ARITMÉTICA GENERAL

MARIANO NÚÑEZ SAMPER, EDITOR
SUCESOR DE JUAN MUÑOZ SÁNCHEZ

ARITMÉTICA GENERAL

POR

EDUARDO BENOT

Io ho meno in mente di persuadere
che di far pensàre.

CIALDI.

TOMO PRIMERO

Luis Govdos

ADMINISTRACIÓN
CALLE DE DON MARTÍN, NÚM. 13
TELÉFONO NÚM. 3 197

MADRID

IMPRENTA DE PEDRO NÚÑEZ, ESPÍRITU SANTO, 18.

HISTORIA DE ESTE TRATADO

Expliqué en Cádiz, oralmente y sin ningún texto escrito, el año de 1866, á niños muy estudiosos de trece á quince años (cuyo recuerdo me es siempre gratísimo), los principios fundamentales de esta Aritmética; y logré que, entendidos por completo, muy pronto les fuera fácil aplicarlos á número de ejemplos tan considerable, que se me hizo imposible examinarlos todos. ¡Con qué alegría se afanaban por ejecutarlos á cual más largos y difíciles! «¡Y no me he equivocado», agregaban todos con orgullosa importancia, «porque he hecho también las pruebas, y todas resultan bien!»

Guardé aquella muchedumbre de ejercicios; y, años después, en 1871, escribí aquí en Madrid las dos secciones de la Parte I de este Tratado, y entresaqué de aquella enorme masa de papeletas y cuartillas cuantos ejemplos me parecieron adecuados para la inteligencia de los principios que iba yo exponiendo. Así, pues, todas las operaciones presentadas en los ocho primeros libros de la Parte I como ejemplos numéricos, todos (con alguna que otra excepción), proceden de aquellos aventajados y entusiastas aprendicillos de matemáticas. Y conservo todavía, sin empleo, número de ejercicios muy copioso.

El año siguiente de 1872 escribí el resto de la obra. Me resultó sobria de ejemplos, porque carecía yo entonces de ocios para ejecutarlos.

Embargada en seguida toda mi atención por más urgentes tareas y quehaceres ineludibles, no volví á mirar mis borradores durante quince años, hasta que en 1887 los mandé copiar; y, sobre la copia, hice considerable número de correcciones, que me parecieron necesarias y oportunas. Entonces agregué á lo ya escrito en 1872 todas aquellas nociones y noticias que me había proporcionado el progreso incansable del tiempo transcurrido. Y no me detengo á enumerarlas, porque, por su carácter etimológico, histórico ó antropológico, han de resultar patentes á cuantos siguen con interés la marcha de los modernos adelantos.

La obra volvió á quedar archivada durante los años transcurridos hasta el presente de 1895, en que durante meses enteros de asidua constancia la he repasado toda, he refundido libros enteros de la Parte II, y la he enriquecido de numerosos ejemplos, algunos de célebres autores (1).

Aunque no hay precaución que yo no haya tomado para asegurar la mayor exactitud en toda la obra, no es de esperar haberla obtenido siempre; por lo cual serán recibidas con el mayor agradecimiento las observaciones y enmiendas que, con el fin de dar algún día á este trabajo la corrección apetecible, quieran remitirme todos cuantos sienten interés en que la juventud estudiosa adquiera desde los principios hábitos correctos de pensar y discurrir.

(1) Y, si no los cito ahora, es porque ahora no tengo seguridad de dónde los saqué, pues no tomé nota cuando los copiaba, creyendo que siempre los recordaría.

PRÓLOGO

I.

Muchos hombres entendidos en Matemáticas suelen decir cuando ven un libro nuevo de la ciencia:

«¿Qué objeto se propone la nueva publicación? ¿Qué vacío llena? ¿Qué falta hace? ¡En Matemáticas está todo tan dicho!!!!...»

Y, en verdad que, generalmente, no carecen de fundamento los que miran con prevención las recientes publicaciones.

Los autores, por lo regular, no hacen más que copiar unos de otros; ó bien, anteponer ó posponer las secciones en que suelen dividirse los tratados; ó bien, agregar y cercenar proposiciones y teoremas; ó bien, dar y quitar importancia á algún ramo especial.

Aquí un autor estudia los logaritmos en la aritmética: allá otro los reserva para el álgebra. Éste suprime las razones aritméticas: aquél da una excesiva importancia á las fracciones decimales, etc., etc.

Pero los que censuran la mayor parte de los libros nuevos de Matemáticas carecen de razón cuando fundan su crítica en la no necesidad de nuevas publicaciones.

No: todo no está dicho en Matemáticas.

Los libros á ellas consagrados (y precisamente los que más favor alcanzan) están cuajados de deficiencias ó de paralogismos, á que sólo la rutina puede quitar su carácter de evidentes. En vano una literatura revolucionaria está clamando desde hace dos siglos contra ellos: el mal continúa y la ciencia no adelanta cual debiera.

¡Esto es matemático! suele decirse para probar la exactitud de un raciocinio; y, sin embargo, los libros de la ciencia llamada de la exactitud, están tan plagados de inexactitudes, como los que menos blasonan de infalibilidad.

Una obra entera ha publicado Mr. VALLÈS demostrando estos errores; y yo he tenido la honra de ser el primero en dar á conocer á los españoles esta notabilísima y profunda producción, traduciéndola y á veces comentándola.

¡Error en los libros de Matemáticas!! Este es el grito con que la incredulidad de la rutina acoge toda aseveración contraria á los llamados textos de la ciencia de la exactitud.

Y es que, regularmente, los hombres creen que las ciencias son la REALIDAD de las cosas.

Las CIENCIAS, como *ciencias*, están todas sujetas á la ley del progreso; todas: así las inductivas, como las deductivas.

Lo contrario es lo que precisamente se enseña en las aulas; pero eso significa que en las escuelas se hace firme el error.

Los HECHOS de que las ciencias tratan, SON LO QUE SON, independientemente de la teoría que pretende explicarlos. Los HECHOS EN SÍ no son verdaderos ni falsos: es verdadera ó falsa la ciencia que sobre ellos teoriza. Así el hecho SUBSISTE y la ciencia CAMBIA.

Ptolomeo cree que la tierra está fija y explica en el error las estaciones: pero el labrador conoce el HECHO de que, sembrando en tal época del año, se cosecha la simiente en tal otra: y el hecho, que da alimento al labrador, es una gran verdad, porque lo es; pero no por lo que dice Ptolomeo. Dos por dos, son cuatro; ¡verdad! pero no porque lo digan los textos.

Una verdad, es verdad porque lo es: no por los libros.

¡HECHOS! ¡HECHOS! ¡HECHOS! pedía el gran dramaturgo inglés.

Sepamos que la luz fija imágenes en la cámara oscura; que la pila voltáica puede transmitir de un continente á otro, por medio de un alambre, movimientos convenidos: sepamos que conservando el periostio se regeneran los huesos; que el cloroformo suprime el dolor; que nuestros metales se encuentran también en las estrellas cuya luz tarda centenares y miles y miles de años en llegar hasta nosotros;... y no nos apesadumbremos porque las antiguas teorías caigan; que muchos años hemos comido el antiquísimo pan sin poseer una teoría pasable de la panificación; y aun en estos momentos ignora la industria cuál es la esencia del acero, sin el cual moriría de hambre la civilización.

Los hechos matemáticos son ciertos: pero su explicación resulta muchas veces insuficiente, y no pocas inexacta.

II.

Hé aquí, pues, la razón de este libro, y el objeto que se propone: expurgar, si es posible, de error la explicación de muchas de las verdades matemáticas, y generalizar la ciencia de los números: que si la humanidad es siempre pobre de HECHOS, los hechos necesitan siempre de CIENCIA ó de TEORÍA que los explique, aunque sea durante un momento únicamente, para ceder luego su puesto á teorías más completas.

Oportuno fuera exponer ahora, en apoyo de lo enunciado, los errores de los libros de Matemáticas, ó algunos de los capitales por lo menos;

pero existiendo ya un Tratado especial, exclusivamente destinado á su designación, á ese mismo Tratado he de referirme, para no indicar aquí mal, ó someramente, lo que está allí con toda amplitud dilucidado (1).

Pero ya que esta obra se halla destinada á la Aritmética (pues acaso no me sea dable continuar mis estudios sobre los otros ramos de las Matemáticas) (2) no estará de más hacer notar, aunque sea de pasada, algunos de los errores capitales, de esencia, que se encuentran en libros muy recomendados á la juventud (libros que, por otra parte, están cuajados de observaciones y verdades de indiscutible mérito).

Casi siempre las definiciones dejan ver una flaqueza intelectual que verdaderamente conturba.

Veamos algunas definiciones. Por ejemplo, las de la voz *Matemáticas*.

Con frecuencia la definen los autores como *la ciencia de la cantidad*. Pero, ¿no tratan también las Matemáticas de las *figuras* y de las *posiciones* que no son cantidad? Y, si se da por atributo á la cantidad la cualidad de ser susceptible de aumento y disminución, ¿no se hacen impropiamente objeto inmediato de las Matemáticas, cosas, fenómenos y afecciones cuya intensidad y magnitud pueden siempre aumentar y disminuir, aunque sin ser numerables, tales como los *dolores* y los *placeres*, las *pasiones* y los *vicios*...? El talento aumenta con el estudio, y disminuye con la ociosidad: pero, ¿qué matemático osará medir al genio? ¿Qué fórmulas pueden determinar la abnegación de los héroes y los mártires? ¿Qué balanza ha podido nunca pesar la virtud? ¿Qué crisol aquilata la furia de los celos?

Otra definición.—*Las Matemáticas constituyen la ciencia de las leyes del tiempo y del espacio*.—Y ¿cuáles son las leyes del tiempo? ¿cuáles las leyes del espacio? Pero no entremos en cuestiones metafísicas. ¿No tratan de los pesos las Matemáticas? ¿de las fuerzas? ¿Y no es absurdo pensar que un gramo posee duración? ¿Qué tiene que ver un kilogramo con el largo, ancho y grueso de la pesa que lo representa? ¿No son cosas distintas del tiempo y el espacio los valores de las cosas? ¿Qué relación hay entre un franco y un minuto? ¿O entre el precio de un jornal y un metro cúbico?

Otra.

Las Matemáticas tienen por objeto la determinación de cuanto puede contarse ó medirse. La cinemática no tiene por objeto contar ni medir. ¿Osaríais excluirla de la ciencia?

Continuemos analizando.

Escojo casi al azar.

Dice uno de los libros más extendidos:

«NÚMERO *es el resultado de la comparación de la unidad con la cantidad*.»

¡Qué confusión de ideas hay aquí!

Antes de comparar, es preciso lógicamente que hayamos percibido las

(1) Véase mi traducción del libro de Mr. VALLÈS, titulada *Errores en los libros de Matemáticas*.

(2) En griego μάθησις, conocimiento, estudio, ciencia.

ideas que se comparan: antes de comparar la *supuesta unidad* con la cantidad es imprescindible que hayamos visto intuitivamente la pluralidad, y que hayamos notado grados en ella; porque UNO y MUCHO son conceptos correlativos y antecedentes lógicos recíprocos, de los cuales no puede uno existir sin que el otro coexista. No se puede tener la idea de oscuridad sin la de luz; ni la de silencio sin la de ruido; ni la de quietud sin la de movimiento; ni la de placer sin la de dolor.

Por otra parte.

¿Quién puede sostener que sólo las cosas comparables nos dan la idea de número, cuando brota la idea de número hasta de la distinción de las cosas más contradictorias?

Además: la idea de UNO, por lo menos, no puede resultar de la comparación, pues que para comparar la unidad con la cantidad es preciso suponer que ya se sabe que es UNO (y no dos, ni tres, ni pluralidad) el módulo que se va á comparar con la cantidad; pero, si esto es así, resulta contradictorio tener la idea de UNO y no tener al mismo tiempo la de MUCHO, porque UNO y MUCHO son conceptos correlativos, como los de luz y oscuridad, quietud y movimiento, de los cuales no puede concebirse un término sin poseer al mismo tiempo su contradictorio.

Por último, y esto es lo capital, es ajeno á toda filosofía decir que la comparación da ideas, cuando la comparación da sólo GRADOS entre ideas que previamente se tenían. Sin la idea PREVIA de mayor, no podríamos decir, al comparar el papel con la mesa, que ésta es mayor que aquél; antes al contrario, porque ya teníamos esa idea, vemos que la relación de magnitud entre la mesa y el papel es un caso concreto del concepto de mayoridad que anteriormente habíamos ya adquirido.

Continuemos examinando.

Analicemos esta otra definición:

«*Se llama* NÚMERO ENTERO *una sola cosa.*»

¡Parece increíble que en serio se estampe definición tan sin fundamento!

Una cosa sola será lo que ella fuere: *libro, hombre, buey*; pero no será número, porque el número no es cosa; es un concepto racional sin existencia corpórea ni realidad tangible ú objetiva.

Otra definición:

«*Se llama* NÚMERO ENTERO *la reunión de varias cosas iguales y semejantes.*»

La reunión se llamará reunión, y á nadie se le ocurre decir, al ver una pila de balas, ó un rebaño de ovejas, ó un escuadrón de caballería, ó un congreso de diputados, «acabo de ver *un número*».

. . . .

Pues si de este modo hablan del NÚMERO los que tratan de la ciencia de los números, ¿qué debemos esperar de las otras definiciones?

Las que de la *unidad* traen los textos son tan inexactas, cuando menos, como las ya expuestas.

Dice uno de los libros de mayor nombradía:

«*Se llama* UNIDAD *una de las cosas iguales ó semejantes que componen un número.*»

Aquí hay más conceptos equivocados que palabras.

En primer lugar: el número no está compuesto de cosas. Las cosas tienen ancho, largo, grueso, color... etc; y ¿no haría reir el que preguntase de los números lo que, científica y seriamente, se puede preguntar de las cosas? ¿Cuál es el ancho de la idea de número? ¿Qué color tiene la idea de 8? ¿Cuánto pesa 25? ¿A qué sabe 19? ¿A qué huele un millón?... etc., etc.

En segundo lugar: una de esas cosas á que se refiere la definición será aquello que fuere: *libro, bomba, buey*; pero no será UNIDAD, porque la idea de unidad no tiene existencia individual; es un concepto relativo, y la relación no es un *algo* que esté EN las cosas, sino que es una idea de un concepto ENTRE las cosas.

En tercer lugar: se confunde de modo lamentable el concepto puro de UNIDAD con el de CUERPO ó MÓDULO, y se quiere que dependa la idea abstracta de unidad de la percepción de un *conjunto* de cosas iguales ó semejantes; de modo que, como no haya *conjunto,* ó como no haya *cosas iguales ó semejantes,* es imposible la idea de UNO. ¡Pues qué! (y hasta descendiendo á lo material de los ejemplos vulgares) ¿no vemos el UNO en un montón de cosas diferentes? ¿A qué viene esa inutilidad de que las cosas (puesto que se quiere que haya cosas) tengan de ser iguales? ¿ó hayan de ser semejantes?

En cuarto lugar: como se supone que la idea de unidad y la idea de cosa son idénticas, los autores agregan en seguida:

«*Una de las partes de la* UNIDAD *se llama* QUEBRADO: *para tener el quebrado es preciso partir la unidad...* etc., etc.

Pero ¿cómo se parte el *uno?*

¿Cómo se parte lo que sea verdaderamente NÚMERO y no COSA?

¿Qué sería emitir medio voto? ¿Qué sería dar consejos dos veces y media? ¿Qué sería pegar media bofetada? (1).

¡Y esto se enseña!!...

Sigamos algo más.

Los autores dicen:

«*Se llama* NÚMERO ABSTRACTO *el número en que no está determinada la unidad.*»

---

(1) Oí de muchacho un cuento allá en mi Andalucía, que revela el cómo estas ideas de sentido común han descendido *(por espontaneidad, ya que no pueda ser por reflexión)* hasta las masas populares.

Érase un enanillo muy astuto y diabólico, y un gigantaso feroz y come-carne. El enano sacó una vez con su ingenio al gigante de un grave apuro, por lo cual el jayán vivía agradecido al hombresuelo.—Pero, como éste era tan diabólico, siempre estaba mortificando al gigante, el cual resolvió darle muerte para librarse de tanta travesura.

—Picaronazo, perro, ahora mismo voy á matarte. Pero, por aquel favor que me hiciste, te permito que elijas el género de muerte que más sea de tu agrado.

—¿Y me matarás de la muerte que yo escoja?

—Palabra de gigante.

—Bueno. Pues mátame de media bofetada.

¡Semejante confusión de ideas pasma! ¡Ni aun distinguir lo indeterminado de lo abstracto! ¿Quién concibe carencia tal de análisis?

Si entramos en una sala donde estén algunos contertulios en conversación y oímos decir, por ejemplo, sin conocer aún el objeto de que se trata,

—Pues yo recibí cuatro. ¿Y usted?

—Cinco.

—Y yo seis y media...

¿no entenderemos desde luego que se habla de COSAS y no de NÚMEROS? ¿No calcularemos que se trata de monedas, cajas, fanegas, etc., y no de NÚMEROS, toda vez que los números no pueden ser OBJETOS recibidos? Lo que quiera que sea eso no determinado que se haya recibido en número de 4, de 5 y de 6 y media, estará indeterminado, pero nunca será lo supremo de lo abstracto, si sabemos ó suponemos que tiene ancho, largo, grueso, peso, color, sabor, dureza, etc., etc.—Pues todavía será más abstracto que lo que tiene dimensiones, peso, color, dureza... aquello en que hayamos prescindido de dureza, color, peso y dimensiones.

