmos son exactos hasta la última cifra.

---

(1)
$$\begin{array}{r} 0{,}43429445 \\ \times\ 0{,}000000723771 \\ \hline 43429445 \\ 304006115 \\ 304006115 \\ 130288335 \\ 86858890 \\ 304006115 \\ \hline 0{,}00000031432972837095 \end{array}$$

(2) Observe bien el discípulo la diferencia siguiente:

$$\sqrt[32768]{10} = 10^{\frac{1}{32768}} = 10^{0{,}0000305175578}$$

$$\sqrt[32768]{1{,}024} = (1{,}024)^{\frac{1}{32768}} = 10^{0{,}00000031432973}.$$

(3)
$$\begin{array}{r} 0{,}00000031432973 \\ 32768 \\ \hline 251463784 \\ 188597838 \\ 220030811 \\ 62865946 \\ 94298919 \\ \hline 0{,}01029995659264 \end{array}$$

Aplicando el principio de la proporcionalidad, halló luego Briggs el logaritmo de 6, cuya novena potencia 10077696 empieza con la unidad y dos ceros; y, buscando otros útiles expedientes para disminuír el trabajo, dió á luz en 1624 su *Aritmética Logarithmica*, alguna parte de la cual se había ya publicado en 1617, año de la muerte de Nápier.

Por lo expuesto, aunque de modo tan exiguo, puede, sin embargo, venirse en conocimiento del gran trabajo y rara inventiva que exigieron las primeras tablas de logaritmos. ¡Tan grande era la necesidad sentida entonces de hacer posibles las operaciones aritméticas, impracticables sin las tablas!

Afortunadamente, el trabajo hubo de disminuír y la exactitud hubo de aumentar, cuando Newton dotó el Algebra con los principios de su inmortal Teorema del binomio.

Una serie logarítmica, desarrollada algebráicamente conforme al binomio de Newton, suministra medios tan expeditivos como admirables para el cómputo de los logaritmos.

Pero es imposible exponerlos aquí, por suponer conocimientos algebráicos que sólo por excepción poseerán los lectores de esta obra.

Véanlos los estudiosos en las obras especiales destinadas exclusivamente á los logaritmos.

LECCIÓN IV

Disposición de las tablas de logaritmos.

Supongamos las dos progresiones, una geométrica y otra aritmética,

$$\div\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots .$$
$$\div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots\ldots$$

Supongamos que entre cada dos de los términos 1 y 10, 10 y 100, 100 y 1000,... de la progresión geométrica se haya intercalado un mismo número de medios proporcionales con arreglo á la fórmula

$$r = \sqrt[m-1]{\frac{u}{a}} \quad (1)$$

Supongamos que la intercalación de esos medios proporcionales sea tan considerable que cada uno de los enteros intermedios

2, 3, 4,... 8 y 9; 11, 12, 13,... 97, 98 y 99; 101, 102,... 998 y 999;... etc.,

tenga un medio proporcional tan próximo que ambos difieran entre sí una cantidad inapreciable, y en grado tal, que puedan tomarse el uno por el otro, como si fueran enteramente iguales.

Supongamos, por otro lado, que entre los términos

1 y 2, 2 y 3, 3 y 4, 4 y 5,...

de la progresión aritmética se hayan intercalado tantos me-

(1) Véase pág. 300 de este tomo: *Progresiones por cuociente*.

dios proporcionales como se intercalaron en la progresión geométrica, utilizando para la nueva intercalación de medios aritméticos la fórmula

$$r = \frac{u - a}{n - 1} \quad (1)$$

Y, supuesto todo esto, tendremos dos nuevas progresiones, una geométrica y otra aritmética, cuyos términos se corresponderán de modo tal que los de la progresión aritmética serán los logaritmos en la base 10 de los términos de la progresión geométrica.

Ahora bien: entresaquemos de entre la inmensidad de términos que, según estas hipótesis, corresponden á la progresión geométrica, únicamente aquellos términos que puedan mirarse como idénticos casi á los números que forman la serie de la escala natural: pongamos en vez de ellos sus casi iguales de esa serie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...;

coloquémoslos en columna: copiemos á su derecha, en otra columna, sola y exclusivamente los correspondientes logaritmos, entresacándolos á su vez de la otra inmensidad de términos de la progresión aritmética, y escribamos cada logaritmo con el número de decimales que nos parezcan suficientes para el buen resultado de los cálculos de aproximación.

Y resultará:

1	0
2	0,301030
3	0,477121
4	0,602060
5	0,698970
6	0,778151
7	0,845098
8	0,903090
9	0,954243
10	1
11	1,041393
12	1,079181
13	1,113943
14	1,146128
15	1,176091
	Etc.

Claro es que, así, no poseeremos ya las dos anteriores progresiones geométrica y aritmética de nuestras hipótesis;

(1) Véase pág. 280 de este tomo: *Progresiones por diferencia.*

porque, entresacados del inmenso número de términos que las constituyen únicamente los correspondientes á la escala de la pluralidad juntamente con sus logaritmos, no se utilizan consecutivamente todos los términos de ambas; pero no por eso los números de la columna de la derecha pueden dejar de ser los logaritmos de los números de la escala natural entresacados para la columna de la izquierda (1). Y es evidente que —aun sin estar completas por causa de esta selección las dos progresiones imaginadas,—se verificarán con los números llevados á las tablas todas las propiedades del cálculo logarítmico; porque la selección no puede impedir que los unos sean logaritmos de los otros.

Aunque los logaritmos vulgares (2) y sus números estén computados según las hipótesis anteriores, bien se ve que los comprendidos en las tablas no pueden aparecer en progresión; y no ha de extrañarse, por tanto, que, hechos los cómputos de las tablas usuales conforme á otros procedimientos, tampoco formen progresiones ni los números ni los logaritmos correspondientes; sin embargo de lo cual, subsistan las reglas de las operaciones todas.

Disposición de las tablas de Callet (3).

Véase la siguiente (que es la de la pág. 71) tomada al azar:

(1) Si para un cálculo especial hubiéramos solamente de necesitar los números impares ¿no resultaría, después de la selección, TABLA de logaritmos lo que se indica en la disposición siguiente?

1	0
3	0,477121
5	0,698970
7	0,845098
9	0,954243 etc., etc.

(2) Los logaritmos cuya base es 10 se llaman: «vulgares», «decimales», ó «de Briggs».

Y, como, en general, se llama base el número cuyo logaritmo es 1, sea el que fuere el sistema, claro es que es también 1 el logaritmo de la base de Briggs, que es 10.

$$\left.\begin{array}{l} \div\!\div\ 1 : 10 : 100... \\ \div\ 0 . 1 . 2... \end{array}\right\}\ \text{sistema de logaritmos en la base 10}$$

$$\left.\begin{array}{l} \div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 \\ \div\ 0 . 1 . 2 . 3 \end{array}\right\}\ \text{sistema de logaritmos en la base 2, etc.}$$

(3) Los números de las TABLAS de Callet comprenden desde el 1 al 108000, por ser 108000 los segundos que tiene un arco de 30°.

$$30^{o} \times 60^{\text{minutos}} \times 60^{\text{segundos}} = 108000$$

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
4920	691.9651	9739	9828	9916							
	692.				0004	0092	0181	0269	0357	0445	**89**
21	0534	0622	0710	0798	0887	0975	1063	1151	1240	1328	1 9
22	1416	1504	1593	1681	1769	1857	1945	2034	2122	2210	2 18
23	2298	2387	2475	2563	2651	2739	2828	2916	3004	3092	3 27
24	3180	3269	3357	3445	3533	3621	3710	3798	3886	3974	4 36
4925	4062	4151	4239	4327	4415	4503	4591	4680	4768	4856	5 45
26	4944	5032	5120	5209	5297	5385	5473	5561	5649	5737	6 53
27	5826	5914	6002	6090	6178	6266	6354	6443	6531	6619	7 62
28	6707	6795	6883	6971	7059	7148	7236	7324	7412	7500	8 71
29	7588	7676	7764	7853	7941	8029	8117	8205	8293	8381	9 80
4930	8469	8557	8645	8733	8822	8910	8998	9086	9174	9262	
31	9350	9438	9526	9614	9702	9790	9878	9967			
	693.								0055	0143	
32	0231	0319	0407	0495	0583	0671	0759	0847	0935	1023	
33	1111	1199	1287	1375	1463	1551	1639	1727	1815	1903	
34	1991	2079	2167	2256	2344	2432	2520	2608	2696	2784	**88**
4935	2872	2960	3048	3136	3224	3312	3400	3488	3576	3664	1 9
36	3752	3839	3927	4015	4103	4191	4279	4367	4455	4543	2 18
37	4631	4719	4807	4895	4983	5071	5159	5247	5335	5423	3 26
38	5511	5599	5687	5775	5863	5951	6039	6126	6214	6302	4 35
39	6390	6478	6566	6654	6742	6830	6918	7006	7094	7182	5 44
4940	7269	7357	7445	7533	7621	7709	7797	7885	7973	8061	6 53
41	8149	8236	8324	8412	8500	8588	8676	8764	8852	8940	7 62
42	9027	9115	9203	9291	9379	9467	9555	9643	9730	9818	8 70
43	9906	9994									9 79
	694.		0082	0170	0258	0345	0433	0521	0609	0697	
44	0785	0872	0960	1048	1136	1224	1312	1399	1487	1575	
4945	1663	1751	1839	1926	2014	2102	2190	2278	2366	2453	
46	2541	2629	2717	2805	2892	2980	3068	3156	3244	3331	
47	3419	3507	3595	3682	3770	3858	3946	4034	4121	4209	
48	4297	4385	4472	4560	4648	4736	4824	4911	4999	5087	
49	5175	5262	5350	5438	5526	5613	5701	5789	5877	5964	
4950	6052	6140	6227	6315	6403	6491	6578	6666	6754	6842	
51	6929	7017	7105	7192	7280	7368	7456	7543	7631	7719	
52	7806	7894	7982	8069	8157	8245	8333	8420	8508	8596	
53	8683	8771	8859	8946	9034	9122	9209	9297	9385	9472	
54	9560	9648	9735	9823	9911	9998					
	695.						0086	0174	0261	0349	
4955	0437	0524	0612	0700	0787	0875	0962	1050	1138	1225	
56	1313	1401	1488	1576	1663	1751	1839	1926	2014	2102	
57	2189	2277	2364	2452	2540	2627	2715	2802	2890	2978	
58	3065	3153	3240	3328	3416	3503	3591	3678	3766	3854	
59	3941	4029	4116	4204	4291	4379	4467	4554	4642	4729	
4960	4817	4904	4992	5079	5167	5255	5342	5430	5517	5605	
61	5692	5780	5867	5955	6042	6130	6217	6305	6393	6480	
62	6568	6655	6743	6830	6918	7005	7093	7180	7268	7355	
63	7443	7530	7618	7705	7793	7880	7968	8055	8143	8230	
64	8318	8405	8493	8580	8668	8755	8843	8930	9018	9105	
4965	9193	9280	9367	9455	9542	9630	9717	9805	9892	9980	

N.os	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
66	696 0067	0155	0242	0330	0417	0504	0592	0679	0767	0854	
67	0942	1029	1116	1204	1291	1379	1466	1554	1641	1728	
68	1816	1903	1991	2078	2166	2253	2340	2428	2515	2603	
69	2690	2777	2865	2952	3040	3127	3214	3302	3389	3477	
4970	3564	3651	3739	3826	3913	4001	4088	4176	4263	4350	
71	4438	4525	4612	4700	4787	4874	4962	5049	5137	5224	
72	5311	5399	5486	5573	5661	5748	5835	5923	6010	6097	
73	6185	6272	6359	6447	6534	6621	6709	6796	6883	6970	
74	7058	7145	7232	7320	7407	7494	7582	7669	7756	7844	
4975	7931	8018	8105	8193	8280	8367	8455	8542	8629	8716	
76	8804	8891	8978	9066	9153	9240	9327	9415	9502	9589	
77	9676	9764	9851	9938							
	697.				0025	0113	0200	0287	0374	0462	
78	0549	0636	0723	0811	0898	0985	1072	1160	1247	1334	
79	1421	1508	1596	1683	1770	1857	1945	2032	2119	2206	

Las Tablas de los logaritmos vulgares dispuestas por CALLET (1) contienen los logaritmos de los números desde 1 á 108000, como se ha dicho.

La base de sus logaritmos es 10.

Sólo registra las mantisas. Las características se suponen.

Las mantisas presentan 8 decimales desde el 1 hasta el 1200.

Tienen sólo 7 decimales desde el 1020 al 100000;

Vuelven á tener 8 desde el 100000 al 108000.

Es de advertir que los números 1020 á 1200 se hallan repetidos en esas tablas, primero con 8 y luego con 7 decimales.

A veces la última de las 7 cifras decimales se halla forzada en una unidad, porque así resulta más inmediata la aproximación por exceso.

Como se ve, la página presenta:

1.° Una columna titulada N. (abreviatura de número), la cual columna contiene correlativamente de arriba abajo la serie de los números naturales 4920 á 4979.

2.° Otra columna, á la derecha inmediatamente de la anterior, titulada 0, en la cual, frente á cada uno de los números anteriores 4920, 4921, 4922,... se hallan con 7 cifras decimales los respectivos logaritmos. Así el logaritmo de 4922 es 3,6921416; el de 4955 es 3,6950437; el de 4975 es 3,6967931.

(1) Este modelo es la pág. 71.

Esta columna 0 contiene, no solamente los logaritmos de

4920 = 3,6919651
4930 = 3,6928469
4940 = 3,6937269
4950 = 3,6946052
4960 = 3,6954817
4970 = 3,6963564

sino también los logaritmos de

492 = 2,6919651
493 = 2,6928469
494 = 2,6937269
495 = 2,6946052
496 = 2,6954817
497 = 2,6963564

Y además los de todos los múltiplos por 10; 100; 1000;... y por 0,1; 0,01; 0,001;... de los números tabulados en la columna titulada N.

Así,

el logaritmo de 49660 es = 4,6960067;
el de 4966000 es = 6,6960067,
el de 4,966 es = 0,6960067, etc.

3.° Nueve columnas tituladas consecutivamente

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Colocados estos dígitos á la derecha, sucesivamente, de los números que se hallan tabulados en la columna titulada N., formarán los guarismos de 5 cifras,

49201,	49202,	49203,	49204,	49205,	49206,	49207,	49208,	49209
49211,	49212,	49213,	49214,	49215.	49216,	49217,	49218,	49219
49221,	49222,	49223,	49224,	49225,	49226,	49227,	49228,	49229.
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
49791,	49792,	49793,	49794,	49795,	49796,	49797,	49798,	49799

Las tres primeras cifras de las mantisas de todos estos números se hallan en la columna titulada 0, terminadas por un punto, y las cuatro últimas en las respectivas columnas tituladas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. De modo que tendremos

Números.		Logaritmos.	Números.		Logaritmos.
49201	=	4,6919739	49451	=	4,6941751
49202	=	4,6919828	49452	=	4,6941839
49203	=	4,6919916	49533	=	4,6948946
49204	=	4,6920004	49544	=	4,6949911
49215	=	4,6920975	49615	=	4,6956130
49216	=	4,6921063	49726	=	4,6965835
49217	=	4,6921151	49757	=	4,6968542
49228	=	4,6922122	49768	=	4,6969502
49239	=	4,6923092	49799	=	4,6972206

Claro es que también estas serán las mantisas de esos mismos números multiplicados ó partidos por 10, 100, 1000,...

Log. de 497680 = 5,6969502
Log. de 4976800 = 6,6969502
Log. de 49768000 = 7,6969502
Log. de 4976,8 = 3,6969502
Log. de 497,68 = 2,6969502
Log. de 49,768 = 1,6969502 Etc.

4.° Una columna final, á la derecha, titulada *dif.* (abreviatura de diferencias). En esta columna se encuentran en lo alto y hacia el centro en la hoja que estamos examinando los números 89 y 88. Bajo cada uno de estos números se ven ordenadamente y en columna vertical los números dígitos.

89	**88**
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Y á la derecha y enfrente de los números dígitos se encuentran otros números, llamados *partes proporcionales.*

¿Qué significan los números 89 y 88?

Son las diferencias, aproximadamente, entre dos mantisas consecutivas; diferencias que subsisten para un gran número de logaritmos seguidos.

Log. de 49350 = 4,6932872
diferencia tabular, 88
Log. de 49351 = 4,6932960
diferencia tabular, 88
Log. de 49352 = 4,6933048
diferencia tabular, 88
Log. de 49353 = 4,6933136
diferencia tabular, 88
Log. de 49354 = 4,6934224
diferencia tabular, 88
Log. de 49355 = 4,6933312
diferencia tabular, 88
Log. de 49356 = 4,6934000
diferencia tabular, 88
Log. de 49357 = 4,6933488
diferencia tabular, 88
Log. de 49358 = 4,6933576
diferencia tabular, 88
Log. de 49359 = 4,6933674 (1)

(1) Hay que hacer aquí una advertencia. Las diferencias entre dos logaritmos consecutivos van disminuyendo á medida que crecen los núme-

¿Qué son las partes proporcionales? esto es, ¿qué son los números estampados en columna á la derecha de los dígitos, bajo las diferencias, 89 y 88?

Son, aproximadamente, los productos de cada diferencia por

0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 y 0,9.

En efecto;

$88 \times 0{,}1 = 8{,}8$ (= forzando la cifra, á 9)
$88 \times 0{,}2 = 17{,}6$ (= forzando la cifra, á 18)
$88 \times 0{,}3 = 26{,}4$ (= por defecto, á 26)
$88 \times 0{,}4 = 35{,}2$ (= por defecto, á 35)
$88 \times 0{,}5 = 44{,}0$
$88 \times 0{,}6 = 52{,}8$ (= por exceso, á 53)
$88 \times 0{,}7 = 61{,}6$ (= por exceso, á 62)
$88 \times 0{,}8 = 70{,}4$ (= por defecto, á 70)
$88 \times 0{,}9 = 79{,}2$ (= por defecto, á 79)

¿Para qué sirven estas diferencias tabulares 89 y 88, y los números estampados bajo ellas y enfrente de los dígitos?

---

ros á que los logaritmos corresponden. Así la diferencia de los logaritmos

entre 1 y 2 = 3010300
entre 2 y 3 = 1760912
entre 3 y 4 = 1249387
entre 4 y 5 = 969101

y la diferencia de los logaritmos

entre 99998 y 99999 es sólo = 44.

Por consiguiente, sucede que, cuando, como en la hoja que examinamos, las diferencias tabulares están para pasar de 89 á 88, y, en general, cuando están para disminuir en una unidad, aparecen las diferencias efectivas de los logaritmos una unidad más chicas que las diferencias tabulares. Pero, si en vez de 7 decimales presentasen mayor número las tablas, entonces se vería que las diferencias tabulares eran más correctas que las diferencias efectivas.

Por ejemplo:

Log. de 49280 = 4,6926707
{ diferencia efectiva, 88; diferencia tabular, 89
Log. de 49281 = 4,6926795
{ diferencia efectiva, 88; diferencia tabular, 89
Log. de 49282 = 4,6926883
{ diferencia efectiva, 88; diferencia tabular, 89
Log. de 49283 = 4,6926971
{ diferencia efectiva, 88; diferencia tabular, 89
Log. de 49284 = 4,6927059
{ diferencia efectiva, 89; diferencia tabular, 89
Log. de 49285 = 4,6927148
{ diferencia efectiva, 88; diferencia tabular, 89
Log. de 49286 = 4,6927236
{ diferencia efectiva, 88; diferencia tabular, 89
Log. de 49287 = 4,6927324
{ diferencia efectiva, 88; diferencia tabular, 89
Log. de 49288 = 4,6927412
{ diferencia efectiva, 88; diferencia tabular, 89
Log. de 49289 = 4,6927500

Sirven, respectivamente, para calcular las mantisas de los logaritmos correspondientes á los números mayores que 108000, y que no se encuentran en las tablas.

Por ejemplo: ¿Cuál es el logaritmo del número 4975684?

Siendo este número > 108000, no se encuentra en las tablas de Callet. Para computar su logaritmo, separo de la derecha del número dado, por medio de una coma, cuantas cifras sean necesarias para que me quede un número comprendido ya en las tablas. En el caso actual separo las dos cifras de la derecha, y me resulta

49756,84.

Efectivamente, el número 49756 se halla en las tablas con la correspondiente mantisa de su logaritmo 6968455; pero (claro es) no se halla la mantisa correspondiente al 49756,84. Ahora bien; la mantisa de 49756,84 ha de ser algo mayor que 6968455, mantisa del número 49756, y algo menor que la del número siguiente 49757.

Ahora bien; se ha observado (y se demuestra fácilmente) que, cuando los números son muy grandes y sus diferencias son poco considerables, estas diferencias de los números resultan proporcionales (muy próximamente) á las diferencias de las mantisas respectivas. Así,

la diferencia entre los números 49756 y 49757
: á la diferencia entre sus mantisas 6968455 y 6968542
:: la diferencia entre los números 49756 y 49756,84
: á la diferencia entre sus mantisas 6968455 y la mantisa que se busca;

O bien,

$$1 : 88 :: 0{,}84 : x$$

$$\therefore\ x = \frac{88 \times 0{,}84}{1}$$

$$\therefore\ x = 74$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times\ 0{,}84 \\ \hline 352 \\ 704 \\ \hline 73{,}92 \end{array} = \text{(74, forzando la unidad.)}$$

De modo que la mantisa de

$$49756{,}84 = 6968455 + 74 = 6968529$$
$$\therefore\ \text{log. de } 4975684 = 6{,}6968529$$

La mantisa, pues, de un número n seguido de cifras decimales, se obtiene agregando á la mantisa de n el producto de los decimales por la diferencia tabular.

Mant. de n, 12... = mant. de n + (0,12... × diferencia tabular)

$$= \text{mant. de } n + \{0{,}12... \times [(\text{mant. de } n+1) - (\text{mant. de } n)]\}$$

Así, pues, la mantisa de un número dado mayor que el de las tablas se obtiene:

1.° Separando por una coma á la derecha del número dado las cifras necesarias para que resulte otro número de los tabulados (el mayor posible);

2.° Multiplicando la parte separada con la coma por la diferencia tabular;

3.° Sumando el producto así obtenido con la mantisa del número que se halla en las tablas.

Y, para facilitar todo lo posible este trabajo, sirven las llamadas partes proporcionales, que son los números estampados enfrente de los dígitos en la última columna, disponiendo al efecto la operación como sigue:

¿Cuál es la mantisa del número 4975684, que no está en las tablas?

Operación.	49756,84		
Mantisa de	49756 =	6968455	
Parte proporcional del dígito 8 =		70	
Parte proporcional del dígito 4 =		3,5	(1)
		6968529	(forzando la unidad)

∴ log. de 4975684 = 6,6968529.

¿Cuál es el logaritmo de 4955269?

	49552,69		
Mantisa de	49552 =	6950612	(*)
Parte proporcional del dígito 6 =		53	
Parte proporcional del dígito 9 =		7,9	
		6950673	(forzada la unidad)

∴ log. de 4955269 = 6,6950673

(1) Es evidente porque el 70 se coloca dentro de la suma y el 35 sólo en parte.

El dígito 8 son decenas: el dígito 4, unidades.

Se trata de agregar á la mantisa 6968455 el quebrado

$$\frac{84}{88} = 0{,}74$$

$$\begin{array}{r|l} 7400 & 88 \\ \cline{2-2} 360 & \\ ..8 & 0{,}84 \end{array}$$

¿Cuál es el logaritmo de 4966524?

49665,24
Mantisa de 49665 = 6960504 (*)
Parte proporcional del dígito 2 = 18
Parte proporcional del dígito 4 = 3,5

6960526 (forzada la unidad)

∴ log. de 4966524 = 6,6960526

¿Cuál es el logaritmo de 4979498?

49794,98
49794 = 6971770 (*)
9 = 79
8 = 7,0

6971856 (sin forzar la unidad)

∴ log. de 4979498 = 6,6971856

¿Cuál es el logaritmo de 49695486?

49695,486
49695 = 6963127 (*)
4 = 35
8 = 7,0
6 = 0,53

6963170 (forzando la unidad)

Log. de 49695486 = 7,6963170

¿Cuál es el logaritmo de 496599999?

49659 = 6959980 (*)
9 = 79
9 = 7,9
9 = 0,79

6960068

Log. de 496599999 = 8,6960068

¿Cuál es el logaritmo de 4978555555?

49785 = 6970985 (*)
5 = 4
5 = 4,4
5 = 0,44
5 = 0,044

6970994

Log. 4978555555 = 9,6970994

(*) Aquí no hay igualdad, evidentemente, sino supliendo la palabra *mantisa*.

Todas las páginas, desde la 6 á la 168, destinadas á los logaritmos vulgares en las tablas de Callet, tienen la misma disposición de la que acabamos de estudiar.

El conjunto de las tituladas N contiene la serie de los números naturales.

En las tituladas 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 están las respectivas mantisas: en la 0 con todas sus cifras: en las encabezadas 1, 2, 3... solamente con las 4 últimas; pues las 3 primeras son las 3 primeras de la columna 0.

Y en la columna titulada *dif.* se encuentran las diferencias de cada dos mantisas consecutivas, y los cálculos (ya hechos) de las partes proporcionales, para el cómputo de las mantisas correspondientes á los números superiores á los de las tablas (1).

OTRAS TABLAS MANUALES DE LOGARITMOS

En general tienen la forma de las de Callet, pero las mantisas sólo aparecen con 5 decimales.

En primera columna, titulada N, la serie de los números naturales;

En columnas tituladas 0, 1, 2, 3,... 9 las correspondientes mantisas;

Y en columna final las diferencias y las partes proporcionales para computar las mantisas de los números superiores á los de las tablas y no comprendidos en ellas.

Las hay que empiezan con los números 100, 101, 102,... En ellas hay que buscar las mantisas de los dígitos y de las decenas en los números múltiplos de unos y otras. La mantisa de 1 frente al 100, la de 2 frente al 200, la del 13 frente al 130, la del 14 frente al 140, etc.

Mutatis mutandis las Tablas de cinco decimales se utilizan como se ha explicado para las de Callet.

¿Cuál es, en las Tablas abreviadas contenidas en este tomo desde la pág. 425 á la 439, la mantisa de 5?

La misma que la de 500 = 69897.

(1) Las demás páginas de las voluminosas Tablas de Callet están destinadas á cálculos trigonométricos, astronómicos, etc., que no entran en e programa de esta obra.