Para que un número sea PURO, esto es, número verdaderamente ABSTRACTO (ya que los números ni pesan, ni son extensos, etc.) ese número ha de ser independiente de toda magnitud, de todo peso, de todo color, de toda cualidad, en fin, que afecte nuestros sentidos; y no ha de expresar otra cosa que grados de la escala de la pluralidad. *Sólo entonces será abstracto;* pero, mientras se le supongan *cualidades de las cosas*, podrá todo lo más resultar indeterminado.

¡Rara manera de abstraer la consistente en dar de lado á una denominación ó á un calificativo!

¿Qué tiene de extraño, pues, que en esta confusión de ideas sea errónea la de CANTIDAD? *(Nota, pág. 25.)*

Véase la definición siguiente:

«CANTIDAD *es todo lo susceptible de aumento ó disminución.*»

Aquí se toman los conceptos al revés.

Todo cuanto hay numerable por medio de los módulos de medir conocidos, es susceptible de aumento y disminución (se exceptúa la unidad pura que no es susceptible de disminución) y por ser esto verdad, es verdad también que toda cantidad es susceptible de aumento y disminución; pero no es cierto que sea CANTIDAD todo lo que pueda aumentar ó disminuir. La intensidad de nuestras afecciones *aumenta ó disminuye*, y á nadie se le ha ocurrido decir que tal clase de intensidades sea cantidad; un dolor *aumenta ó disminuye*, y un dolor no es cantidad porque no es numerable. Se cae, pues, por los autores en un error contrario á la dialéctica pura, contraviniendo al cánon que prohibe invertir la proposición afirmativa cuando no es definición.

Proceden como el que dijese:

Todos los leones son animales.

Luego

Todos los animales son leones.

Pero... Basta de paralogismos.

III.

El que quiera estudiar sistemáticamente lo que hay de mal fundado ó mal definido en los libros de la ciencia matemática, acuda al citado libro de Mr. VALLÈS.

Notemos ahora otra serie de males de suma gravedad.

Se ha hecho de moda demostrar lo evidente; y como, cuando un concepto es claro, su demostración no lo aclara, sino que lo perturba, resulta que la percepción de gran número de verdades se dificulta por causa de la demostración.

Además, los autores recorren un círculo vicioso; y, aunque en esencia, explican siempre lo mismo con lo mismo, se ufanan y pavonean cuando logran presentar en formas diferentes un mismo y solo concepto.

¿Qué idea nos daría de sí el que dijera:

—El vidrio es transparente porque es diáfano.

—Y ¿qué es diáfano?

—¡¡Lo que es transparente!!?

La teoría de las paralelas se funda por algunos en las perpendiculares á una línea recta, y la idea de perpendicularidad se explica por el paralelismo!!

Cuando un concepto es claro y evidente, no se debe ni definir ni demostrar: solamente debe exponerse.

La razón de la claridad y evidencia de los axiomas no se funda en ideas anteriores. Y, á semejanza de los axiomas (que se extienden á gran número de ciencias), hay verdades generales, aunque no universales, que son clarísimas en cada ciencia, y que, por lo mismo, no necesitan demostración; y es tan anticientífico pedirla, que al que la exigiera no deberíamos (hoy que hay abuso en demostrar innecesariamente) ni aun siquiera, en castigo, concederle los honores de una contestación.

¿Quién no vé que por un punto no puede trazarse más que una paralela á una recta dada?

¿Quién duda de que desde un punto de una recta no puede levantarse más que una sola perpendicular?

¿Quién no concibe que, si dadas dos perpendiculares, tomamos á la una como eje y hacemos girar la otra alrededor de esté eje, esta última describirá un plano que ha de ser perpendicular á la que sirve de eje?

¡Y los que se afanan por esquivar esta clase de evidencias, incurren en la contradicción de dar por supuesto que es evidente la generación del cono haciendo girar la hipotenusa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos que sirve de eje; ó la de la esfera por el movimiento de un semicírculo alrededor de su diámetro!! *¿Cur tam varie?*

¡Y aun otros conceptos más difíciles!!

La formación del plano descrito por una perpendicular que gira alrededor de otra, ¿en qué se diferencia esencialmente de la generación del cono descrito por una recta que forma con otra un ángulo menor de 90°? Pues si esta generación se da como evidente, ¿por qué no la otra? *¿Cur tam varie?*

Además: ¿qué es el tal plano, más que un cono cuya altura es cero? ¿Pór qué se nos ha de dar como evidente la generación de la superficie cónica en cuanto la altura no es infinitamente pequeña; y se nos ha de negar toda evidencia para la formación del plano en el preciso momento en que la generatriz va á pasar del primero al segundo cuadrante?

LO EVIDENTE NO SE DEMUESTRA: SE EXPONE: SE EXPLICA: SE HACE COMPRENDER: que muchas veces la dificultad de una idea no está en su concepción, sino en la falta de claridad para la inteligencia de los términos con que la verdad se expone.

Habrá persona, indudablemente, que no comprenda (por falta de educación literaria) la frase EL CONTINENTE ES MAYOR QUE EL CONTENIDO. Pero, porque no entienda estos términos, no incurramos en la candidez de pensar que carece del concepto por tales voces expresado. Decidle que meta la mano por el ojo de una llave, y veréis cómo sabe que el continente es mayor que el contenido. ¡Oh! porque alguno ignore el significado de vuestras palabras científicas, no cometáis el grave error de demostrarle alguna idea que ya está harto de saber. Exponedla: explicadla: haced comprender vuestros vocablos; que no es contradictorio el poseer la noción ó el concepto de una cosa, ignorando al mismo tiempo los términos de etimología griega ó latina con que hablan de ellas los hombres versados en las ciencias. ¡Donoso fuera que no pudiese padecer del estómago quien ignorara el significado de la voz helénica *gastralgia!*

IV.

Por último, es preciso, si no desterrar absolutamente de la ciencia el llamado método *ad absurdum,* reducir su uso al límite menor.

¿Qué entendimiento queda satisfecho, porque le digan: «Eso es imposible, porque lo es»? ¡Pues si precisamente lo que habría que demostrar era la anunciada imposibilidad!!

¿Es científico, es siquiera serio el método de demostración descrito desde la más remota antigüedad entre los paralogismos con el nombre de «petición de principio»?

Si S K C P son los factores primos de un número, es IMPOSIBLE que otra descomposición nos dé Z K C P; porque dividiendo la ecuación

$$SKCP = ZKCP$$

por el conjunto común de factores K C P NO SERÍA POSIBLE que Z dividiese á S; ni que Z fuese distinto de S, etc.

Es decir, que esta clase de demostraciones se reduce siempre á lo siguiente:

Tal cosa es imposible, porque esa cosa no es posible.

El método *ad absurdum*, además de no ser otra cosa que una prueba indirecta, se funda en la certeza de un principio que se supone infalible, cuando el progreso de las ciencias todas está haciendo ver continuamente que los principios tenidos por más inconcusos han solido experimentar profundas y radicales modificaciones, si es que el tiempo no los ha declarado completamente erroneos.

«El círculo es la curva perfecta», decía ARISTÓTELES, y, *por consiguiente*, las órbitas de los planetas tienen que ser círculos, porque sería ABSURDO suponer que los movimientos de los astros fuesen imperfectos...»

Y, sin embargo, las órbitas planetarias son elipses.

«Las leyes de la Óptica son inmutables» decían los newtonianos; «*por consiguiente*, es ABSURDO querer acromatizar las lentes.»

Y las lentes se han acromatizado, sin embargo.

La Academia de París declaró ABSURDO la fijación de las imágenes en la cámara oscura, é imposible, por consiguiente, la fotografía, la fototipia, etc.

Y, no obstante, ¡los dibujos de la luz han inundado el mundo!

Sin embargo, cumple confesar que en Geometría es precisamente donde el método *ad absurdum* ha producido y produce menores males.

En efecto; los intereses humanos no están ligados íntimamente á las verdades geométricas; y, por lo tanto, ni el ostracismo, ni la hoguera, ni el cañón castigan, como en las ciencias Morales y Políticas, al osado que, en nombre de hechos nuevos, se levanta en contra de aquellos principios sostenidos por la rutina y el abuso, sólo porque sería absurdo sostener principios enteramente opuestos.

¿Quién hoy concibe que hubiera un tiempo en que se consideraba absurdo el creer que la sociedad podía existir sin esclavitud? ¿Que la mujer no era sierva del hombre? ¿Que la infamia no se hereda? ¿Que la pena no es puramente personal, y que un inocente puede pagar por un culpable?...

El método *ad absurdum*, puesto que toma por medida de lo desconocido lo poco que sabemos, debe, si es posible, ser desterrado de la ciencia. Además, una negación hipotética no habla sino á una sola facultad del entendimiento, y excluye, por consiguiente, de las demostraciones á todas las demás facultades, especialmente á la imaginación; y el hombre no es sólo inteligencia.

V.

Hé aquí, pues, algunas de las consideraciones que me impulsan á publicar este libro. Es preciso, á toda costa, rehabilitar la idea de NÚMERO (1).

Pero... ¿será aplicable esta obra á la enseñanza de la niñez?

---

(1) POINSOT decía en la Academia de Ciencias el 10 de Mayo de 1841:

«Regularmente se definen las Matemáticas como la ciencia de las magnitudes en general, ó la ciencia de las cantidades; lo cual, en el *fondo*, es lo mismo que decir la ciencia de las relaciones. Esta es la definición más general que se ha dado hasta aquí de las Matemáticas; pero, aunque esta definición parezca abrazar toda la ciencia, no creo que dé una idea de ella bastante profunda ni extensa, porque las Matemáticas no son sólo la ciencia de las relaciones; esto es, que no se atiende en ellas únicamente á la proporción y á la medida, sino que deben estudiar también EL NÚMERO EN SÍ MISMO, es decir el orden y situación de las cosas sin

Verdaderamente esto importaría poco, si servía para la enseñanza de los hombres; pero puedo asegurar que, antes de destinarla á la prensa, la he aquilatado por mí mismo ENSEÑANDO; y enseñando á toda clase de inteligencias.

La mayor parte de los ejemplos en la Parte I de esta obra, no están trabajados por mí, sino por niños alumnos míos.

Ahora... el público juzgará.

VI.

Cierto estoy ¡pues no he de estarlo! de que seré acerbamente censurado por obligar á los alumnos á practicar constantemente las operaciones aritméticas en sistemas que no se emplean en los cómputos ordinarios de la vida.

¿Para qué sirve el sistema binario? ¿Para qué el ternario?... *et sic de ceteris.*

¡Ah!—¿Para qué sirve la gimnasia? El gimnasta, con todos sus ejercicios, no sabe montar á caballo, ni remar, ni manejar las armas, ni...—¡Verdad! Pero no fortifiquéis vuestra organización física, y cuando llegue la epidemia seréis de las primeras víctimas.

Mens sana in corpore sano, dijo la sabiduría antigua. Disponed de un cuerpo sano y vigoroso, y dominaréis en brevísimo tiempo todos los ejercicios de la industria humana; y, cuando queráis, seréis jinetes infatigables, remeros capaces de llevar un salvavidas á los náufragos víctimas de las tempestades; diestros en las armas, maestros en la industria... y, sobre todo, hombres de inteligencia y de saber; que la ciencia huye de la enfermedad y de los organismos escapados del cementerio.

Grande es el resultado de la gimnasia muscular; grande es tener esclavizada la salud;... pero inmensamente más grande es la gimnasia intelectual, que desarrolla la mente con las ideas de número y espacio. Acostumbráos á ellas, y seréis grandes, y no pasaréis sobre la tierra como la sombra de las nubes.

---

abstracción completa en sus relaciones y de las distancias más ó menos grandes que las separan.»

La idea completa de número se hallará al fin de esta obra, Parte II, en el EPÍLOGO. Y no puede darse antes por falta de preparación en el alumno.

CUESTIONES DE MÉTODO

Más que á persuadir, aspiro á hacer pensar sobre nuevos modos de considerar los números. Creo mal deslindadas sus funciones, y deseo establecer bases firmes y seguras acerca de su naturaleza íntima, para deducir correctamente las leyes generalísimas á que están sujetas sus múltiples combinaciones. No entra, pues, en el programa de esta obra ninguno de los procedimientos concretos propios de la Aritmética técnica. Sobre el cálculo mercantil, las operaciones de Banca, la logaritmia trigonométrica... hay Tratados excelentes, y á esos libros especiales debe acudir el estudiante deseoso de perfeccionarse en materias tan útiles como necesarias para los hombres de los negocios y la industria. ¿Ni cómo en una obra, consagrada principalmente á las generalidades de los números, cabrían las aplicaciones técnicas de los logaritmos á la trigonometría, ó la geodesia, ó la agrimensura... siendo de suponer que ha de ignorarlas el estudiante de Aritmética?

Dicen que el Poeta y el Inventor nacen, y que los oradores se hacen. Lo mismo debería también afirmarse de los genios del cálculo por una parte, y de la masa general de los hombres de las Matemáticas por otra. Muéstrase, en verdad, muy avara la naturaleza de producciones como el *Prometeo*, de Esquilo, y el *Quijote*, de Cervantes, el telescopio, la locomotora, el teléfono... tan avara como de las obras de Arquímedes, Newton, Fresnel, Ampère... Pero, ya en esfera inferior á la del genio, son menos escasas, bastante menos, las obras matemáticas, ó sea las engendradas por las facultades deductivas, reguladoras del mundo, que las producidas en la república de las letras por la imaginación creadora, potencia admirable que ve las cosas en la mente antes de existir en la realidad.

¡Qué contados son los verdaderos inventores! ¡Qué pocos los poetas! ¡Cuán raros los hombres que saben medir versos! ¿Para qué los recitarán en público ingenieros de nota, oradores de fama, notabilidades del foro... si han de ponerse solemnemente en ridículo, ya embutiéndoles sílabas de más, ya amputándoles sílabas de menos?

No: no es escaso el número de personas liberalmente dotadas de todas las facultades precisas para hacerse con el tiempo matemáticos distinguidos. Pero no todas estas buenas inteligencias llegan á granar, por culpa de la enseñanza; que la ciencia de los números y de las figuras, requiere que su estudio se empiece por los casos particulares y no por las generalidades más abstrusas.

Y precisamente lo contrario es lo que priva; pues hasta se canoniza como labor de gran mérito y de primor exquisito el encerrar en brevísimas páginas lo que reclama multitud de ejercicios y hasta lujo de amplificación.

Yo sigo precisamente el camino opuesto; porque el que encuentro tan de moda no produce discípulos. Creo que en pedagogía pasa lo mismo que en mecánica: lo que se gana en tiempo se pierde en fuerza. Sí: para hacer una cosa en poco tiempo se necesita una gran potencia; y cada vez estoy más convencido de que sólo á costa de tiempo y de práctica continua, las inteligencias no privilegiadas pueden apoderarse del instrumento potentísimo del cálculo. Y hoy, lo mismo que cuando emprendí la no fácil tarea de escribir este Tratado, considero, en vista de los resultados obtenidos allá en 1866, y de otros logrados últimamente, que el método seguido en esta obra ha de ser beneficioso á cuantos se tomen el trabajo de leerla, y muy superior al empleado en las aulas.

¡Que se requiere tiempo! ¡Verdad! Pero se llegará al término.

Y siempre ese tiempo será menos que el empleado en no llegar.

Con tratados chicos no se ahorra tiempo. Aspirar á jinete en un semestre, es aspirar á caer de cabeza desde un caballo abajo. Querer, como algunos audaces, ser floretistas en un año, es querer tener la seguridad de que los mate un hombre de corazón y arrojo, aunque no entienda de esgrima.

¿Qué tiempo se necesita para ser un pianista consumado? Diez años por lo menos, y eso si se tiene gran disposición. Nadie se admira de esta respuesta, tratándose de un instrumento musical, y todos se espantan (ministros inclusive, dados á formar planes de estudios, sin haber nunca enseñado), cuando un hombre curtido en la enseñanza les afirma que no se aprende Aritmética en un curso, mermado por vacaciones y faltas de asistencia.

Yo aspiro á que esta obra se lea, si no como una novela, casi como se leen las obras de *ciencia amena,* puestas al alcance de todo el mundo, para entender las cuales basta sólo una atención tenaz y sostenida (1).

Por eso en los cálculos procuro pasar sin saltos de una fórmula á otra, para lo cual los presento siempre desarrollados; que la Aritmética no es la ciencia de las charadas. Conduzco de la mano al alumno, y le muestro todos los trámites en la marcha de las operaciones, porque la claridad así lo exige de quien tiene deseos de enseñar. Nada tan oscuro y repelente como la fingida facilidad con que los autores dicen en los libros de texto:

desarrollando esta expresión, tendremos tal cosa.

Pero, si el discípulo no sabe desarrollar, ó no tiene hábito de hacerlo, ¿cómo lo ha de conseguir? ¿Cómo el infeliz que aprende ha de llegar sin equivocarse al término de un desarrollo que requiera un pliego de transformaciones difíciles? Y, aunque no sea preciso llenar de números una hoja, ¿cómo manejarse si se trata de cómputos no familiares, según pasa con frecuencia en el tránsito de los decimales á sus generatrices, ó en las operaciones de logaritmos?

Las obras de texto en que se pegan tales saltos, serán todo lo sabias que se quiera, pero jamás resultarán propias para la enseñanza; si ya no es que haya en ellas algo de la menguada astucia que quiere hacer sentir la superioridad del que sabe una cosa ante el desdichado que la ignora. Y, así, en vez de hacer amoroso el estudio, se le hace aborrecible, á veces hasta el extremo de que el discípulo arroje el libro contra la pared contigua, y tome la resolución de no pensar más en matemáticas (como de ello se dan casos y puedo yo certificar por experiencia propia).

Estas consideraciones me han impulsado á extenderme en algunas secciones de la Aritmética modular, sobre las que no tenía cosa esencialmente nueva que decir, por estar ya expuestas con toda exactitud en obras dignas del mayor aprecio. Pero los asuntos en ellas tratados resultan unas veces expuestos con tal concisión, otras con tal profundidad, otras tan inadecuadamente para principiantes, que he creído de mi deber ahorrar tiempo y trabajo al alumno, exponiendo las materias menos precipitadamente y más por sus pasos contados, ó bien partiendo de puntos de vista

(1) Claro es que en esto no incluyo los ejercicios indispensables para adquirir el hábito de los cómputos aritméticos.

más accesibles á la inteligencia de los principiantes. A no ser por esto, habría yo remitido al alumno á las obras que tratan bien tales asuntos (como lo he hecho en algunas ocasiones).

En los autores se encuentra considerable número de demostraciones fundadas exclusivamente en la dialéctica matemática, acerca de las cuales no es lícito dudar, so pena de negar las Matemáticas mismas; pero, como en tales demostraciones no se vislumbra el por qué del camino seguido. resulta que, sin poder ser negadas, no dejan satisfecho á quien quiere también conocer la causa de la elección del camino.

Tal sucede, por ejemplo entre muchos, con el procedimiento que generalmente se sigue para hallar las generatrices de las fracciones periódicas: «*Multiplíquese* (dice el texto) *por tal cantidad, pártase por tal otra, procédase luego de tal modo y resultará tal cosa.*»—«Bien,» dice el alumno: «pero ¿por qué hacer esas cosas y no otras?»

En casos de esta índole he procurado conducir al alumno por medios, á mi entender, más evidentes.

Los que hayan de leer esta obra deberán tener ya adquirida alguna práctica del mecanismo de las operaciones aritméticas.

En el estudio de la Aritmética ocurre una grave dificultad de método. Los sistemas de numeración suponen el *sumar*, el *multiplicar* y la *elevación á potencias*, de modo que en la explicación hay que admitir como «*conocidos*» CONOCIMIENTOS que precisamente hay que *dar á conocer* (1).

Con la Aritmética ocurre algo de lo que acontece en Gramática: la Gramática, que es el arte de hablar, no podría explicarse á quien no supiese ya hablar.

Por otra parte, nadie llega á las clases sin saber, por lo menos inconscientemente, *sumar* y *restar*; pues actos muy frecuentes de la vida, tales como el comprar y el vender, no entrañan otra cosa; por lo que no hay contradicción en aprender algunos modos de operar antes de conocer las razones que los explican y sustentan.

Por otro lado, ¡cuántas personas ejecutan bien lo que se llama «las cuatro *reglas*», sin conocer sus fundamentos!

Por tal motivo, en esta obra, antes que las estrechas exigencias del método hubieran en rigor de consentirlo, se adelantarán ideas, cuyos antecedentes supondremos conocidos, aunque sea vagamente; pero, como en verdad, el discípulo las tendrá ya adquiridas, nada se perderá en la exposición, y, en cambio, se ganará mucho en la brevedad.

Quien no practica no aprende. Quien no monta á caballo nunca será jinete. Quien no se embarque no se mareará. Por lo cual he cuidado de multiplicar los ejemplos y los ejercicios; y, si alguien cree que hay demasiados... que los pase de largo y los dé por omitidos (aunque bien pudiera ser —y de seguro será—que pronto eche de menos la soltura y agilidad, garantías de una práctica firme y segura). ¿Qué estudiante podrá nunca decir que se ha ejercitado ya bastante en la operación de dividir grandes guarismos, ó en la extracción de la $\sqrt{}$, ó en el manejo de las tablas de logaritmos?... Suele repetirse que los decimales son facilísimos; pero, ¿hay muchos que sepan decimales bien? ¿Hay muchos profesores que los practiquen con soltura?

---

(1) **Es evidente á todas luces que el sistema de numeración supone las operaciones de** ***sumar, multiplicar y elevar á potencias.***

$$
\begin{array}{rrrrrr}
4\,328\,567 = & 4\,000\,000 = & 4 \times & 1\,000\,000 = & & 4 \times 10^6 \\
& +\ 300\,000 & +\ 3 \times & 100\,000 & & +\ 3 \times 10^5 \\
& +\ 20\,000 & +\ 2 \times & 10\,000 & & +\ 2 \times 10^4 \\
& +\ 8\,000 & +\ 8 \times & 1\,000 & & +\ 8 \times 10^3 \\
& +\ 500 & +\ 5 \times & 100 & & +\ 5 \times 10^2 \\
& +\ 60 & +\ 6 \times & 10 & & +\ 6 \times 10^1 \\
& +\ 7 & +\ 7 \times & 1 & & +\ 7 \times 10^0
\end{array}
$$

Existe una ciencia del operar: el Algebra. Y en esta obra se pretende hacer adquirir al alumno el instinto de los procedimientos.

Cuando se trata de los principios de cualquier operación de cálculo numérico, la Aritmética es *ciencia*, y una de las más dignas de estudio,

«mundum regunt numeri»,

aunque no todo sea numerable.

Pero, cuando sólo se aprenden los procedimientos en cuya virtud se hacen las operaciones, y no se estudia *al mismo tiempo* la razón de los modos de operar, entonces el cálculo numérico queda reducido á la simple categoría de *arte*.

En las casas de comercio suelen aplicar (y bien) personas ajenas á las Matemáticas, los procedimientos aritméticos á las operaciones de escritorio. Mas llega un caso nuevo (y esto ocurre con frecuencia), y entonces el que *sólo conoce mecánicamente* tiene que acudir al hombre de la ciencia.

Pero es el caso que la teoría no puede ser aplicada, ni bien ni mal, improvisadamente por un hombre que desconozca los procedimientos de la práctica.

«Nadie sabe más que lo que hace», ha dicho el célebre Vico; y acaso á ciencia ninguna pueda esa sentencia aplicarse con mayor propiedad que á la ciencia de los números.

¡Con qué frecuencia en el curso de la vida se ha encontrado uno con *maestros de Matemáticas* que no tenían práctica al operar!!!

Los libros de matemáticas no han de ser, pues, incompletos: no deben, por tanto, blasonar puramente de prácticos, pero tampoco de teóricos solamente. El cálculo se aprende para aplicarlo á las necesidades del comercio, de la banca, de la industria, de la mecánica...; y, en esta época de positivas realidades, más que el grave é incompleto profesor que se equivoca, frunce el entrecejo, suda y no atina con una suma larga ó no da con un cociente algo intrincado, vale el hombre práctico que opera con rapidez y seguridad. Llegado el momento de ejecutar, ¿quién llama al profesor que, con toda su creída sapiencia, no logra hablar ni escribir en la ciencia de los cálculos?

PRÁCTICA y TEORÍA: TEORÍA y PRÁCTICA CONJUNTAMENTE es lo que en Matemáticas se necesita; y, si algún impaciente cree que, mientras practica, pierde un tiempo necesario para aprender teorías, preciso es convencerle de que no dominará nunca esas mismas teorías que apetece, hasta que le sean familiares los mecanismos y procedimientos de la práctica; que, en rigor de verdad, *«nadie sabe más que aquello que ejecuta.»*

Practique, pues, y al fin hallará en el desarrollo gimnástico de su inteligencia, proporcionada y útil recompensa á los laboriosos esfuerzos de su asiduidad.

En un sentido hiperbólico, pero profundísimo, decía Newton que

«El GENIO *es la paciencia»*.

Por lo demás, es un delirio pensar que los altos y fecundos métodos de investigación de las ciencias pueden bajarse al nivel de los conocimientos vulgares. Sin laboriosidad no se aprende, y siempre los hechos y los procedimientos científicos serán, como dicen pintorescamente los árabes,

«una cerradura cuya llave es el estudio».

Sí: el estudio.

En las ciencias no hay caminos llanos por donde cueste poca fatiga el caminar, decía EUCLIDES á Ptolomeo. Sólo hay un medio de no fatigarse: el de hacerse robusto y vigoroso por medio de la gimnasia intelectual.

Las Matemáticas han de mirarse, más que como una de las conquistas prodigiosas de la humanidad, como el medio por excelencia para infundir en las generaciones la aptitud intelectual que aparta espontáneamente los entendimientos de las falacias del error.

PARTE PRIMERA

SECCIÓN PRIMERA

ARITMÉTICA PURA

PRENOCIONES

LECCIÓN I

Unidad.—Pluralidad.—Grados de la pluralidad.

Todos nos creemos distintos de los objetos que nos rodean.

El conocimiento de esta DISTINCIÓN no tuvo principio ayer, ni anteayer, ni el día anterior, ni la semana pasada, ni el año último, ni el otro...

Cuenta ya muchos años que la hacemos; y, sin embargo, el día de nuestro nacimiento, y durante muchos, muchos meses después, no podíamos hacerla.

¿Cuándo empezó?

No lo podemos determinar; pero sabemos con entera certeza que ha habido un día en que, inconscientemente, nos hemos DISTINGUIDO del mundo exterior; y en que, además (espontáneamente y sin emplear, por supuesto, la tecnología científica, entonces ignorada por completo) hemos deslindado unos de otros los fenómenos mismos de nuestro ser; esto es, en que hemos distinguido nuestres actos de nuestros pensamientos, nuestros pensamientos de nuestros dolores, nuestros dolores de nuestros placeres; y en que hemos también distinguido placeres de placeres, dolores de dolores, etc., etc.

Pues bien; desde el momento en que, inconscientemente, empezamos á hacer esas DISTINCIONES, alboreó en nuestra inteligencia la idea de PLURALIDAD.

«DISTINGUIR» es ver la «MULTIPLICIDAD».

Distinguir una cosa de otra es, en el fondo, tener la idea de dos.

Durante mucho tiempo no existe en la mente del niño más que la confusa idea de MULTIPLICIDAD y de UNIDAD (por supuesto, sin saber aplicarles estos nombres).

Sabe (sin darse de ello cuenta) que él es «UNO» y qué los objetos son «MUCHOS»; pero no sabe CONTAR, y tanto, que hasta el contar le es refractario.

Mas llega al fin esa época en que no solamente percibe ya la multiplicidad, sino que además ve «GRADOS» en la multiplicidad, en MÁS, en MENOS; y no sólo ve el MÁS y el MENOS, sino que nota como *secciones* y *trozos* y *grados* en el MÁS, y como *secciones* y *trozos* y *grados* en el MENOS.

Pero percibir esos grados es dar pasos de gigante en las regiones de la inteligencia; es nada menos que tener la portentosa idea de «NÚMERO».

¿Qué son, pues, los NÚMEROS?

LOS NÚMEROS SON LOS GRADOS DE LA ESCALA DE LA PLURALIDAD.

¿Qué es, pues, UNO?

UNO es el primer grado de la escala de la pluralidad.

¿Qué es DOS?

El segundo grado de la escala de la pluralidad.

¿Qué es TRES?

El tercer grado de la escala de la pluralidad.

Y así sucesivamente. *(Véase nota página 15.)*

La idea de pluralidad, pues, y sus grados, nos han acudido, «DISTINGUIENDO» secciones en la idea de MUCHOS.

Y la hemos adquirido independientemente de que esos MUCHOS fuesen ó no de la misma especie, semejantes ó desemejantes, corpóreos ó intelectuales. (Véase la introducción á la Parte II.)

Pero ¡cuánto tiempo ha tardado la humanidad en descubrir que la idea de PLURALIDAD es un puro concepto de la inteligencia, INDEPENDIENTE de la idea de CUERPO, y que nada hay en ella de común con la idea de objeto material!!

Por consiguiente:

La ciencia que trata de los números puros tiene, en general, por objeto la TEORÍA del ORDEN, de la sucesión y repetición de los hechos, y de la SITUACIÓN de las cosas con ABSTRACCION COMPLETA de su TAMAÑO, DISTANCIA, SUSTANCIA, NATURALEZA y estado de QUIETUD ó MOVIMIENTO.

¿Pero es esto definir? No, sin duda.

Las ideas de orden y pluralidad no se pueden definir: son un hecho primitivo y ningún hecho primitivo puede definirse; como no se define la idea de ser, ni la de placer ó dolor, etc.; porque tras esos conceptos no hay una idea más general de su misma especie.

Y, sin embargo, la falta de definición en nada amengua ni perturba el concepto de *orden* ó sucesión, ni mucho menos el de *pluralidad,* que es UNO DE LOS MÁS CLAROS Y PERSPICUOS QUE HOY POSEE LA CIVILIZACIÓN MODERNA.

Ni sería necesaria la definición, caso de existir, porque no añadiría claridad á lo que de suyo es clarísimo: EVIDENTE para todo ser cuya razón esté algo cultivada.

¿Cuál es el objeto de toda definición?

Hacer claro un concepto. Pues cuando el concepto es claro *«à priori»,* no hace falta la definición.

APÉNDICE.

UNO, DOS, MUCHO.

Durante largo tiempo el niño no puede contar. Todo lo más que hace es distinguir el grado *uno* y el grado *dos*. En pasando de dos, todo para el niño es *mucho.*

Lo mismo ocurre á los pueblos salvajes estacionados en el ínfimo nivel de la civilización.

Ya ARISTÓTELES menciona una tribu de *Traces* que nunca tuvo palabras para contar más de 4.

Las tribus muy atrasadas de los bosques de la América del Sur, y las de los desiertos de Australia, no poseen á menudo palabra ninguna para designar nuestro concepto de 5. Los viajeros no han podido encontrar en los idiomas de gran número de estas tribus nombres para los números superiores al 4, y á veces al 3, y ¡áun al 2!

Los *Puris* del Brasil sólo conocen el 1, el 2 y el 3, que significa, además, *mucho.* Los *Botocudos* de la misma región tienen 1, y 2, que es igualmente *mucho*. Los *Tasmanios* poseen el 1, el 2 y otro vocablo que significa *más de 2*. (Sin embargo, la palabra que en su lengua significa *hombre*, les sirve igualmente para designar el número 5.) Los *Neo-Holandeses* occidentales carecen de vocablo para los números que pasan de 2. La escala numérica de los *Watchandies* consta de las voces expresivas de 1, 2, *mucho* y *muchísimo* (inmensamente). Para el 3 dicen *dos-uno*, y para el 4, *dos-dos*. En el mismo principio se funda la numeración de los habitantes de *Queensland*, si bien las palabras son otras (uno, dos, dos-uno, dos-dos). Además poseen otro vocablo que significa *más de cuatro*, *mucho*, *considerablemente*. El dialecto *Camilaroi* tiene vocablos para el 1, el 2 y el 3, y puede contar hasta el 6, diciendo: *dos-dos*, *dos-tres*, *tres-tres*.

De esta pobreza de expresiones nos es imposible dudar, comprobada como está por unánime multitud de viajeros, naturalistas, etnógrafos y misioneros. Por más que al filósofo de nuestros días le sea imposible imaginar una mole tan grande ó un átomo tan pequeño que no sean inmediatamente computados por nuestros matemáticos, preciso es reconocer que los llamados axiomas de la aritmética están muy lejos de serlo. Ni al niño de los actuales pueblos civilizados, ni al hombre de las razas más salvajes, es accesible semejante género de verdades. Diez y diez son veinte, es un enigma para ellos.

Guillermo de Humboldt observa que las expresiones superlativas formadas sobre el número 3 son una reliquia llegada hasta nosotros desde los tiempos en que tres era sinónimo de muchos: *tris-megistus*, *ter felix*, *thrice blest*, *trois fois béni*... pueden servir de ejemplos.

En los jeroglíficos egipcios, *un* caballo, por ejemplo, se indica por una línea de arriba abajo; *dos* caballos, por dos líneas; *muchos* caballos, por *tres* líneas (símbolo que al mismo tiempo puede ser sinónimo de 3 de dichos animales).

No pocas lenguas tienen tres números gramaticales: singular, dual y plural. El egipcio, el árabe, el hebreo, el sanscrito, el griego, el gótico.... poseen estos tres números gramaticales, supervivencia de un período de cultura muy primitiva, en que todo cuanto excedía de dos era, para inteligencias no desarrolladas aún, un concepto indefinido de *mucho* ó de *pluralidad*..

LECCIÓN II

Unidad pura.—Unidad módulo.

Los objetos discontinuos son los que nos sugieren la primera idea de la pluralidad. Nuestros dedos, las estrellas, las olas del mar, los árboles de los bosques, sus ramas y sus hojas, la innumerable suma de piedras, conchas y arenas de las playas... son multitudes que nos asombran, que acaso no podemos contar, pero en todas las cuales está la sugestión de la idea de número, porque todas esas multitudes se hallan formadas de objetos DISCONTINUOS, DISTINTOS los unos de los otros.