Y ¿la de 49?

La misma de 490 = 69020.

Y ¿la de 499?

La que está junto al núm. 499 en la columna encabezada 0 = 69810

Y ¿la de 496?

Análogamente = 69548

¿Cuál es la mantisa de 4996?

Búsquese en la columna encabezada 6 enfrente del número 499 = 69601, forzada la unidad.

¿Cuál es la mantisa de 49726?

Para hallarla hay que acudir á las partes proporcionales.

Mantisa de 4972:

Búsquese en la columna encabezada 2 enfrente del número...............................	497 = 69653
La parte proporcional correspondiente al 6 es 5	5
	69658

Etc., etc., etc.

¿Cuál es la mantisa de 4975684?

Se busca la mantisa de 49756 en la columna encabezada 5.

Mantisa de 4975 = 69679.

Busquemos ahora las partes proporcionales al 6, al 8 y al 4; y tendremos:

$$
\begin{array}{rr}
\text{Mantisa de } 4975{,}684 = & 69679 \\
+ & 5 \\
+ & 7 \\
+ & 4 \\
\hline
 & 6968474
\end{array}
$$

Y, forzando la quinta cifra decimal = 69685 Etc.

LECCIÓN V

Características negativas.

Si el número cuyo logaritmo se busca tiene cifras decimales, se hace abstracción de la coma y se procede á computar la mantisa como si el número fuese entero. Después de hecho el cómputo, se enmienda el error que así se cometió, poniendo la característica correspondiente (1).

¿Cuál es el logaritmo de 487,53598?

		48753,598
Para	48753 =	6880013
Para	5 =	45
Para	9 =	8,1
Para	8 =	0,72
		6880067

Log. de 487,53598 = 2,6880067

¿Cuál es el logaritmo de 53,8755697?

		53875,5697
Para	53875 =	7313873
Para	5 =	41
Para	6 =	4,9
Para	9 =	0,73
Para	7 =	0,057
		7313919

Log. de 53,8755697 = 1,7313919

(1) Para seguridad del alumno cada ejemplo de los siguientes se computará por medio de las Tablas de Callet. El discípulo debe procurárselas. Pero, si no las tiene á su disposición, sírvase de las tablas abreviadas con 5 decimales, que acompañan á este tomo. Forzando la quinta cifra decimal (caso necesario), los resultados habrán de coincidir.

¿Cuál es el logaritmo de 0,004352988?

$$\begin{array}{lrr} & & 43529{,}88 \\ \text{Para } 43529 & = & 6387787 \\ \text{Para } \quad 8 & = & 80 \\ \text{Para } \quad 8 & = & 8 \\ \hline & & 6387875 \end{array}$$

$$\text{Log. de } 0{,}004352988 = \overline{3}{,}6387875$$

La característica aquí resulta negativa, y el signo — se coloca sobre ella.

Para entender esto, ha de considerarse que todo decimal es un quebrado, cuyas cifras son el numerador, y cuyo denominador es la unidad seguida de tantos ceros como hay cifras decimales. Por consiguiente,

$$0{,}004352988 = \frac{4352988}{1000000000}$$

Por otra parte: según las reglas generales del cálculo logarítmico, la división se convierte en resta de los respectivos logaritmos, y, por tanto,

$$\begin{aligned}\text{Log. de } \frac{4352988}{1000000000} &= \text{log. de } 4352988 - \text{log. de } 1000000000 \\ &= 6{,}6387875 - 9 \\ &= -3 + 6387875 \\ &= \overline{3}{,}6387875\end{aligned}$$

Las características negativas aparecen, pues, cuando el numerador de un quebrado es menor que el denominador, ó bien cuando el dividendo es menor que el divisor.

Tratándose de decimales, la característica negativa es igual al número de ceros $+ 1$ que hay antes de la primera cifra significativa; ó bien, al número de orden expresivo del lugar que tras la coma ocupa la primera cifra significativa.

$$\begin{aligned}\text{Log. de } 0{,}625 = \text{log. de } \frac{625}{1000} = \text{log. de } 625 - \text{log. de } 1000 &= (2 + 0{,}79588) - 3 \\ &= -1 + 0{,}79588 \\ &= \overline{1}{,}79588 \quad (1)\end{aligned}$$

(1) $+ 0{,}79588 - 1 = -100000 + 0{,}79588 = -0{,}20412$

Pero, bien se ve la perturbación que en los cómputos logarítmicos introducirían estas mantisas negativas. Así es que no se usan, y todas las mantisas se consideran como positivas.

Véase la siguiente serie de ejemplos:

$$
\begin{aligned}
\text{Log. de } 20000 &= 4{,}30103 \\
\text{Log. de } 2000 &= 3{,}30103 \\
\text{Log. de } 200 &= 2{,}30103 \\
\text{Log. de } 20 &= 1{,}30103 \\
\text{Log. de } 2 &= 0{,}30103 \\
\text{Log. de } 0{,}2 &= \overline{1}{,}30103 \\
\text{Log. de } 0{,}02 &= \overline{2}{,}30103 \\
\text{Log. de } 0{,}002 &= \overline{3}{,}30103 \\
\text{Log. de } 0{,}0002 &= \overline{4}{,}30103 \text{ Etc.}
\end{aligned}
$$

¿Cuál es el logaritmo de 0,00640327?

$$
\begin{array}{lr}
 & 64032{,}7 \\
\text{Para } 64032 = & 8063971 \\
\text{Para } \quad 7 = & 48 \\
\hline
 & 8064019
\end{array}
$$

$$\text{Log. de } 0{,}00640327 = \overline{3}{,}8064019$$

¿Cuál es el logaritmo de 0,003926063?

$$
\begin{array}{lr}
 & 39260{,}63 \\
\text{Para } 39260 = & 5939503 \\
 & 67 \\
 & 3{,}3 \\
\hline
 & 5939573
\end{array}
$$

$$\text{Log. de } 0{,}003926063 = \overline{3}{,}5939573$$

En la práctica, para el cálculo logarítmico, los quebrados comunes se reducen á decimales; porque así no hay que buscar en las tablas más que una sola mantisa. Pero no existe inconveniente en hacer el cálculo directo de las fracciones ordinarias sin reducirlas previamente á decimales (lo que, á veces, es más rápido).

¿Cuál es el logaritmo de $\frac{27}{38}$?

$$\text{Log. de } \frac{27}{38} = \text{log. de } 27 - \text{log. de } 38$$

$$
= \left\{ \begin{array}{r} 1{,}4313638 \\ -\ 1{,}5797836 \\ \hline \overline{1}{,}8515802 \end{array} \right.
$$

La resta, como se ve, se verifica en este ejemplo, según las reglas ordinarias. Sólo ha de notarse que, cuando se llega á las características, hay que decir de 2 á 1 va menos uno (— 1).

¿Cuál es el logaritmo de $\frac{31}{424}$?

$$\begin{array}{rl} \text{Log. de } 31 = & 1,4\,9\,1\,3\,6\,1\,7 \\ -\text{Log. de } 424 = & -2,6\,2\,7\,3\,6\,5\,9 \\ \hline & \bar{2},8\,6\,3\,9\,9\,5\,8 \end{array}$$

9 y 8 que escribo, 17; y hay 1.
1 y 5 son 6, y 5 que escribo, 11; y hay 1.
1 y 6 son 7, y 9 que escribo, 16; y hay 1.
1 y 3 son 4, y 9 que escribo, 13; y hay 1.
1 y 7 son 8, y 3 que escribo, 11; y hay 1.
1 y 2 son 3, y 6 que escribo, 9; y no llevo nada.
6 y 8 que escribo, 14; y llevo 1.
1 y 2 son 3: de 3 á 1 van — 2

¿Cuál es el logaritmo de $\frac{1}{240}$?

$$\begin{array}{rl} \text{Log. de } 1 = & 0,0000000 \\ -\ \text{Log. de } 240 = & 2,3802112 \\ \hline & \bar{3},6197888 \end{array}$$

Con lo expuesto en esta Lección y en las anteriores, tiene el discípulo lo necesario para resolver los problemas en que se le pida el logaritmo de un número dado.

Por vía de ejercicio, calcule el discípulo los logaritmos de los números siguientes:

De 0,845	
De 26,0642	
$\frac{23}{24}$	$\bar{1}$,9815166
$\frac{189}{217}$	
$75\frac{7}{8}$	1,8800987
$\frac{2}{3}$	$\bar{1}$,8239087
$\frac{12}{985}$	$\bar{2}$,0857450
448000	
0,0000448	$\bar{5}$,6512780
116127	
0,331808	$\bar{1}$,5208869
155,0875	2,1905768
1234567	
0,02295037	
3,1415926	0,4971499
0,0000088	
2,0000088	0,3010319

LECCIÓN VI

Dado un logaritmo hallar su número.

Hasta ahora los problemas sometidos á nuestras soluciones tenían por objeto hallar los logaritmos de números dados. Ahora nos toca resolver los problemas inversos: dados logaritmos hallar sus números.

Pueden suceder dos cosas:

Primera. Que la mantisa que se nos dé esté en las tablas;

Segunda. Que no esté.

Si la mantisa que se nos da está en las tablas, nada más fácil que hallar el número correspondiente al logaritmo.

¿Cuál es el número correspondiente á 3,6960067?

La mantisa 6960067 está en las tablas, y á su izquierda el número 4966, que es el que se busca.

¿Cuáles son los números que tienen por logaritmos

$$2{,}6960067; \quad 1{,}6960067; \quad 0{,}6960067; \quad \bar{1}{,}6960067?$$

Vistas las características, claro es que estos logaritmos son los de los números

$$496{,}6; \quad 49{,}66; \quad 4{,}966; \quad 0{,}4966$$

Dado un logaritmo se buscará su número en las Tablas de Callet, como sigue:

Sea el logaritmo 4,6972206

Tomo las tres primeras cifras de la mantisa, 697, y las busco en la columna intitulada 0;

Busco también en la misma columna 0 el renglón donde estén las cuatro cifras restantes más próximas por defecto á las de la mantisa dada, el cual renglón es el que empieza por 1421;

Y, como las cuatro cifras últimas de la mantisa dada no están en la columna 0, sigo el renglón del 1421 donde se hallan las más próximas, hasta dar con las mismas cuatro últimas: en el caso actual las cuatro últimas cifras que se buscan están en la columna encabezada 9 que corresponden al número 49799.

Y declaro que éste es el número pedido, porque la característica dada es 4.

$$\therefore \ \text{Log. } 4{,}6972206 = 49799$$

¿Cuáles son los números de los logaritmos

$$3{,}6972206; \quad 2{,}6972206; \quad 1{,}6972206; \quad \overline{5}{,}6972206?$$

Después de proceder como antes con las mantisas, resultarán, teniendo en cuenta las características, los números siguientes:

$$4979{,}9; \quad 497{,}99; \quad 49{,}799; \quad 0{,}000049799$$

¿A qué número corresponde el logaritmo 6,7982154?

Busco las tres primeras cifras 798 de la mantisa dada en las columnas encabezadas 0;

Doy con ellas en la página 93, y busco en la misma columna 0 el renglón cuyas cuatro últimas cifras se acerquen más por defecto á las cuatro últimas cifras de la mantisa dada, el cual renglón es el del 1671;

No siendo estas las cuatro últimas cifras de la mantisa dada, sigo el renglón del 1671, y las encuentro en la columna encabezada 7;

Y, si la característica del logaritmo dado fuese 4, deduciría que el número pedido era 62837; pero, como la característica dada es 6, digo que el número pedido es 6283700.

¿Cuál es el número cuyo logaritmo es 2,9142532?

Busco en la columna 0 las tres primeras cifras 914 de la mantisa; busco luego las cuatro últimas, y las hallo en la columna encabezada 2.

Y digo, teniendo en cuenta la característica, que el logaritmo dado corresponde al número 820,83.

¿Cuál es el número correspondiente al log. $\bar{2}$,9264865?

0,084428

¿Qué números corresponden á los logaritmos

4,9969930; 1,8135143; 0,3034121; $\bar{2}$,2999429?

Las mantisas están todas en las tablas, y corresponden á los números siguientes, conforme piden las características;

99310: 65,09; 2,011; 0,01965.

Sólo ofrece alguna dificultad el caso de no hallarse exactamente en las Tablas las cifras todas de las mantisas dadas. Pero tal dificultad se vence pronto por medio de las partes proporcionales registradas en la correspondiente columna encabezada *dif.*

Yo sé que toda mantisa no existente en las Tablas procede de un número n seguido de cifras decimales; tal como representa el símbolo n,123..., en el cual las cifras 1, 2, 3,... han de considerarse como signo de cualquier quebrado decimal.

Y sé también que si la mantisa dada no se encuentra en las Tablas, es porque á la mantisa más próxima inferior n, que está en ellas, se agregó el producto de los decimales 0,123... por la diferencia tabular correspondiente á n.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Mantisa no existen-}\\ \text{te en las Tablas...}\end{array}\right\} = \text{mant. de } n + (0{,}123... \times \text{dif. tabular})$$

$$= \text{mant. de } n + \left\{0{,}123... \times [(\text{mant. de} n+1) - (\text{mant. de } n)]\right\}$$

Por consiguiente (dejando aparte, por lo pronto, todo lo relativo á la correspondiente característica), comprendo que, cuando se me dé una mantisa no existente en las Tablas, es para pedirme un número seguido de cifras decimales n,123...

Y, por tanto, para hallar ese número, debo seguir un procedimiento inverso del seguido para hallar la mantisa del número n,123...

Antes se me daba el número decimal n,123...

Y yo buscaba primero la mantisa de n, y, encontrada, formaba la siguiente suma:

Para n =	la mant. según las Tablas
Para 1 =	su parte proporcional
Para 2 =	su parte proporcional
Para 3 =	su parte proporcional
	mant. de n + (0,123... × dif. tab.)

Pero ahora se me da una expresión de la forma

característica + (mantisa de n + (0,123... × dif. tab.)

Y se me pide el número correspondiente.

Debo, pues, prescindir de la característica, y buscar en las Tablas la mantisa n, que es la más próxima inferior á la forma

Mant. de n + (0,123... × dit. tab.)

En seguida, restaré una de otra

	Mant. de n + (0,123... × dif. tab.)
	— Mant. de n
Y me quedará como residuo el producto	0,123... × dif. tab.

Divido este producto por la diferencia tabular correspondiente á n (que está en la Tabla), y obtendré como cuociente la parte decimal 0,123... que es lo que hay que agregar á n para tener el símbolo pedido n,123...

¿A qué número corresponde el logaritmo 6,6968529, cuya mantisa no está en las tablas?

Procedo como sigue:

Prescindo por el pronto de la característica;

Busco por las columnas encabezadas 0 de las Tablas, las tres primeras cifras 696 de la mantisa, hasta dar con ellas en la página 71;

Busco en seguida en la misma página las cuatro últimas cifras que más se acerquen por defecto á las cuatro últimas de la mantisa dada; y hallo que las cifras más próximas por defecto son 8455, correspondientes al número 49756 (hecha, como queda indicado, abstracción de la característica).

Resto estas mantisas,

Mant. dada del número que se busca,	6968529
— Mant. del núm. 49756, que es la más próxima inferior á la mant. dada	6968455
Diferencia de mantisas........	74
Parto por la diferencia tabular indicada en la misma pág. 71	88

Reduzco este quebrado á decimal para encontrar los decimales que hay que agregar al número 49756

740	88
360	
..8	0,84

Resulta, como cuociente, 0,84

Pongo este 84 como cifras decimales del 49756, y obtengo el número 49756,84, que es el número que dió la mantisa 6968529.

Atiendo ahora á la característica de que antes prescindí, y veo que el número pedido es el 4975684, cuyo logaritmo es el dado 6,6968529.

Ahora bien. Pudo prescindirse de la reducción á decimales del quebrado $\frac{74}{88}$, acudiendo á las partes proporcionales.

En tal caso, después de hallada, como antes, la mantisa más próxima á la dada, la operación debió haberse dispuesto como sigue:

Mantisa dada	= 6968529	corresp.te al núm. que se busca	
Mant. más próx.	= 6968455	corresp.te al núm. 49756	
Dif. de mantisas =	74		
P.te proporc. más próx.	70	corresp.te al dígito	8
Resto y hallo el residuo	4		
P.te proporc. más próx. (1)	3,5	corresp.te al dígito	4
	0		
Número que produjo la mantisa dada 6968529;			49756,84
Número pedido, atendiendo á la caract. dada 6;			4975684

Hemos deducido este procedimiento, considerándolo como

(1) Claro es que deben hacerse mentalmente la mayor parte de estas operaciones.

inverso del presentado en la correspondiente Lección anterior; pero nada más fácil que llegar directamente á él, como consecuencia del principio allí admitido de que, cuando los números son muy grandes, y poco considerables sus diferencias, estas diferencias de los números resultan proporcionales (muy próximamente) á las diferencias de las mantisas respectivas.

Se nos ha dado una mantisa correspondiente á un número desconocido x, la cual es $= 6968529$;

Esta mantisa, naturalmente, es superior á la mantisa más próxima inferior de las Tablas, la cual es $= 6968455$.

Esta mantisa tabular inferior á la dada corresponde al número 49756.

Ahora bien: en virtud del anterior principio, que establece la proporcionalidad entre números y mantisas, tendremos:

	La dif. tab. entre las dos mantisas consecutivas	6968542 y 6968455
:	á la dif. entre sus corresp.tes números tabulados	49757 y 49756
::	la dif. entre las mantisas, dada y tabulada	6968529 y 6968455
:	á la dif. entre el núm. que se busca x y el próx. inferior hallado	49756

O bien

$$88 : 1 :: 74 : x$$

$$\therefore \quad x = \frac{74}{88}$$

$$= \frac{\text{dif. entre la mant. dada y la más próx. inferior de las Tablas}}{\text{dif. tabular}}$$

Así, pues, dada una mantisa no existente en las Tablas, se obtiene el correspondiente número seguido de cifras decimales (tal como el símbolo n,123...) agregando al número n el cuociente que resulta de dividir la diferencia de las mantisas, por la correspondiente diferencia tabular.

$$\text{Número } n{,}123... = n + \left(\frac{0{,}123...}{\text{dif. tab.}}\right)$$

$$= n + \frac{0{,}123...}{(\text{mant. } n + 1) - (\text{mant. } n)}$$

¿Cuál es el número correspondiente al log. 3,4971499, cuya mantisa no está en las tablas?

Mant. dada	=	4971499		
Mant. más próx.	=	4971371	corresp.te al número 31415	
Dif. de mantisas		128		
P.te proporc. más próx.		125	corresp.te al dígito	,9
Resto y obtengo el residuo		3		
P.te proporc. más próx.		2,8	corresp.te al dígito	,028
		0		

Número que produjo la mantisa dada 4971499 = 31415,92

Número pedido, atendiendo á la caract. dada 3 = 3141,592

¿Cuál es el número correspondiente al log. $\bar{1}$,4375689?

Mant. dada	=	4375689	corresp.te al número que se busca	
Mant. más próx.	=	4375603	corresp.te al número	27388
Dif. de mantisas	=	86		
P.te proporc. más próx.	=	80	corresp.te al dígito	,5
Resto		4		
P.te proporc. más próx.	=	3,2	corresp.te al 3 (forzando la cifra)	,03
		0		

Número que produjo la mantisa dada 4375689 = 27388,53

Número pedido, atendiendo á la caract. $\bar{1}$ = 0,2738853

¿Cuál es el número cuyo logaritmo = 6,6950673?
¿Cuál es el número cuyo logaritmo = 6,6960526?
¿Cuál es el número cuyo logaritmo = 6,6971856?

LECCIÓN VII

Sumar, restar, con características negativas.

Las operaciones que se hacen con los logaritmos son las de

Sumar,
Restar,
Multiplicar y
Partir.

Y, si no fuese por las características negativas, nada más de lo ya expuesto habría que decir de tales operaciones.

Pero las características negativas exigen discusión especial. *(Véanse más adelante los medios de evitarlas.)*

SUMAR

Se suman los logaritmos cuando hay que multiplicar un guarismo (ó más) por otro (ó más).

La suma se efectúa empezando por las mantisas, las cuales dan siempre sumas positivas. Si hay características positivas y negativas, se suman, ante todo, las positivas y se les agrega la última reserva procedente de la suma de las mantisas: después se suman las características negativas, se rebaja luego la suma de características menor de la mayor, y se pone al residuo el signo de la mayor.

¿Cuál es la suma de los logaritmos siguientes

$$4{,}3975678; \quad \overline{2}{,}5436092; \quad \overline{6}{,}7325402; \quad 0{,}5482007?$$

La operación se dispone como sigue:

$$\begin{array}{r} 4,3975678 \\ \bar{2}\quad ,5436092 \\ \bar{6}\quad ,7325402 \\ 0,5432007 \\ \hline -8+6,2169179 \\ \hline \bar{2},2169179 \end{array}$$

Las características negativas se escriben un poco más hacia la izquierda que las positivas.

Números.		Sus logaritmos.
0,08959709	log.	$\bar{2}$,9522939
×0,2169403		$\bar{1}$,3363402
0,1943722...		$\bar{2}$,2886341
0,0002		$\bar{4}$,3010300
×0,0003		$\bar{4}$,4771212
0,00000006		$\bar{8}$,7781512

Multiplicar 0,08959709 por 0,2169403

$$\begin{array}{rr} \text{Log. de } 0,8959709 = & \bar{2},9522939 \\ +\ \text{log. de } 0,2169403 = & +\bar{1},3363402 \\ \hline \textit{Suma} = & \bar{2},2886341 \end{array}$$

$$\text{Log. de } \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) = (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 3) + (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 2)$$

$$\begin{array}{rrcr} = & 0,0000000 & & 0,0000000 \\ - & 0,4771212 & - & 0,3010300 \\ \hline & \bar{1},5228788 & + & \bar{1},6989700 \\ + & \bar{1},6989700 & & \\ \hline & \bar{1},2218488 & = & 0,16666...\ (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \text{Sumar los log. de } & \bar{3},74653 \\ + & 2,38472 \\ \hline & 0,13125 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \text{Sumar los log. de } & \bar{2},64832 \\ + & \bar{1},79248 \\ \hline & \bar{2},44080 \end{array}$$

(1) Esta clase de ejercicios se proponen únicamente para que el discípulo adquiera práctica en el cómputo logarítmico; pues es claro que el cálculo común, no sólo es mucho más rápido que el hecho por medio de las Tablas, sino también, á veces, más exacto, toda vez que el de los logaritmos es siempre aproximado.

RESTAR

Para dividir un guarismo por otro se restan sus logaritmos (del modo que sabemos). Y, cuando el sustraendo es > que el minuendo, aparecen las características negativas. Todos los logaritmos de los quebrados propios resultan, pues, con características negativas, por ser los denominadores > que los numeradores, y corresponder siempre á mayor número mayor logaritmo.

$$\text{Log. de } \frac{1}{2} = \text{log. de } 1 - \text{log. de } 2 \qquad \begin{array}{rr} = & 0{,}0000000 \\ - & 0{,}3010300 \\ \hline \text{log. de} & \bar{1}{,}6989700 = 0{,}5 \end{array}$$

$$\text{Log. de } \frac{1}{3} = \text{log. de } 1 - \text{log. de } 3 \qquad \begin{array}{rr} = & 0{,}0000000 \\ - & 0{,}4771212 \\ \hline \text{log. de} & \bar{1}{,}5228788 = 0{,}3333... \end{array}$$

$$\text{Log. de } \frac{1}{7} = \text{log. de } 1 - \text{log. de } 7 = \text{al número} \quad 0{,}142857$$

$$\begin{array}{rr} = & 0{,}0000000 \\ - & 0{,}8450980 \\ \hline & \bar{1}{,}1549020 \end{array}$$

	1549020	
Mantisa de las tablas	1548802	corresp.te al núm. 14285
Diferencia de mantisas	218	
Parte proporcional	214	corresp.te á 7
Resto	4	
Parte proporcional	3,1	corresp.te á 1.
	0	

Las fracciones decimales, como quebrados que son, dan también características negativas.

$$\text{Log. } 0{,}00843217 = \text{log. } 843217 - \text{log. } 100000000 = \text{log. } 843217 - 8$$

$$\begin{array}{rr} = & 5{,}9259394 \\ - & 8 \\ \hline & \bar{3}{,}9259394 \end{array} \qquad \begin{array}{lrl} \text{Mant. de } 84321 = & 9259357 & \\ \text{Parte prop.} = & 36 & \text{corr. á } 7 \\ \hline & 9259394, & \text{por exc.} \end{array}$$

$$\text{Log. } 0{,}00075686783 = \text{mant. tabular} \quad \begin{array}{r} 8790156 \\ 41 \\ 4{,}6 \\ {,}17 \\ \hline \bar{4}{,}8790202 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log.}\ \dfrac{789}{1000000} & = \text{log.}\ 789 - \text{log.}\ 1000000 \\ & = \text{log.}\ 789 - 6 \\ & = \quad 2{,}8970770 \\ & \quad\; -\ 6 \\ \hline \therefore\ \text{log.}\ 0{,}000789 = & \quad \bar{4}{,}8970770 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \text{Log.}\ 0{,}0078347 \ = & \bar{3}{,}8940224 \\ \hline \text{log.}\ 0{,}0076877753 = & 8854008 \\ & 40 \\ & 29 \\ & 17 \\ \hline = & \bar{3}{,}885451 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \text{Log.}\ \dfrac{897756432}{100000000000} = \text{log.}\ 897756432 - 11 & \left\{ \begin{array}{r} 9531554 \\ 29 \\ 20 \\ 15 \\ 10 \end{array} \right. \\ \hline & 8{,}9531585 \\ & -\ 11 \\ \hline \therefore\ \text{log.}\ 0{,}00897756432 = & \bar{3}{,}9531585 \end{array}$$

Si se nos dan á dividir dos quebrados propios, claro es que serán negativas las características de sus logaritmos. Y, siendo así, habrá que convertir en positiva la característica del logaritmo que vaya al sustraendo (1).