La extensión del cielo azul, la del horizonte en la mar, la de una llanura que se aleja uniformemente hasta perderse de vista, la de una ensenada, el agua de un lago, de un río... no nos dan la idea de número, porque en esas extensiones sólo percibimos la CONTINUIDAD.

Y, sin embargo, esas extensiones resultan numerables, no naturalmente, sino en virtud del artificio de los hombres. Yo puedo escoger una longitud conocida, el metro, y puedo contar cuántas veces cabe el metro entre la última casa de este barrio y la primera del vecino. Me es dado escoger un volumen que todos conozcamos, el litro, y medir con él la cantidad de mosto que contiene cierta cuba, etc., etc.

Hay, pues (en el sentido acabado de exponer), números NATURALES y números ARTIFICIALES. Los árboles de un jardín son, por ejemplo, 20, porque lo son naturalmente, y nó porque yo quiera ni deje de quererlo. Las casillas de un tablero de ajedrez son 64, porque lo son. Pero el mosto de un tonel será 200 si cabe 200 veces en él la medida que yo escoja (200 litros, v. gr.); pero, si es 200 litros, no puede en el mismo instante ser 200 cuartillos ni 200 cántaras. Los números que resulten han de depender (y siempre dependen cuando se trata de las cosas continuas) de mi arbitrio al escoger el módulo de medir.

Pero la idea de número puro no brilla aún en los ejemplos anteriores.

Cuando decimos 100 árboles, ó bien cuando hablamos de 100 fanegas de trigo... nuestro pensamiento está más en los objetos que en los números; porque, no pudiendo formarnos bien idea de lo que sean esas masas de árboles y de trigo, resulta que 100 árboles y 100 fanegas vienen á ser expresiones en cierto modo equivalentes á las indeterminadas «*mucho trigo*», «*muchos árboles*».

El número puro sale de la idea de repetición; lo sugiere la sucesión de los fenómenos; lo afirma la renovación de los actos. Cuando un cazador dice *tengo tres escopetas*, su pensamiento se fija en el *conjunto* de las armas; pero, cuando manifiesta que ha hecho una cosa cierto número de veces, siete por ejemplo, su atención se dirige á la repetición como *repetición*, y nó á determinados objetos como distintos de otros objetos semejantes ó diferentes. Piensa, por tanto, en un *número de veces*, nó en un *número de cosas*; piensa en un número, nó en un algo material.

El 1 de numeración no tiene, pues, nada que ver con el 1 de mensura ni con el 1 de colección (1).

La palabra UNIDAD tiene, pues, tres acepciones muy diferentes, todas importantísimas:

1.º Significa *unidad* pura (2), el principio de la escala de la pluralidad.

---

(1) (Véase el principio de la Parte II.) Es incorrecto, por lo tanto, decir que las operaciones aritméticas se hacen sobre magnitudes, cuando la verdad es que nuestro entendimiento las realiza sobre los conceptos de repetición, nó de magnitud. Estas ideas fueron un tiempo generalmente admitidas (hoy no lo son); y tanto, que en la idea de número se juzgó de esencia el concepto de la repetición, de tal modo que hasta se llegó á poner en duda que el 1 fuese número.

(2) Significa también uno. Agregue V. á esa suma la *unidad*.

Tiene, además, otra acepción meramente técnica de los sistemas de

2.° Significa aquello conforme á lo cual se llama uno á cada cosa discontinua (1).

3.° Significa módulo de medir las entidades continuas.

La unidad pura es indivisible; no tiene partes; carece de toda propiedad corpórea; no huele ni tiene sabor; ni se oye, ni se vé, ni se palpa, ni es susceptible de movimiento... La frase *hacer algo media vez* carece de sentido.

Las cosas discontinuas forman CONJUNTOS: son agregados de objetos.

Las cosas continuas, extensiones, volúmenes, pesos, son mentalmente DIVISIBLES; tienen siempre propiedades físicas y químicas; siempre se ven y se palpan; sus partes pueden moverse, etc.

La idea de unidad pura es IDÉNTICA para todos los hombres á quienes es dado llegar al sublime concepto del número puro: no conoce nacionalidades: lo mismo el ruso, que el español, que el americano... saben lo que es «hacer algo una vez», «hacer una cosa dos veces», «hacerla tres veces», cuatro, cinco... ciento, mil... un millón...

Las ideas de módulo varían de pueblo á pueblo y de hombre á hombre. Los españoles no saben lo que es una *wersta* ó un *kreutzer*, así como los rusos y los alemanes ignoran lo que es nuestra legua, ó nuestra fanega, ó nuestra vara de medir, y tanto ellos como nosotros ignoramos lo que fuesen las medidas de que habla el profeta Ezequiel...

Todo cuanto se puede preguntar y predicar *científicamente* de los objetos discontinuos y de los módulos de las cosas continuas, es impredicable de la idea de *unidad pura;* y, por consiguiente, de la idea de *número puro*. Por ejemplo:

Podemos, familiar y científicamente, preguntar: ¿cuánto pesa esa manzana? ¿qué tamaño tiene? ¿cuál es su forma? ¿á qué huele? ¿á qué sabe? ¿de qué color es?... ¿Qué dimensiones tiene una fanega de sembradura?...

Y nada de eso se puede preguntar del número puro. ¿Cuánto pesa el número 1? ¿qué tamaño tiene la idea de uni-

---

numeración, como cuando se dice: *unidades* de primer orden; *unidades* de segundo ó decenas; *unidades* de tercero ó centenas; *unidades* de cuarto ó millares, etc., etc.

(1) Consecuencia de la muy conocida definición de Euclides.

dad? ¿cuál es su forma? ¿á qué huele? ¿á qué sabe? ¿de qué color es?... (1).

Esto, con ser tan claro, recibe mayor luz tratando de responder á la siguiente pregunta:

¿Hay algo menor que uno?

No; porque siendo *uno* el principio de la escala de la pluralidad, sería contradictorio que hubiese algo anterior al principio.

No; porque, de suponer que hay algo más pequeño que *uno,* resultarán absurdos evidentes:—He comido media vez;—He dado tres golpes y medio;—He entrado en el teatro siete veces y cuarto;—He emitido medio voto;—He dado medio puntapié...

Pero, ¿puede haber algo menor que un MÓDULO?

Sí; la mitad de su conjunto, el tercio de su tamaño, de su peso...; porque, entrando en la idea de conjunto, de masa, de volumen..., la idea de magnitud no es contradictorio que otra cierta magnitud exista en tamaño menor.

Así: Si nos preguntasen ¿hay algo menor que un metro? podríamos responder sin absurdo: medio metro, un cuarto de metro...

Así, media libra, una tercia, medio duro, etc., son conceptos en que no hay contradicción.

Hay, pues, «UNIDAD PURA» y hay también UNIDAD DISCONTINUA y UNIDAD CONTINUA.

Llamaremos á la «unidad pura» (que es INDIVISIBLE é IDÉNTICA de hombre á hombre), UNIDAD NUMÉRICA ó simplemente UNIDAD.

Y llamaremos UNIDAD-MÓDULO, ó simplemente MÓDULO, á toda magnitud que sirva para contar ó medir.

Los módulos siempre serán FRACCIONABLES y VARIABLES de pueblo á pueblo, de provincia á provincia, y á veces hasta de hombre á hombre.

(1) Es de creer que no haya entendimiento tan romo ó menguado hasta el punto de juzgar que la *forma* del 1, esto es, del trazo con que lo representamos, sea la *idea* de uno, ni que el uno sea rojo porque lo escribamos con tinta carmín...

Y dividiremos los módulos en *indeterminados* y *determinados;* ó sea, en «*números genéricamente abstractos*» y en «*números concretos determinados*».

Hoy sabemos lo que es un metro, un litro, una peseta... módulos determinados para nosotros.

Pero ¿qué era la *caña* de Ezequiel? (Ez. cap. XL.)

¿Qué pesaban los cincuenta siclos de la barra de oro que robó Achán (1), por lo cual lo apedreó el pueblo y fué condenado al fuego por Josué? (Jos. cap. VII.)

Estos ciertamente fueron módulos de medir, pero resultan indeterminados hoy para nosotros.

Los «*números puros*» son números *sui generis:* los demás son abstractos y concretos. El *uno* en que principia la escala de los números puros es indivisible, de donde se deduce el importantísimo principio siguiente:

«LOS NÚMEROS PUROS SON POR ESENCIA NÚMEROS ENTEROS» (2).

Los «*números-módulo*» se refieren siempre á una *colección ó conjunto;* ó á una masa ó volumen: y, como todo conjunto y toda masa pueden ser siempre menores, se deduce de esto el no menos importante principio siguiente:

«LOS NÚMEROS-MÓDULO SON SIEMPRE FRACCIONABLES Y DIVISIBLES.»

El concepto de «*número puro*» es simple y no supone otras ideas más que la de «grados» en la escala de la pluralidad.

El concepto de «*número-módulo*» es siempre compuesto:

1.º De la idea de «número puro».

2.º De la idea de «módulo.»

Para comprender lo que significan las palabras «cinco balas», «cinco libras», «cinco duros», «cinco litros»... no bas-

(1) Regulamque auream... quinquaginta siclorum... concupiscens abstuli.

(2) Recuérdese pág. 11.

—Y ¿me matarás de la muerte que yo escoja?

—Palabra de gigante.

—Pues mátame de media bofetada.

ta tener la idea de «*cinco*»; es preciso haber visto ó saber lo que es «bala», «libra», «duro», «litro»...

La ARITMÉTICA es la CIENCIA DE LOS NÚMEROS.

Y, como los números se dividen en puros y modulares, la Aritmética se divide en dos grandes secciones:

1.ª Aritmética pura, ó de los números.

2.ª Aritmética concreta, ó de los módulos. *(V. nota p. 15.)*

APÉNDICE.

Es tan difícil á las inteligencias poco cultivadas adquirir la idea de número puro, que por lo regular no pueden ver ningún número independientemente de algún módulo.

Aun hoy, no pocas sirvientes ajustan sus cuentas con garbanzos. Van echando en un montón tantos granos como céntimos han gastado; y, cuando el montón llega á 25, ponen aparte una simiente en representación de un real. Cuando han reunido cuatro de éstas, ponen en un sitio más distante otra simiente, como símbolo de una peseta... etc.

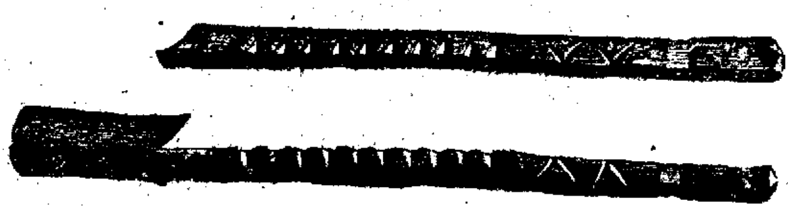


Figura 1.ª—Tarja carmonense.

En muchos puntos de España (y de Inglaterra) se usa el sistema de las tarjas, que, por su ingenio y facilidad, será más adelante objeto de especial exámen. (Véase el *Apéndice* á la Lección IV.)

Este método *representativo* de contar, llamado por Humboldt *numeración palpable*, está muy lejos del concepto científico de número, puesto que el número puro no tiene propiedad ninguna física: carece de largo, ancho y grueso, no pesa ni tiene color, sabor, olor... ni se mueve, etc. Pero, como en ocho garbanzos, por ejemplo, está comprendida la idea de ocho, ese número de simientes, no por sus propiedades *físicas* ó *alimenticias*, sino por su *grado* en la escala de la pluralidad, puede representar á inteligencias mal desarrolladas el mismo *grado* de la escala en absoluto, cuando se trata de céntimos de peseta.

Por lo dicho, es fácil ver cómo *la* NUMERACIÓN PALPABLE *lleva naturalmente al fundamento de los valores aritméticos de* POSICIÓN. El garbanzo, que en el primer montón vale 1 para la sirviente del ejemplo vale, en lugar aparte, 25, y cuatro veces más en un tercer lugar, etc., etc.

Por medio de habas calculan los hombres del campo, en Inglaterra.

Y por medio de piedrecillas *(calculi,* de *calx),* cal, mármol... (de donde toma origen el verbo *calcular),* contaban los antiguos romanos.

—¿Cuántos años tiene V., buena abuela?

—¡Ay! hijo mio, «*ya tengo cuatro duros y dos reales*», es expresión que con frecuencia se oye todavía.—*Murió de cinco duros y un real.*

Pero calcular por simientes, ó por piedrecitas, ó por las cuentas de un rosario... supone un estado de civilización ya sumamente adelantado. Así es que los pueblos inferiores lindantes casi con el salvajismo, se han servido todos, y aun se sirven algunos, de los dedos de las manos y de los piés para contar.

Los dedos nos han enseñado la Aritmética.

Los *Tamanacos* del Orinoco, después de hacer uso de sus números hasta 4, expresan el siguiente grado *cinco* por medio de una palabra compuesta cuya traducción es *una-mano-entera*. *Seis* resulta expresado por un término que significa *uno-de-la-otra-mano*. *Siete* es *dos-de-la-otra mano*, y así sucesivamente hasta *nueve* inclusive. Nombran el *diez* con palabras que significan *las-dos-manos*. Para indicar el *quince* extienden las dos manos y adelantan un pié, diciendo al mismo tiempo una frase que significa *un-pié-completo*. Para *diez y seis* dicen *un-pié-y uno-del-otro-pié*, ó solo *uno del otro pié*, y así sucesivamente hasta *diez y nueve* inclusive. Para *veinte* dicen *un-indio:* 21 es *uno-de-la-mano-de-otro-indio:* 25 es *una-mano-de-otro-indio*. 40 resulta expresado por *dos-indios*, y así 60, 80, 100 son respectivamente *tres-indios*, *cuatro-indios*, *cinco-indios*, y más si les es necesario.

Las lenguas de la América Meridional abundan en hechos análogos. Las huellas de la numeración digital se ven claras en los dialectos de los Cayrivis, los Tupis, los Avipones, los Caribes... que rivalizan con los Tamanacos por su sistema de numeración en que *una-mano*, *dos-manos*, *un-pié*, *dos-piés* indican respectivamente los números 5, 10, 15, 20.

Otros dialectos no ofrecen tan claro el mismo procedimiento. Los Omaguas emplean la palabra *mano* para designar el 5, y reduplican el vocablo para indicar el 10. *Hombre*, como hemos visto, significa en varios idiomas de la América Meridional 20, por sumar 20 el total de los dedos de las manos y los piés; pero en otros dialectos, que revelan un estado intelectual muy inferior, la misma voz *hombre* significa 5, pues los individuos que los hablan no han sabido contar números más elevados.

También *hombre* era 5 para los Tasmanios.

Es tanta la dificultad de separar la idea de número puro de la expresión de un módulo, que hasta pueblos célebres por su cultura relativa, tales como los Muiscas de Bogotá, acudían al mismo recurso de los dedos, manos y piés, y así para 11, 12, 13... decían *pié-uno*, *pié-dos*, *pié-tres*, etc.

En las gramáticas groenlandesas modernas se ve que la palabra usada para el 5, significó en lo antiguo *mano*, y así, 6 se dice con una expresión que significa *uno-sobre-la-otra-mano;* 7, *dos-sobre-la-otra-mano;* 13, *tres-sobre-el-primer-pié;* 18, *tres-sobre-el-otro-pié;* 20, equivale á *un-hombre-completo*, y así, contando muchos *hombres-completos* llegan á cifras relativamente elevadas: por ejemplo, para 53 dicen, *tres-dedos-del-primer-pié-del-tercer-hombre.*

Entre los aztecas, tanto septentrionales, como meridionales, la nomenclatura numérica era una supervivencia de la numeración digital, tanto de las manos, como de los piés (1).

Para los Towkas de la América del Sur, 10 era *medio-hombre*, y 20, *un-hombre.*

La palabra *cempoalli*, de los Aztecas, que numéricamente expresa la idea de 20, quería decir en su lengua *uno-entero;* esto es, un hombre completo, en el sentido de haberse computado todos los dedos de las manos y de los piés de un mejicano.

Análogamente algunas tribus australianas occidentales, dicen para expresar el 15, una frase que significa: *las-manos-de-cada-lado-y la-mitad-de-los-piés.*

En la lengua *maré* de la Melanesia, 10 significa *los-dos-lados;* esto es, *las-dos-manos;* y *un-hombre* es también 20. Treinta y ocho se expresa diciendo, *un-hombre-dos-lados-y-ocho.*

El nombre que los negros *veis* del Africa Occidental dan á 20, significa *una-persona-es-acabada;* 40 es *dos-personas-son-acabadas*, 60, 80... *tres-hombres-son-acabados*, *cuatro-hombres-son-acabados*, etc., etc.

Los zulús presentan un caso digno de mención que patentiza la dificultad de desprender la idea de número de la de un objeto contado. Empiezan los zulús sus cómputos por el dedo meñique de la mano izquierda, y al llegar á 5, dicen *mano-concluída;* entonces pasan al pulgar de la mano derecha, y la palabra 6, significa *tomando-el-gordo.*

(1) Más adelante (*Apéndice* á la Lección IV) será esta numeración asunto de más ámplio estudio.