Todos los casos que pueden ocurrir, se reducen á 4; porque las fórmulas de los logaritmos son dos:

Log. de característica positiva = caract. positiva + mant. positiva
Log. de característica negativa = caract. negativa + mant. positiva

$$\begin{array}{lllll} 1.^{\circ} & \text{Minuendo} & = + \quad \text{caract.} + \text{mant.} & & \\ & \text{Sustraendo} & = -\,(+\,\text{caract.} + \text{mant.}\ ) & = - \ \text{caract.} & \dot{-}\ \text{mant.} \\ & \text{Residuo} & = +\,(\ \ \text{caract.} + \text{mant.}\ ) & - \quad \text{caract.} & -\ \text{mant.} \\ & & = \quad (+\,\text{caract.} - \text{caract.}) & + \quad \text{mant.} & -\ \text{mant.} \end{array}$$

Regla: De la mantisa minuendo se resta la mantisa sus-

(1) Esta práctica es consecuencia de la regla algebráica de los signos, la cual no cabe explicar aquí. Pero la práctica es muy fácil de entender y ejecutar. Pero, si el discípulo encuentra gran dificultad en la inteligencia de esta Lección, pase á las siguientes en que se enseña el modo de evitar las características negativas.

traendo, las dos características se restan, y al resto se pone el signo de la mayor.

$$\begin{array}{llll}
2.^{\circ} & \text{Minuendo} & = + & \text{caract.} + \text{mant.} \\
 & \text{Sustraendo} & = -(- & \text{caract.} + \text{mant.}\ ) = + \text{caract.} - \text{mant.} \\
 & \text{Residuo} & = (+ & \text{caract.} + \text{caract.}) + \ \text{mant.} - \text{mant.}
\end{array}$$

Regla: De la mantisa minuendo se resta la mantisa sustraendo, y las dos características se suman, y á la suma se pone el signo +

$$\begin{array}{llll}
3.^{\circ} & \text{Minuendo} & = - & \text{caract.} + \text{mant.} \\
 & \text{Sustraendo} & = -(+ & \text{caract.} + \text{mant.}\ ) = - \text{caract.} - \text{mant.} \\
 & \text{Residuo} & = (- & \text{caract.} - \text{caract.}) + \ \text{mant.} - \text{mant.}
\end{array}$$

Regla: De la mantisa minuendo se resta la mantisa sustraendo, y las dos mantisas se suman, y á la suma se pone el signo —

$$\begin{array}{llll}
4.^{\circ} & \text{Minuendo} & = - & \text{caract.} + \text{mant.} \\
 & \text{Sustraendo} & = -(- & \text{caract.} + \text{mant.}\ ) = + \text{caract.} - \text{mant.} \\
 & \text{Residuo} & = (- & \text{caract.} + \text{caract.}) + \ \text{mant.} - \text{mant.}
\end{array}$$

Regla: De la mantisa minuendo se resta la mantisa sustraendo, y las dos características se restan, y al resto se pone el signo de la mayor.

Reglas generales: De la mantisa minuendo siempre se resta la mantisa sustraendo; las características se suman cuando tienen distintos signos, y al resultado se le pone el signo del minuendo.

Si las características tienen el mismo signo, se restan, y al resultado se pone el signo de la mayor (1).

1.er caso: (+ caract. + mant.) — (+ caract. + mant.)

Ambas características tienen el mismo signo; ∴ se restan. Lo cual da lugar en el residuo á dos variantes

Caract. positiva.
Caract. negativa.

$$\begin{array}{lrcl}
 & \frac{5}{2} \div \frac{4}{3} & = & (\text{log. de } 5 - \text{log. de } 2) - (\text{log. de } 4 - \text{log. de } 3) \\
 & = 0{,}6989700 & & 0{,}6020600 \\
 & - 0{,}3010300 & & 0{,}4771212 \\
\hline
 & = 0{,}3979400 & - & 0{,}1249388 \\
 & - {,}01249388 & & \\
\hline
\text{Resultado positivo} & 0{,}2730012 & = & 1{,}875
\end{array}$$

(1) Todas estas reglas resultan simplificadas por el método de las operaciones por masas ó columnas explicado más adelante.

$$\frac{4}{3} \div \frac{5}{2} = (\text{log. de } 4 - \text{log. de } 3) - (\text{log. de } 5 - \text{log. de } 2)$$

$$\begin{array}{rcl}
=0{,}6020600 & & 0{,}6989700\\
-\underline{0{,}4771212} & - & \underline{0{,}3010300}\\
0{,}1249388 & - & 0{,}3979400\\
-\underline{0{,}3979400} & & \\
\bar{1}{,}7269988 & - & 0{,}53333\ldots
\end{array}$$

2.° caso: (+ caract. + mant.) — (— caract. + mant.)

Aquí las características tienen distintos signos; ∴ se suman con el signo de la del minuendo.

$$\frac{4}{3} \div \frac{2}{5} = (\text{log. de } 4 - \text{log. de } 3) - (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 5)$$

$$\begin{array}{rcl}
=0{,}6020600 & & 0{,}3010300\\
-\underline{0{,}4771212} & - & \underline{0{,}6989700}\\
0{,}1249388 & - & \bar{1}{,}6020600\\
\underline{1{,}6020600} & & \\
0{,}5228788 & = & 3{,}3333\ldots
\end{array}$$

3.er caso: (— caract. + mant.) — (+ caract. + mant.)

Las características tienen distintos signos; ∴ se suman con el signo de la del minuendo.

$$\frac{2}{5} \div \frac{400}{3} = (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 5) - (\text{log. de } 400 - \text{log. de } 3)$$

$$\begin{array}{rcl}
=0{,}3010300 & & 2{,}6020600\\
-\underline{0{,}6989700} & & \underline{0{,}4771212}\\
\bar{1}{,}6020600 & - & 2{,}1249388\\
\underline{2{,}1249388} & & \\
\bar{3}{,}4771212 & = & 0{,}003
\end{array}$$

4.° caso: (— car. + mant.) — (— car. + mant.)

Ambas características tienen el mismo signo; ∴ Se restan. Lo cual en el residuo da lugar á dos variantes:

característica positiva
característica negativa

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = (\text{log. de } 3 - \text{log. de } 4) - (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 5)$$

$$\begin{array}{rrcl}
 & =0{,}4771212 & & 0{,}3010300\\
 & -\underline{0{,}6020600} & & -\underline{0{,}6989700}\\
 & \bar{1}{,}8750612 & - & \bar{1}{,}6020600\\
 & -\underline{1{,}6020600} & & \\
\text{Resultado positivo;} & 0{,}2730012 & = & 1{,}875
\end{array}$$

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 5) - (\text{log. de } 3 - \text{log. de } 4)$$

$$\begin{array}{rrcr} & = 0{,}3010300 & & 0{,}4771212 \\ & -\,0{,}6989700 & & -\,0{,}6020600 \\ \hline & \bar{1}{,}6020600 & - & \bar{1}{,}8750612 \\ & -\,1{,}8750612 & & \\ \hline \text{Resultado negativo;} & \bar{1}{,}7269988 & = & 0{,}533333\ldots \end{array}$$

Para los que conocen las reglas de los signos en Álgebra, nada de lo anterior puede ofrecer dificultad; pero indudablemente no hallan fácil los que las ignoran el cálculo de las características negativas. Por lo cual, conviene que, practicando, adquieran expedición en su manejo (1).

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 2) - (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 3)$$

$$\begin{array}{rcr} = 0{,}0000000 & & 0{,}0000000 \\ -\,0{,}3010300 & & 0{,}4771212 \\ \hline \bar{1}{,}6989700 & - & \bar{1}{,}5228788 \\ -\,1{,}5228788 & & \\ \hline 0{,}1760912 & = & 1{,}5 \end{array}$$

Véase este ejemplo más adelante.

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 3) - (\text{log. de } 3 - \text{log. de } 4)$$

$$\begin{array}{rcr} = 0{,}3010300 & & 0{,}4771212 \\ -\,0{,}4771212 & & -\,0{,}6020600 \\ \hline \bar{1}{,}8239088 & & \bar{1}{,}8750612 \\ -\,1{,}8750612 & & \\ \hline 1{,}9488476 & = & 0{,}8888\ldots \end{array}$$

$$\frac{11}{13} \div \frac{2}{3} = (\text{log. de } 11 - \text{log. de } 13) - (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 3)$$

$$\begin{array}{rcr} = \quad 1{,}0413926 & & 0{,}3010300 \\ -\,1{,}1139433 & & -\,0{,}4771212 \\ \hline \bar{1}{,}9274497 & - & \bar{1}{,}8239088 \\ -\,1{,}8239088 & & \\ \hline 0{,}1035409 & = & 1{,}2692 \end{array}$$

(1) Aunque el método de las operaciones por masas ó columnas evita estas dificultades, hay que dominar el de las reglas de los signos algebraicos objeto de esta Lección, por lo mucho que á veces facilita los cálculos. Pero, si el discípulo, por no saber Algebra, encuentra muy difíciles estas reglas, pase adelante.

$$\frac{21}{6} \div \frac{100}{3} = (\text{log. de } 21 - \text{log. de } 6) - (\text{log. de } 100 - \text{log. de}$$

$$\begin{array}{rcr}
= 1{,}3222193 & & 2 \\
- 0{,}7781512 & & 0{,}4771212 \\
\hline
0{,}5440681 & - & 1{,}5228788 \\
- 1{,}5228788 & & \\
\hline
\bar{1}{,}0211893 & = & 0{,}105
\end{array}$$

$$\frac{3}{8} \div \frac{5}{2} = (\text{log. de } 3 - \text{log. de } 8) - (\text{log. de } 5 - \text{log. de } 2$$

$$\begin{array}{rcr}
= 0{,}4771212 & & 0{,}6989700 \\
- 0{,}9030900 & & - 0{,}3010300 \\
\hline
\bar{1}{,}5740312 & & 0{,}3979400 \\
- 0{,}3979400 & & \\
\hline
\bar{1}{,}1760912 & = & 0{,}15
\end{array}$$

$$\frac{7}{2} \div \frac{2}{540} = (\text{log. de } 7 - \text{log. de } 2) - (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 540$$

$$\begin{array}{rcr}
= 0{,}8450980 & & 0{,}3010300 \\
- 0{,}3010300 & & - 2{,}7323938 \\
\hline
0{,}5440680 & & \bar{3}{,}5686362 \\
- \bar{3}{,}5686362 & & \\
\hline
2{,}9754318 & = & 945
\end{array}$$

$$\frac{2}{9} \div \frac{2}{10000} = (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 9) - (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 10000)$$

$$\begin{array}{rcr}
= 0{,}3010300 & & 0{,}3010300 \\
- 0{,}9542425 & & - 4 \\
\hline
\bar{1}{,}3467875 & & \bar{4}{,}3010300 \\
- \bar{4}{,}3010300 & & \\
\hline
3{,}0457575 & = & 1111{,}1111
\end{array}$$

$$\frac{100}{2604} \div \frac{30}{162} = (\text{log. de } 100 - \text{log. de } 2604) - (\text{log. de } 30 - \text{log. de } 162$$

$$\begin{array}{rcr}
= \quad 2 & & 1{,}4771212 \\
- 3{,}4156410 & - & 2{,}2095150 \\
\hline
\bar{2}{,}5843590 & & \bar{1}{,}2676062 \\
- \bar{1}{,}2676062 & & \\
\hline
\bar{1}{,}3167528 & = & 0{,}20737
\end{array}$$

$$2 \div \frac{7}{1111} = \text{log. de } 2 - 0{,}0000000) - (\text{log. de } 7 - \text{log. de } 1111)$$

$$\begin{array}{rcr}
= \quad 0{,}3010300 & & 0{,}8450980 \\
- 3{,}7993840 & - & 3{,}0457140 \\
\hline
 & & \bar{3}{,}7993840 \\
2{,}5016460 & = & 317{,}43
\end{array}$$

$$\frac{9983}{100000} \div \frac{67}{100} = 009983 : 0{,}67$$

$$= (\text{log. de } 9983 - \text{log. de } 100000) - (\text{log. de } 67 - \text{log. de } 100)$$

$$= \begin{array}{r} 3{,}9992611 \\ -5 \\ \hline \bar{2}{,}9992611 \\ -\bar{1}{,}8260748 \\ \hline \bar{1}{,}1731863 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{r} 1{,}8260748 \\ 2 \\ \hline \bar{1}{,}8260748 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \bar{1}{,}1731863 = 0{,}149$$

$$0{,}002801 \div 0{,}079495 = (\text{log. de } 2801 - 6) - (\text{log. de } 79495 - 6)$$

$$= \begin{array}{r} 3{,}4473131 \\ -6 \\ \hline \bar{3}{,}4473131 \\ -\bar{2}{,}9003398 \\ \hline \bar{2}{,}5469733 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{r} 4{,}9003398 \\ 6 \\ \hline \bar{2}{,}9003398 \ \text{(1)} \\ \\ \\ \end{array} \qquad \bar{2}{,}5469733 = 0{,}03523492$$

Restar los log.

$$\begin{array}{r} \bar{2}{,}47826 \\ -\ \bar{1}{,}69732 \\ \hline \bar{2}{,}78094 \end{array}$$

Restar los log.

$$\begin{array}{r} \bar{3}{,}68925 \\ -\ 2{,}79782 \\ \hline \bar{6}{,}89143 \end{array}$$

Restar los log.

$$\begin{array}{r} \bar{2}{,}45822 \\ -\ \bar{3}{,}34662 \\ \hline 5{,}11160 \end{array}$$

(1) Véase este ejemplo más adelante.

LECCIÓN VIII

Restar (continuación).—**Fracciones inversas.**

Aunque no grandes, siempre ofrece dificultades la operación de restar logaritmos cuando resultan negativas las características de los sustraendos; lo mismo siendo positivas las características de los minuendos que siendo negativas.

El siguiente Cuadro presenta las variantes que pueden ocurrir cuando son negativas las características de los sustraendos.

C significa característica $> c$
M significa mantisa $> m$

Los signos + y — sobre C y c indican si las características son positivas ó negativas.

$\begin{array}{l} \overset{+}{C}, M \\ -\overline{c}, m \\ \hline =(C+c)+(M-m) \end{array}$	$\begin{array}{l} \overset{+}{C}, m \\ -\overline{c}, M \\ \hline =[(C+c)-1]+(m-M) \end{array}$	$\begin{array}{l} \overset{+}{c}, M \\ -\overline{C}, m \\ \hline =(c+C)+(M-m) \end{array}$	$\begin{array}{l} \overset{+}{c}, m \\ -\overline{C}, M \\ \hline =[(c+C)-1](+m-M) \end{array}$
$\begin{array}{l} \overline{C}, M \\ -\overline{c}, m \\ \hline =(-C+c)+(M-m) \end{array}$	$\begin{array}{l} \overline{C}, m \\ -\overline{c}, M \\ \hline [-(C+1)+c]+(m-M) \end{array}$	$\begin{array}{l} \overline{c}, M \\ -\overline{C}, m \\ \hline (-c+C)+(M-m) \end{array}$	$\begin{array}{l} \overline{c}, m \\ -\overline{C}, M \\ \hline [-(c+1)-C]+(m-M \end{array}$

Y hay tantas variantes, porque en los resultados influyen las magnitudes respectivas de las características, así como las de las mantisas.

$$\left.\begin{array}{r}3{,}16137\\ -\ \bar{1}{,}13033\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{positiva la caract. del min. y} > \text{caract. del sustraendo}\\ \text{mant. del minuendo} > \text{mant. del sustraendo}\end{array}$$
$$\begin{array}{r}\hline 4{,}03104\\ \hline\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}3{,}13033\\ -\ \bar{1}{,}16137\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{positiva la caract. del min. y} > \text{caract. del sustraendo}\\ \text{mant. del minuendo} < \text{mant. del sustraendo}\end{array}$$
$$\begin{array}{r}\hline 3{,}96896\\ \hline\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}3{,}16137\\ -\ \bar{4}{,}13033\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{positiva la caract. del min. y} < \text{caract. del sustraendo}\\ \text{mant. del minuendo} > \text{mant. del sustraendo}\end{array}$$
$$\begin{array}{r}\hline 7{,}03104\\ \hline\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}3{,}13033\\ -\ \bar{4}{,}16137\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{positiva la caract. del min. y} < \text{caract. del sustraendo}\\ \text{mant. del minuendo} < \text{mant. del sustraendo}\end{array}$$
$$\begin{array}{r}\hline 6{,}96896\\ \hline\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}\bar{3}{,}16137\\ -\ \bar{1}{,}13033\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{negativa la caract. del min. y} > \text{caract. del sustraendo}\\ \text{mant. del minuendo} > \text{mant. del sustraendo}\end{array}$$
$$\begin{array}{r}\hline \bar{2}{,}03104\\ \hline\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}\bar{3}{,}13033\\ -\ \bar{1}{,}16137\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{negativa la caract. del min. y} > \text{caract. del sustraendo}\\ \text{mant. del minuendo} < \text{mant. del sustraendo}\end{array}$$
$$\begin{array}{r}\hline \bar{3}{,}96896\\ \hline\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}\bar{3}{,}16137\\ -\ \bar{4}{,}13033\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{negativa la caract. del min. y} < \text{caract. del sustraendo}\\ \text{mant. del minuendo} < \text{mant. del sustraendo}\end{array}$$
$$\begin{array}{r}\hline 1{,}03104\\ \hline\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}\bar{3}{,}13033\\ -\ \bar{4}{,}16137\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{negativa la caract. del min. y} < \text{caract. del sustraendo}\\ \text{mant. del minuendo} < \text{mant. del sustraendo}\end{array}$$
$$\begin{array}{r}\hline 0{,}96896\\ \hline\end{array}$$

A fin de evitar tantos inconvenientes se apela al recurso de eludir en los sustraendos toda característica negativa.

Y, para evitar en los sustraendos las características negativas, se recurre á dos medios:

1.° A las fracciones inversas, y

2.° A los complementos aritméticos (1).

(1) Hay además el procedimiento por masas ó columnas, que es el más expeditivo de todos.

FRACCIONES INVERSAS

Cuando el numerador de un quebrado es denominador de otro, y el denominador del primero aparece como numerador del segundo, se dice que las fracciones son inversas.

Así

$\frac{3}{4}$ tiene por inversa á $\frac{4}{3}$

$\frac{7}{2}$ » á $\frac{2}{7}$

$\frac{1}{2}$ » á $\frac{2}{1} = 2$

$0{,}5$ » á $\frac{10}{5} = 2$

$0{,}00079$ » á $\frac{100000}{79}$ etc.

Ahora bien: es evidente que el resultado de la operación de partir un quebrado por otro es igual al de multiplicar el primero por el inverso del segundo.

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6}$$

$$8 \div 0{,}25 = \frac{8}{1} \times \frac{100}{25} = \frac{800}{25} = 32$$

$$17 \div 0{,}5 = 17 \times \frac{10}{5} = 17 \times 2 = 34 \text{ etc.}$$

Por consiguiente, cuando el divisor de una operación de partir sea un quebrado propio, se evitarán en el sustraendo del correspondiente cálculo logarítmico las características negativas considerando multiplicado el dividendo por la inversa del divisor.

$$\frac{4}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{2} = (\text{log. de } 4 - \text{log. de } 3) + (\text{log. de } 5 - \text{log de } 2)$$

$$\begin{array}{rcr} = 0{,}6020600 & & 0{,}6989700 \\ -\,0{,}4771212 & & -\,0{,}3010300 \\ \hline 0{,}1249388 & + & 0{,}3979400 \\ +\,0{,}3979400 & & \\ \hline 0{,}5228788 & = & 3{,}3333\ldots \end{array}$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = (\text{log. de } 3 - \text{log. de } 4) + (\text{log. de } 5 - \text{log. de } 2)$$

$$\begin{array}{rcr}
= 0{,}4771212 & & 0{,}6989700 \\
- 0{,}6020600 & & - 0{,}3010300 \\
\hline
\bar{1}{,}8750612 & + & 0{,}3979400 \\
+ 0{,}3979400 & & \\
\hline
\underline{\underline{0{,}2730012}} & = & 1{,}875
\end{array}$$

$$\frac{2}{\;} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \text{log. de } 2 - \text{log. de } 5) + (\text{log. de } 4 - \text{log. de } 3)$$

$$\begin{array}{rcr}
= 0{,}3010300 & & 0{,}6020600 \\
- 0{,}6989700 & & - 0{,}4771212 \\
\hline
\bar{1}{,}6020600 & + & 0{,}1249388 \\
+ 0{,}1249388 & & \\
\hline
\underline{\underline{\bar{1}{,}7269988}} & = & 0{,}53333\ldots
\end{array}$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 3 = (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 2) + \text{log. de } 3)$$

$$\begin{array}{rl}
= 0{,}0000000 & \\
- 0{,}3010300 & \\
\bar{1}{,}6989700 & \\
+ 0{,}4771212 & \\
\hline
\underline{\underline{0{,}1760912}} & = 1{,}5
\end{array}$$

$$\frac{2}{\;} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = (\text{log. de } 2 - \text{log. de } 3) + (\text{log. de } 4 - \text{log. de } 3)$$

$$\begin{array}{rcr}
= 0{,}3010300 & & 0{,}6020600 \\
- 0{,}4771212 & & - 0{,}4771212 \\
\hline
\bar{1}{,}8239088 & + & 0{,}1249388 \\
+ 0{,}1249388 & & \\
\hline
\underline{\underline{\bar{1}{,}9488476}} & = & 0{,}8888\ldots
\end{array}$$

$$\frac{11}{13} \div \frac{2}{3} = \frac{11}{13} \times \frac{3}{2} = (\text{log. de } 11 - \text{log. de } 13) + (\text{log. de } 3 - \text{log. de } 2)$$

$$\begin{array}{rcr}
= 1{,}0413926 & & 0{,}4771212 \\
- 1{,}1139433 & & - 0{,}3010300 \\
\hline
\bar{1}{,}9274497 & + & 0{,}1760912 \\
+ 0{,}1760912 & & \\
\hline
\underline{\underline{0{,}1035409}} & = & 1{,}2692
\end{array}$$

Repita el discípulo con los logaritmos de las fracciones inversas todos los cálculos de la anterior Lección, cuando sea quebrado propio el divisor. Cuando el divisor sea quebrado impropio pase á otro ejemplo; pues, si se repitiese el cálculo con la inversa de un quebrado impropio, resultaría negativa la característica del correspondiente sustraendo, que es lo que se trata de evitar, ya que las características negativas en el minuendo no ofrecen dificultad, como se acaba de ver.

LECCIÓN IX

Restar (continuación). — **Conversión de las restas de las mantisas en sumas.**

El sistema de las fracciones inversas permite convertir en sumas las restas de las mantisas. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = (\text{log. de } 3 - \text{log. de } 4) = \begin{array}{r} 0{,}4771212 \\ -\ 0{,}6020600 \\ \hline \bar{1}{,}8750612 \end{array} = 0{,}75$$

Ahora bien:

$$\frac{3}{4} \text{ es} = 3 \times \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \text{log. de } \frac{3}{4} = (\text{log. de } 3) + (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 4)$$

$$= (\text{log. de } 3) + \left\{ \begin{array}{r} 0{,}0000000 \\ -\ 0{,}6020600 \\ \hline \bar{1}{,}3979400 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{r} = 0{,}4771212 \\ +\ \bar{1}{,}3979400 \end{array} \right\} \text{Se suman las mantisas.}$$

$$\bar{1}{,}8750612$$

Parece que el método que utiliza las fracciones inversas sea más largo que el común de restar una mantisa de otra; y, efectivamente, así resulta, ejecutándolo como aparece en el ejemplo anterior.

Pero, en operaciones largas, puede ahorrarse tiempo, si se llega á adquirir práctica y seguridad en la clase de restas que ofrece el segundo ejemplo.

En vez de escribir el logaritmo de 4 tal como aparece en las Tablas 0,6020600, se escriba la diferencia de cada una de sus cifras con 9 haciendo mentalmente las restas: (claro es que la primera cifra de la derecha del logaritmo se ha de restar de 10, y no de 9).

$$0{,}6020600 \left\{ \begin{array}{llll} \text{De } 6 \text{ á} & 9, & 3 & \\ \text{De } 0 \text{ á} & 9 & 9 & \\ \text{De } 2 \text{ á} & 9 & 7 & \\ \text{De } 0 \text{ á} & 9 & 9 & \\ \text{De } 6 \text{ á} & 10 & 4 & \\ \text{De } 0 \text{ á} & 0 & 0 & \\ \text{De } 0 \text{ á} & 0 & 0 & \end{array} \right. \qquad \overline{\underline{3979400}}$$

Estas cifras 3979400 se van escribiendo bajo el logaritmo del 3 á medida de su obtención.

Después se hace la suma de las mantisas.

De manera que la operación resulta como sigue, si las restas se hacen de memoria:

$$\text{Log. de } \frac{3}{4} = \text{log. de } 3 + (\text{log. de } 0, - \text{log. de } 4)$$

$$\left.\begin{array}{rl} = \text{log. de } 3 & = \quad 0{,}4771212 \\ \text{log. de } 0 - \text{log. de } 4 & = + \bar{1}{,}3979400 \end{array}\right\} \text{Se suman las mantisas.}$$

$$\bar{1}{,}8750612$$

$$\frac{3}{6} = 3 \times \frac{1}{6}$$

$$\text{log. de } \frac{3}{6} = \text{log. de } 3 + (0{,}0000000 - [\text{log. de } 6 = (7781512)]$$

$$\begin{array}{l} = 0{,}47712125 \\ + \bar{1}{,}2 \\ \quad 2 \\ \quad\; 1 \\ \quad\;\; 8 \\ \quad\;\;\; 4 \\ \quad\;\;\;\; 8 \\ \quad\;\;\;\;\; 7 \\ \quad\;\;\;\;\;\; 5 \quad (1) \\ \hline \bar{1}{,}69897000 = 0{,}5 \end{array}$$

(1) Estas cifras aparecen así en escalerilla para indicar el orden de su-

$$\frac{3}{9} = 3 \times \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{log. de } \frac{3}{9} &= \text{log. de } 3 + (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 9) \\ &= 0{,}47712125 \\ &+ \bar{1}{,}04575749 \\ &\quad \underline{\bar{1}{,}52287874} = 0{,}3333... \end{aligned}$$

A pesar de que, por su extraordinaria facilidad, no deban contarse como operaciones las de restar de 9 las cifras de las mantisas (de 9 todas, menos la primera cifra de la derecha, que se resta de 10); sin embargo, en operaciones sencillas, como las anteriores, no cabe asegurar que aventaje al método común el de convertir en inversas las fracciones que hagan oficios de divisor para que luego las restas de mantisas se conviertan en sumas.

Solamente hay ventajas cuando las operaciones se complican, como sucede en el caso de que, tanto el numerador como el denominador de una fracción, sean multiplicaciones indicadas de varios factores.

Por ejemplo:

$$\frac{209 \times 573 \times 63}{287 \times 2101} = 209 \times 573 \times 63 \times \frac{1}{287} \times \frac{1}{2101}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ Log. de } \frac{209 \times 573 \times 63}{287 \times 2101} &= \text{log. de } 209 && = 2{,}3201463 \\ &+ \text{log. de } 573 && = 2{,}7581546 \\ &+ \text{log. de } 63 && = 1{,}7993405 \\ &+ \text{log. de } 0 - \text{log. de } 287 && = \bar{3}{,}5421181 \text{ (1)} \\ &+ \text{log. de } 0 - \text{log. de } 2101 && = \bar{4}{,}6775739 \text{ (2)} \\ & && \quad \underline{1{,}0973334} = 12{,}51219 \end{aligned}$$

cesión de las restas parciales por cuyo medio se obtienen. Pero es claro que en la práctica han de aparecer en un renglón

$$\begin{array}{r} 0{,}47712125 \\ \bar{1}{,}22184875 \\ \hline \bar{1}{,}69897000 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 99999990 \\ 77815125 \end{array} \right.$$

(1)
$$\begin{array}{r} 0{,}0000000 \\ -\;2{,}4578819 \\ \hline \bar{3}{,}5421181 \end{array} \; (= \text{log. de } 287)$$

(2)
$$\begin{array}{r} 0{,}0000000 \\ -\;3{,}3224261 \\ \hline \bar{4}{,}6775739 \end{array} \; (= \text{log. de } 2101)$$

$$\frac{\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{6}{7}}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{7}{6}$$
$$=4\times\frac{1}{5}\times 2\times\frac{1}{3}\times 7\times\frac{1}{6}$$
$$=4\times 2\times 7\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\therefore \text{Log. de } \frac{\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{6}{7}} \begin{array}{lll} =\text{log. de } 4 & =0{,}6020600 & \\ +\text{log. de } 2 & =0{,}3010300 & \\ +\text{log. de } 7 & =0{,}8450980 & \\ +\text{log. de } 1-\text{log. de } 5 & =\bar{0}{,}3010300 & (2) \\ +\text{log. de } 1-\text{log. de } 3 & =\bar{1}{,}5228788 & (3) \\ +\text{log. de } 1-\text{log. de } 6 & =\bar{1}{,}2218488 & (4) \\ \hline & \bar{1}{,}7939456=0{,}62222... & \end{array}$$

A veces antes de empezar un cómputo por logaritmos cabe simplicar los términos de la operación.

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}}{\frac{5}{6}\times\frac{4}{7}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{9}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{4}\times\frac{8}{5}\times\frac{9}{7}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(2\times\frac{1}{3}\right)\times\left(3\times\frac{1}{4}\right)\times\left(4\times\frac{1}{5}\right)\times\left(6\times\frac{1}{5}\right)\times\left(7\times\frac{1}{4}\right)\times\left(8\times\frac{1}{5}\right)\times\left(9\times\frac{1}{7}\right)$$
$$=(2\times 3\times 4\times 6\times 7\times 8\times 9)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}$$
$$=72576\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}$$
$$=72576\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{16}\times\frac{1}{125}\times\frac{1}{7}$$

---

(1) Claro es que este ejemplo (como tantos otros de los anteriores) se resolvería por la Aritmética común más fácilmente que por logaritmos. Pero se pone para que el alumno se entere con la sencillez posible de los procedimientos logarítmicos.

(2) $$\begin{array}{r} 0{,}0000000 \\ -\,0{,}6989700 \\ \hline \bar{1}{,}3010300 \end{array} \text{ (= log. de 5)}$$

(3) $$\begin{array}{r} 0{,}0000000 \\ -\,0{,}4771212 \\ \hline \bar{1}{,}5228788 \end{array}$$

(4) $$\begin{array}{r} 0{,}0000000 \\ -\,0{,}7781512 \\ \hline 2218488 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\therefore \text{ Log. del quebrado propuesto} \ldots\ldots\ldots\ldots & = \text{log. de } 72576 & = 4{,}8607930 \\
 & + \text{log. de } 1 - \text{log. de } 2 & = \bar{1}{,}6989700 \\
 & + \text{log. de } 1 - \text{log. de } 3 & = \bar{1}{,}5228788 \\
 & + \text{log. de } 1 - \text{log. de } 16 & = \bar{2}{,}7958800 \\
 & + \text{log. de } 1 - \text{log. de } 125 & = \bar{3}{,}9030900 \\
 & + \text{log. de } 1 - \text{log. de } 7 & = \bar{1}{,}1549020 \\
\hline
 & & \bar{1}{,}9365138 = 0{,}864 \text{ (1).}
\end{array}$$

$$\frac{3905 \times 1681 \times 0{,}219}{0{,}1136 \times 0{,}0365} = 3905 \times 1681 \times 0{,}219 \times \frac{10000}{1136} \times \frac{10000}{365}$$

$$= 3905 \times 1681 \times 0{,}219 \times 10000 \times \frac{1}{1136} \times 10000 \times \frac{1}{365}$$

$$= 3905 \times 1681 \times 10000 \times 10000 \times 0{,}219 \times \frac{1}{1136} \times \frac{1}{365}$$

$$\begin{array}{lll}
\therefore \text{ Log. del quebrado propuesto} \ldots\ldots\ldots\ldots & = \text{log. de } 3905 & = 3{,}5916210 \\
 & + \text{log. de } 1681 & = 3{,}2255677 \\
 & + \text{log. de } 100000000 & = 8 \\
 & + \text{log. de } 0{,}219 & = \bar{1}{,}3404441 \\
 & + (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 1136) & = \bar{4}{,}9446217 \\
 & + (\text{log. de } 1 - \text{log. de } 365) & = \bar{3}{,}4377071 \\
\hline
 & & 8{,}5399616 = 346706250
\end{array}$$

(1) El cálculo por la Aritmética común habría costado tal vez menos trabajo á los ejercitados en los cómputos logarítmicos, y de cierto que costaría más á los principiantes.

$$\begin{array}{rr|l}
1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 = & 144 & \\
7 \times 8 = & 56 & \\
\cline{2-2}
 & 864 & \\
 & 720 & \\
\cline{2-2}
 & 8064 & \\
 & 9 & \\
\cline{2-2}
 & 725760 & 84000 \\
\cline{3-3}
 & 537600 & \\
 & 336000 & 0{,}864 \\
 & 000000 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
16 & 125 \\
6 & 7 \\
\hline
96 & 875 \\
 & 96 \\
\cline{2-2}
 & 5250 \\
 & 7875 \\
\cline{2-2}
 & 84000
\end{array}$$

Las ventajas de los logaritmos sólo aparecen de evidencia, cuando se trata de números muy grandes; y, sobre todo, en la elevación á potencias y extracción de raíces.

LECCIÓN X

Restar (continuación).—**Complementos aritméticos**.

Las mantisas que habían de restarse de otras se suman con ellas por el procedimiento explicado en la anterior Lección; y, por el artificio de los llamados complementos aritméticos, de que vamos á hablar en esta Lección, se suman también las características negativas con las positivas, evitándose siempre así sistemáticamente la operación de restar, y sustituyéndola constantemente por la de sumar (salvo el hacer al fin de todas las operaciones la correspondiente corrección).

Llámase complemento aritmético de un logaritmo la diferencia que va del logaritmo al número 10 (1).

(1) El complemento aritmético logarítmico es un caso particular del complemento aritmético en general. (Véase tomo I, pág. 332.)

Dado un guarismo, la operación se reduce á escribir (empezando por la izquierda) la diferencia entre 9 y cada una de las cifras del guarismo dado, exceptuando la última, bajo la cual se escribe la diferencia entre ella y 10. Por ejemplo, si yo tengo que restar 526927 de 1000000, resto de 9 sucesivamente las cifras 5, 2, 6, 9 y 2, y, por último, 7 de 10; y así obtendré el guarismo (que escribiré en un renglón seguido y no en escalerilla.)

4
7
3
0
7
3

A esta clase de restas se da el nombre de complementos aritméticos.

Compl. aritm. de	28,	347,	5429,	77767,	1700647967
(Se empieza por la izq.)	72,	653,	4571,	22233,	8299352033

Por ejemplo, el complemento aritmético del logaritmo de 2, de 300, de 1199, de 0,000008, etc., se obtiene como sigue:

	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
	0,3010300	2,4771212	3,0788192	$\bar{6}$,9030900
Compl. aritm.	9′,6989700	7′,5228788	6′,9211808	15′,0969100

Según se ve, todas las cifras de las mantisas se restan de 9, menos la primera cifra de la derecha, que se resta de 10. Y del 10 del minuendo se resta también la característica del sustraendo, si es positiva; y, si es negativa, se suma con (10 — 1).

Las características de los complementos aritméticos se distinguen con un tilde acentual.

Cuando en la Aritmética común hay, pues, que llegar á un resultado final por la adición de muchos números y la substracción de otros varios, siempre se podrá, por medio de los complementos aritméticos, reducir la operación á la de sumar.

Supongamos que haya que sumar los guarismos

672736 y 426452

y que de su suma hayan de restarse los números

432752 y 18675,

lo que exige dos sumas y una resta. Pues en vez de estas operaciones se puede llegar al resultado final sumando con los dos primeros números los complementos aritméticos de los dos segundos

$$\begin{array}{l}
672736 \\
426452 \\
567248 = \left\{ \begin{array}{r} 1000000 \\ -\ 432752 \end{array} \right. \\
981325 = \left\{ \begin{array}{r} 1000000 \\ -\ 18675 \end{array} \right. \\
\hline
647761
\end{array}$$

Claro es que de la suma hay que rebajar 2000000 (1).

Apliquemos estas ideas á los logaritmos.

$$\text{Log. de } \frac{3760}{79} = \text{log. de } 3760 - \text{log. de } 79$$

Supongamos que yo agregue á esa expresión el logaritmo de diez mil millones, que es 10; ($10^{10} = 10000000000$)

Y entonces tendré

$$\text{Log. de } 3760 - \text{log. de } 79 + 10$$

ó bien

$$\text{Log. de } 3760 + 10 - \text{log. de } 79$$

De modo que si llamo *complemento* á la expresión 10 — logaritmo de 73, resultará

$$\text{Log. de } 3760 + \text{complemento}$$

lo que me dará, por medio de la operación de sumar, el resultado apetecido, con tal de que yo al fin rebaje de ese resultado el número 10, que antes agregué.

Con efecto;

Directamente

$$\begin{array}{rlr} \text{Log. de } \frac{3760}{79} = & \text{log. de } 3760 = & 3{,}5751878 \\ & - \text{log. de } 79 = & -1{,}8976271 \\ \hline & & 1{,}6775607 \end{array}$$

Por medio del complemento

$$\begin{array}{rlr} \text{Log. de } \frac{3760}{79} = & \text{log. de } 3760 = & 3{,}5751878 \\ & + \text{compl. log. de } 79 = & +8{,}1023729 \\ \hline & & 1{,}6775607 \end{array}$$

(1) Supongamos que, habiéndoseme pedido que yo reste, por ejemplo, 21 de 64,

$$\begin{array}{r} 64 \\ -21 \\ \hline 43, \end{array}$$

yo agregue 100 al minuendo. Tendré entonces

$$64 + 100 - 21 = 143.$$

El primer miembro de esta ecuación puede dar lugar á las tres variantes siguientes, sin que el residuo 143 varíe:

$$164 - 21 = 143; (64 - 21) + 100 = 143; 64 + (100 - 21) = 143.$$

Esta última variante es la que constituye el complemento aritmético; y claro es que en todas ellas aparece aumentado el residuo en 100 unidades, que es preciso rebajar para tener el resultado pedido $64 - 21 = 43$.

Así, pues, 1,6775607 es el logaritmo del cuociente pedido que corresponde al número 47,595

$$\frac{675}{527} \times \frac{952}{377} = \frac{675 \times 952}{527 \times 377}$$

$$\begin{array}{rlrl} \therefore \text{ Log. de } \dfrac{675 \times 952}{527 \times 377} & = \text{log. de} & 675 = & 2,8293037 \\ & + \text{log. de} & 952 = & 2,9786369 \\ & + \text{compl. log. de} & 527 = & 7',2781894 \\ & + \text{compl. log. de} & 377 = & 7',4236587 \\ \hline & & & 0,5097887 \end{array}$$

Generalizando diremos:

En vez de restar logaritmos, se pueden sumar sus complementos aritméticos, con tal de quitar á la suma tantas decenas como complementos hayan entrado en la suma.

LECCIÓN XI

Restar.—Operaciones por masas ó columnas.

Hemos visto hasta ahora cuatro maneras de restar logaritmos cuando las características son negativas:

1.ª La que saca sus procedimientos de las reglas de los signos en la sustracción algebráica (1).

2.ª La de las fracciones inversas.

3.ª La que convierte en aditivas todas las mantisas.

4.ª Y la de los complementos aritméticos (explicada en la Lección próxima anterior).

Todas estas maneras son familiares á los hombres obligados á manejar las Tablas de logaritmos (marinos, astrónomos, geodestas)... Pero no todas son igualmente propias para los que empiezan; por lo cual hay que explicar otro procedimiento mucho más rápido, que consiste en no hacer parcialmente las operaciones y á medida que el cálculo las exige, sino en prepararlas en dos columnas, para hacerlas todas en conjunto después de la total preparación. De este modo no aparecen características negativas mientras se prepara el resultado final; y solamente puede aparecer una á la terminación, lo que no siempre ocurre. Por último, para la preparación es indiferente que sean ordinarias ó decimales las fracciones.

El método de los complementos aritméticos tiene el muy

(1) Si el discípulo la encuentra muy difícil por no saber Algebra, puede hacer de ella caso omiso.

grave inconveniente para los principiantes de que las mantisas de las Tablas desaparecen en los cálculos al ser sustituídas por los números correlativos con ellas. Lo mismo pasa con el procedimiento que convierte en aditivas las mantisas que han de ser restadas. Estos dos métodos confunden y desorientan á los que no han adquirido todavía el fácil manejo de las Tablas. Deben, pues, evitarse en los comienzos, ya que los adquirirá sin dificultad ninguna quien con el tiempo los necesite.

Y tanto más es de evitar todo procedimiento que transforme las mantisas en otros números, cuanto que con el método general de resta, combinado con el de las fracciones inversas, pueden sin seria dificultad hacerse todas las operaciones de restar, atendiendo á lo siguiente:

MÉTODO DE LAS DOS COLUMNAS

Cuando se nos pida el cuociente de un quebrado en cuyo numerador y denominador estén indicadas las multiplicaciones de varios factores, como

$$\frac{a \times b \times c \times d}{e \times f \times h \times i}$$

se examinará si esos factores son todos enteros, ó todos quebrados, ó bien enteros y quebrados conjuntamente.

1.° Factores todos enteros $\quad \dfrac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 17}{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 100}$

2.° Factores todos quebrados propios $\quad \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{7}}{\frac{8}{9} \times \frac{5}{19} \times \frac{5}{6} \times \frac{21}{50}}$

$$\frac{0{,}17 \times 0{,}002 \times 0{,}69}{0{,}81 \times 0{,}00004}$$

3.° Factores mezclados $\quad \dfrac{\frac{2}{5} \times 11 \times 4 \times \frac{29}{3} \times 0{,}31}{19 \times 23 \times 0{,}37 \times \frac{3}{13} \times \frac{7}{17}}$

Examinemos separadamente estos tres casos.

1.er caso: Todos los factores son enteros, así en el numerador como en el denominador.

Regla:

Se colocan en una columna los logaritmos de los factores del numerador, Se colocan en otra columna los del denominador,

Se suman ambas columnas,

Se resta la suma de las mantisas del denominador de la suma de las mantisas del numerador.

Y al residuo se pone por característica la diferencia de características con el signo de la mayor, teniendo en cuenta la reserva.

$$
\begin{array}{llrl}
\text{Log. de } \dfrac{2\times 3\times 4\times 1000}{5\times 6\times 7} = & +\text{log. de } 2 = 0{,}301030 & -\text{log. de } 5 = & 0{,}698970 \\
 & +\text{log. de } 3 = 0{,}477121 & -\text{log. de } 6 = & 0{,}778151 \\
 & +\text{log. de } 4 = 0.602060 & -\text{log. de } 7 = & 0{,}845098 \\
 & +\text{log. de } 1000 = 3, & & \\
\hline
 & 4{,}380211 & & -2{,}322219 \\
 & -2{,}322219 & & \\
\hline
 & 2{,}057992 = 114{,}29 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrl}
\text{Log. de } \dfrac{2\times 3\times 4\times 5\times 17}{6\times 7\times 8\times 9\times 10} = & +\text{log. de } 2 = 0{,}301030 & -\text{log. de } 6 = & 0{,}778151 \\
 & +\text{log. de } 3 = 0{,}477121 & -\text{log. de } 7 = & 0{,}845098 \\
 & +\text{log. de } 4 = 0{,}602060 & -\text{log. de } 8 = & 0{,}903090 \\
 & +\text{log. de } 5 = 0{,}698970 & -\text{log. de } 9 = & 0{,}954243 \\
 & +\text{log. de } 17 = 1{,}230449 & -\text{log. de } 10 = & 1, \\
\hline
 & 3{,}309630 & & -4{,}480582 \\
 & -4{,}480582 & & \\
\hline
 & \bar{2}{,}829048 = 0{,}06746 & &
\end{array}
$$

2.° caso. Todos los factores son quebrados, así en el numerador como en el denominador.

Regla:

Se convierten en inversas todas las fracciones del denominador;

Se colocan en una columna los logaritmos de todos los numeradores (inclusos los de las fracciones inversas);

Se colocan en otra columna los logaritmos de todos los denominadores (inclusos también los de las fracciones inversas);

Y se termina, como antes,

Sumando ambas columnas;

Restando la suma de las mantisas de los denominadores de la suma de las mantisas de numeradores;

Y poniendo por característica al residuo la diferencia de características con el signo de la mayor, habida en cuenta la reserva.

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}}{\frac{5}{8}\times\frac{11}{12}\times\frac{3}{11}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\times\frac{8}{5}\times\frac{12}{11}\times\frac{11}{3}\ (1)$$

$\therefore$ Log. del quebrado propuesto.......

$$\begin{array}{ll}
=\text{log. de } 1=0{,}000000 & -\text{log. de } 2=0{,}301030\\
+\text{log. de } 2=0{,}301030 & -\text{log. de } 3=0{,}477121\\
+\text{log. de } 4=0{,}602060 & -\text{log. de } 7=0{,}845098\\
+\text{log. de } 8=0{,}903090 & -\text{log. de } 5=0{,}698970\\
+\text{log. de } 12=1{,}079181 & -\text{log. de } 11=1{,}041393\\
+\text{log. de } 11=1{,}041393 & -\text{log. de } 3=0{,}477121\\
\hline
3{,}926754 & 3{,}840733\\
3{,}840733 & \\
\hline
0{,}086021=1{,}219 &
\end{array}$$

$$\frac{\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{11}{13}}{\frac{17}{19}\times\frac{23}{29}\times\frac{31}{37}}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{11}{13}\times\frac{19}{17}\times\frac{29}{23}\times\frac{37}{31}$$

$\therefore$ Log. del quebrado propuesto.......

$$\begin{array}{ll}
=+\text{log. de } 2=0{,}301030 & -\text{log. de } 3=0{,}477121\\
+\text{log. de } 5=0{,}698970 & -\text{log. de } 7=0{,}845098\\
+\text{log. de } 11=1{,}041393 & -\text{log. de } 13=1{,}113943\\
+\text{log. de } 19=1{,}278754 & -\text{log. de } 17=1{,}230449\\
+\text{log. de } 29=1{,}462398 & -\text{log. de } 23=1{,}361728\\
+\text{log. de } 37=1{,}568202 & -\text{log. de } 31=1{,}491362\\
\hline
6{,}350747 & 6{,}519701\\
6{,}519701 & \\
\hline
\bar{1}{,}831046=0{,}67771 &
\end{array}$$

(1) Este método de las dos columnas tiene la ventaja de ser en él muy fácil simplificar cuando ha lugar á ello. En el caso actual es evidente que

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\times\frac{8}{5}\times\frac{12}{11}\times\frac{11}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}\times\frac{8}{5}\times 4$$

y que, por consiguiente, el cómputo anterior pudo Y DEBIÓ haber sido

$$\begin{array}{ll}
+\text{log. de } 4=0{,}602060 & -\text{log. de } 3=0{,}477121\\
+\text{log. de } 8=0{,}903090 & -\text{log. de } 7=0{,}845098\\
+\text{log. de } 4=0{,}602060 & -\text{log. de } 5=0{,}698970\\
\hline
2{,}107210 & 2{,}021189\\
2{,}021189 & \\
\hline
0{,}086021=1{,}219 &
\end{array}$$

$$\frac{0{,}17 \times 0{,}002 \times 0{,}69}{0{,}81 \times 0{,}004} = \frac{17}{100} \times \frac{2}{1000} \times \frac{69}{100} \times \frac{100}{81} \times \frac{1000}{4}$$

$$= \frac{17}{81} \times \frac{1}{2} \times \frac{69}{100}$$

$\therefore$ Log. del quebrado propuesto....... $= +$ log. de 17 $= 1{,}230449$ — log. de 81 $= 1{,}908485$
$+$ log. de 1 $= 0,$ — log. de 2 $= 0{,}301030$
$+$ log. de 69 $= 1{,}838849$ — log. de 100 $= 2,$

$$\begin{array}{rr} 3{,}069298 & -4{,}209515 \\ -4{,}209515 & \\ \hline \bar{2}{,}859783 = 0{,}072407407... & \end{array}$$

3.er caso: Factores mezclados. En el numerador, ó en el denominador, ó en ambos, no son los factores, con uniformidad, enteros ó quebrados, sino que los enteros y los quebrados se encuentran mezclados en las combinaciones posibles.

Regla:

Se siguen las anteriores á la vez: esto es,

Se convierten en inversas las fracciones del denominador, dejando en él los enteros si los hay;

Se escriben en una columna los logaritmos de todos los numeradores (inclusos los de las fracciones inversas);

Se escriben en otra columna los logaritmos de todos los denominadores (inclusos los de las fracciones inversas);

Se escriben, además, en esta segunda columna los logaritmos de los enteros que se dejaron en el denominador de la primitiva fracción dada,

Y se concluye como en los dos casos anteriores

$$\frac{\frac{5}{2} \times 3 \times 0{,}7}{0{,}23 \times 17 \times 11 \times \frac{13}{37}} = \frac{\frac{5}{2} \times 3 \times \frac{7}{10} \times \frac{100}{23} \times \frac{37}{13}}{17 \times 11}$$

Log. del quebrado propuesto............ $= +$ log. de 5 $= 0{,}698970$ — log. de 2 $= 0{,}301030$
$+$ log. de 3 $= 0{,}477121$ — log. de 10 $= 1,$
$+$ log. de 7 $= 0{,}845098$ — log. de 23 $= 1{,}361728$
$+$ log. de 100 $= 2,$ — log. de 13 $= 1{,}113943$
$+$ log. de 37 $= 1{,}568202$ — log. de 17 $= 1{,}230449$
— log. de 11 $= 1{,}041393$

$$\begin{array}{rr} 5{,}589391 & \\ -6{,}048543 & 6{,}048543 \\ \hline \bar{1}{,}540848 = 0{,}3474 & \end{array}$$

$$\frac{\frac{2}{5} \times 11 \times 4 \times \frac{29}{3} \times 0{,}31}{19 \times 23 \times 0{,}37 \times \frac{3}{13} \times \frac{7}{17}} = \frac{\frac{2}{5} \times 11 \times 4 \times \frac{29}{3} \times \frac{31}{100} \times \frac{100}{37} \times \frac{13}{3} \times \frac{17}{7}}{19 \times 23}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times 11 \times 4 \times \frac{29}{3} \times \frac{31}{37} \times \frac{13}{3} \times \frac{17}{7}}{19 \times 23}$$

$$\begin{array}{llrl}
\therefore \text{Log. del quebrado} & & & \\
\quad \text{propuesto......} = & +\text{log. de } 2 = 0{,}301030 & -\text{log. de } 5 = & 0{,}698970 \\
& +\text{log. de } 11 = 1{,}041393 & -\text{log. de } 3 = & 0{,}477121 \\
& +\text{log. de } 4 = 0{,}602060 & -\text{log. de } 37 = & 1{,}568202 \\
& +\text{log. de } 29 = 1{,}462398 & -\text{log. de } 3 = & 0{,}477121 \\
& +\text{log. de } 31 = 1{,}491362 & -\text{log. de } 7 = & 0{,}845098 \\
& +\text{log. de } 13 = 1{,}113943 & -\text{log. de } 19 = & 1{,}278754 \\
& +\text{log. de } 17 = 1{,}230449 & -\text{log. de } 23 = & 1{,}361728 \\
\hline
& \qquad\qquad 7{,}242635 & & 6{,}706994 \\
& \qquad\qquad 6{,}706994 & & \\
\hline
& \qquad\qquad 0{,}535641 = 3{,}4321 \quad (1) & &
\end{array}$$

$$\frac{167 \times 15{,}7 \times 1{,}136}{781 \times 75} = \frac{167 \times \frac{157}{10} \times \frac{1136}{1000}}{781 \times 75}$$

$$\begin{array}{llrl}
\therefore \text{Log. del quebrado} & & & \\
\quad \text{propuesto......} = & +\text{log. de } 167 = 2{,}222716 & -\text{log. de } 10 = & 1 \\
& +\text{log. de } 157 = 2{,}195900 & -\text{log. de } 1000 = & 3 \\
& +\text{log. de } 1136 = 3{,}055378 & -\text{log. de } 781 = & 2{,}892651 \\
& & -\text{log. de } 75 = & 1{,}875061 \\
\hline
& \qquad\qquad 7{,}473994 & & 8{,}767712 \\
& \qquad\qquad 8{,}767712 & & \\
\hline
& \qquad\qquad \bar{2}{,}706282 = 0{,}050848 & &
\end{array}$$

$$\frac{1}{0{,}0004405} \times \frac{1}{3{,}2} \times \frac{1}{0{,}26} = \frac{1}{0{,}0004405 \times 3{,}2 \times 0{,}26}$$

$$= \frac{10000000}{4405} \times \frac{10}{32} \times \frac{100}{26}$$

---

(1) Hemos visto varias veces que por la Aritmética común resultaban más fáciles que por logaritmos ciertas operaciones puestas de intento muy sencillas, por tratarse únicamente de hacer comprender la marcha logarítmica. Pero, en cuanto los problemas presentan alguna complicación, ya aparece evidente la facilidad del cómputo logarítmico, como podrá comprobar quien intente hallar por los medios comunes el valor del quebrado aquí propuesto.

$$\therefore \text{Log. del quebrado propuesto} \ldots\ldots = \begin{array}{l} +7 \\ +1 \\ +2 \\ \hline 10, \\ \underline{6{,}564069} \\ 3{,}435931 = 2728{,}543 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\text{log. de } 4405 = 3{,}643946 \\ -\text{log. de } 32 = 1{,}505150 \\ -\text{log. de } 26 = 1{,}414973 \\ \hline 6{,}564069 \end{array}$$

$$\frac{4935\frac{3}{7} \times 8{,}15}{79{,}165 \times 7917{,}06} = \frac{34548}{7} \times \frac{815}{100} \times \frac{1000}{79165} \times \frac{100}{791706}$$

$$= \frac{34548}{7} \times 815 \times \frac{10}{79165} \times \frac{100}{791706}$$

$$\therefore \text{Log. del quebrado propuesto} \ldots\ldots = \begin{array}{l} +\text{log. de } 34548 = 4{,}538422 \\ +\text{log. de } 815 = 2{,}911158 \\ +\text{log. de } 10 = 1, \\ +\text{log. de } 100 = 2, \\ \hline 10{,}449580 \\ \underline{11{,}642195} \\ \bar{2}{,}807385 = 0{,}0641774 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\text{log. de } 7 = 0{,}845098 \\ -\text{log. de } 79165 = 4{,}898533 \\ -\text{log. de } 791706 = 5{,}898564 \\ \\ \hline 11{,}642195 \end{array}$$

LECCIÓN XII.