La palabra correspondiente á nuestro verbo indicar, si el *zulú* señala al mismo tiempo su dedo índice, significa 7; y así, para responder á la pregunta: «¿Cuánto te ha dado tu amo?» un *zulú* dirá: «*Ha-adelantado-su-índice*», esto es, me ha dado siete. Para decir había siete caballos, se expresarán de este modo: *los-caballos-han-indicado*. La frase *dos-dedos-cerrados* quiere decir 8, y *un-dedo-cerrado* 9. Una palmada *cerrando* las dos manos, indica el 10.

¡Diferentes son en verdad tantos y tan raros medios de expresión! Pero todos ellos coinciden y convienen en que la idea de número puro no se expresa de un modo independiente, sino que va en todo caso unida á la de un objeto. Y, por la circunstancia de formar parte integrante del hombre mismo los dedos, las manos y los piés, estos órganos han sido los objetos escogidos con preferencia para contar.

Y lo son todavía, aun en nuestros pueblos civilizados.

Y, si no se recurre á los dedos, se acude á otros objetos materiales.

La humanidad, antes de tener la idea de número puro, independiente por completo de toda cosa material, ha tenido la idea de número adherida á algún objeto y encarnada en él.

Y la pobreza primitiva se nos hace actualmente difícil de creer, no sólo porque estamos habituados á nuestros excelentes métodos de contar, en que existe todo lo necesario al efecto, sino también porque en ellos abunda hasta lo supérfluo (acaso con detrimento de lo sistemáticamente científico).

En efecto; están fuera de sistema las voces *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, *quince*, *par*, *pareja*, *trinca*, *talega* (1 000 duros), *manada*, *piara*, *bandada*, etc.

LECCIÓN III

Denominaciones.—Signos operatorios.

La Aritmética pura trata de los números puros: esto es, de los grados de la escala de la pluralidad con abstracción completa de las cosas, de su naturaleza, de sus magnitudes y de sus distancias respectivas en quietud y en movimiento.

Con los números puros no se pueden hacer más que dos operaciones:

«AGREGARLOS y DISGREGARLOS.»

El agregarlos se llama en Matemáticas «SUMAR».

El disgregarlos, «RESTAR».

El número que se agrega á otro (ó á otros) se llama SUMANDO (1).

El resultado de la agregación se dice SUMA.

El número del cual se quita otro se llama RESTANDO ó MINUENDO; el número que se quita, RESTADOR ó SUSTRAENDO, y el resultado de la operación, RESIDUO, RESTO ó DIFERENCIA (2).

---

(1) Así en $\left\{\begin{array}{r l} \left.\begin{array}{r} 6 \\ +\ 7 \\ +\ 14 \\ +\ 9 \end{array}\right\} & \textit{sumandos} \\ \hline =36 & \textit{suma} \end{array}\right\}$ los números 6, 7, 14 y 9 son los SUMANDOS, y el 36 es la SUMA.

Inmediatamente se explicará el significado de los signos $+$; $-$; $=$; $\times$; $\div$

(2) Así en $\begin{array}{r l} 36 & \textit{restando ó minuendo} \\ -\ 14 & \textit{restador ó sustraendo} \\ \hline =22 & \textit{resíduo ó diferencia} \end{array}$

La *agregación* puede hacerse indefinidamente: la *disgregación* no puede bajar del uno.

Del uno puro, sólo se puede quitar uno.

En la «ARITMÉTICA-MODULAR» no sucede así: de un «MÓDULO» puede quitarse un fragmento (un quebrado).

Desde luego se deduce de esta división que cuanto se afirme de los números puros, será también afirmable de los números concretos; pero que la recíproca puede no ser cierta: y, en efecto, muchas cosas que son verdad en los números concretos, resultan absurdas aplicadas á los números puros.

El número puro supone la repetición, la sucesión.

El número conjunto supone la individualidad, la distinción, la discontinuidad.

El número propiamente modular supone la medida, la intervención humana en el cómputo de la cantidad, esto es, del *cuanto* de una continuidad.

Los números puros aprecian la multiplicidad de los CONJUNTOS naturales de las cosas discontinuas.

Los números modulares son RELACIONES artificiales entre una continuidad y otra que le sirve de medida.

Las cosas discontinuas forman *multitudes, muchedumbres*, PLURALIDADES.

Las cosas mensurables forman *masas, cantidades.*

Pero, por extensión, se llama *cantidad* á la multiplicidad (1) y también *inmensidad* (2).

La operación de sumar puede abreviarse cuando los sumandos son iguales; y la operación de sumar abreviadamente se llama MULTIPLICAR.

MULTIPLICAR *es, pues, sumar abreviadamente cierto número de sumandos iguales.* El número que se repite se llama MULTIPLICANDO: el número de veces que ese sumando se repite se

---

el núm. 36 es el minuendo, el 14 es el sustraendo, y el 22 la diferencia; ó bien, respectivamente, el restando, el restador y el residuo.

(1) Escriba V. las siguientes *cantidades*; 457; 602; 24.

(2) La *inmensidad* de las estrellas de primera magnitud, la *inmensidad* de árboles que hay en estos paseos,... son multitudes que no es imposible contar.

llama MULTIPLICADOR ó COEFICIENTE (1) y la suma de los sumandos iguales se llama PRODUCTO. Al producto contribuyen tan ineludiblemente el multiplicando como el multiplicador; por eso los dos se llaman factores del producto, y cada uno de ellos indistintamente factor.

Cabe deshacer la multiplicación (así como otra clase especial de suma, en que todos los sumandos son iguales, menos uno, que es menor) y la operación se llama DIVIDIR ó PARTIR: al resultado de la operación se da el nombre de CUOCIENTE (2). La *suma* en este caso especial se llama DIVIDENDO, y el sumando que, repetido cierto número de veces, la forma, se llama DIVISOR. El divisor y el cuociente se llaman factores del dividendo. Si á más de los sumandos iguales que integran el dividendo hay otro menor, éste se llama RESIDUO.

Cuando formas escritas de un mismo grado de la pluralidad son diferentes, y queremos manifestar que en grado son

---

(1) Así en $\begin{array}{r} 22 \\ \times\ 3 \\ \hline =66 \end{array}$ el número 22, que se repite tres veces, es el MULTIPLICANDO: el 3, que es el número de veces que el 22 se repite, es el MULTIPLICADOR ó COEFICIENTE, y el 66 es el PRODUCTO.

La voz *coeficiente* es más del Algebra que de la Aritmética, y siempre se usa en el sentido de *multiplicador*, no de multiplicando. En Algebra se da, con especialidad, el nombre de *coeficientes* á los factores numéricos que se colocan delante de las expresiones literales. En $3\,abc$; $3\,a^2 b$; $3\,(a-b)$; el 3 de estas expresiones se llama *coeficiente*. Sin embargo, los coeficientes pueden ser también literales: en $a^2\,(b-c)$ hace de *coeficiente* a^2.

(2) Todo esto se explanará á su tiempo. Ahora sólo se enuncian nociones indispensables para poder seguir. En Aritmética es preciso á los comienzos suponer nociones no explicadas todavía, lo que se hará más y más patente á medida que adelantemos.

En $36\,\underline{|\,9\,}\atop{\quad\ \,|\,4}$; el 36 es el DIVIDENDO, el 9 el DIVISOR y el 4 el CUOCIENTE.

Aquí no hay *residuo*, porque el 36 es una suma de 4 sumandos iguales:

$$9 + 9 + 9 + 9 = 36.$$

Pero habría *residuo* en $\begin{array}{r|l} 37 & \underline{9} \\ 1 & 4 \end{array}$ porque 37 es una suma de 4 sumandos iguales todos á 9, y además otro sumando menor igual á 1;

$$37 = (9 + 9 + 9 + 9) + 1 = (4 \times 9) + 1.$$

iguales (como tienen que serlo por referirse á un sólo y mismo número) entre ambas formas diferentes se escribe este signo =, que se lee «IGUAL».

La operación de sumar se indica con este signo +, que se lee «MÁS». Así:

$$4 + 5 + 6 = 15$$

se lee: *cuatro, más cinco, más seis, igual quince;* y significa que el 4 se suma primero con el 5, y luego el 9, resultante con el 6, y que la suma de esos tres sumandos es *quince.*

La operación de restar se indica con èste signo —, que se lee «MENOS». Así la expresión

$$7 - 5 = 2$$

se lee: *siete menos cinco, igual dos;* lo cual quiere decir, que del 7 se ha de restar el 5, y que la diferencia será 2.

La operación de multiplicar se indica con el signo ×, que se lee «MULTIPLICADO POR» ó simplemente «POR».

$$4 \times 3 = 12$$

se lee: *cuatro, multiplicado por tres, igual doce,* ó más brevemente, *cuatro por tres, igual doce;* cuyo significado es que $4 + 4 + 4 = 12$, ó sea que el sumando 4, repetido tres veces, da 12 como SUMA (en este caso, llamado PRODUCTO, por ser iguales los tres sumandos) (1).

También el signo × se lee «*veces.*» Así la anterior expresión se lee: *cuatro veces tres, igual doce,* ó sea

$$3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

La operación de partir se indica con el signo ÷ (ó bien con el signo :). Ambos se leen «*partido por*» ó «*dividido por*» (el

(1) En la PARTE segunda se tratará de los otros casos del *multiplicar* y del *partir.*

por suele suprimirse). También se indica la operación de partir colocando el divisor bajo el dividendo y entre los dos una raya horizontal.

$$\frac{20}{5} = 4$$

se lee: ***veinte, partido cinco, igual cuatro.***

Lo mismo se lee

$$20 \div 5 = 4; \text{ ó bien } 20 : 5 = 4$$

veinte, dividido cinco, igual cuatro. Y cualquiera de las tres expresiones significa que el 20 está formado por 4 sumandos iguales á 5.

$$5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

La operación se dispone también en la forma

$$20 \,|\underline{\;5\;}$$

y también entonces se dice «***veinte, partido cinco***». Y, cuando en la operación hay resíduo,

$$\begin{array}{r|l} 21 & \underline{5} \\ 1 & 4 \end{array} \quad (1)$$

el resultado se lee diciendo: «***veintiuno, partido cinco, igual á cuatro, más uno de resíduo;***

$$21 = (5 \times 4) + (1 \text{ de resíduo})$$

Hay un caso particular del multiplicar, en el que son iguales el ***sumando*** que se repite y el ***número de veces*** que ese sumando se ha de repetir; ó, lo que es lo mismo, en que son iguales los factores:

$$3 \times 3 = 9$$

El ***producto*** así obtenido se llama en este caso POTENCIA. Esa potencia puede multiplicarse después por el mismo factor una vez más, y otra y otra... y así sucesivamente.

(1) Más adelante se completarán estas nociones.

$$21 \div 5 = \frac{21}{5} = 4 \text{ con un sobrante de } 1$$

porque

$$(5 + 5 + 5 + 5) + 1 = 21 = (4 \times 5) + 1 \text{ (cuatro veces 5, y además 1).}$$

$$3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 27 \times 3 = 81$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \times 3 = 243, \text{ etc.}$$

Esta clase de operaciones se llama ELEVACIÓN Á POTENCIAS ó INVOLUCIÓN. Así como el *producto* es una especie de *suma*, la *potencia* es una especie de *producto*, y se indica escribiendo en tipo pequeñito á la derecha del número dado, el número de veces que ese *número* entra en toda la operación como factor del resultado final. El número escrito en tipo pequeño se llama EXPONENTE.

$3 \times 3 = 3^2 = 9$; segunda potencia del 3
$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$; tercera potencia del 3
$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$; cuarta potencia del 3
$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$; quinta potencia del 3
$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6 = 729$; sexta potencia del 3, etc.

Elevar á la segunda potencia, á la tercera potencia, á la cuarta, á la quinta... etc., es hallar el producto en que un número entra dos veces como factor de sí mismo, 10×10; tres veces $10 \times 10 \times 10$; cuatro veces $10 \times 10 \times 10 \times 10$; cinco veces $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$, etc.; por manera que 100 es la segunda potencia de 10; 1 000, la tercera potencia de 10; 10 000, la cuarta potencia de 10; 100 000, la quinta potencia de 10; 1 000 000, la sexta potencia de 10, etc.

La operación de deshacer una INVOLUCIÓN se llama EVOLUCIÓN ó EXTRACCIÓN DE RAÍCES, y se indica por medio del signo $\sqrt{\ }$, llamado radical. En la parte superior del ángulo agudo se escribe en tipo pequeñito el número de veces que en el producto entra el sumando como factor, y bajo una raya horizontal se escribe el producto.

$$\sqrt[2]{9} = 3$$
$$\sqrt[3]{27} = 3$$
$$\sqrt[4]{81} = 3$$
$$\sqrt[5]{243} = 3$$
$$\sqrt[6]{729} = 3 \ (1)$$

(1) A su tiempo se explicará detenidamente la EVOLUCIÓN ó EXTRACCIÓN DE RAÍCES. Baste por ahora con el conocimiento de los signos que sirven para indicarla; $\sqrt{\ }$ $\sqrt[3]{\ }$ $\sqrt[17]{\ }$ etc.

De modo que con los números puros no pueden hacerse más que tres clases de operaciones:

Sumar (reunir sumandos);
Restar (deshacer la suma para hallar un sumando);

dos abreviaciones:

Multiplicar (reunir sumandos iguales);
Partir (deshacer esta suma);

y dos graduaciones:

Elevar á potencias;
Deshacer esta operación.

Toda la clasificación es, pues, como sigue:

Operaciones fundamentales.	Abreviaciones.	Graduaciones.
SUMAR.	MULTIPLICAR	INVOLUCIÓN.
RESTAR.	PARTIR.	EVOLUCIÓN.

Estos tres modos diferentes de operar se llaman ALGORITMOS (1):

Algoritmo por *suma;*
Algoritmo por *multiplicación;*
Algoritmo por *potencias.*

Cuando un grado de la pluralidad es mayor que otro se usa este signo $>$, y cuando es menor, este otro $<$.

$$5 > 4; \quad 6 < 8$$

se leen; *cinco mayor que cuatro; seis menor que ocho.*

$\gtrless$ se lee: «*mayor ó menor que*».

---

(1) La voz *algoritmo* tiene otras acepciones. Se deriva del griego *arithmos,* número, precedido del artículo árabe. Otros la sacan de *Al Korismi,* célebre matemático árabe que vivió en tiempos del califa Al Mamún durante el primer tercio del siglo IX.

La voz ALGORITMO es, pues, procedimiento de cálculo, forma de operación con los números, género particular de notación: Algoritmo del cálculo integral. Algoritmo del cálculo de los senos. Algoritmo de las potencias. Algoritmo de las diferencias. En el siglo XIII, la palabra *algoritmo* significaba lo mismo que «Aritmética que emplea las cifras ó guarismos árabes».

Para presentar unas expresiones separadamente de otras, siendo todas componentes de un resultado, se usan los *paréntesis* llamados en las imprentas *redondos* y *cuadrados*. También se usan las *llaves*.

$$\left\{100 + \left[(4 \times 3) + (5 \times 2)\right]\right\} - 2 = (100 + 12 + 10) - 2 = 120$$

$$\left\{100 + \left[(4 + 4 + 4) + (5 + 5)\right]\right\} - 2 = 120$$

$\backsim$ se lee: «la diferencia entre».

$\therefore$ se lee: «por consiguiente».

$\because$ se lee: «porque».

? se lee: «¿por qué?

RESUMEN.

¿Qué son Matemáticas?

Las Matemáticas estudian el número en sí mismo, como igualmente las relaciones de proporción y de medida de las cantidades.

Por tanto, estudian el UNO y el MUCHOS en sus grados; la unidad y la pluralidad; así como el orden, sucesión y situación de las cosas, con abstracción completa de sus relaciones y de las distancias más ó menos grandes que las separan.

Constituyen, pues, la ciencia del número y la magnitud en sus estados sucesivos de quietud y movimiento.

¿Cómo se llama la ciencia que trata de los números?

Aritmética.

¿Qué son los números?

Los grados de la escala de la pluralidad.

¿Cuándo hemos adquirido las ideas de unidad, de pluralidad y de número?

No las tuvimos en el momento de nacer, ni tampoco las hemos adquirido en la actualidad, sino en una época intermedia, cuando empezábamos á entrar en el uso espontáneo de nuestra razón; esto es, cuando nos fué dado *«distinguir»* (sin darnos cuenta de ello) unos de otros los objetos, y las modificaciones de nuestro ser.

¿En qué se dividen los números?

En puros y modulares.

¿Y las unidades?

En unidad pura, unidad discontinua, y unidad continua.

¿La *«unidad pura»* ó numérica es divisible?

NO.

¿La unidad discontinua es divisible?

SI *(media manzana)*.

Pero no siempre es fraccionable: no cabe decir: *media estrella.*

¿La *«unidad módulo»* es divisible?

SI *(media vara, media libra)*...

¿Hay algo menor que uno?

NO, hablando de números puros. (No se puede emitir un voto media vez, etc.). Pero, hablando de módulos, siempre hay algo menor que uno; pues no es contradictorio que la magnitud módulo se divida en magnitudes menores, como la mitad, el tercio, el cuarto... del módulo de que se trate. (Así es que puede decirse sin absurdo: «he visto *media manzana*», «he visto *medio metro*», «he andado *media legua*», etc.)

¿Todo lo que se dice de los números puros, puede decirse de los modulares?