Restar (conclusión).

La conveniencia de no hacer parcialmente las operaciones cuando un quebrado contiene en numerador y denominador operaciones indicadas, se evidencia fácilmente como sigue:

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{11}}{\frac{19}{13} \times \frac{29}{17}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{11} \times \frac{13}{19} \times \frac{17}{29}$$

$$\begin{array}{ll} \therefore & + \text{log. de } 1 - \text{log. de } 2 \\ & + \text{log. de } 3 - \text{log. de } 5 \\ & + \text{log. de } 7 - \text{log. de } 11 \\ & + \text{log. de } 13 - \text{log. de } 19 \\ & + \text{log. de } 17 - \text{log. de } 29 \end{array}$$

Ejecutadas parcialmente las cinco anteriores sustracciones, todas darían características negativas; mientras que, sumados conjuntamente los cinco logaritmos aditivos, y los cinco sustractivos también conjuntamente, aparecerá una sola característica negativa al fin de la operación, cuando se reste de la suma de los logaritmos aditivos la suma de los negativos; es decir, cuando ya no haya que llevar en cuenta las difíciles, para los principiantes, reglas algebráicas de los signos.

$$\begin{array}{rr} +0{,}000000 & -0{,}301030 \\ +0{,}477121 & -0{,}698970 \\ +0{,}845098 & -1{,}041393 \\ +1{,}113943 & -1{,}278754 \\ +1{,}230449 & -1{,}462398 \\ \hline +3{,}666611 & -4{,}782545 \\ -4{,}782545 & \\ \hline \bar{2}{,}884066 & \end{array}$$

$\bar{2},884066 = 0,076572$ (por exceso) ó forzando la unidad.

Para que el alumno se ejercite en la resta por conjuntos á dos columnas, debe repetir las siguientes operaciones, que ya se hallan efectuadas de otros modos menos rápidos y más difíciles en las Lecciones anteriores VII á X.

De la Lección VII y la Lección VIII:

$\frac{4}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{4 \times 5}{3 \times 2}$ (Véanse págs. 489 y 495.)

$$\therefore \begin{array}{rr}
+\text{Log. de } 4 = 0{,}602060 & -\text{log. de } 3 = 0{,}477121 \\
+\text{Log. de } 5 = \underline{0{,}698970} & -\text{log. de } 2 = \underline{0{,}301030} \\
1{,}301030 & 0{,}778151 \\
\underline{0{,}778151} & \\
\underline{0{,}522879} = 3{,}3333\ldots &
\end{array}$$

$\frac{2}{5} \div \frac{400}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 400}$ (Véase pág. 489.)

$$\therefore \begin{array}{rr}
+\text{Log. de } 2 = 0{,}301030 & -\text{log. de } 5 = 0{,}698970 \\
+\text{Log. de } 3 = \underline{0{,}477121} & -\text{log. de } 400 = \underline{2{,}602060} \\
+\,0{,}778151 & 3{,}301030 \\
-\,\underline{3{,}301030} & \\
\underline{\bar{3}{,}477121} = 0{,}003 &
\end{array}$$

$\frac{5}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4}$ (Véanse págs. 489 y 496.)

$$\therefore \begin{array}{rr}
+\text{Log. de } 5 = 0{,}698970 & -\text{log. de } 2 = 0{,}301030 \\
+\text{Log. de } 3 = \underline{0{,}477121} & -\text{log. de } 4 = \underline{0{,}602060} \\
+\,1{,}176091 & 0{,}903090 \\
-\,\underline{0{,}903090} & \\
\underline{0{,}273001} = 1{,}875 &
\end{array}$$

$\frac{4}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{4 \times 2}{3 \times 5}$ (Véase pág. 489.)

$$\therefore \begin{array}{rr}
+\text{Log. de } 4 = 0{,}602060 & -\text{log. de } 3 = 0{,}477121 \\
+\text{Log. de } 2 = \underline{0{,}301030} & -\text{log. de } 5 = \underline{0{,}698970} \\
0{,}903090 & 1{,}176091 \\
\underline{1{,}176091} & \\
\underline{\bar{1}{,}726999} = 0{,}53333\ldots &
\end{array}$$

$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ (Véase pág. 489.)

$$\therefore \begin{array}{rr}
+\text{Log. de } 3 = 0{,}477121 & -\text{log. de } 4 = 0{,}602060 \\
+\text{Log. de } 5 = \underline{0{,}698970} & -\text{log. de } 2 = \underline{0{,}301030} \\
1{,}176091 & 0{,}903090 \\
\underline{0{,}903090} & \\
\underline{0{,}273001} = 1{,}875 &
\end{array}$$

$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ (Véanse págs. 490 y 496.)

$$\begin{array}{rlrl}
\therefore\ +\text{Log. de } 2 = & 0{,}301030 & -\text{log. de } 5 = & 0{,}698970 \\
+\text{Log. de } 4 = & 0{,}602060 & -\text{log. de } 3 = & 0{,}477121 \\
\hline
+ & 0{,}903090 & & 1{,}176091 \\
- & 1{,}176091 & & \\
\hline
 & \bar{1}{,}726999 = 0{,}53333... & &
\end{array}$$

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$ (Véanse págs. 490 y 496.)

$$\begin{array}{rl}
\therefore\ +\text{Log. de } 3 = & 0{,}477121 \\
-\text{Log. de } 2 = & 0{,}301030 \\
\hline
 & 0{,}176091 = 1{,}5
\end{array}$$

$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$ (Véanse págs. 490 y 496.)

$$\begin{array}{rlrl}
\therefore\ +\text{Log. de } 2 = & 0{,}301030 & -\text{log. de } 3 = & 0{,}477121 \\
+\text{Log. de } 4 = & 0{,}602060 & -\text{log. de } 3 = & 0{,}477121 \\
\hline
+ & 0{,}903090 & & 0{,}954242 \\
- & 0{,}954242 & & \\
\hline
 & \bar{1}{,}948848 = 0{,}8888... & &
\end{array}$$

$\frac{11}{13} \div \frac{2}{3}$ (Véanse págs. 490 y 496.)

$$\begin{array}{rlrl}
\therefore\ +\text{Log. de } 11 = & 1{,}041393 & -\text{log. de } 13 = & 1{,}113943 \\
+\text{Log. de } \ \ 3 = & 0{,}477121 & -\text{log. de } \ \ 2 = & 0{,}301030 \\
\hline
+ & 1{,}518514 & & 1{,}414973 \\
 & 1{,}414973 & & \\
\hline
 & 0{,}103541 = 1{,}2692 & &
\end{array}$$

$\frac{21}{6} \div \frac{100}{3} = \frac{21}{6} \times \frac{3}{100}$ (Véase pág. 491.)

$$\begin{array}{rlrl}
\therefore\ +\text{Log. de } 21 = & 1{,}322219 & -\text{log. de } \ \ 6 = & 0{,}778151 \\
+\text{Log. de } \ \ 3 = & 0{,}477121 & -\text{log. de } 100 = & 2 \\
\hline
+ & 1{,}799340 & & 2{,}778151 \\
- & 2{,}778151 & & \\
\hline
 & \bar{1}{,}021189 = 0{,}105 & &
\end{array}$$

$\frac{3}{8} \div \frac{5}{2}$ (Véase pág. 491.)

$$\begin{array}{rlrl}
\therefore\ +\text{Log. de } 3 = & 0{,}477121 & -\text{log. de } 8 = & 0{,}903090 \\
+\text{Log. de } 2 = & 0{,}301030 & -\text{log. de } 5 = & 0{,}698970 \\
\hline
+ & 0{,}778151 & & 1{,}602060 \\
- & 1{,}602060 & & \\
\hline
 & \bar{1}{,}176091 = 0{,}15 & &
\end{array}$$

$$\frac{7}{2} \div \frac{2}{540} = \frac{7 \times 540}{2 \times 2} = \frac{7 \times 540}{4}$$ (Véase pág. 491.)

$$\therefore \begin{array}{rl} +\text{Log. de } 7 = 0{,}845098 & -\text{log. de } 4 = 0{,}60206 \\ +\text{Log. de } 540 = 2{,}732394 & \\ \hline +3{,}577492 & \\ -0{,}602060 & \\ \hline \bar{2}{,}975432 = 945 & \end{array}$$

$$\frac{2}{9} \div 0{,}0002 = \frac{2 \times 10000}{9 \times 2} = \frac{10000}{9}$$ (Véase pág. 491.)

$$\therefore \begin{array}{rl} \text{Log. de } 10000 = 4 \phantom{{,}954243} & -\text{log. de } 9 = 0{,}954243 \\ -0{,}954243 & \\ \hline 3{,}045757 = 1111{,}1111... & \end{array}$$

$$\frac{100}{2604} \div \frac{30}{162} = \frac{100 \times 162}{2604 \times 30} = \frac{10 \times 162}{2604 \times 3}$$ (Véase pág. 491.)

$$\therefore \begin{array}{rr} +\text{Log. de } 10 = 1, & -\text{log. de } 2604 = 3{,}415641 \\ +\text{Log. de } 162 = 2{,}209515 & -\text{log. de } 3 = 0{,}477121 \\ \hline +3{,}209515 & 3{,}892762 \\ -3{,}892762 & \\ \hline \bar{1}{,}316753 = 0{,}20737 & \end{array}$$

$$2 \div \frac{7}{1111}$$ (Véase pág. 491.)

$$\therefore \begin{array}{rl} +\text{Log. de } 2 = 0{,}301030 & -\text{log. de } 7 = 0{,}845098 \\ +\text{Log. de } 1111 = 3{,}045714 & \\ \hline +3{,}346744 & \\ -0{,}845098 & \\ \hline 2{,}501646 = 317{,}43 & \end{array}$$

$$\frac{9983}{100000} \div \frac{67}{100} = \frac{9983 \times 100}{100000 \times 67} = \frac{9983}{1000 \times 67}$$ (Véase pág. 492.)

$$\therefore \begin{array}{rr} +\text{Log. de } 9983 = 3{,}999261 & -\text{log. de } 1000 = 3, \\ & -\text{log. de } 67 = 1{,}826075 \\ \hline 4{,}826075 & 4{,}826075 \\ \hline \bar{1}{,}173186 = 0{,}149 & \end{array}$$

$$0{,}002801 \div 0{,}079495 = \frac{2801 \times 1000000}{1000000 \times 79495} = \frac{2801}{79495}$$ (Véase pág. 492.)

$$\therefore \begin{array}{r} +\text{Log. de } 2801 = 3{,}447313 \\ -\text{Log. de } 79495 = 4{,}900340 \\ \hline \bar{2}{,}546973 = 0{,}03523492 \end{array}$$

De la Lección IX:

$$\frac{209 \times 573 \times 63}{287 \times 2101} \quad \text{(Véase pág. 500.)}$$

$$\begin{array}{lll}
\therefore & +\text{Log. de } 209 = 2{,}320146 & -\text{log. de } 287 = 2{,}457882 \\
& +\text{Log. de } 573 = 2{,}758155 & -\text{log. de } 2101 = 3{,}322426 \\
& +\text{Log. de } 63 = 1{,}799340 & \\
\hline
& \phantom{+\text{Log. de } 63 =}\ 6{,}877641 & \phantom{-\text{log. de } 2101 =}\ 5{,}780308 \\
& \phantom{+\text{Log. de } 63 =}\ 5{,}780308 & \\
\hline
& \phantom{+\text{Log. de } 63 =}\ 1{,}097333 = 12{,}51219 &
\end{array}$$

$$\frac{\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{6}{7}} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{6} \quad \text{(Véase pág. 501.)}$$

$$\begin{array}{lll}
\therefore & +\text{Log. de } 4 = 0{,}602060 & -\text{log. de } 5 = 0{,}698970 \\
& +\text{Log. de } 2 = 0{,}301030 & -\text{log. de } 3 = 0{,}477121 \\
& +\text{Log. de } 7 = 0{,}845098 & -\text{log. de } 6 = 0{,}778151 \\
\hline
& \phantom{+\text{Log. de } 7 =}\ 1{,}748188 & \phantom{-\text{log. de } 6 =}\ 1{,}954242 \\
& \phantom{+\text{Log. de } 7 =}\ 1{,}954242 & \\
\hline
& \phantom{+\text{Log. de } 7 =}\ \bar{1}{,}793946 = 0{,}62222\ldots &
\end{array}$$

$$\frac{72576}{2 \times 3 \times 16 \times 125 \times 7} \quad \text{(Véase pág. 501.)}$$

$$\begin{array}{lll}
\therefore & \text{Log. de } 72576 = +\,4{,}860793 & -\text{log. de } 2 = 0{,}301030 \\
& & -\text{log. de } 3 = 0{,}477121 \\
& & -\text{log. de } 16 = 1{,}204120 \\
& & -\text{log. de } 125 = 2{,}096910 \\
& & -\text{log. de } 7 = 0{,}845098 \\
\hline
& \phantom{\text{Log. de } 72576 =}\ -\,4{,}924279 & \phantom{-\text{log. de } 7 =}\ 4{,}924279 \\
\hline
& \phantom{\text{Log. de } 72576 = -}\ \bar{1}{,}936514 = 0{,}864 &
\end{array}$$

$$\frac{3905 \times 1681 \times 0{,}219}{0{,}1136 \times 0{,}0365} = \frac{3905 \times 1681 \times \frac{219}{1000} \times 10000 \times 10000}{1136 \times 365} \quad \text{(Véase pág. 502.)}$$

$$\begin{array}{lll}
\therefore & +\text{Log. de } 3905 = 3{,}591621 & -\text{log. de } 1000 = 3, \\
& +\text{Log. de } 1681 = 3{,}225568 & -\text{log. de } 1136 = 3{,}055378 \\
& +\text{Log. de } 219 = 2{,}340444 & -\text{log. de } 365 = 2{,}562293 \\
& +\text{Log. de } 10000 = 4, & \\
& +\text{Log. de } 10000 = 4, & \\
\hline
& \phantom{+\text{Log. de } 10000 =}\ 17{,}157633 & \phantom{-\text{log. de } 365 =}\ 8{,}617671 \\
& \phantom{+\text{Log. de } 10000 =}\ 8{,}617671 & \\
\hline
& \phantom{+\text{Log. de } 10000 =}\ 8{,}539962 = 346706250 &
\end{array}$$

De la Lección X:

$\frac{675 \times 952}{527 \times 377}$ (Véase pág. 506.)

$$
\begin{array}{lrlr}
\therefore\ +\text{Log. de } 675 = & 2{,}829304 & -\text{log. de } 527 = & 2{,}721811 \\
+\text{Log. de } 952 = & 2{,}978637 & -\text{log. de } 377 = & 2{,}576341 \\
\hline
& 5{,}807941 & & 5{,}298152 \\
& 5{,}298152 & & \\
\hline
& 0{,}509789 & &
\end{array}
$$

Este modo de computar por masas ó columnas excusa las características negativas durante el curso de cada operación; pero no evita las reglas de los signos cuando hay que combinar los resultados finales de varias operaciones. Por lo cual, es inexcusable el conocimiento de las reglas algebráicas de los signos + y —.

Por ejemplo: Busquemos la diferencia de los dos cuocientes indicados

$$\left(\frac{3905 \times 1681 \times 0{,}219}{0{,}1136 \times 0{,}0365}\right) - \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{11}}{\frac{19}{13} \times \frac{29}{17}}\right)$$

Y, como ya tenemos calculado cada uno (págs. 518 y 514), resultará

$$
\begin{array}{r}
+\ 8{,}539962 \\
-\ \bar{2}{,}884066 \\
\hline
=9{,}655896
\end{array}
\quad (1)
$$

Busquemos ahora la diferencia de los cuocientes indicados

$$\left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{11}}{\frac{19}{13} \times \frac{29}{17}}\right) - \left(\frac{3905 \times 1681 \times 0{,}219}{0{,}1136 \times 0{,}0365}\right)$$

Y nos resultará

$$
\begin{array}{r}
+\ \bar{2}{,}884066 \\
-\ 8{,}539962 \\
\hline
\overline{10}{,}344104
\end{array}
$$

---

(1) La característica final 9 = + 8 del minuendo + 2 del sustraendo, por el cambio de signo, y — 1 por déficit de la resta de las mantisas.

Sean ahora las operaciones siguientes:

$$\left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{11}}{\frac{19}{13} \times \frac{29}{17}}\right) + \left(\frac{3905 \times 1681 \times 0{,}219}{0{,}1136 \times 0{,}0365}\right) - \left(\frac{2}{5} \div \frac{400}{3}\right)$$

Y tendremos

$$\begin{array}{rll} & +\bar{2},884066 & \\ & +8,539962 & \\ \hline = & +7,424028 & (1) \\ & -\bar{3},477121 & \\ \hline & 9,946907 & (2) \end{array}$$

APÉNDICE

Las reglas de los signos no pueden poseerse sin estudiar siquiera las primeras lecciones de cualquier tratado elemental de Algebra. Y, así, aconsejamos al discípulo que lo haga; en lo cual ganará extraordinariamente.

Pero, mientras no emprende este nada difícil aprendizaje, fije bien en la memoria lo siguiente:

Los signos del minuendo nunca varían, así sean + ó —.

Los signos del sustraendo siempre varían: si el sustraendo tiene el signo +, se le considera para la resta con el signo —: y, si el sustraendo tiene el signo —, se le considera con el signo +.

+ minuendo — sustraendo positivo = + minuendo — sustraendo	$+8-(+7)$ $=+8-7$	 $=+1$
+ minuendo — sustraendo negativo = + minuendo + sustraendo	$+8-(-7)$ $=+8+7$	 $=+15$
— minuendo — sustraendo positivo = — minuendo — sustraendo	$-8-(+7)$ $=-8-7$	 $=-15$
— minuendo — sustraendo negativo = — minuendo + sustraendo	$-8-(-7)$ $=-8+7$	 $=-1$

(1) La característica resulta igual á 7 porque hay que rebajar de ocho, dos de la característica negativa, y aumentar 1 de la reserva de la suma de las mantisas.

(2) La característica resulta = 9, porque al 7 del minuendo hay que agregar 3 por el cambio de signo, y rebajar 1 por déficit en la resta.

Si el sustraendo es $>$ que el minuendo, el cambio de signos sigue las reglas anteriores; pero en la substracción se resta el término $>$ del término $<$, y al residuo se pone el signo del $>$.

$$
\begin{aligned}
+8-(+9) &= +8-9 = -1 \\
+8-(-9) &= +8+9 = +17 \\
-8-(+9) &= -8-9 = -17 \\
-8-(-9) &= -8+9 = +1
\end{aligned}
$$

LECCIÓN XIII

Multiplicar y partir en logaritmos. — Características positivas.

La involución y la evolución no se indican en logaritmos por signos especiales, pues los signos

$$\sqrt{\ },\ \sqrt{\sqrt{\ }},\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\ }}}\ \ldots,$$

se sustituyen por exponentes fraccionarios.

Cuando se trata de elevar á potencias, los exponentes son enteros;

Y, cuando se trata de extraer raíces, fraccionarios.

Con lo cual resulta que, tanto la involución como la evolución consisten en multiplicaciones de los logaritmos de los números por los exponentes indicadores de la elevación á potencias ó de la extracción de raíces.

$$(a)^3 = \log. a \times 3;\ \text{ó bien } 3 \log. a$$

$$a^{\frac{1}{3}} = \log. a \times \frac{1}{3};\ \text{ó bien } \frac{1}{3} \log. a$$

$$a^{\frac{}{3}} = \frac{5}{3} \times \log. a;\ \text{ó bien } \frac{5}{3} \log. a$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \times \log. a;\ \text{ó bien } \frac{m}{n} \log. a$$

Por consiguiente, si multiplicamos el logaritmo de un número por un exponente (entero ó fraccionario), y después buscamos el producto entre los logaritmos de las Tablas, el número correspondiente tabulado á la izquierda será la potencia ó la raíz que se busca.

$78^2 = 2$ log. de 78

$\therefore$ log. de 78 $= 1,892095$

$\times \; 2$

$3,784190 = 6084$

$17^5 = 5$ log. de 17 $= 1,2304489$

$\times \; 5$

	6,1522445		
Log. de las Tablas	1522272	corresp.te al núm.	14198
1.ª diferencia	173		
1.ª parte proporcional más próxima = 154	152	corresp.te á	5
2.ª diferencia	210		
2.ª parte proporcional más próxima = 215	214	corresp.te á	7
	0		1419857

$\therefore$ Log. de $17^5 = 6,1522445 =$ al núm. 1419857

$$6084^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6084}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ log. de } 6084 = 3,7841892$$

$$\times \frac{1}{2}$$

$$1,8920946 = \text{al núm. } 78$$

$$1419857^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{1419857}$$

$$= \frac{1}{5} \text{ log. de } 1419857$$

Log. de 14198,57 =	1522272
Parte proporc. de 5	153
Parte proporc. de 7	214
	6,1522446

$$\times \frac{1}{5}$$

$$1,2304489 = 17$$

$465^3 = 3$ log. de 465

Log. de 465 $= 2,66745295$

$\times \; 3$

$8,00235885$

Como este logaritmo no está en las Tablas, hay que completarlo, conforme á la proporción explicada pág. 467 de la Lecc. IV, y pág. 482 de la Lecc. VI.

Mantisa dada del núm. que se busca..	0,00235885	Correspondiente al número 1005
Mantisa más próxima inferior........	0,00216606	
	0,00019279	

Como en las tablas no existe la diferencia entre las mantisas de los números 1005 y 1006, tengo que calcularla:

Mantisa de 1006 =	00259798
Mantisa de 1005 =	00216606
Diferencia tabular	43192

Parto la diferencia de mantisas por la diferencia tabular $\frac{19279}{43192}$

192790	43192
200220	0,44635
274520	
153680	
24104	

Reduzco este quebrado á decimales y obtengo 0,44635;

Agrego el cuociente 44635 al número 1005 hallado por las Tablas, y me resultará para cubo de 465, por ser 8 la característica del logaritmo, el número de nueve cifras..................... 100544635

Pero, según lo que sabemos por la Aritmética común, el cubo de 465 ha de acabar en 25 y no en 35, por lo cual, haciendo la correspondiente corrección, resultará.............. $465^3 =$ 100544625 (1)

¿Cuál es la 11.ª potencia de 1,8?

$$\begin{aligned} \text{Log. de } 1{,}8^{11} &= 11 \text{ log. de } 1{,}8 \\ &= 0{,}2552725 \\ &\quad \times 11 \\ &\overline{2{,}8079975} = 642{,}684 \end{aligned}$$

(1) No debe extrañarse que por logaritmos sólo se haya obtenido una aproximación á la 3.ª potencia de 465; pues los logaritmos casi nunca son números completamente exactos.

Además, en el caso presente los números 1005 y 1006 no son muy grandes; y ya sabemos (según se manifestó en la Lecc. IV y se confirmó en la Lecc. VI) que sólo cuando los números son muy grandes, y poco considerables, relativamente, sus diferencias, estas diferencias son muy próximamente proporcionales á las diferencias de las correspondientes mantisas.

¿Cuál es la raíz 5.ª de 91?

$$\text{Log. de } 91^{\frac{1}{5}} = 91^{0,2} = 0,2 \text{ log. de } 91$$

$$\begin{array}{r} = 1,9590414 \\ \times\ 0,2 \\ \hline 0,3918083 = 2,46495 \end{array}$$

¿Cuál es el valor del cubo de la raíz 8.ª de 4241?

$$\text{Log. de } 4241^{\frac{3}{8}} = \text{log. de } \sqrt[8]{4241^3} = \frac{3}{8} \text{ log. de } 4241$$

$$\begin{array}{r} 3,6274683 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 10,8824049 \end{array}$$

÷ 8 =	1,3603006	(esta mant. no está en las Tablas)	
Próxima mantisa inferior...	3602904	correspondiente al núm.	22924
Diferencia de mantisas	102		
Parte proporcional más próx.	95	correspondiente al núm.	5
Diferencia que se desprecia..	7		229245
$\therefore\ 4241^{\frac{3}{8}} =$	22,9245		

¿Cuál es el valor de 12^9?

$$\begin{array}{r} 9 \text{ log. de } 12 = 1,07918125 \\ 9 \\ \hline 9,71262125 = 5159780000 \end{array}$$

Se agregan 4 ceros al 515978 resultante del cálculo hecho sobre las tablas, por ser 9 la característica, y haber de tener 10 cifras la potencia buscada; el resultado es sólo una aproximación; pues el verdadero obtenido por la aritmética común es 515978352.

$$\begin{array}{r} 1,5^{15} = 15 \text{ log. de } 1,5 = 0,17609126 \\ \times\ \ \ \ 15 \\ \hline 88045630 \\ 17609126 \\ \hline 2,64136890 = 437,894 \end{array}$$

$$3644281^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ log. de } 3644281$$

Log. de 36442,81

Mantisa	5616022
Parte proporc. de 8	96
Parte proporc. de 1	12
log.	6,5616119
	$\times \frac{1}{2}$
	3,2808059 = al núm. 1909

$$\sqrt[6]{3530945} = 3530945^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{6} \text{ log. } 35309,45$$

Mantisa	5478854	
Parte proporc. de 4	50	
Parte proporc. de 5	62	
Log. de 3530945 =	6,5478910	
	$\times \frac{1}{6}$	
	1,0913151	(Esta mant. no está en las T.)
Mantisa próx. inf..	0899051	(corresp. al núm. 123)
Dif. entre las mantisas de 123 y 124	$\frac{14100}{35166} = 0,4$	

$$\begin{array}{r|l} 14100,0 & 35166 \\ \cline{2-2} 000336 & 0,4 \end{array} \quad \therefore \quad 3530945^{\frac{1}{6}} = 12,34$$

¿Cuál es el valor de $\left(14\frac{3}{4}\right)^8$?

$$\left(14\frac{3}{4}\right)^8 = \left(\frac{59}{4}\right)^8 = \frac{59^8}{4^8}$$

$\therefore$ Log. de 59^8 — log. de 4^8
8 log. de 59 — 8 log. de 4

$$8 \times 1,7708520 - 8 \times 0,6020600$$

1,7708520	0,6020600
8	8
14,1668160	4,8164800
4,8164800	
9,3503360 (Esta mant. no está en las T.)	

Restémosle ahora la mantisa próxima inferior.

	3503360	
Mantisa próx. inferior..	3503256	(corresp. al n.° 22404)
	104	
Parte proporc. más próx.	100	(correspondiente á 5)
	4	
Parte proporc. más próx.	3,8	(correspondiente á 2)
	0	

$$\therefore \begin{array}{r} 22404 \\ 5 \\ 2 \\ \hline 2240452 \end{array}$$

∴ Y atendiendo á la característica 224045200

$$\therefore \quad \left(14\tfrac{3}{4}\right)^8 = 224045200$$

LECCIÓN XIV

Multiplicar y partir en logaritmos (continuación).—**Características negativas.**

Cuando haya que multiplicar por un número cualquiera un logaritmo de característica negativa, se multiplicarán separadamente la mantisa y la característica, por ser positiva la mantisa y negativa la característica; y, hecho esto, se combinarán los productos de tal modo que la mantisa resulte siempre positiva.

¿Cuál es el valor de $0{,}7^{13}$?

$$\therefore \quad 13 \log. 0{,}7 = 1\bar{3} \log. \bar{1}{,}84509804$$

$$\begin{array}{lr}
\text{Valor de la mantisa} \times 13 & 84509804 \\
 & \times \quad 13 \\
\hline
 & 253529412 \\
 & 84509804 \\
\hline
 & +\ 10{,}9862745 \\
\text{Valor de la caract. } (-1 \times 13) = & -\ 13 \\
\hline
 & \bar{3}{,}9862745 \quad = \text{al núm. } 0{,}0096889
\end{array}$$

¿Cuál es el valor de $0{,}72^8$?

$$\therefore \quad 8 \times \log. 0{,}72$$

$$\begin{array}{lr}
 & \bar{1},8573325 \\
 & \times \quad 8 \\
\hline
\text{Valor de la mantisa} \times 8 \quad = + & 6,8586600 \\
\text{Valor de la caract.} (-1 \times 8) = - & 8 \\
\hline
 & \bar{2},8586600 \\
\text{Mantisa del número 72220 ..} & 8586575 \\
\hline
\text{Dif. de mantisas ....} & 25 \\
\text{Parte proporcional más próx.} & 24 \ \text{(corresp. al 4)} \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$\therefore \quad 0,72^8 \quad = \quad 0,0722204$$

¿Cuál es el valor de la expresión $(0,01)^{0,5968}$?

El logaritmo de 1 es 0...; ó bien 0,0000000
$\therefore$ El valor de 0,01 es $\bar{2}$; ó bien $\bar{2},0000000$

Ahora bien: si multiplicamos $\bar{2}$ por el exponente 0,5968, nos resultará un producto negativo, porque, según las reglas algebráicas de los signos, — multiplicado por + da —. En efecto,

$$\begin{array}{r}
\bar{2},0000000 \\
\times \ 0,5968 \\
\hline
= - \ 1,1936000
\end{array}$$

Siendo negativa esta mantisa, lo mismo que la característica, agreguemos á la expresión los dos términos + 1 y — 1, con cuyo aumento no se altera el valor del producto obtenido, y tendremos:

$$\begin{array}{lrl}
 & \bar{1},1936 & = \bar{1},\overline{1936} + 1 - 1 \\
 & & = \bar{1} + (1 - 1936) - 1 \\
 & & = \bar{2} + (1,0000 - 1936) \\
\text{No estando en las Tablas} & & = \bar{2} + 08064 \\
\text{la mant., calculemos la que debe ser:} & & = \bar{2},8064000 \\
\text{Mantisa del núm. 64032} & & = \ 8063971 \\
\hline
 & & \quad 29 \\
\text{Parte prop. más próxima} & & \quad 27 \ \text{(corr. al 4)} \\
\hline
 & & \quad 0
\end{array}$$

$$\therefore \quad (0,01)^{0,5968} = 0,0640324$$

¿Cuál es el valor de $(0{,}016235)^{0{,}065}$?

$$\frac{65}{1000} \times \text{log. de } 0{,}016235 = \bar{2}{,}2104523$$
$$\times\ 0{,}065$$

Producto de la mant. $\times$ 0,065 10522615
12627138

0,0136793995

= 0,0136794 (forzando la sépt. cifr.)

Producto de la caract. $\times$ 0,065

$$\begin{aligned} -2 \times 0{,}065 &= -0{,}130 \\ &= -0{,}13 + 1 - 1 \\ &= +1 - 0{,}13 - 1 \\ &= \quad + 0{,}87 - 1 = \bar{1}{,}87 \end{aligned}$$

$\bar{1}{,}883679$

$$\therefore\quad 0{,}016235^{0{,}065} = 0{,}7650317$$

Cuando hay que dividir por un número dado un logaritmo de característica negativa, pueden ocurrir dos casos:

1.° La característica negativa es divisible exactamente por el número dado.

2.° No lo es.

1.er caso: Si la característica negativa es exactamente divisible, entonces se dividirán separadamente mantisa y característica, y se combinarán los respectivos cuocientes de modo que la mantisa resulte positiva.

$$\text{Log. de } \sqrt{\frac{5}{76}} = \left(\frac{5}{76}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\text{ log. de } 5\right) - \left(\frac{1}{2}\text{ log. de } 76\right)$$
$$= (\text{log. de } 5 - \text{log. de } 76) \div 2$$
$$= 0{,}6989700$$
$$-\ 1{,}8808136$$

$\bar{2}{,}8181564$

$\times\ \frac{1}{2}$

Cuociente de la mantisa	0,4090782
Cuociente de la caract. negativa	$\bar{1}$,
Esta mant. no está en las Tablas	$\bar{1}{,}4090782$
Mant. del n.° próx. inferior 25649 =	4090704
Diferencia de mantisas	78
Parte proporcional más próxima	68 (corresp. 4)
	10
Parte proporcional más próxima	102 (corresp. 6)
	0

$$\therefore\quad \left(\frac{5}{76}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}2564946$$

2.º caso: Si la característica negativa no es divisible por el número dado, se le agrega lo necesario para que lo sea, y se hace preceder la mantisa de un número compensador igual al agregado á la característica.

¿Cuál es la $\sqrt[3]{0,00000065}$?

$$\text{Log. de } \left(\frac{65}{100000000}\right)^{\frac{1}{3}} = (\text{log. de } 65 - \text{log. de } 100000000) \div 3$$

$$\begin{array}{r} = + \ 1,8129134 \\ - \ 8 \\ \hline \bar{7},8129134 \end{array}$$

Como la característica no es divisible por 3, se agregan al resultado anterior $-2+2$, lo cual no puede variarlo; pero se transforma por tal medio en la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} & \bar{7},8129134 - 2 + 2 \\ = & (\bar{7} - 2) + 2 + 0,8129134 \\ = & -9 + 2,8129134 \end{aligned}$$

Dividiendo ahora separadamente por 3, tanto la mantisa como la característica, tendremos:

		$-3+0,9376378$
No estando esta mantisa en las tablas se le resta la próx. inferior que corresp. al núm. 86623	$=$	$\bar{3},9376378$
		9376332
Diferencia de mantisas		46
Parte proporcional más próxima		46 (correspondiente á 9)
		0

$$\therefore \quad 0,00000065^{\frac{1}{3}} = 0,008662391 \text{ (forzando la unidad) (1)}$$

¿Cuál es el valor de $0,0001^{\frac{1}{3}}$?

$$\text{Log. de } 1 = 0$$

$$\therefore \quad \text{Log. de } 0,0001 = \bar{4},0000000$$

(1) Pero este artificio no es exclusivo. Pudiera hacerse el cálculo por la regla del 1.er caso, si bien con el inconveniente de haber que computar fracciones.

$$\sqrt[3]{0,00000065} = 0,00000065^{\frac{1}{3}}$$

Log. del n.º dado	$=$	$\bar{7},8129134$
Mantisa ÷ 3	$=$	2709711
Caract. ÷ 3	$=$	$-2,3333333$
		$\bar{3},9376378$

No siendo divisible por 3 la característica se agrega la expresión $-2+2$; con lo que se tiene

$$\begin{aligned} &-2-4+2{,}0000 \\ &=-6+2{,}0000000 \end{aligned}$$

Y partiendo separadamente por 3 resulta

Esta mant. no está en las Tablas;	$\bar{2}+6666667$	
la próx. inferior corresp. al número 46415, y es $=$	6666584	
Diferencia de mantisas	83	
Parte proporc. más próx.	75	(corresp. á 8)
	8	
Parte proporcional más próxima	8,5	(corresp. á 9)
	0	

$$\therefore \quad \sqrt[3]{0{,}0001}=0{,}04641589$$

¿Cuál es el valor de

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\frac{4}{9}}=\sqrt[9]{\left(\frac{5}{13}\right)^4}=\sqrt[9]{\frac{5^4}{13^4}}\ ?$$

$$\begin{aligned} +\text{Log. de } 5 &= 0{,}6989700 \\ -\text{Log. de } 13 &= 1{,}1139434 \\ \hline &\ \bar{1}{,}5850266 \\ &\times\ 4 \\ \hline &\ \bar{2}{,}3401064 \end{aligned}$$

Para que la característica sea divisible por 9 hay que agregar á la anterior expresión $-7+7$, con lo que tendremos:

$$\bar{9}+7{,}3401064$$

Mantisa : 9	8155674	
	8155674	(esta mant. no está
Mantisa del núm. 65398 inmediato inferior	8155645	en las Tablas.)
	29	
1.ª parte proporcional más próxima	27	(corresp. á 4)
2.ª parte proporcional más próxima	2	(corresp. á 3)

$$\therefore \quad \left(\frac{5}{13}\right)^{\frac{4}{9}}=0{,}6539843$$

$$\text{Log. de } \left(\frac{17}{22}\right)^{2\frac{1}{2}} = (\text{log. de } 17 - \text{log. de } 22) \times \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{lr}
1, & 2304489 \\
1, & 3424227 \\
\hline
\bar{1}, & 8880262 \\
 & 5 \\
\hline
\bar{1}, & 4401310 \\
\bar{1}-1+1, & 4401310 \\
\hline
\bar{2}, & 7200655 \\
 & 7200600 \text{ corresp. al núm. } 52488
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
55 & & \\
50 & & 6 \\
\hline
5 & & 6 \\
5 & & \\
\hline
0 & & 0{,}5248866
\end{array}$$

LECCIÓN XV

Multiplicar y partir en logaritmos (conclusión).—**Indices negativos.—Expresiones complejas.—Logaritmos iguales á X.**

Cuando un exponente es negativo, los logaritmos se hallan de dos modos:

O por medio de las cantidades recíprocas positivas;

O bien, por la multiplicación directa del exponente negativo.

Lo mejor es el cálculo por las recíprocas.

¿Cuál es el valor de $(0{,}207)^{-3}$?

$$\text{Recíproca } \left(\frac{1000}{207}\right)^3$$

$$(\text{Log. de } 1000 - \text{log. de } 207) \times 3$$

	+ 3,0000000
	— 2,3159703
	0,6840297
	× 3
No está la mant. en las Tablas	2,0520891
Mantisa próxima inferior correspondiente al n.° 11274..	0520780
	111
Parte proporc. corresp. á 3...	116
	0

$$\therefore \quad (0{,}207)^{-3} = 112{,}743$$

El cálculo directo (sin recurrir á las recíprocas) no ofrece dificultad.

Cálculo directo:

$$\text{Log. de } (0{,}207)^{-3} = \text{log. de } \left(\tfrac{207}{1000}\right) \times -3$$
$$= (\text{log. de } 207 - \text{log. de } 1000) \times -3$$

$$\begin{array}{r} 2{,}3159703 \\ -\,3\phantom{{,}3159703} \\ \hline \bar{1}{,}3159703 \\ \times -\quad 3 \\ \hline +\ 3+0{,}9479109 \end{array}$$

Como la mantisa es negativa agregaremos $-1+1$ y tendremos

$$(+3-1), + (1-0{,}9479109)$$
$$= 2{,}0520891, \text{ como antes.}$$

Pero, para calcular las características, ha sido preciso emplear las reglas algebráicas de los signos (que no todos conocen).

¿Cuál es el valor de $(6)^{-\sqrt{5}}$?

Ante todo es preciso hallar el número que corresponde á $-\sqrt{5}$

Prescindamos por de pronto del signo —.

$$\text{Log. de } \sqrt{5} = \text{log. de } 5 \times \frac{1}{2} = (\text{log. de } 5) \div 2$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. de } 5 = 0{,}6989700 \\ \text{Partamos por } 2 = 0{,}3494850 \end{array}$$

La mant. no está en las Tablas.

Mant. próx. infer. correspondiente al número 2236	3494718	
Diferencia de mantisas	132	
Parte proporc. más próxima	117	(corresponde al 6)
	15	
Parte proporc. más próxima	156	(corresp. al dígito 8)
	0	

$$\therefore \quad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2{,}236068$$
$$= 2{,}2361 \quad \text{(forzando la últ. cifra).}$$

De modo que

$$6^{-\sqrt{5}} = 6^{-2{,}2361}$$

Calculemos la inversa

$$6^{-2,2361} = \frac{1}{6^{2,2361}}$$

$$\therefore \quad \text{Log. de } \frac{1}{6^{2,2361}} = \text{log. de } 1 - \text{log. de } 6^{2,2361}$$
$$= \text{log. de } 1 - (\text{log. de } 6 \times 2,2361)$$

Calculemos antes de efectuar la resta la expresión logaritmo de $6 \times 2,2361$

$$\begin{array}{r} 0,7781512 \\ 2,2361 \\ \hline 7781512 \\ 46689072 \\ 23344536 \\ 15563024 \\ 15563024 \\ \hline 1,740023898332 \end{array} = 1,74000000$$

$$\text{Log. de } 6 \times 2,2361 = 0,7781512 \times 2,2361$$
$$\underline{1,7400000}$$

Hagamos ahora la resta:

$$\begin{array}{lr} \text{Log. de } 1 - \text{log. de } 6^{2,2361} = & +0,0000000 \\ & -1,7400000 \\ \hline & \bar{2},2600000 \end{array} = 0,018197$$

¿Cuál es el valor de la expresión

$$3^{-\sqrt[4]{108 \times 3 \times 4}}?$$

La recíproca es

$$\therefore \quad \frac{1}{3^{\sqrt[4]{108 \times 3 \times 4}}} = \frac{1}{3^{(108 \times 3 \times 4) \div 4}}$$

Calculemos el log. de la expresión $108 \times 3 \times 4$.

$$\text{Log. de } 108 \times 3 \times 4 = \text{log. de } (108 + \text{log. de } 3 + \text{log. de } 4) \div 4$$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. de } 108 = & +2,0334237 \\ \text{Log. de } \quad 3 = & +0,4771212 \\ \text{Log. de } \quad 4 = & +0,6020600 \\ \hline & 3,1126049 \end{array}$$

Partamos por 4 y tendremos: $\underline{0,7781512} = 6$

$$\frac{1}{3^{\sqrt[4]{108 \times 3 \times 4}}} = \frac{1}{3^6}$$

Calculemos ahora el denominador 3^6

$$= 6 \text{ log. de } 3$$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. de } 3 = & 0,4771212 \\ & \times \quad 6 \\ \hline & 2,8627272 \end{array}$$

Hagamos ahora la resta

$$\text{Log. de } 1 - \text{log. de } 3^6$$

$$\begin{aligned} \text{Log. de } 1 &= +\ 0{,}0000000 \\ \text{Log. de } 3^6 &= -\ 2{,}8627272 \\ \hline & \ \ \bar{3}{,}1372728 = 0{,}0013717 \end{aligned}$$

$$\therefore\ 3^{-\sqrt[4]{108 \times 3 \times 4}} = 0{,}0013717$$

EXPRESIONES COMPLEJAS

Se computan separadamente los grupos de que consten; y, hechos los cálculos referentes á cada grupo, se ejecutan las operaciones que ligan los grupos entre sí. Por ejemplo:

¿Cuál es el valor de

$$\left\{ \left(1{,}035^{50}\right) - \left[5 \times \left(1{,}03\right)^{\frac{20}{73}}\right] \right\}?$$

Aquí es preciso computar separadamente el minuendo y el sustraendo.

Cómputo del minuendo

$$\text{Log. de } 1{,}035^{50} = 50 \text{ log. de } 1{,}035$$

$$\begin{array}{r} 0{,}0149403 \\ \times\ \ 50 \\ \hline 0{,}7470150 = 5{,}5849 \end{array}$$

Cómputo del sustraendo.

$$5 \times \left(1{,}03\right)^{\frac{20}{73}}$$

Calculemos primero la expresión

$$1{,}03^{\frac{20}{73}}$$

$$\therefore\ \frac{20}{73} \text{ log. de } 1{,}03$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. de } 1{,}03 = 0{,}0128372 \\ \times\ \ 20 \\ \hline 0{,}2567440 \\ \div\ 73 = 0{,}0035170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 0{,}2567440 & 73 \\ \cline{2-2} 377 & 0{,}0035170 \\ 124 & \\ 514 & \\ 30 & \end{array}$$

Efectuemos ahora la multiplicación

$$5 \times \left(1{,}03\right)^{\frac{20}{73}},$$

para lo cual sumaremos los logaritmos de ambos factores

$$\begin{aligned} +\ \text{log. de } 5 &= 0{,}6989700 \\ +\ \text{log. de } \left(1{,}03\right)^{\frac{20}{73}} &= 0{,}0035170 \\ \hline &\ \ \ 0{,}7024870 \end{aligned}$$

Este log. corresp. al n.º 5,0406

El residuo pedido es, pues,

$$\begin{array}{r} 5{,}5849 \\ 5{,}0406 \\ \hline 0{,}5443 \end{array}$$

$$2^{-3} \div 3^{-4} = \frac{1}{2^3} \div \frac{1}{3^4}$$
$$= \frac{1}{3 \text{ log. de } 2} \div \frac{1}{4 \text{ log. de } 3}$$
$$= \frac{1}{3 \times 0{,}3010300} \div \frac{1}{4 \times 0{,}4771212}$$
$$= \frac{1}{0{,}9030900} \div \frac{1}{1{,}908484}$$
$$= \frac{1}{8} \div \frac{1}{81}$$
$$= \frac{81}{8} = 10{,}125$$

INCÓGNITA COMO EXPONENTE

A veces se ignora cuál es el exponente que hay que dar á un número conocido para producir otro número dado

$$a^x = b$$
$$2^x = 64$$
$$3^x = 81$$
$$125^x = 5$$
$$2401^x = 7$$

En general tenemos

$$m^x = n$$
$$\therefore \quad x \text{ log. de } m = \text{log. de } n$$
$$x = \frac{\text{log. } n}{\text{log. } m}$$

de modo que el valor de la incógnita se halla dividiendo el logaritmo del segundo miembro por el logaritmo de la cantidad conocida en el primero

$$2^x = 64 \therefore x = \frac{\text{log. de } 64}{\text{log. de } 2} = \frac{1{,}8061800}{0{,}3010300} = 6 \text{ ; y, en efecto, } 2^6 = 64$$

$$3^x = 81 \therefore x = \frac{\text{log. de } 81}{\text{log. de } 3} = \frac{1{,}9084850}{0{,}4771212} = 4 \text{ ; y, en efecto, } 3^4 = 81$$

$$125^x = 5 \therefore x = \frac{\text{log. de } 5}{\text{log de } 125} = \frac{0{,}6989700}{2{,}0969100} = \frac{1}{3}\text{; y, con efecto, } 125^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$2401^x = 7 \therefore x = \frac{\text{log. de } 7}{\text{log de } 2401} = \frac{0{,}8450980}{1{,}3803922} = \frac{1}{4}\text{; y, en efecto, } 2401^{\frac{1}{4}} = 7$$

¿Cuál es el valor de x en la ecuación $1{,}035^{x} = 5{,}5849$?

$$x = \frac{\text{log. de } 5{,}5849}{\text{log. de } 1{,}035} = \frac{0{,}7470154}{0.0149404} = 50 \qquad \begin{array}{r|l} 7470154 & 149404 \\ ..34954 & \overline{50} \end{array}$$

$$\therefore \quad 1{,}035^{50} = 5{,}5849$$

¿Cuál es la potencia á que hay que elevar 9 para obtener 90?

$$9^{x} = 90 \quad \therefore \quad \frac{\text{log. de } 90}{\text{log. de } 9} = \frac{1{,}9542425}{0{,}9542425} = 2{,}04795$$

$$\begin{array}{r|l} 19542425 & 9542425 \\ 45757500 & \overline{2{,}04795} \\ 75878000 & \\ 90810250 & \\ 49284250 & \end{array}$$

$$\therefore \quad 9^{2{,}04795} = 90$$

Cuando en un cuociente indicado son negativas las características tanto del dividendo como del divisor, y positivas ambas mantisas, se procederá como sigue:

$$\frac{\bar{1}{,}875}{\bar{4}{,}72}$$

se pondrán en forma de quebrado numerador y denominador.

$$\frac{\bar{1} + \frac{875}{1000}}{\bar{4} + \frac{720}{1000}} = \frac{\frac{-1000 + 875}{1000}}{\frac{-4000 + 720}{1000}}$$

se multiplicará por 1000 el dividendo y el divisor, con lo que el cuociente no variará:

$$\frac{-1000 + 875}{-4000 + 720} = \frac{-125}{-3280}$$

se multiplicarán los dos términos del quebrado por -1; lo que (conforme á las reglas algebráicas de los signos) dará

$$\frac{+125}{+3280} \text{ ó bien } \frac{125}{3280}$$

De modo que el procedimiento consiste en hacer enteramente negativos los conjuntos de característica y mantisa, así en el dividendo como en el divisor, que es equivalente á hacerlos positivos (suponiéndolos multiplicados por -1).

ADVERTENCIA

Las aplicaciones de los logaritmos son innumerables. Sin los logaritmos sería imposible, en el estado actual de las ciencias, dar un paso en Trigonometría, en Geodesia, en Astronomía, en los problemas elevados de interés compuesto, y hasta en las mismas cuestiones puramente logarítmicas, como la formación y ampliación de las Tablas, ó como el tránsito de un sistema de logaritmos en una base, tal como la de Briggs, á otra base tal como la de Nápier, ú otras bases cualesquiera, diferentes de ambas.

Pero de estas aplicaciones no cabe tratar en esta obra, porque no entran en su programa las aplicaciones técnicas del comercio, de la Geometría, de la Trigonometría, de la Agrimensura, etc.

¿Cómo hablar aquí al que ignore la Trigonometría de las aplicaciones de los logaritmos á la Trigonometría?

¿Cómo á quien ignora la Geodesia de aplicaciones á la Geodesia?...

Pero es de tal importancia la práctica de los logaritmos, que nunca el discípulo se ejercitará bastante en el uso de las Tablas. Por lo cual debe constantemente dirigir su atención á alguno de los ramos en que son indispensables los logaritmos, y resolver tan considerable número de problemas que el hábito haga innecesario el raciocinio reflejo.

¡Cuántos hay que han estudiado la teoría, y en la práctica no saben hacer uso de las Tablas!

¡Oh, qué no se vean en tan feo compromiso los que por esta obra hayan aprendido á admirar el sublime invento del gran Nápier!

EPÍLOGO

EPÍLOGO

Pongo término aquí á este Tratado de Aritmética general.

Y no cesa mi trabajo porque nada quede ya por exponer en la inacabable ciencia de los números; sino porque considero cumplido mi programa de 1866: deslindar nociones malamente confusas, ó no bien definidas.

Y, si algo he conseguido, me daré el más cumplido parabién; porque IO HO SEMPRE MENO IN MENTE DI PERSUADERE CHE DI FAR PENSARE.

Inmenso es el campo que queda aún sin explorar; pero el estudioso, guiado ahora por ideas seguras, podrá recorrerlo con relativa facilidad y continuo contentamiento, largamente remunerado por los tesoros de ciencia que lo enriquecerán, sea cual fuere el camino de su elección.

Antes de llegar al término, habría sido incomprensible una descripción de los vastos dominios correspondientes á la Aritmética. Quien escribe sobre esta ciencia se encuentra en la angustia del que navega entre escollos. De una parte, el marino debe seguir el rumbo que lo lleva á su destino, y los arrecifes se lo estorban. De otra parte, el hombre de los números debe obedecer á las prescripciones del método, precisamente cuando más se las veda la índole de la ciencia cuyos principios le está encomendado explicar.

Ya á los comienzos de esta obra hice ver que en Aritmética pasa lo análogo que en Gramática. La Gramática, que es la ciencia del hablar, no puede ser enseñada á quien no sepa ya hablar. Y la Aritmética, que es la ciencia de los números, no puede ser enseñada á quien no sepa hacer uso del sistema de numeración, el cual presupone nada menos que las tres operaciones de sumar, multiplicar y elevar á potencias. Así, los maestros que más metódicamente parecen explicar la ciencia de teoremas tan encadenados entre sí, son los que más sistemáticamente saben ocultar su falta de método, necesaria é ineludible.

CAPÍTULO I

Afortunadamente, hemos llegado todos al punto en que maestros y discípulos podemos entendernos sin que nos detenga la obligación de no hablar de lo desconocido, sino caminando ya por sendas conocidas. Ya es, pues, posible presentar las ideas por el orden lógico de su natural precedencia y creciente complejidad.