Sí; pero lo que se dice de los modulares, no siempre puede predicarse de los puros.

¿Qué es sumar?

Reunir sumandos.

¿Qué es sumando?

El número que hay que agregar á *otro* ú otros.

¿Qué es restar?

Hallar un sumando, dada una suma y otro sumando.

¿Qué es multiplicar?

Sumar abreviadamente sumandos iguales.

¿Qué es multiplicador ó coeficiente?

El número de veces que un sumando se repite.

¿Cómo se llama la suma de sumandos iguales?

Producto.

¿Qué son factores?

Los elementos de un producto; esto es, el multiplicando y el multiplicador.

¿Qué es exponente?

El número de veces que un número entra como factor de un producto.

¿Qué es elevar á potencias?

Un caso particular del multiplicar, en que son iguales el sumando y el número de veces que el sumando se repite (1);

---

(1) Más adelante se dará la definición de las demás operaciones.

ó bien, hecha una primera multiplicación, se repite de nuevo el resultado un número de veces igual al sumando primitivo; y así sucesivamente.

$=$	¿Qué significa este signo? ¿cómo se lee?
$+$	» » » » » » »
$-$	» » » » » » »
$\times$	» » » » » » »
$\div$; $::$; $\frac{6}{3}$; $6 \mid \underline{3}$	» » » » » » »
2^5; 2^4; 7^5	» » » » » » »
$\sqrt{16}$ $\sqrt[3]{125}$	» » » » » » »
$>$	» » » » » » »
$<$	» » » » » » »
$\gtrless$	» » » » » » »
$\backsim$	» » » » » » »
$\therefore$	» » » » » » »
$\because$	» » » » » » »
?	» » » » » » »
( ); [ ]; { }	¿Para qué sirven los paréntesis y las llaves?

ARITMÉTICA PURA

LIBRO I

NUMERACIÓN

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

LECCIÓN I.

Sistemas de Numeración hablada (1)

SISTEMA DECIMAL.

El hombre tiene la facultad de hablar acerca de los grados de la escala de la pluralidad.

Siendo infinitos esos grados, no era posible inventar un nombre distinto para cada grado; y, así, los pueblos más cultos de la tierra han formado un sistema que con poquísimas palabras (en español son sólo treinta y una palabras las de uso más frecuente) puede expresar todos los números; ingeniosísimo sistema que es una de las más felices conquistas intelectuales de la Humanidad.

Esas treinta y una palabras son:

Uno,	veinte,	miriada (ó diez mil)
dos,	treinta,	millón (2)
tres,	cuarenta,	billón,
cuatro,	cincuenta,	trillón,
cinco,	sesenta,	cuatrillón,
seis,	setenta,	quinquillón,
siete,	ochenta,	sextillón,
ocho,	noventa,	septillón,
nueve,	ciento,	octillón,
diez,	mil,	nonillón,
		decillón. . . . .

(1) Véase el apéndice al final de esta Lección.
Recuérdese que los pueblos salvajes no saben contar: *«uno»*, *«dos»* y *«mucho»* es todo lo más á que algunas razas han llegado. (Apéndice á la Lec. I.)

(2) En los libros de Aritmética españoles de hace dos siglos no se em-

El sistema de numeración hablada supone la noción (siquiera sea inconsciente) de las ideas fundamentales

Del sumar (1)

Del multiplicar (2) y

De la elevación á potencias (3)

De aquí la dificultad de su enseñanza (4).

El sistema consiste ên lo siguiente:

El primer grado se llama		**uno.**
La suma de uno más uno	$(1+1)$ se llama	**dos.**
La de dos más uno	$(2+1)$ se llama	**tres.**
La de tres más uno	$(3+1)$ se llama	**cuatro.**
La de cuatro más uno	$(4+1)$ se llama	**cinco.**
La de cinco más uno	$(5+1)$ se llama	**seis.**
La de seis más uno	$(6+1)$ se llama	**siete.**
La de siete más uno	$(7+1)$ se llama	**ocho.**
La de ocho más uno	$(8+1)$ se llama	**nueve.**
La de nueve más uno	$(9+1)$ se llama	**diez.**
Diez y diez, ó sea dos veces diez	(2×10) se llama	**veinte.**

plean por lo regular las palabras *millón, billón, trillón,...* sino las de *cuento, bicuento, tricuento...*

En la Aritmética del *P. Joseph Zaragoza* (año de 1668) no se nombra la palabra *millón.*

(1) Efectivamente:

diez y seis, diez y siete, diez y ocho, etc.,

son expresiones que suponen la operación de *sumar:*

$$10+6;\quad 10+7;\quad 10+8...$$

(2) Doscientos, trescientos, cuatrocientos, etc., son frases ininteligibles no sabiendo, aunque sea de un modo espontáneo, lo que es *multiplicar:*

$$2\times 100=200;\quad 3\times 100=300;\quad 4\times 100=400;\text{ etc.}$$

(3) Diez, ciento, mil, miriada, cien mil, millón... son expresiones que indican las potencias del 10; incomprensibles sin ideas de lo que es la *involución*, ó sea lo que significa que un número éntre en una série de productos consecutivos cierto número de veces como factor de sí mismo.

$$\begin{aligned}10^0 &= \ldots\ldots\ 1\\ 10^1 &= \ldots\ldots\ 10\\ 10^2 &= \ldots\ldots\ 100\\ 10^3 &= \ldots\ 1\,000\\ 10^4 &= \ldots\ 10\,000\\ 10^5 &= \ldots\ 100\,000\\ 10^6 &= .\ 1\,000\,000\end{aligned}$$

(4) En general, los guarismos exigen el conocimiento prévio del *sumar*, del *multiplicar* y de la *involución.*

$$8\,754\,329$$

$$=(8\times 1\,000\,000)+(7\times 100\,000)+(5\times 10\,000)+(4\times 1\,000)+(3\times 100)+(2\times 10)+(9\times 1)$$

$$=(8\times 10^6)+(7\times 10^5)+(5\times 10^4)+(4\times 10^3)+(3\times 10^2)+(2\times 10^1)+(9\times 10^0)$$

y los números intermedios entre diez y veinte se designan con los nueve primeros unidos al diez, de este modo:

Diez y uno	$(10 + 1)$	
Diez y dos	$(10 + 2)$	
Diez y tres	$(10 + 3)$	
Diez y cuatro	$(10 + 4)$	
Diez y cinco	$(10 + 5)$	
Diez y seis	$(10 + 6)$	
Diez y siete	$(10 + 7)$	
Diez y ocho	$(10 + 8)$	
Diez y nueve	$(10 + 9)$	(1)

La suma de diez y diez y diez, ó sea tres veces diez, se llama **treinta,** y los números intermedios entre *veinte* y *treinta* se forman con los nueve primeros, agregados sumados al veinte, de este modo: **veinte y uno, veinte y dos, veinte y tres,** etc.; esto es, dos veces diez, y uno; dos veces diez, y dos; dos veces diez, y tres; etc.

$$(2 \times 10) + 1; (2 \times 10) + 2; (2 \times 10) + 3; (2 \times 10) + 4; (2 \times 10) + 5; (2 \times 10) + 6; (2 \times 10) + 7; \text{etc.}$$

Diez y diez y diez y diez, ó sea cuatro veces diez, se llama **cuarenta,** y los nombres de los números intermedios entre *treinta* y *cuarenta* se forman agregando á treinta los nueve primeros números, de este modo:

Treinta y uno, treinta y dos, treinta y tres, etc.; esto es, tres veces diez, y uno; tres veces diez, y dos, tres veces diez, y tres, etc.

$$(3 \times 10) + 1; (3 \times 10) + 2; (3 \times 10) + 3; (3 \times 10) + 4; (3 \times 10) + 5; (3 \times 10) + 6; (3 \times 10) + 7; (3 \times 10) + 8; (3 \times 10) + 9$$

Cinco	veces diez	(5×10)	se llama	**cincuenta.**
Seis	veces diez	(6×10)	se llama	**sesenta.**
Siete	veces diez	(7×10)	se llama	**setenta.**
Ocho	veces diez	(8×10)	se llama	**ochenta.**
Nueve	veces diez	(9×10)	se llama	**noventa.**
Diez	veces diez	(10×10)	se llama	**ciento.**

Los números *intermedios*, entre cada dos productos consecutivos del diez, se nombran intercalando, como antes, los

(1) En español tenemos las palabras (supérfluas verdaderamente) ONCE, DOCE, TRECE, CATORCE y QUINCE, que en rigor aritmético sobran y perturban el sistema.

nombres de los nueve primeros, *uno*, *dos*... etc.; con lo cual se obtienen los nombres de los cien grados primeros de la escala de la pluralidad.

Ciento y ciento se llama **doscientos,** y los nombres de los números intermedios se obtienen intercalando los nombres de los noventa y nueve anteriores, *uno*, *dos*, *tres*... etc., *noventa y ocho*, *noventa y nueve*.

$$(100+1);\quad (100+2);\quad (100+3);\ldots (100+20+7);\quad (100+20+8);\quad (100+20+9);\ldots (100+30)\ldots$$

Ciento y ciento y ciento se llama **trescientos,** y los nombres de los números intermedios entre doscientos y trescientos se forman intercalando los noventa y nueve primeros.

$$(2\times 100)+1;\ (2\times 100)+2;\ (2\times 100)+3;\ldots\ (2\times 100)+87;\ (2\times 100)+88\ (2\times 100)+89;\ (2\times 100)+90;\ (2\times 100)+91\ldots$$

Cuatro veces ciento........	es **cuatrocientos.**
Cinco veces ciento.........	es **quinientos** (1).
Seis veces ciento..........	es **seiscientos.**
Siete veces ciento.........	es **setecientos.**
Ocho veces ciento..........	es **ochocientos.**
Nueve veces ciento........	es **novecientos.**
Diez veces ciento.........	se llama **mil.**

Los números intermedios entre cuatrocientos y quinientos, entre quinientos y seiscientos, etc., se designan intercalando los nombres de los noventa y nueve números primeros.

$$(8\times 100)+1;\quad (8\times 100)+2;\quad (8\times 100)+3;\ldots(9\times 100)+98;\quad (9\times 100)+99$$

Mil y mil se dice **dos mil,** y los nombres de los números intermedios entre mil y dos mil se obtienen intercalando los novecientos noventa y nueve números primeros.

De un modo análogo se construyen los nombres de los números intermedios entre dos mil y tres mil, tres mil y cuatro mil... cinco mil, seis mil, siete mil, ocho mil, nueve mil y diez mil.

Diez mil y diez mil son **veinte mil,** y los números intermedios se obtienen intercalando los nombres de los nueve mil novecientos noventa y nueve... etc., etc.

(1) Quinientos, setecientos y novecientos son, por etimología, vocablos algo irregulares en su formación castellana.

Los números desde el *uno* al *nueve* se llaman DÍGITOS (de «*digitus*» dedo, en latín), sin duda porque por los dedos primitivamente se indicaron los primeros grados de la escala de la pluralidad;

De *diez* á *noventa* y *nueve* se llaman DECENAS;

De *ciento* á *novecientos noventa* y *nueve* se llaman CENTENAS;

De *mil* á *nueve mil novecientos noventa* y *nueve*, MILLARES;

De *diez mil* á *noventa* y *nueve mil novecientos noventa* y *nueve*, MIRÍADAS (1) ó DECENAS DE MILLAR;

De *cien mil* á *novecientos noventa* y *nueve mil novecientos noventa* y *nueve*, CENTENAS DE MILLAR;

De un millón en adelante, MILLONES, y respectivamente, DECENAS DE MILLÓN, CENTENAS DE MILLÓN, MILLARES DE MILLÓN, etc., etc.

En el sistema, pues, de nuestra numeración hablada, todo dígito enunciado antes de una decena, de una centena, de un millar, etc., es su *multiplicador* ó *coeficiente*, y todo número enunciado después de este producto es *sumando* del producto.

Así en la expresión hablada

doscientos dos,

el primer dígito *dos* es multiplicador ó coeficiente del ciento; y el segundo dígito *dos* es sumando del precedente producto doscientos.

$(2 \times 100) + 2$ (= dos veces 100, y además 2).

En la expresión

cuatro mil ocho (2)

el dígito *cuatro* es multiplicador ó coeficiente de *mil*, y el dígito *ocho* es sumando del producto *cuatro mil*, etc., etc.

$(4 \times 1\,000) + 8$ (= cuatro veces 1 000, y además 8).

(1) La voz *miriada* no está muy en uso, aunque debiera estarlo más.

(2) Se vé, pues, que no es posible explicar la numeración hablada á quien no posea siquiera nociones previas del sumar, del multiplicar y de la elevación á potencias. Pero para todo esto resulta preciso saber la numeración hablada; de modo que es patente el círculo vicioso que en los comienzos tanto dificulta el aprendizaje de la ciencia aritmética.

Todo dígito desde 2 en adelante es el 1 repetido (1).

$$2 = 1 \times 2 = 1 + 1 \ (= 1 \text{ repetido dos veces}).$$
$$3 = 1 \times 3 = 1 + 1 + 1 \ (= 1 \text{ repetido tres veces}).$$
$$4 = 1 \times 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \ (\text{etcétera}).$$
$$5 = 1 \times 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$6 = 1 \times 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$7 = 1 \times 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$8 = 1 \times 8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$9 = 1 \times 9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

De modo que, si se exceptúa el 1, todo dígito es un producto.

Por tanto, y en general,

Cualquiera combinación de nuestra numeración hablada expresiva de un grado cualquiera de la escala de la pluralidad es una SUMA DE PRODUCTOS de las potencias del diez, enunciados á continuación unos de otros de mayor á menor (2).

En

cuatro mil seiscientos setenta Y cinco

existen los sumandos:

---

(1) Lo mismo que con los dígitos pasa con los demás números: con todos.

(2) Cuando se dice una decena seguida de un dígito, entre ambas palabras se pone la conjución Y;

diez Y seis,	veinte Y uno,	treinta Y cinco,	cuarenta Y nueve,
diez Y siete,	veinte Y dos,	treinta Y seis,	cincuenta Y dos,
diez Y ocho,	veinte Y tres,	treinta Y siete,	sesenta Y tres,
diez Y nueve,	veinte Y cuatro,	treinta Y ocho,	noventa Y cuatro, etc.

Fuera de estos casos de *decenas y dígitos* la Y no se usa:

ciento uno,	seiscientos treinta,	cien mil cuatrocientos cuarenta,
doscientos dos,	mil ciento uno,	un millón cuatrocientos setenta mil.
trescientos tres,	mil trescientos veinte,	
cuatrocientos cuatro,	diez mil setecientos cuatro,	
quinientos veinte,	veinte mil ochocientos seis,	

Pero si la expresión contiene *decenas* y *dígitos* se usa la Y:

ciento veinte Y uno,	dos millones seiscientos treinta Y cuatro mil quinientos setenta Y dos,
trescientos cuarenta Y dos,	dos millones treinta Y cuatro mil veinte Y ocho, etc., etc.
quinientos ochenta Y nueve,	
novecientos noventa Y nueve,	

El uso quiere, además, que la Y se emplee por excepción en expresiones tales como *mil* Y *una dificultades*, *ciento* Y *la madre*, etc.

Sin esta precisión de intercalar la Y entre *decenas* y *unidades*, nuestro sistema de numeración hablada sería de los más consecuentes y precisos que poseen los pueblos civilizados.

Cuatro mil (producto de cuatro por mil, ó sea de 4 por la tercera potencia de 10);
+ seiscientos (producto de seis por ciento, ó sea por la segunda potencia de 10);
+ setenta (producto de siete por diez, ó sea por la primer potencia de 10);
+ cinco (producto de cinco unos; ó sea de cinco veces 10^0)

$$\begin{aligned} &= (4 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (5 \times 10^0) \\ &= (4 \times 1\,000) + (6 \times 100) + (7 \times 10) + (5 \times 1) \\ &= (4 \text{ veces } 1\,000) + (6 \text{ veces } 100) + (7 \text{ veces } 10) + (5 \text{ veces } 1) \end{aligned}$$

El número de productos en que entran las potencias consecutivas del 10 es igual al número de dígitos ó de cifras significativas;

$$\left.\begin{aligned} 76\,549 = 7 &\times 10\,000 \\ +\,6 &\times 1\,000 \\ +\,5 &\times 100 \\ +\,4 &\times 10 \\ +\,9 &\times 1 \end{aligned}\right\} \text{cinco productos: tantos como cifras significativas (1).}$$

No podemos hablar de los números puros más que con las palabras que se acaban de exponer; porque no hay muchos sistemas de numeración hablada, ni conviene tampoco que los haya. Después veremos que puede, sin inconveniente, haber muchos sistemas de numeración escrita, aun cuando sólo exista uno usual de numeración hablada (2).

Hay, sin embargo, en ciertas industrias ó en ciertos cómputos otro sistema, que es el *duodecimal* (aplicable casi siempre á números-módulo) (3).

(1) Claro es que, cuando no haya cientos ó decenas ó dígitos,... no se los mencionará en la expresión hablada.

20 308	20 078	20 500
veinte mil, + trescientos, + ocho. Aquí faltan millares y decenas.	veinte mil, + setenta, + ocho. Aquí faltan millares y centenas.	veinte mil, + quinientos. Aquí faltan millares, decenas y dígitos.

(2) Véase más adelante el uso de las voces protoena, deutena, triena... etc.