§ I

Magnitud.

La primera noción y más sencilla que se ofrece al estudio del matemático, es la del MÁS y el MENOS en el concepto de MAGNITUD. Cuanto se nos presenta como susceptible de mayor ó menor es magnitud, ya se trate de un objeto comparado consigo mismo en diferentes situaciones, ya de objetos distintos comparables bajo algún concepto. La magnitud es, por tanto, aparente y absoluta. Un caballo visto de cerca parece mayor que de lejos nos resulta el mismo animal ú otros de su alzada. Una estatua de tres metros ó cuatro colocada sobre el pedestal de una muy alta columna no parece colosal á quien la ve desde abajo. La luna, cuando sale enrojecida al anochecer, parece mucho mayor que cuando asciende al zenit...

Y es que en la idea de magnitud no entra la de número que la precise y circunscriba. Una magnitud puede agregarse á otra ó cercenarse de ella, sin que tales operaciones deban denominarse suma ó resta. Así, la idea de magnitud se aplica á cosas que no son numerables. El talento de Juan es de primera magnitud. Juan tiene más talento que Pedro.

La idea de magnitud no debe, pues, confundirse con la de CANTIDAD, y muchísimo menos con la de número (1).

§ II

Cantidad.

No hay voz cuyas acepciones hayan sido más diferentes.

Cantidad en los siglos medios significó lo esencialmente divisible en partes, *res per se divisibilis in partes*. Significó también lo que responde á la pregunta *quantus;* de modo que la idea llamada después de *tantidad* significaba una cosa incapaz de aumento y disminución: ¿Cuántas libras? VEINTE Y CINCO: cantidad fija, incapaz de aumento y disminución.

Hoy cantidad se define diciendo que es todo lo susceptible de aumento y disminución, con lo que *cantidad* viene á ser lo mismo que *magnitud*.

Otros agregan que cantidad es todo lo mensurable, susceptible de aumento y disminución; de modo que lo inconmensurable no es cantidad por no ser susceptible de mensura. Por fin, otros la definen diciendo que cantidad es todo lo numerable susceptible de aumento y disminución, con lo que cantidad resulta dependiente de la idea de número y de la de variación en más y en menos.

Parece, pues, deducirse de lo expuesto, que cantidad entraña sólo el concepto de MAGNITUD NUMERABLE. Así, todo lo no numerable, *talento*, *virtud*, *vicio*,... cualidades susceptibles de aumento y disminución, y magnitudes por tanto, queda excluído del concepto de cantidad. Por otra parte, el concepto de *tantidad*, ó de *tanto*, fijo en cada caso particular, queda libre de la idea de aumento y disminución propia del concepto de *magnitud*.

Y, como todo lo numerable entraña el concepto de reunión de cosas ó conceptos individuales, resulta compatible la cantidad con la antigua definición de *res per se divisibilis in partes*. (Véase luego FRACCIONES APERIÓDICAS.)

(1) Sin embargo, por extensión y sinécdoque, *magnitud* aparece como sinónimo frecuentemente de *cantidad* y de *número*.

En muchas cantidades se perciben á la vez el conjunto y las partes. En un pie se ven á la vez el total y cada una de las pulgadas.

En otras cantidades, como en un kilogramo, no se perciben conjuntamente el total y cada uno de los gramos.

Por tanto,

Magnitud es lo que sin números responde á la pregunta ¿de qué tamaño?—Así.

Y cantidad, lo que responde numéricamente á la pregunta ¿cuánto?—17; 101;...

La magnitud no necesita de la idea de número.

La cantidad, sí (1).

§ III

Número.

La distinción de los objetos ó de los actos entraña el concepto de pluralidad.

La repetición de actos ú objetos entraña el concepto de algo repetido.

El algo repetido, no como objeto, sino como repetido, entraña el concepto de unidad.

El concepto de número es, pues, el de repetición definida.

Número no es, por tanto, una pluralidad cualquiera, sino la pluralidad circunscripta de una repetición determinada. No es la pluralidad del universo entero, sino la pluralidad restricta de ciertos hechos repetidos, ó de objetos individuales que conocemos, ó de mensuras que hemos ejecutado...

El número es siempre número de *veces*, no de *cosas*. Cuando dirigimos la atención á un número, dirigimos la atención á las repeticiones como repeticiones, no á los objetos como objetos.

Las operaciones de la Aritmética se hacen, pues, sobre nuestras nociones de la repetición, y no sobre las de magnitud (2).

(1) Natural es, pues, que, por extensión y sinécdoque, *cantidad* en muchos casos sea sinónimo de *número*, lo mismo que de *magnitud*.

(2) Por esto en los siglos medios se discutió si el 1, que no supone la repetición, era número ó no.

§ IV

Unidad.

El concepto de unidad es correlativo del de pluralidad.

La idea de unidad no es la de hecho ni la de cosa.

Unidad es el concepto conforme al cual se llama uno á cada individualidad existente (1).

Así, cualquier individualidad, hecho ú objeto repetible puede ser unida en repeticiones de su misma especie, ó, por lo menos, de su denominación constante ó de momento.

El concepto de la unidad pura de repetición es el concepto de vez, el cual es independiente de las dimensiones de los cuerpos, de sus propiedades corpóreas, físicas y químicas, de sus estados de quietud y movimiento y de su situación respecto de los demás...

Las demás cosas denominadas unidades tienen cualidades físicas y constituyen los módulos.

(1) Definición de Euclides (Libro VII, 1), no bien sustituída hasta ahora sin peticiones de principio.

CAPÍTULO II

Clasificación de los números.

Los números son........	Naturales Artificiales
Los naturales son........	Los números puros Los números de objetos discontinuos

Los artificiales son........	Los núms. concretos de mensura.. Los núms. abstractos de mensura.. Los aperiódicos... Los logarítmicos..	Enteros Quebrados	Ordinarios Decimales	Exactos Periódicos

§ I

Números puros.

La sucesión sugiere el concepto de los números puros.

Este concepto se presenta á la mente de un modo natural y sin necesidad del artificio humano.

El concepto de número puro sólo contiene:

La idea de vez
+ la de repetición de veces *(¿cuántas veces?)*

Los números puros son los representantes de los grados de la escala de la pluralidad, y son, por tanto, independientes de toda relación corpórea, física, química, mecánica ó de situación de las cosas,... así como de todo hecho ú ocurrencia de los fenómenos materiales ó mentales.

Representan sólo el puro concepto de repetición. El sol ha salido 3 veces. He visto 7 veces la estación de las nieves.

Por tanto, los números puros son enteros; — no es posible hacer una cosa $^1/_2$ vez: es inconcebible $^1/_3$ de repetición...

El número puro es la base de todos los números; así de los mismos números puros, como de los números modulares y de los de las demás especies.

He cazado 7 veces,
7 veces de 7 veces
7 veces una flecha, 7 veces 7 flechas
7 veces media braza
7 veces una fracción periódica
7 veces una aperiódica
7 veces un logaritmo.

§ II

Números de objetos discontinuos, ó sucesos aislados.

Su concepto es más complejo que el de número puro, pues contiene:

La idea de vez
+ la de repetición y cuántas veces
+ la de objeto discontinuo ó suceso aislado, asunto de la repetición.

Los objetos discontinuos ó acontecimientos aislados son numerables naturalmente y sin necesidad del artificio humano, y por ellos empezó á entrar en nuestro entendimiento la idea de los números. Los dedos nos han enseñado á contar.

Para la cuenta digital no es condición necesaria la igualdad de los objetos contados ni de los acontecimientos percibidos. Los dedos de las manos y de los pies son 20, y de cierto no son iguales. Dos estrellas, dos arcos, dos flechas, dos guerreros, cinco flores, tres incendios, seis combates,... no son ni iguales ni fraccionables: no tendría sentido $^1/_2$ estrella, $^1/_2$ combate, $^1/_2$ incendio,...

El salvaje no concibe (ni tampoco los hombres de civilización más avanzada) lo que puedan ser dos medios árboles, dos medias lanzas... sino un árbol en dos partes, una lanza en dos trozos,...

En la idea de número de objetos ó sucesos discontinuos no entra, pues, la de partes alícuotas, sino todo lo más la de partes alicuantas.

§ III

Números de mensura.

Aquí aumenta la complejidad; porque los números de mensura son números cuya cuenta no se ofrece al hombre naturalmente. Son números de invención humana.

En el concepto de número de mensura entran las ideas de

Vez
\+ número ó repetición; ó sea cuántas veces
\+ magnitud que se mide
\+ objeto conocido que sirve de módulo concreto de medir (ó hecho conocido)
\+ igualdad de cada cosa medida.

El número concreto de mensura expresa una relación cuantitativa entre una magnitud conocida tomada como módulo y otra magnitud cualquiera de su especie que se desea determinar. ¿Cuántas veces cabe el largo de mi palmo en el largo de esta cuerda? ¿Cuántos pasos tiene de largo este camino? ¿Cuántos codos la altura de esta columna? ¿Cuántas lunas han transcurrido desde la muerte del cacique de tu tribu? ¿Cuántas cántaras de vino caben en este tonel? ¿Cuántas pesetas traes?

Las mediciones han de ser iguales, porque todos los módulos lo han de ser, todos los metros son iguales, todos los kilogramos, todos los duros. Si un duro tiene menos de 5 pesetas, no pasa.

Los primitivos módulos de medir fueron las magnitudes más familiares al hombre: el palmo, el codo, el pie, el paso, la braza... El progreso trajo con el tiempo módulos más uniformes. Y, por último, vino el magnífico sistema métrico decimal, en que todos los módulos están relacionados entre sí.

Los números de mensura son completamente humanos, porque dependen del módulo que se escoja para medir. ¿Cuántos palmos de alto tiene este poste? Diez. Pues si tiene 10 palmos, claro es que medido por codos, el número resultante será otro. Y otro si lo mido por varas ó por metros.

§ IV

Números de mensura enteros y abstractos.

Mayor complejidad:

Idea de vez
+ número de veces (cuántas veces)
+ idea de magnitud cualquiera que deba ser medida
+ idea de módulo cualquiera
+ idea de igualdad de mediciones
+ seguridad de que la verdad de un resultado es independiente de la individualidad de los módulos, y extensiva, por tanto, á todos los casos de igual índole.

El número abstracto de mensura expresa una relación cuantitativa entre un módulo de medir y una magnitud cualquiera de su misma especie. La verdad de un caso concreto es verdad también en todos los casos de la misma índole.

3 varas de alfombra á 2 pesetas, me han costado 6 pesetas. Pues, generalizando: tres cosas cualesquiera al mismo precio me costarán asimismo 6 pesetas. Más aún: 3 cosas cuyo precio sea 2, me costarán 6: (ya se trate de céntimos, ó de reales, ó de pesetas, ó de duros, ó de onzas de oro...) Por manera que la verdad individualísima

3 varas de alfombra á 2 pesetas me han costado 6 pesetas se hace general hasta el punto de ser

$$2 \times 3 = 6$$

¡Generalización admirable, que hace de una verdad especial, una verdad universal, independiente de todo tiempo, y de todo estado, y de toda circunstancia!

Pero semejante generalización no llega nunca ni puede llegar hasta el extremo de hacer del número abstracto un perfecto número puro. Siempre sabemos que los números abstractos se refieren á cosas con cualidades corpóreas ó propiedades propias de los hechos del mundo exterior.

Y así, cuando alguien dice: «he pagado 6 porque cada uno de los 3 costaba 2», entiendo que los 3 eran varas de alfombra, ó kilos de azúcar, ó tablas de chocolate,... y que los 6 son reales, ó pesetas, ó duros... Por eso ningún número abstracto (generalización sólo de un número concreto) puede hacer funciones de multiplicador, en ninguna multiplicación ó suma abreviada, ni en ninguna involución. 2 pesetas × por 3 alfombras es un absurdo. Y lo mismo lo es 2 × 3 mientras 2 se refiera á moneda y 3 á un módulo, por indeterminado que éste sea. El multiplicador, que es el número de veces (que se repite algo), tiene siempre que ser número puro (1).

§§ V y VI

Números de mensura fraccionarios, concretos y abstractos.

Crece la complejidad:

Fracciones ordinarias concretas.	Fracciones ordinarias abstractas.
Idea de vez	Idea de vez
+ número de esas veces	+ número de esas veces
+ idea de magnitud concreta que se mide	+ idea de magnitud cualquiera que deba ser medida
+ idea de módulo concreto	+ idea de módulo cualquiera
+ idea de submódulo concreto	+ idea de submódulo cualquiera
+ idea de que el módulo está dividido en partes alícuotas.	+ idea de que el módulo, sea el que fuere, está dividido en partes alícuotas
+ conocimiento de que el número total de esas partes está expresado por el denominador (2)	+ idea de que esas partes forman un total expresado por el denominador
+ conocimiento de que el número de las partes tomadas está expresado por el numerador (2)	+ idea de que se han tomado de esas partes alícuotas las expresadas por el numerador
	+ seguridad de que la verdad de un resultado es independiente de la individualidad de los módulos, y extensiva, por tanto, á todos los casos de igual índole.

(1) Pero, entiéndase esto bien; al convertirse en abstractos los números, no ha de entenderse que los módulos ni submódulos, pierdan su individualidad, ni que el litro deja de ser litro, ni el metro metro, ni el kilogramo kilogramo, ni la peseta peseta, ni el gramo gramo. No. Lo que se generaliza es el procedimiento numérico, no la aplicación especial del módulo. Para saber cuántos gramos pesa el agua contenida en una esfera de $^1/_2$ metro de diámetro, tengo que hacer operaciones distintas que para averiguar el número de metros cuadrados de estera que necesito para cubrir una sala: lo que generalizo es el resultado de las operaciones: el número de centímetros ^{3} de la esfera es el mismo, ya esté llena de agua, de vino, ó de azogue: el número de metros cuadrados de la sala no varía, así se trate de cubrirla con estera ó con alfombra ó con hule ó con madera.

(2) En un quebrado $\frac{a}{b}$ el denominador no es b veces unidades, sino $\frac{1}{b}$; y el numerador es el número de veces que se repite $\frac{1}{b}$. De modo que el quebrado $\frac{a}{b}$ es realmente $\frac{1}{b} \times a$. Un quebrado, es, pues, la b eñésima parte de un módulo, repetida a veces.

En el lenguaje común una fracción es un fragmento de una cosa.

Pero en Aritmética un quebrado no es una cosa material. Un quebrado expresa siempre una relación numérica:

Relación entre una suma y el número de sus sumandos
O bien, entre un dividendo y su divisor
O bien, entre el número de partes alícuotas en que se ha dividido un módulo y el número de partes alícuotas que de ellas se ha tomado; esto es, relación entre denominador y numerador.

El valor de un quebrado no está, pues, en ninguno de sus términos, numerador ni denominador; por lo mismo de ser el quebrado una forma expresiva de una relación.

Esos términos pueden, por tanto, variar, siempre que la relación continúe subsistente y sin variar. ¡Propiedad esencial de toda relación!

$$\frac{3}{5} = \frac{18}{30} = \frac{6}{10} = 0{,}6 = \frac{60}{100} = 0{,}6000 = \frac{300}{500} \text{ etc.}$$

Por esto los quebrados pueden reducirse á un común denominador; y, ya con denominadores iguales, sujetarse á todas las operaciones aritméticas.

Por medio de los quebrados es inasignable el número de las formas de un guarismo.

3 es no sólo 3 sino también

$$\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \ldots \frac{303}{101} = \ldots \frac{33387}{11129} = \ldots \frac{23}{2/7} \text{ etc.}$$

Los submódulos son precisos, porque con los módulos solamente no basta para medir: un soldado tiene más de 1 metro de estatura y menos de 2 metros: hay, pues, necesidad del milímetro...

Si nunca contáramos cosas capaces de división en partes iguales de su misma naturaleza, nuestro concepto del número estaría reducido al de los números enteros. Si nunca hubiésemos tenido conocimiento más que de las oscilaciones de un péndulo, ó de los latidos del corazón, no es dable concebir cómo habríamos llegado á la noción de las fracciones.

Multiplicar algo por un quebrado es una expresión sin sentido mientras no recibe interpretación:

$$9 \times \frac{2}{3};\ 8 \times \frac{2}{3}, \ldots$$

significan que las magnitudes expresadas por los números 9 y 8 se han de dividir en 3 partes, con lo que tendremos

$$\frac{9}{3}=3;\ \text{y}\ \frac{8}{3};$$

y, obtenidas las expresiones 3 y $\frac{8}{3}$, se multipliquen por 2, lo que sin absurdo ninguno nos dará respectivamente

$$3\times 2=6;\ \text{y}\ \frac{8}{3}\times 2=\frac{16}{3}$$

Los quebrados, pues, aun los abstractos, no pueden ser multiplicadores mientras significan número de partes alícuotas de un módulo (naturalmente con propiedades físicas, geométricas, de situación, etc., etc.)

OBSERVACIÓN

Cabe que el concepto de quebrado proceda de otro origen diferente del expuesto, por resultar de supuestos *numéricos* meramente.

Mientras supongamos á los números formados de sumandos todos iguales menos uno menor (que puede ser cero),

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ +\ 3 \\ \hline =23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ +\ 11 \\ +\ 11 \\ +\ 4 \\ \hline =37 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 0 \\ \hline =21 \end{array}$$

el concepto de quebrado no puede aparecer.

Pero aparecerá *numéricamente* en cuanto se suponga que todos los números están formados por multiplicación.

$$23=4\,\frac{3}{5};\quad 37=3\,\frac{4}{11};\quad 21=7\times 3$$

§ VII

Fracciones decimales.

Son quebrados cuyos denominadores están divididos en 10 partes, ó en 100, ó en 1000, ó en otra potencia de 10.

Las ideas que forman el concepto de las fracciones decimales son:

Idea de vez
+ número de esas veces
+ idea de magnitud (concreta ó abstracta) que se mide
+ idea de módulo (concreto ó abstracto)
+ idea de submódulo (concreto ó abstracto)
+ idea de denominador, ó sea de que el módulo está dividido en partes alícuotas
+ idea de que ese denominador es un denominador especial, porque el número de esas partes es 10, ó bien 100, ó bien 1000, ó bien otra potencia de 10
+ idea de numerador, ó sea de que el número utilizado de esas partes alícuotas está expresado por el numerador.
+ idea de que el resultado, aun en los casos concretos, es independiente de la individualidad de los módulos y extensivo á todos los casos de igual índole.

Las fracciones decimales tienen una notación especial, ampliación del sistema de numeración común.

$$\frac{5}{10} = 0{,}5; \quad \frac{67}{100} = 0{,}67; \quad \frac{101}{100000} = 0{,}00101; \ldots$$

Todos los cálculos de importancia se hacen actualmente con quebrados decimales, por la facilidad de reducir los resultados á la misma denominación.

§ VIII

Fracciones periódicas.

Nueva complejidad.
Forman su concepto:

Idea de vez
+ número de esas veces
+ magnitud mensurable
+ módulo
+ submódulo
+ división del módulo en partes alícuotas
+ El número de esas partes debe ser una potencia del 10.
+ Pero es imposible que sea exacto el numerador de esas partes decimales
+ idea de denominador, ó de que el total de esas partes decimales está en el denominador
+ idea de numerador, ó de que el número aproximado que de ellas se utiliza está expresado por el período del numerador
+ idea de que necesariamente han de aparecer esos períodos por causa de la rotación de los residuos
+ idea de que el resultado de un caso concreto es generalizable á todos los de la misma índole.

Las fracciones periódicas expresan una imposibilidad de transformación numérica.

Son cuocientes aproximados (nunca exactos) de cuocientes reales, pero no expresables por quebrados que tengan por denominador el 10 ni una potencia del 10.

$\frac{1}{3}$ es una magnitud real: es una de las partes alícuotas de un módulo dividido en 3 partes: es un submódulo exacto, pero inexpresable por un quebrado que tenga en el denominador los factores 2 ó 5, que forman el 10 de nuestro sistema de numeración.

$\frac{1}{3}$ es una relación nunca expresable por un quebrado de la forma $\frac{m}{10^n}$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\ \frac{1}{3} = 0{,}3333... \\ \frac{1}{11} = 0{,}090909... \\ \frac{1}{7} = 0{,}142857\,142857\,142857... \end{array}\right\} \text{son expresiones que no expresan igualdades, sino aproximaciones.}$$

OBSERVACIÓN

Las fracciones periódicas no pueden aparecer mientras los módulos se dividen en las partes alícuotas que exigen las necesidades naturales de obtener submódulos. Pero aparecen en cuanto se supone que toda división en partes alícuotas es expresable por quebrados cuyo numerador sea 10, ó bien una potencia de 10.

Las fracciones periódicas resultan del intento puramente humano de tener todas las fracciones fácilmente transformables en denominadores iguales, sujetos á las leyes del sistema corriente de numeración.

§ IX

Fracciones aperiódicas.

Nueva complejidad.

Hay números que no se pueden obtener por involución, ó sea multiplicando otros por sí mismos una ó varias veces, según se obtienen los cuadrados, ó los cubos perfectos, ó las otras potencias de grados superiores, tales como

$$9 = 3 \times 3 = 3^2;\quad 27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3;\quad 81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4;\ \text{etc.}$$

Los números intermedios entre dos potencias de dos números sucesivos de la escala de la pluralidad no pueden obtenerse por involución. Si $3^2 = 9$ y $4^2 = 16$, claro es que, no habiendo entre 3 y 4 ningún otro grado de la escala de la pluralidad, no hay manera de obtener por involución ninguno de los grados intermedios entre 9 y 16; es decir, que 10, 11, 12, 13, 14 y 15 son números irracionales.

Pero, por otra parte, se concibe que si yo divido una cosa, por ejemplo, un módulo, en partes minutísimas, no alicuantas sino alícuotas, y llevo la división hasta el punto de hacerlas más diminutas todavía que los granos de harina, ó el polvo de los caminos, y tomo de ese polvo modular el suficiente número de partes, podré, multiplicando ó repitiendo ese número de partes por sí mismo una ó varias veces, formar una magnitud que dé una potencia tan próxima como se quiera á un número irracional.

Tendremos así en esa potencia un quebrado muy próximo al número sin raíz; y, si calculamos tal quebrado en la forma decimal, esa fracción decimal resultará necesariamente aperiódica; pues, para que fuese periódica, era preciso que significase una imposibilidad de transformación de una magnitud real como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{7}$,... en otro quebrado cuyo denominador contuviese los factores 2 y 5, que son los que forman el 10 ó una potencia del 10.

Así en el concepto de fracción aperiódica entran los de

Vez
\+ número de esas veces ó número de repeticiones
\+ magnitud que se quiere medir
\+ módulo
\+ submódulo
\+ partes alícuotas
\+ número de esas partes = á una alta potencia del 10
\+ idea de denominador
\+ idea de numerador
\+ idea de involución
\+ idea de evolución
\+ idea de aperiodicidad
\+ idea de inconmensurabilidad
\+ idea de aproximación
\+ seguridad de que la fracción aperiódica que se tome da por involución una potencia real.

Las fracciones aperiódicas de un determinado número de decimales son raíces de potencias muy próximas á números que carecen de raíz. El número 5 no tiene raíz; pero la fracción aperiódica 2,236 es exactamente la $\sqrt{}$ del cuadrado 4,999696 que difiere muy poco del 5 irracional.

Y, así como cada grado de la pluralidad puede estar exactamente representado por muchos cuocientes,

$$5 = \frac{30}{6} = \frac{35}{7} = \frac{40}{8} = \frac{45}{9} \text{ etc.},$$

también todo número carente de raíz (ó irracional) puede estar aproximadamente representado por muchas fracciones aperiódicas elevadas adecuadamente á diferentes potencias

5 está representado por $(2{,}236\ )^2 = 4{,}999696$, cuadrado muy próximo al 5
O bien, por $(1{,}71\ )^3 = 5{,}000211$, cubo muy próximo al 5
O bien, por $(1{,}4953)^4 = 4{,}999\ldots$, 4.ª potencia muy próxima al 5

Y, si estas aproximaciones no pareciesen suficientes para la exactitud de un cálculo, siempre pueden computarse otras que difieran del 5 (caso particular puesto ahora como ejemplo) una magnitud menor que cualquiera cantidad dada:

$(2{,}236\ )^2$ da 4,999696 que dista del 5 menos de $\frac{1}{10000}$; pero
$(2{,}236068)^2$ da 5,000000100624 que es poco $>$ que 5 en 1 diez millonésima (1).

---

(1) La expresión MENOR QUE CUALQUIERA CANTIDAD DADA entraña el concepto de LÍMITE.

Límite implica la idea de una magnitud fija λ, á la cual otra magnitud variable v puede irse acercando cuanto se quiera, aunque sin llegar á igualarla nunca. Así, para que λ se estime como límite de v, hay que llenar dos condiciones:

v, por más que crezca ó disminuya, no ha de poder jamás llegar á ser λ
v ha de poder acercarse á λ todo cuanto se quiera.

La circunferencia es, pues, el límite de todos los polígonos inscriptos;

$$v = 7 + \frac{1}{n}$$

tiene por límite 7, al cual nunca podrá llegar, por grande que se conciba á n.

El concepto de límite da sentido á expresiones que carecen de él en el lenguaje común de las Matemáticas. En vez de decir

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

una cantidad finita partida por cero, por nada, es infinita, debe decirse: Cuando el denominador de una fracción aumenta sin límite, permaneciendo invariable el numerador, la fracción disminuye sin límite.

Igualmente, en vez de «El círculo es un polígono de infinito número de lados», hay que decir: «Si el número de los lados de los polígonos inscriptos aumenta sin límite, los polígonos se acercan sin límite al círculo, etc.»

La voz límite hace innecesaria la de infinito en el sentido acabado de mencionar.

La expresión $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ (que no es evidentemente una ecuación) quiere decir: Si extraemos sin límite la raíz cuadrada de 2, obtendremos sin límite expresiones numéricas que, multiplicadas por sí mismas, se irán acercando á 2, aunque sin llegar á serlo jamás.

OBSERVACIÓN

Cuando dos magnitudes no pueden medirse con un mismo módulo, se dice que esas magnitudes son inconmensurables entre sí. Así, el lado del cuadrado y su diagonal son inconmensurables, por no haber fracción ninguna que exprese la razón del uno á la otra; lo cual no significa que el problema sea imposible, porque la solución es la diagonal de un cuadrado cuyo lado sea 1.

Son, pues, inconmensurables las magnitudes cuya razón no puede expresarse por un entero ni por una fracción finita (1).