(3) A veces la palabra *docena* se emplea como número puro: *Lo hice una docena de veces*. Pero regularmente el sistema duodecimal se aplica á números-módulo.

Sus vocablos son los siguientes:

Uno,	Una docena,	Una gruesa,	Un paquete,	Una caja,
dos,	dos docenas,	dos gruesas,	dos paquetes,	dos cajas,
tres,	tres docenas,	tres gruesas,	tres paquetes,	tres cajas,
cuatro,	cuatro docenas,	cuatro gruesas,	cuatro paquetes,	cuatro cajas,
cinco,	cinco docenas,	cinco gruesas,	cinco paquetes,	cinco cajas,
seis,	seis docenas.	seis gruesas,	seis paquetes,	seis cajas,
siete,	siete docenas,	siete gruesas,	siete paquetes,	siete cajas,
ocho,	ocho docenas,	ocho gruesas,	ocho paquetes,	ocho cajas,
nueve,	nueve docenas,	nueve gruesas,	nueve paquetes,	nueve cajas,
diez,	diez docenas,	diez gruesas,	diez paquetes,	diez cajas,
once.	once docenas.	once gruesas.	once paquetes.	once cajas.

Los nombres de los números intermedios se construyen análogamente al sistema decimal, v. gr.:

«Cuatro cajas, ocho paquetes, tres gruesas, once docenas y diez agujas.»

Este sistema, en pasando de doce cajas, sigue contando las cajas con las voces del sistema decimal:

Trece cajas, catorce cajas, etc., etc.

El sistema duodecimal se emplea en cierta clase de medidas con otros nombres;

doce puntos hacen una línea;
doce líneas forman una pulgada;
doce pulgadas son un pie.

Tratándose del tiempo:

doce meses, un año;
dos veces doce horas es un día, etc.

El número doce es muy cómodo, y habría sido mucho más conveniente para base del sistema de numeración; pero nadie puede hoy pensar en un cambio, porque todas las tablas y elementos de cálculo están hechas sobre el sistema decimal. Cambiar el lenguaje tradicional sería casi un imposible, mientras que ha sido muy fácil conformar con la tradición los módulos de medir.

Como se ve, pues,
Sólo hay dos sistemas de numeración hablada:
Uno general y aplicable á los números todos, puros y modulares, que es el decimal, y

Otro, usado solamente en ciertos tráficos ó en cómputos especiales, que es el duodecimal.

Ambos resultan de la invención, en primer lugar, de unos pocos vocablos (diez en el sistema decimal, y doce en el duodecimal) para nombrar los primeros grados de la escala de la pluralidad: y en segundo lugar, de otras pocas palabras más para nombrar:

1.° Los grupos de diez ó los de doce (llamados respectivamente decenas y docenas);
2.° Los grupos de diez dieces, ó de doce doces (respectivamente llamados *centenas y gruesas*);
3.° Los grupos de diez cientos ó de doce gruesas (denominados respectivamente millares y paquetes);
4.° Y así sucesivamente.

En una palabra: el sistema de numeración hablada consiste:

1.° En designar los primeros grados de la pluralidad con ciertos vocablos;
2.° En formar grupos con esos primeros grados (diez ó doce).
3.° En contar los grupos de á diez (ó de á doce) como se contaron los primeros grados de la pluralidad hasta tener diez grupos de á diez (ó doce grupos de á doce); esto es, hasta obtener centenas (ó gruesas), (segundas potencias del diez ó del doce [10^2; 12^2]);
4.° En contar el mismo número de grupos de centenas (ó gruesas) como se contaron las decenas (ó docenas) hasta obtener diez conjuntos de á ciento (ó doce de ciento cuarenta y cuatro); esto es, hasta obtener millares (ó paquetes), (terceras potencias del 10 ó del 12 [10^3; 12^3]);
5.° En contar el mismo número de millares (ó paquetes) como se contaron los grupos de decenas y centenas (ó docenas y gruesas (cuartas potencias del 10 ó del 12 [10^4; 12^4]).
6.° Y así sucesivamente las quintas, las sextas, las séptimas, las octavas potencias del 10... (10^5, 10^6, 10^7, 10^8...) esto es, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000, 100 000 000...,

Los números intermedios se nombran intercalando los nombres de los números de los grupos anteriores.

Y así sin interrupción.

ADVERTENCIA

Son, en rigor, excepciones en nuestro sistema de numeración hablada las palabras *once, doce, trece, catorce* y *quince* (1).

Las voces *unidades, decenas, centenas,* etc., son voces técnicas propias de la numeración escrita.

Numeración hablada es, pues, el sistema convencional con que expresamos verbalmente los números. Esta numeración se llama décupla por servirle de base las potencias del 10.

Véase con atención el siguiente cuadro (2):

---

(1) En nuestro sistema de numeración hablada la suma de los productos se enuncia siempre de mayor á menor; esto es, primero se dicen... los *millones*, luego los *cienmiles*, después las *decenas de millar* ó *miriadas*, y así sucesivamente los *millares*, las *centenas*, las *decenas* y las *unidades*.

Pues, contrariamente á este sistema, en *once, doce, trece, catorce* y *quince* se enuncian primero las *unidades* y después los *dieces*.

once	= *undecim*	= 1 + 10
doce	= *duodecim*	= 2 + 10
trece	= *tredecim*	= 3 + 10
catorce	= *quatuordecim*	= 4 + 10
quince	= *quindecim*	= 5 + 10

(2) Según se encuentra en la excelente Aritmética de D. AMBROSIO MOYA, sin duda la mejor de su clase (hasta ahora), no sólo de nuestro país, sino del extranjero.

CUADRO DE LA NUMERACIÓN DÉCUPLA VERBAL.

GENERACIÓN.	NOMENCLATURA.	CLASIFICACIÓN.			
Unidad	Uno.	Primer orden	Unidad.		
Diez unidades	Diez	Segundo	Decena.		
Diez decenas	Ciento	Tercero	Centena.		
Diez centenas	Mil	Cuarto	Unidad		
Diez millares	Diez mil	Quinto	Decena	De millar	
Diez decenas de millar	Cien mil	Sexto	Centena		
Diez centenas de millar	Millón	Séptimo	Unidad		
Diez millones	Diez millones	Octavo	Decena		
Diez decenas de millón	Cien millones	Noveno	Centena		De millón.
Diez centenas de millón	Mil millones	Décimo	Unidad		
Diez millares de millón	Diez mil millones	Undécimo	Decena	De millar.	
Diez decenas de millar de millón	Cien mil millones	Duodécimo	Centena		
Diez centenas de millar de millón	Billón	Décimo tercio	Unidad		
Diez billones	Diez billones	Décimo cuarto	Decena		
Diez decenas de billón	Cien billones	Décimo quinto	Centena		De billón.
Diez centenas de billón	Mil billones	Décimo sexto	Unidad		
Diez millares de billón	Diez mil billones	Décimo séptimo	Decena	De millar.	
Diez decenas de millar de billón	Cien mil billones	Décimo octavo	Centena		
Diez centenas de millar de billón	Trillón	Décimo nono	Unidad		
Diez trillones	Diez trillones	Vigésimo	Decena		
Diez decenas de trillón	Cien trillones	Vigésimo primo	Centena		De trillón.
Diez centenas de trillón	Mil trillones	Vigésimo segundo	Unidad		
Diez millares de trillón	Diez mil trillones	Vigésimo tercero	Decena	De millar.	
Diez decenas de millar de trillón	Cien mil trillones	Vigésimo cuarto	Centena		
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.		

RESUMEN

¿Qué es numeración hablada?

El sistema convencional con que expresamos los números.

¿Cuántos sistemas de numeración hablada hay?

Uno usual y corriente para los números puros y los números modulares; y

Otro exclusivamente modular que sólo se emplea en ciertos tráficos ó en cómputos especiales:

12 meses, un año; 2 veces 12 horas, un día...

¿Cuál es el usual y corriente?

El decimal.

¿Cuál el especial de ciertos tráficos y cómputos?

El duodecimal.

¿En qué consiste el sistema decimal?

1.° En haber inventado cierto número de palabras para expresar cada uno de los 10 primeros grados de la escala de la pluralidad;

2.° En formar grupos de *diez unos*, y en contar esos grupos como se contaron los *unos* hasta llegar á diez grupos de á diez unos, ó sea *centenas;*

3.° En formar grupos de *centenas* y contarlas como se contaron los unos y los dieces, hasta tener diez grupos de centenas, ó millares;

4.° Y en contar los *millares*... etc., siempre formando grupos superiores con diez de los inmediatamente anferiores indefinidamente.

¿Qué es miríada?

El grupo especial de *diez miles*.

¿Qué algoritmo se emplea de diez á diez y nueve?

La suma.

¿Y de veinte á noventa y nueve?

La multiplicación y la suma.

¿Y de ciento en adelante?

La involución, la multiplicación y la suma; esto es, todos los tres algoritmos generales.

¿Qué es, pues, en general el nombre de cualquier número?

Una suma de sumandos, cada uno formado por un producto de dos factores, de los cuales uno es una potencia del diez, y el otro uno de los dígitos el cual sirve de coeficiente á su respectiva potencia: ó, de un modo más breve, una *suma* de *productos* de las potencias del diez, enunciados ordenadamente de mayor á menor.

Un ejemplo:

Sea el

siete mil cuatrocientos cincuenta y seis.

$$= (7 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (6 \times 10^0) \text{ (1)}$$

Desde diez en adelante, ¿son compuestos todos los nombres de los números?

Sí: hasta el *once*, el *doce*, el *trece*, el *catorce* y el *quince* lo son, atendiendo á su etimología.

APÉNDICE

¿De dónde procede nuestra numeración hablada?

Hé aquí un problema que ha ocupado preferentemente la atención de los sabios, no sólo por el interés etimológico que entraña, sino también (y muy principalmente) porque para la Antropología es de esencia conocer el cómo se han iniciado las ideas de número en los pueblos primitivos, y el cómo desde ellas se ha desarrollado la Aritmética hasta su portentoso estado científico actual.

Podría haber quien á primera vista creyese que el descubrimiento de los orígenes de nuestras palabras numéricas es tarea no difícil para la moderna ciencia de las etimologías; pero quien tal pensara olvidaría sin duda que el etimólogo no ha llegado hasta el nacimiento de un vocablo, mientras no encuentra el significado material que tuvo en su acepción primaria, objetiva y no abstracta (2).

---

(1) El símbolo $a^0 = 1$ sólo es explicable por el álgebra. (Véase LOGARITMOS.)

(2) Por ejemplo, se sabe que ciertas voces *arias* manifiestan afinidades existentes en:

Español.	Sánscrito.	Zend.	Griego.	Latín.	Gótico.	Inglés.	Francés.
Padre..	Pitár....	Patar....	πατὴρ...	Pater..	Fádar ...	Father...	Père.
Madre..	Màtár ...	Mâtar ...	μήτηρ...	Mater..	....	Mother..	Mère.
Hija...	Duhitar..	Dugdhar.	θυγάτηρ.	....	Dauhtar. (*Lituánico.*)	Daughter	....

Pero no se trata de encontrar estas afinidades ni de acrecentar su número á fuerza de estudiar lenguas emparentadas: lo que siempre se quiere es llegar á un primer significado que dé razón del significado moderno.

Padre se deriva de una raíz PA, que no significa *engendrar*, sino *proteger, alimentar*. *Padre* como generador se llamaba en sánscrito *ganitar*, y como protector de su hijo *pitár*.—Madre procede de un radical MA, que significa *formar*.—*Duhitar*, hija, viene de DUH, ordeñar (acaso el latín *duco*). Hija, significa, pues, la *lecherita*, voz que es todo un idilio de la vida pastoril: á la hija estaba encomendada la provisión de leche para toda la familia. (Véanse ampliadas estas ideas en MAX-MÜLLER, «*Mitología comparada*».)

No se *trata* pues de saber que *uno* viene del latín UNUS, A, UM; *dos* de DUO, Æ, O; *tres* de TRES, TRIA: *cuatro* de QUATUOR, *cinco* de QUINQUE... *veinte*, *treinta*, *cuarenta*... de VIGINTI, TRIGINTA, QUADRAGINTA;... *ciento* de CENTUM...

No se *trata* de probar que la semejanza entre los numerales italianos, provenzales, catalanes, franceses, españoles, portugueses, gallegos, rumanos... es inexplicable sin la previa existencia de un tipo común al que todos se refieren, el latín.

Ni tampoco se trata de evidenciar que esta semejanza radica en las (1) que ofrecen las lenguas arias más antiguas, salidas de aquella otra lengua, hoy desconocida, de donde provienen el sánscrito, el zend, el griego, el latín, el gótico, y las demás lenguas de la gran familia indo-europea.

Ni tampoco basta concebir que la numeración hablada del sistema decimal, fundada sobre una concepción abstracta de la idea de número, debió haberse madurado y extendido en una sociedad reducida, que después hubo de esparcirse por dilatadas regiones de Asia y Europa.

No; lo que la Antropología desea, es averiguar qué significaron los radicales primitivos de los nombres numéricos *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, etc., para poder determinar si la raza *aria* aprendió el sistema por el cómputo digital.

Pero, por más que la ciencia ha investigado y sigue investigando, nada definitivo ha logrado descubrir. Lo que sabe-

(1)

	Sánscrito.	Griego.	Latín.	Lituanio.	Gótico.
I.	Ekas	(εἷς οἴνη)	Unus	Wienas	Ains.
II.	Dvau	δύω	Duo	Du.	Tvai.
III.	Trayas	τρεῖς	Tres	Trys	Threis.*
IV.	Katvàras.	τέτταρες. πίσυρες.	Quatuor (*Osco*, petora.	Keturi	Fidvôr.
V.	Panka	πέντε	Quinque (*Osco*, pomtis).	Penki	Fimf.
VI.	Shash	ἕξ	Sex	Szeszi	Saihs.
VII.	Sapta	ἑπτά	Septem	Septyni	Sibun.
VIII.	Ashtau	ὀκτώ	Octo	Asztuni	Ahtau.
IX.	Nava	ἐννέα	Novem	Dewyni	Niun.
X.	Dasa	δέκα	Decem	Desimt	Taihun.
XI.	Ekâdasa	ἕνδεκα	Undecim	Wieno-lika	Ain-lif (*).
XII.	Dvâdasa.	δώδεκα	Duodecim.	Dwi-lika	Tva-lif.
XX.	Vinsati	εἴκοσι	Viginti	Dwi-desimti.	Tvaitig jus.
C.	Satam	ἑκατόν	Centum	Szimtas	Taihun-taihun

(MAX MÜLLER, op. cit.)

(*) *Lif* significa más-allá, de modo que en el alemán de época relativamente próxima *eilf*, once y *zwölf*, doce quieren decir *uno-más-allá*, *dos-más-allá*, y queda sobreentendido *diez*. Este es uno de los pocos casos en que se vislumbra algo la etimología.

Unus no está emparentado con *ekas*, sino con oina-s, que parece hubo de significar [illegible]; otro caso de etimología, si resulta bien comprobado.

Prathamas y πρῶτος primero, vienen de *pra*, latín, *pro*, delante, caso digno también de tenerse en consideración.

mos, sin género alguno de duda, es, por una parte, que empleamos hoy las mismas palabras de que se servían hace muchos, muchísimos siglos, nuestros abuelos de la raza *aria*, sin más cambios que los debidos á las naturales influencias fonéticas; y, por otra parte, que la época en que los numerales adquirieron y fijaron su sentido abstracto de número puro, olvidando su primitiva acepción etimológica de carácter material, debe pertenecer al período prehistórico de una civilización remotísima; porque el olvido de las etimologías primarias exige, por necesidad, enormes lapsos de tiempo, que no pueden contarse sino por miles de años. ¿Cómo, sin el transcurso de muchos siglos, pudo olvidarse que *«pontífice,»* significó *el que hace puentes?* ¿que *«simple,»* etimológicamente quiere decir *sin pliegue?* ¿que *«virtud,»* es *la cualidad de varón?* etc., etc., etc.

Nada, tampoco, sabe la ciencia etimológica del significado primitivo de los numerales 1, 2, 3, 4 en las tribus inferiores que no han podido llegar al núm. 5. Y, aun tratándose de las razas que, salidas ya del salvajismo, han sabido progresar hasta el grado eminente de contar por *manos, pies,* y *hombres-enteros* los numerales cinco, diez y veinte, también se ignora qué acepción pudieron originariamente tener, en tiempos más antiguos, los nombres de los números anteriores al 5.

De donde conjuntamente etimólogos y antropologistas deducen que, como más necesarios los nombres de los números 1, 2, y 3 con el significado de *mucho,* fueron creados los primeros, y, por tanto, por muy viejos, hubieron de perder su material sentido etimológico; al paso que los nombres numéricos 5, 10, 15 y 20 (expresados por pies, manos y hombres), hubieron de ser invención de épocas relativamente cercanas, por lo cual dejan ver aún su sentido original.

Y, asimismo, deducen los antropólogos que, si bien la filología no puede dar con la acepción originaria de los nombres que en las lenguas indo-europeas se asignan á los números, no ha de inferirse por ello que el procedimiento de formación empleado por el pueblo que habló la lengua hoy perdida, de donde salieron todas las de la familia *aria*, fuese distinto de este otro procedimiento que produce la numeración deducida de las manos y los pies, tan dominante y evidente en los idiomas salvajes. Y, en efecto, no se vislumbra aún la etimología de nuestros numerales; pero es de incuestionable claridad su esencia decimal. Y el modo de combinación de las voces numéricas, indeciso y no severamente sistemático, es el propio de naciones no llegadas al supremo grado de civilización.