§ X

Aperiódicos logarítmicos.

El concepto de número llega al máximo de complejidad en los logaritmos; pues á todas las ideas que informan los anteriores hay que agregar la complicadísima que sigue:

Los logaritmos son exponentes aperiódicos calculados de modo tal que sus sumas y sus restas correspondan á multiplicaciones y divisiones de los respectivos números naturales; y sus productos ó cuocientes por coeficientes adecuados á involuciones de potencias de grado igual al valor de los coeficientes, ó á extracciones de raíces análogas:

Log. de $2 +$ log. de $7 =$ al log. del producto de $2 \times 7 = 14$
Log. de $14 -$ log. de $2 =$ al log. del cuociente de $14 \div 2 = 7$
$5 \times$ log. de 2 $=$ al de $2^5 = 32$
Log. de $32 \div 5$ $=$ al de $\sqrt[5]{32} = 2$.

Si cada grado de la pluralidad puede con exactitud estar representado por muchos cuocientes

$$\left(3 = \frac{36}{12} = \frac{39}{13} = \ldots\right)$$

ó bien, aproximadamente por muchas fracciones aperiódicas elevadas á potencias adecuadas

[5 casi igual á $(2{,}236)^2$, ó á $(1{,}71)^3$,...]

(1) De donde resulta lo incorrecto de la frase

Cantidades inconmensurables,

pues es un imposible aritmético precisar *cuántas veces* está una cantidad inconmensurable en otra.

los grados de la escala de la pluralidad también resultan obtenidos por un solo número, el 10 (ú otra base), elevado sucesivamente al correspondiente logaritmo.

§ XI

Esencia del número.

En estas extraordinarias variedades de números, ¿hay algo de común á todas ellas?

Todos los números son conjuntos formados por la repetición de cosas ó conceptos individuales, considerados como UNOS Estos UNOS son desiguales en los objetos ó sucesos naturales discontinuos; é iguales en las individualidades obtenidas por mensura. Existe imposibilidad de encontrar estas individualidades en el caso de las magnitudes inconmensurables, que no resultan numerables; pero entonces se computan números que, por medio de adecuadas operaciones, produzcan otros números conmensurables sumamente próximos á las magnitudes irracionales.

En la idea de número entran

La de UNO, no considerado como cosa, sino como principio de la pluralidad;
La de *individualidad* de cada UNO, distinta de la de los demás,
Y la de PLURALIDAD, no como pluralidad universal, sino como conjunto limitado de individualidades distintas.

Pero estas ideas son comunes á todos los números, y, por consiguiente, no son lo esencial de cada número.

Ahora bien; ¿qué es lo esencial? Lo esencial en cada número es el grado que cada uno ocupa (ó hacen ocupar) en la inacabable escala de la pluralidad.

Y ¿qué representa cada grado?

La razón en que el conjunto de individualidades está con su UNO respectivo

2 = á la razón 2 : 1	$\frac{1}{2}$ = á la razón 1 : 2
3 = á la razón 3 : 1	
4 = á la razón 4 : 1	$\frac{1}{3}$ = á la razón 1 : 3
10 = á la razón 10 : 1	
	Etc.

§ XII

Aritmética.

¿Qué es?

La Aritmética es la ciencia de las razones de los números.

Los números se componen:

ó por suma (+, +, +,...)
- suma regular; $1+1=2$; $2+1,=3$; $3+1,=4$; $4+1=5$;...
- suma {irregular ó arbitraria}; $30+5=35$; $81+17+9+1000=1142$;...

ó por multiplicación (×) {suma de sumandos iguales...} $5\times 3=\left\{\begin{matrix}5\\+5\\+5\end{matrix}\right\}=15$; $3^2=\left\{\begin{matrix}3\\+3\\+3\end{matrix}\right\}=9$; $3^3=\left\{\begin{matrix}9\\+9\\+9\end{matrix}\right\}=27$;

ó por involución, que es de dos clases.......
- a^n...... suma de factores iguales mutiplicados tantas veces como unidades tiene un exponente;
- base log.; el sumando 10 elevado á la potencia representada por el logaritmo; $10^3=1000$;

ó por suma y multip.... (×, y +) {todo número es igual á una suma de sumandos iguales + un sumando menor.......} $(4\times 3)+2=\left\{\begin{matrix}4\\+4\\+4\\+2\end{matrix}\right\}=\begin{array}{r|l}14 & \underline{4}\\ 2 & =3\end{array}=\left\{\begin{matrix}3\,{}^1/_2\\+3\,{}^1/_2\\+3\,{}^1/_2\\+3\,{}^1/_2\end{matrix}\right\}=14$;

ó por suma é involución, (a^n y +) {todo número es igual á una potencia + una demasía............} $7=2^2+3=4+3=$ casi á $2{,}64575\times 2{,}64575$

ó por mult. é invol., que es de dos clases ....
- ($\times$, a^n)... $5\times 3^2=45$; $5\times(2{,}64575)^2=35$
- (m log. n. m log. n

ó por suma, mult. é inv. (+, ×, a^n)
- de un modo regular. Sistemas de numeración 45672329
- de modo arbitrario $3^2\times[(5\times 3)+2=3^2]\times\left\{\begin{matrix}5\,{}^2/_3\\+5\,{}^2/_3\\+5\,{}^2/_3\end{matrix}\right\}=9\times\left\{\begin{matrix}5\\+5\\+5\\+2\end{matrix}\right\}=9\times 17=153$

CAPÍTULO III

Claro es que

LA IDEA DE NÚMERO

con todas sus variantes, complejas y complicadísimas, no podía explicarse de modo inteligible antes de llegar al final de esta obra, cuando ya el lector posee los conocimientos necesarios para abarcar los conceptos en toda su comprensión y abstrusa profundidad.

Pero ¿no es verdad que las definiciones anteriores, por más comprensivas que sean de elementos distintos, resultan sobremanera claras y perspícuas á todos los entendimientos, no digamos ya de los hombres formados, sino de los niños de muy corta edad si se los pone en condiciones de entender?

¿Dónde está aquella serie de paralogismos registrados en los comienzos de esta obra, y que precisamente ahora también conviene que el discípulo lea con la mayor atención, para abarcarlos en toda su generalidad? (1)

¿Cómo la ciencia de los números, desde el frontis del edificio, tiene minados los cimientos?

¿Qué ha pasado en manos de los analistas, que la ciencia llamada de la exactitud se ha embrollado en su exposición y no resulta firme en sus bases?

¿No es extraño que la duda penetre en doctrinas al parecer inatacables? ¿Hay algún misterio en los apartados límites

(1) Véanse las definiciones inadmisibles citadas á las págs. 9 y siguientes del tomo I de este trabajo, y las observaciones sobre el orden llamado lógico, especialmente en el Apéndice á la pág. 176 del tomo II.

de la ciencia que exploran actualmente los geómetras? O bien, ¿se ha dado demasiada extensión á algún principio cierto, apartándolo así de su significación primitiva y produciendo la confusión y el absurdo? Esto debe haber sucedido, si en las deducciones no se ha faltado á las leyes de una rigorosa lógica. Si las consecuencias no son admisibles, forzoso es remontarnos al punto de partida (1).

---

(1) Es increíble el número de paralogismos domiciliados, no digamos ya en la Aritmética simplemente, sino en el Álgebra y el cálculo superior.

Hé aquí algo para muestra:

PARALOGISMOS MATEMÁTICOS

Si sobre una línea tomo una longitud partiendo de derecha á izquierda, esa cantidad será, por ejemplo, positiva; pero, si la tomo hacia la izquierda, será negativa. Y no dejará por esta circunstancia de ser una longitud real, medible y apreciable de mil modos. Sin embargo, esa cantidad medida hacia la izquierda por ser negativa, y según se PRUEBA (?) en los libros que andan en manos de todo el mundo, es menor que cero. ¡Menor que cero una vara de medir si se dirige hacia la izquierda!

Con decir

$$-8 < 0$$

bastaría para que una persona de talento ó de sentido común recelase del libro en que tal cosa se probase (?).

—

Conforme á las reglas de los signos, admitidas por todos, y sin explicación generalizadas, tenemos que

$$\frac{-a}{+a} = -q$$

y que

$$\frac{+a}{-a} = -q$$

de donde, conforme á todos los libros de Álgebra, sale la proporción

$$\frac{-a}{+a} = \frac{+a}{-a};$$

resultado asombroso y tan grande que no cabe en cabeza humana, pues no es concebible que lo menos sea á lo más como lo más á lo menos.

—

Se demuestra que

$$\frac{a}{0} = \infty;$$

pero, estimándose toda cantidad negativa como menor que cero,

$$-b < 0$$

¿qué podrá responderse si se pregunta: á qué será igual $\frac{a}{-b}$? á qué $\frac{a}{-\infty}$?

No hay respuesta racional posible, siempre que se atienda á las prescripciones del sentido común y de la filosofía.

—

Supongamos la ecuación

$$(-a)^2 = (+a)^2$$

Siempre que medimos hacemos uso de un módulo. Vemos cuántas veces la magnitud que medimos contiene al módulo, y llevamos en cuenta la dirección y posición en que verificamos las mediciones. Lo que nos sirve para medir es un tipo, un pedazo, una parte de la magnitud que nos ocupa, con todas sus propiedades; ópticas si es un rayo de luz, dinámicas si es una fuerza, geométricas si es una longitud. Pero el NÚ-

---

Según lo establecido, extraigamos la raíz cuadrada á ambos miembros, y tenemos el evidente absurdo de que

$$-a = +a$$

Las magnitudes podrán ser iguales; pero ¿cómo las direcciones?

—

Tomemos los logaritmos de los miembros de la anterior ecuación, y hallaremos

$$2 \operatorname{Log.} (-a) = 2 \log. (+a);$$

ó bien

$$\operatorname{Log.} (-a) = \log. (+a).$$

Pero es cosa admitida que los números negativos no tienen logaritmos: luego, ¿la carencia de una cosa es igual á la posesión de ella?

—

Si los números negativos no tienen logaritmos, la operación

$$-1258 \times 467$$

resultaría operación imposible: es así que la efectuamos por medio de los logaritmos siempre que nos ocurre esa ú otra de su clase. Luego...

—Pero entrégame la carta.
—Pues déme usted la respuesta.

—

Sea un recipiente lleno de agua hasta cierta altura: supongamos en el fondo de ese recipiente un orificio por donde se escapa el líquido, y que al mismo tiempo se le echa agua por un conducto cualquiera: el aumento ó disminución que experimenta el agua del recipiente podrá siempre, si llamamos a al agua entrante y b á la saliente, representarse por la expresión

$$a - b$$

Si el agua saliente es más que la entrante, resultará que

$$a - b = -c;$$

pero como se dice que

$$-c < 0$$

se deducirá, si algo puede deducirse, que, habiendo salido menos que nada, habrá en el recipiente más que había.

—

Sea

$$\mathrm{A\,B\,C\,D\,E} = a$$

un arco medido desde A.
Si lo medimos en el sentido E D C B A tendremos

$$\text{arco } \mathrm{E\,D\,C\,B\,A} = -a;$$

MERO DE VECES que la magnitud contiene á la llamada unidad no es COSA REAL: es un CONCEPTO MENTAL de relaciones, por medio del cual recorremos la escala de la pluralidad; de modo que la UNIDAD EN ESTE SENTIDO es cosa muy distinta de la llamada UNIDAD QUE NOS SIRVE PARA MEDIR: ésta *tiene* siempre propiedades ópticas, dinámicas, geométricas, acústicas, etc., etc., y aquélla *carece* absolutamente de pro-

---

de donde resulta, según principios admitidos, que cualquier cantidad puede al mismo tiempo ser $>$ y $<$ 0.

—

Si dos cantidades son iguales ó desiguales y á ambas se les hace experimentar la misma modificación, los resultados permanecerán iguales ó desiguales, respectivamente. Esto es racional, mejor dicho axiomático.

Sea

$$-a < 0;$$

multipliquemos ambos miembros de la desigualdad por una cantidad cualquiera: sea esta

$$-b$$

Según las reglas de los signos, tendremos

$$a\,b < 0;$$

pero, como una cantidad positiva no puede ser menor que cero, tendremos que entonces será

$$0 < a\,b.$$

El Peñón de Gibraltar ó el buey suelto bien se lame.

—

El círculo cuyo radio es infinitamente pequeño es un punto.

La circunferencia cuyo radio es infinitamente grande, es una línea recta.

Los conceptos al llegar aquí se pierden. Nos parece oír lo contradictorio: un ruidoso silencio: una oscuridad brillante: un blanco negro: un negro blanco.

—

Consideremos la serie

$$\div -\infty - \ldots -3. -2. -1.\ 0. +1 +2 +3 + \ldots + \infty$$

Según lo establecido

$$-\infty$$

es el límite de los números menores que 0.

Se sabe que si el numerador de una fracción permanece invariable y su denominador crece sin término ni fin, el valor de la fracción disminuye: luego si el denominador llega á ser el número mayor posible, el valor de la fracción será el menor posible..., y viceversa.

Luego debemos tener

$$\frac{a}{+\infty} = -\infty\ ,\ \frac{a}{-\infty} = +\infty$$

piedades de esta especie: su significación, COMPLETAMENTE MENTAL, es el primer grado de la serie de los números ó el principio de la escala de la pluralidad: en una palabra, la unidad que sirve para medir está siempre en la región de lo CONCRETO, y la unidad que sirve para contar nunca sale de la región de lo ABSTRACTO.

¿No se vé ahora claramente que desde *el punto de vista*

Es así que lo que se demuestra es que

$$\frac{a}{0} = \infty$$

Luego...

—

El volúmen de la esfera es igual á la superficie por el tercio del radio. Véase lo que se tiene por demostración.

La esfera puede considerarse como compuesta de un número infinito de pirámides, cada una de las cuales tenga por base un punto de la superficie y por altura el radio: el volúmen de una pirámide es el producto de su base por el tercio de la altura: tomando en la esfera al radio por factor común, tendremos que la suma de todos esos volúmenes estará representada por la suma de las bases multiplicada por el factor común; pero la suma de las bases es la superficie de la esfera, luego...

Pero, según esta representación, al centro de la esfera concurrirán los vértices de todas esas pirámides; y, como las bases son puntos, tendremos que en el centro de la esfera hay tantos puntos como tiene la superficie, luego ¿el centro es igual á la superficie? ¿Luego...?

—

A cada instante se usa en matemáticas la frase número infinito como aplicable á las realidades. Pero el número infinito, para que lo sea, es preciso que encierre todos los casos posibles: muchos de éstos son, simultáneamente, contradictorios en la realidad, como lados entrantes y salientes al mismo tiempo, mayor y menor al mismo tiempo, igual y desigual al mismo tiempo... Luego el número infinito en el orden de la pluralidad es imposible en el orden de la realidad.

—

Las voces irracional é imaginario son de uso constante también; pero ¿pueden darse denominaciones que impliquen mayor discordancia con el antonomástico calificativo de exacta que la ciencia se apropia?

—

Se dice que toda ecuación tiene algún valor real ó imaginario que, sustituído en ella, realiza la igualdad.

Y, *con efecto*, no hay valor ninguno real ni imaginario que realice la supuesta igualdad siguiente,

$$(2x-5)+\sqrt{x^2-7}=0,$$

ni la de ninguna otra ecuación que contenga la misma clase de incompatibilidad en los datos.

Basta ya: basta y sobra con lo dicho, sin necesidad de más detalles, para dar á entender cuántas dificultades entrañan los principios de que por ilación lógica se desprenden los errores consignados.

Y cuenta que la miés es abundante! ¡Cuánto no se puede decir sobre las raíces imaginarias!! ¡Cuánto sobre las fórmulas trigonométricas!! ¡Cuánto sobre os inconmensurables!!

abstracto los números no pueden ser más que ENTEROS? ¿No se observa que es incomprensible un cuarto de signo, medio ruído, un décimo de vida, que NO PUEDE HABER NADA MENOR QUE LA UNIDAD, que es ininteligible para nuestra razón la frase una cosa repetida menos una vez, una moneda repetida menos tres veces, y que es ESENCIAL á la idea de número puro el que sea número entero? ¿No se vé ahora claro que desde el momento en que se diga número fraccionario, número negativo, se hace uso de expresiones incorrectas y contradictorias, como blanco negro, ruidoso silencio, cuadratura del círculo, realización de lo infinito en lo finito,... puesto que lo que puede fraccionarse no es el número, sino el módulo; que lo que puede variar de dirección no es el grado en la escala de la pluralidad, sino la dirección en que llevamos el módulo? ¿No es patente que las expresiones de *número abstracto negativo*, *número abstracto fraccionario*, *número abstracto irracional*, *número abstracto imaginario*... corresponden á imposibilidades lógicas? ¿No es claro que los símbolos escritos ó hablados del sistema de numeración no sirven para otra cosa más que para precisar á qué grado de la escala de la pluralidad corresponde una colección cualquiera de repeticiones?

Por una especie de sinécdoque (muy natural, pero CONTRARIA ENTERAMENTE AL RIGOR DE LA LÓGICA Y FATAL PARA LA EXACTITUD INTRANSIGENTE DE LAS MATEMÁTICAS), los números, SÍMBOLOS REPRESENTATIVOS DE LA OPERACIÓN DE CONTAR, se encuentran de hecho en la parte de la ciencia del cálculo que se designa con el nombre de Algebra, constituídos por los autores, no solamente en SIGNOS INDICATIVOS DE LA MAGNITUD DE LAS CANTIDADES, cuyo tipo son los módulos ó tipos puramente de mensura, sino además en CARACTERES DE LA POSICIÓN, Ó LA EXISTENCIA, Ó LA ACCIÓN DE ESAS CANTIDADES.

¿No se sospecha ya, no se concibe ahora claramente, que, empleado el número en tres usos tan distintos, sea tal propiedad, lógica en uno de esos usos, absurda cuando se trate de EXTENDERLA á alguno de los otros dos; ó que sea IMPOSIBLE su aplicación cuando, CESANDO DE SER el mismo, sea reemplazado por los otros?

Los autores, cuando definen el número, definen la CANTIDAD y no la TEORÍA DEL ORDEN Y DE LA SITUACIÓN DE LAS COSAS SIN NINGUNA CONSIDERACIÓN Á LA MAGNITUD, según la feliz objeción de Poinsot. Se define ordinariamente á las matemáticas como la ciencia de las magnitudes en general ó la ciencia de las cantidades (1) y no se considera al número en sí mismo, abstraído de las magnitudes, formas, posiciones, etc. He aquí por qué implica contradicción la idea aislada de positivo y negativo, puesto que, si los números fuesen ESENCIALMENTE POSITIVOS, nunca podrían ser negativos, so pena de dejar de ser números, por serles esencial lo positivo: y he aquí también por qué lo que no puede hacerse con el número puro es ejecutable sobre el módulo: porque aquello á que se resiste la unidad de numeración, INVARIABLE É INDIVISIBLE, es posible sobre la unidad módulo, tipo representativo de una cantidad, CONCRETO, VARIABLE Y DIVISIBLE, según el deseo de cada cual y cuya grandeza ó pequeñez nada limita.

La fórmula

$$x = a\sqrt{2},$$

en que a es un número puro, representa abstractamente una imposibilidad; pero, reflexionando, diremos: puesto que $a\sqrt{2}$ no puede ser ni concebido ni practicado numéricamente, investiguemos si sucederá lo mismo con

$$\lambda\sqrt{2}$$

llamando λ á la LONGITUD MÓDULO.

Vemos en seguida que, si $\lambda\sqrt{2}$ expresa una longitud realizable, podremos en consecuencia realizar también

$$a \times \sqrt{2} \times \lambda$$

para lo cual bastará repetir a veces, no la longitud λ, sino la longitud $\lambda\sqrt{2}$. Sabemos, desde luego, que, si formamos un triángulo rectángulo en el cual los lados del ángulo recto

(1) No hay cosa más frecuente que oír decir: *escriba usted una cantidad*, como si las cantidades (esto es, las longitudes, superficies, sólidos, fuerzas, pesos, etc.) pudieran escribirse, y como si el sistema de numeración, que está destinado á designar los grados de la pluralidad y no las cantidades, pudiera ser el representante de las magnitudes.

sean iguales á λ, la hipotenusa será tal que su longitud respecto de λ debe expresarse por

$$\lambda\sqrt{2}$$

Pero, si en lugar de $a\sqrt{2}$ se hubiese tenido $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$, construiríamos análogamente las longitudes $\lambda\sqrt{3}$, $\lambda\sqrt{4}$, $\lambda\sqrt{5}$... porque, en efecto, haciendo la hipotenusa del triángulo precedente, lado del ángulo rectángulo, cuyo otro lado fuese siempre λ, la hipotenusa de este segundo triángulo sería $\lambda\sqrt{3}$; y, procediendo del mismo modo, obtendríamos $\lambda\sqrt{4}$, $\lambda\sqrt{5}$... $\lambda\sqrt{N}$. (Véase pág. 324.)

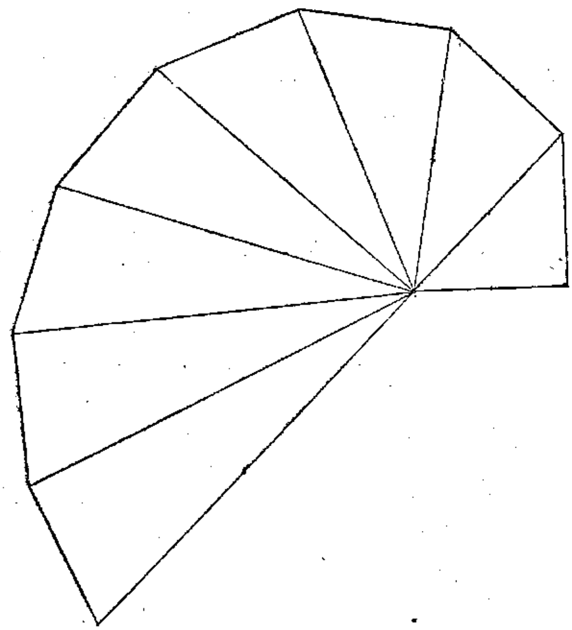


Figura 42.

De lo dicho se deduce que las expresiones

$$N \times 1; \ N \times 0$$

no indican multiplicacion y que

$$1 \times N; \ 0 \times N$$

son multiplicaciones; puesto que el 1 y el 0 están repetidos N veces;

Que es esencial á la mayor parte de las cosas reales el poder ser repetidas, y que, por consiguiente, el multiplicando puede ser concreto y fraccionario;

Pero que en todos los casos, en todos, el multiplicador tiene que ser número puro y, por tanto, entero.

Y que, si desde el punto de vista numérico, la ley de que el orden de los factores no altera el producto debe admitirse como verdadera, no sucede lo mismo en las aplicaciones de la multiplicación á las cuestiones concretas, porque la naturaleza de un factor no es TRANSMISIBLE á otro.

Un módulo puede dividirse y subdividirse y volverse á dividir. Si el módulo primitivo es λ, cada una de sus divisiones se expresará por λ', λ'', λ'''... pero de aquí no se deducirá más sino que el módulo secundario es menor respecto del primitivo; y que, cuando tomemos una fracción de λ, no haremos más que tomar un NÚMERO ENTERO DE VECES alguno de los módulos secundarios λ', λ'', λ'''... Multiplicar quebrados es, pues, repetir un número entero de veces un módulo menor, relacionado con el módulo primitivo; y, así, multiplicar será siempre, conforme á su etimología, repetir y aumentar.

Y ¿no es ya evidente todo lo sentado en esta obra respecto á los inconmensurables y las fracciones aperiódicas?

Me detengo, pues.

Mucho siento que el *Programa* de esta obra no me permita seguir la ilación de las ideas sin entrar en pormenores propios solamente de una obra fundamental de matemáticas; pero con lo dicho hay lo filosóficamente bastante para que pueda concebirse una explicación satisfactoria de las magnitudes irracionales, y para que se calcule cómo la teoría de las expresiones imaginarias ha podido conducir al gran resultado de que $\sqrt{-1}$ sea el signo de la perpendicularidad, así como para comprender, cómo pueden considerarse lógicamente las cantidades positivas y negativas con relación á las imaginarias, y cómo puede pasarse de lo real á lo imaginario. En suma, que es absolutamente necesario admitir en álgebra dos sistemas de numeración, uno *ordinal* y otro *cuantitativo*. Quien desee más pormenores acuda á mi traducción de la obra de *Vallès*.

¿Semejantes contradicciones, tal galimatías, tanta confusión, no merecen ser profundamente estudiadas y cuidadosamente aclaradas para levantar el velo que cubre tantas obscuridades?

Mientras más se reflexiona sobre estas materias, menos de admirar es el que tantas inteligencias se muestren rebeldes á los estudios matemáticos: ¿quién sabe si los más lógicos de entre todos, han de buscarse entre los espíritus que, después de algunos ensayos, los han rechazado? ¿Y quién es quien se atrevería á decir que entre los que han cultivado con éxito la ciencia, se hallará uno solo que durante un tiempo bastante largo no se haya visto obligado á admitir como verdades probadas lo que no era aun para él más que *verba magistri?* Quién sabe, en fin, si hasta el término de su carrera, nuestros más grandes geómetras no han estado más bien PERSUADIDOS que CONVENCIDOS de la verdad de ciertos principios pasados en autoridad de cosa juzgada?

Mientras no se haga la distinción debida entre unidad, módulo, dirección é intensidad;

Mientras que los signos de la pluralidad sean representantes de módulos y direcciones;

Mientras que en la ciencia se continúe afirmando que todo número abstracto es esencialmente positivo;

Mientras que no se proclame en principio que todo número fraccionario es concreto;

Mientras que se continúe haciendo diariamente uso, sin dar explicación ninguna, de cantidades ó de expresiones imaginarias;...

Nunca se tendrá derecho para criticar á los que rehusen comprender, en su conjunto, la exposición de los principios de la ciencia, *y nunca se podrá reprender á los que exijan que las matemáticas* entren en el terreno de que se han separado los autores al sentar sus bases y al exponer sus principios.

FIN DE LA ARITMÉTICA GENERAL

ÍNDICE

PARTE SEGUNDA

SECCIÓN PRIMERA

ARITMÉTICA MODULAR

Páginas.

Libro III

CUOCIENTES IGUALES.—PROGRESIONES.—PROPORCIONES

SECCIÓN SEGUNDA

ARITMÉTICA POR APROXIMACIÓN

Libro I

INCONMENSURABLES

Páginas.

Libro II

LOGARITMOS

EPÍLOGO