En nuestra numeración hablada todo dígito enunciado ante las decenas es multiplicador de éstas, y, enunciado después, sumando del producto (lo cual no sucede sistemáticamente en la numeración *aria)*, prueba de una confusión de ideas natural en quienes barajaban denominaciones relativamente nuevas con otras mucho más antiguas. En *undecim, duodecim, tredecim*... se ve claramente que estas voces están compuestas de *decem*, diez, precedido como *sumando*, y no como *multiplicador*, de *unus*, *duo*, *tres*... (que según el sistema actual) habrían de ser

diez y uno, diez y dos, diez y tres...

y no como son

$1 + 10; \quad 2 + 10; \quad 3 + 10...$

ἕνδεκα, δώδεκα, son igualmente:

$1 + 10; \quad 2 + 10;$

y ya trece es en griego

δεκατρεῖς, $10 + 3$.

Si en sánscrito los dígitos colocados ante las decenas fuesen multiplicadores,

ekâdasa y dvâdasa,

no significarían $10 + 1$, $10 + 2$, sino 1×10, 2×10.

La falta de sistema se ve clara en el latín mismo, donde los numerales suelen indicarse por suma sin orden fijo, y á veces por resta; por ejemplo:

13, tredecim, tres et decem, ó bien, decem et tres;
14, quatuordecim, quatuor et decem, decem et quatuor;
17, septemdecim, ó decem et septem;
18, duo de viginti ($= 20 - 2$), octodecim, decem et octo, octo et decem;
19, un de viginti ($= 20 - 1$), novemdecim, decem et novem, novem et decem, etc.

Por otra parte, no acusa una civilización muy adelantada en el arte de contar el hecho de que los *arias*, mientras vivieron juntos formando un solo pueblo, no supiesen contar más que hasta 100; pues evidentemente no proceden de un tronco único y común, igual para todos los dialectos más antiguos de los *arias*, los nombres del número 1 000, usados por los diferentes pueblos de esta gran familia (1).

(1) No hay manera de sacar unos de otros los diferentes nombres del número *mil* existentes en las lenguas principales de la gran familia *aria*.

	Sánscrito.	Griego.	Latín.	Lituanio.	Gótico.
1 000	Sahasram.	χίλιοι.	Mille.	Tukstantis.	Thusundi.

Lo cual prueba que los nombres del *mil* fueron inventados después de la dispersión de estas gentes, cuando las necesidades del progreso las obligaron á ello en regiones muy apartadas y distantes unas de otras.

Y, si los arias primitivos no contaban más que hasta ciento, es de toda improbabilidad que hubiesen llegado desde luego, y de un golpe, á la idea abstracta de número puro, sin haber contado antes por mucho tiempo al arrimo de algún módulo; y, si tal sucedió por necesidad fatal é ineludible, entonces es de altísima verosimilitud que los números digitales los hubiesen llevado á su evidente sistema decimal.

Por supuesto, nada más común que la pérdida del sentido etimológico, ya porque las voces al cambiar de acepciones no conservan las letras ó el acento antes necesarios para dar á conocer su primer sentido, ya por las mutilaciones del uso, ya por motivos de rapidez ó de eufonía, ya por otras causas enteramente artificiales y arbitrarias (1).

Para el progreso humano es preciso, en absoluto, no ver en imagen, sino en idea; y, por consiguiente, la voz que empezó significando cosas sensibles ó actos materiales ha de ir olvidando su significación primaria para llegar á expresar conceptos puros. Esto ha sucedido siempre, y sigue sucediendo, y sucederá constantemente; por lo cual, con gran razón se dice que el lenguaje es una *poesía fósil*. Y, efectivamente, para las grandes concepciones del entendimiento es preciso que las multitudes pierdan la conciencia etimológica.

Nada, pues, más natural ni de utilidad mayor que el tránsito de las palabras desde la imagen á la idea. Y en el caso actual, nada más útil que el hecho de que el vocablo UNO signifique abstractamente el primer número puro, el principio de la escala de la pluralidad, y no *luna*, ni *menor*, voces que pueden expresar el UNO, por no haber más que una luna, ó por no haber más que *una sola cosa menor que las demás* (2).

---

(1) A veces las causas de estos cambios desconciertan la más fecunda previsión. Por ejemplo:

En la Polinesia, muchos de los indígenas, al advenimiento de un nuevo rey, varían las palabras cuyo sonido se aproxima al nombre de su jefe. Los *taitianos*, así, en vez de *rua*, nombre del *dos*, adoptaron la voz *piti*, que significaba *juntos*. Para *cinco* decían *rima*, mano, voz que fué abandonada por la de *pae*, cuyo significado era *parte*, *división*, para *indicar* la división de las dos manos.

Estos cambios por causa del ceremonial, suelen no persistir cuando cesan pronto los motivos á que debieron su origen; pero á veces se perpetúan en el habla, como ha acontecido con los nuevos vocablos *piti* y *pae*, para el *dos* y para el *cinco*.

(2) El vocablo latino *unus* no está emparentado con el sánscrito *eka*, sino con ENA-S, que quiere decir *menor*.

Los sabios de la India formaron una serie de palabras que les sirvie-

Y, análogamente, nada más propio de un pueblo dotado (aunque sea de modo inconsciente) del sentido filosófico del lenguaje, que haber hecho significar á una palabra desligada de todo concepto material, v. gr., al *dos*, el segundo grado de la escala de la pluralidad, y que, de modo idéntico, hubiese llegado á formar palabras que no significasen *mano* para el *cinco*, *dos manos* para el *diez*, ni *gavilla*, ni *manojo*, etcétera, etc., para los números puros superiores.

¡Démonos, pues, el parabién de poseer palabras para los números puros, expresivas en abstracto de los grados de la escala de la pluralidad; y contentémonos con saber que en Aritmética usamos todavía de los mismos vocablos hablados por los arias primitivos, si bien nos es hoy imposible dar con el significado primario de los números, expresivos sin duda alguna de algo sensible y material.

Es un hecho: cuando una palabra llega por cualquier motivo á ser símbolo de algo abstracto, las lenguas todas tienden á dejarle perder su significación imaginativa para afirmarle más y más su nueva acepción ideológica. Y, si esto sucede con todos los vocablos, mucho más ocurre con las voces numerales; y así es muy natural que de los dígitos anteriores al cinco no se conozca el origen en ninguna lengua.

sen de medios mnemotécnicos para recordar las fechas y los números. Entre estas palabras están *luna* y *tierra* para el *uno*; para el *dos* servían las voces *ojos*, *alas*, *brazos*...; para *treinta y dos* el vocablo *dientes*, etc.

LECCIÓN II

Numeración supérflua.—Ordinales.

Pertenecen á la numeración hablada modular los vocablos llamados *partitivos;* como *mitad*, *tercio*, *décimo*, *diezmo*, *millonésima*, etc., etc.; y también son propios de ella los llamados *proporcionales*, que indican el número de veces que una cantidad comprende en sí á un módulo conocido, como *duplo, triplo*, *cuádruplo*... *décuplo*... *céntuplo*, etc. (1).

Además de las voces, anteriormente citadas, *once, doce, trece, catorce*, *quince*, por completo fuera del sistema, existen en la numeración hablada modular muchas más muy arbitrarias; y sin las cuales, por supuesto, pudiéramos pasarnos, por ser en rigor supérfluas.

Tales son

par, *terna*, *cuaterna;*

pero el uso las prefiere en determinados casos. El uso, pues, principalmente, y razones de brevedad ó de eufonía aconsejan que, ya que existen en la práctica, nadie piense en suprimirlas.

Tampoco son absolutamente necesarias las *voces colectivas* que expresan *números determinados*; como *decena*, *docena*,

---

(1) A veces estas voces expresan números puros, v. gr.:

200 es el décuplo de 20, etc.

quincena, *veintena*, *cuarentena*, *quincuagena*, *centenar*, *millar*,... pues bién pudiéramos decir un *diez*, dos *dieces*... un *ciento*, un *mil*...

Existen también otros nombres expresivos de números modulares para muy reducidos empleos y usos, en que siempre se suponen módulos especiales.

En los juegos de naipes, de dados ó de dominó el UNO se denomina *as*. DOS se dice *collera* hablando de pavos, gallinas ó perdices; un *tronco*, sirve para designar DOS caballos de tiro, una *yunta* para DOS bueyes. *Pareja* es el nombre de DOS guardias que hacen servicio juntos mientras están de facción... *trinca* designa en los ejercicios de oposición á cátedras vacantes TRES opositores que demuestran juntos sus respectivos méritos; y, como éstas, otras varias palabras numerales de uso restringido á determinados módulos; *duo*, *triduo*, *quinario*, *septenario*, *octava*, *novena*, *cuaresma*, *cuarentena* (bién que esta voz, por lo común, no signifique actualmente *cuarenta*, sino detención durante variable número de dias por medida sanitaria), etc., etc. Las voces *semana*, *mes*, *trimestre*, *cuatrimestre*, *semestre*, *año*, *bienio*, *trienio*, *lustro*, *siglo*, *peseta*, *metro*, *kilómetro*... entrañan claramente la idea de número, etc.; una *talega* es 1 000 duros...

En algunas localidades la palabra *corral*, unida á ciertos verbos, significa 12 gallinas y 1 gallo; v. gr.: *la madre le regaló un corral de gallinas*: *he comprado un corral* (lo que no impide que *corral* sea también el nombre de un número indeterminado de gallos y gallinas) (1).

La palabra *mucho*, restringida en varias tribus inferiores á lo que es tres, ó más de *tres*, se dice en nuestra lengua de multitud de maneras, según los objetos á que se aplica.

Enjambre de abejas; *manada* de lobos; *jauría* de perros; *piara* de cerdos; *rebaño* de ovejas; *yeguada*; *torada*; *vacada*; *bandada* y *banda* (voces aplicables sólo á las aves de vuelo); un *banco* de arenques; una *nube* de insectos; una *plaga* de langosta; *escuadra* de gastadores; *banda* de cornetas; *banda* de tambores; *pelotón*; *sección*; *compañía*; *tercio*; *escuadrón*; *batallón*; *regimiento*; *brigada*; *división*; *batería*; *parque*; *tren de batir*; *escuadra* de bajeles (todas éstas, voces militares);

(1) Véase el apéndice al final de esta Lección.

turba, *tropel*, *muchedumbre*, *multitud*, *gente*, *pueblo*, *gremio*, *Academia*, *Claustro* (de una Universidad), *Cabildo*, *flota*, *pulgarada*, *manojo*, *puñado*, *espiga*, *mazorca*, *ristra*, *recua*, *reata*, *tiro* de mulas, *tren*, un *diluvio* de mentiras, la *mar* de libros... (1).

Como se vé, la superfluidad de las voces numerales no daña á nuestro sistema de numeración hablada referente á los números puros, que sería uno de los más consecuentes y precisos que hoy se hablan, si pudiéramos prescindir de los vocablos irregulares, no correspondientes al sistema,

once, doce, trece, catorce, quince,

y dejar de usar la conjunción Y entre decenas y unidades. Entonces cualquier grado de la pluralidad se expresaría (en pasando de los primeros) enunciando sucesivamente, de mayor á menor, una serie de productos constituídos por

....
millones,
centenas de millar,
decenas de millar,
millares,
centenas,
decenas,
unidades.

En Aritmética siempre nos atenemos al sistema con la mayor fidelidad. Sólo en la práctica de la vida nos separamos de él, especialmente al contar las horas y los siglos.

Así decimos, DIFERENCIALMENTE, *las cuatro menos veinte minutos* (2), *las seis menos cuarto, las diez menos cinco...* en vez de decir ADITIVAMENTE *las tres y cuarenta, las cinco y tres cuartos, las nueve y cincuenta y cinco...*

Análogamente, en las fechas, al hablar, decimos: el *pri-*

---

(1) Como ejemplos notables del inglés, análogos á los anteriores españoles, citaré los siguientes: *a flight of swallows*, un vuelo de golondrinas; *a shoal of herrings*, un banco de arenques; *a school of whales*, un tropel de ballenas; *a troop of cavalry*, un escuadrón de caballería; *a bevy of beauties*, un certámen de bellezas; *a throng*, una muchedumbre.

También son dignos de mención los siguientes de entre los muchos que abundan en francés: *une compagnie de perdrix*, una bandada de perdices; *un vol d'hirondelles*, una nube de golondrinas; *un banc de harengs*, un banco de arenques; *une compagnie de cavalerie*, un escuadrón de caballería; *une réunion de beautés*, un congreso de bellezas; *une multitude*, *una turba de gente*.

(2) Cuando se escribe, por ejemplo, en un almanaque náutico, se usa la numeración aditiva, no la diferencial: las 3 y 40; 5 y 45; 9 y 55...

mer cuarto de este siglo, *al mediar* el siglo XIX (1), la revolución del 68...

También se emplea la cuenta diferencial al tratar de monedas y de pesas...

> tres pesetas menos cinco céntimos,
> cuatro duros menos tres pesetas...
> tres kilos menos diez gramos...

Corresponden á la numeración hablada los números ordinales, que, en general, se derivan de los cardinales.

Hay, sin embargo, excepciones.

Por ejemplo: la voz *primero* no viene del cardinal *uno,* sino que está emparentada con las preposiciones *pra, pre* en el significado de *antes, al principio* (2). *Segundo* no viene de *dos,* sino del verbo *seguir, sequi* (3).

Los números ordinales presentan bastante irregularidad. Empiezan con la terminación *ero,* luego siguen sin terminación sistemática, hasta que, por último, adoptan como definitiva la terminación *ésimo*...

primero,	undécimo, onceno, décimo primero,
segundo,	duodécimo, décimo segundo,
tercero,	décimo tercero, (4)
cuarto,	décimo cuarto, (4)
quinto,	décimo quinto, (4)
sexto,	décimo sexto,
séptimo,	décimo séptimo,
octavo,	décimo octavo,
noveno, nono,	décimo noveno, décimo nono,
décimo,	vigésimo, trigésimo, cuadragésimo, etc.

Regularmente no se usan los ordinales sino en los primeros grados. Para los otros se prefieren los cardinales:

El primero de año, y el dos, el tres, el cuatro de Enero.

Carlos primero, Carlos segundo, Carlos tercero, Carlos cuarto, Carlos quinto... y Carlos doce, Pío nono y León trece,

---

(1) En lo escrito se sigue también el orden aditivo: 1825, 1850, 1868...; refiriéndonos siempre al siglo XVIII y no al XIX.

(2) Sánscrito, *prathamas;* griego, *πρῶτος;* latín, *primus;* francés, *premier;* inglés, *first;* etc.

(3) Véase el apéndice á esta Lección.

(4) Estos ordinales entran más en sistema que los cardinales respectivos *trece, catorce* y *quince.*

Alfonso décimo y Alfonso doce... El uso es quien decide en muchos casos particulares.

En los números muy altos, ó que pueden serlo, casi no se usan más que los cardinales:

Lección primera, segunda, tercera, cuarta, quinta, y lección seis, siete, ocho, nueve... página primera y página dos, tres, cuatro... ciento dos, doscientos cincuenta y cuatro, etcétera, etc.

Hay, además, ordinales formados independientemente de los radicales numéricos, como sucede con las palabras expresivas de los grados de parentesco

hijo, nieto, biznieto, tataranieto, chozno,

ó bien

padre, abuelo, bisabuelo, tatarabuelo;

y en sentido general é indeterminado las voces *ascendientes* y *descendientes*.

En el mismo caso se hallan los días de la semana; domingo, lunes, martes, etc., y los meses del año, Enero, Febrero, Marzo, etc.

Pero, de entre las voces que indican orden, ningunas hacen de numerales con más frecuencia que las letras del alfabeto.

Bien es verdad que las letras sirven más bien para indicar la sucesión de los objetos, que no su grado.

Por ejemplo, se sabe que tras el cuaderno ó el párrafo... *m* ha de seguir el *n*; pero sólo haciendo un cómputo (fácil en verdad) puede saberse que *m* representa el grado 14°, y *n* el grado 15°..., etc.

a = 1°
b = 2°
c = 3°
d = 4°
e = 5°
f = 6°
g = 7°
h = 8°
i = 9°
j = 10°
k = 11°
l = 12°
ll = 13°
m = 14°
n = 15°
etc.

APÉNDICE

A.

El uso de palabras en rigor supérfluas, no es exclusivo de nuestra lengua castellana.

Los ingleses, para el dos tienen *pair* (del latín *par*, igual) (1); para el veinte, *score*, muesca, mortaja; los alemanes dicen *stiege*, que significa escalera estrecha, para designar una veintena (de varas especialmente); y por este estilo, en otras lenguas, *pueblo* es treinta; *gente*, cuarenta; *multitud*, ochenta; *gavilla*, sesenta; *cuerda*, treinta, etc.

Estos significados metafóricos de las palabras comunes usadas como numerales, son frecuentes en las razas inferiores. Cuando uno de los reyezuelos del Dahomey atacó á Bekouta, perdió 4 820 soldados, guarismo expresado por dos *cabezas*, veinte *cordones* y veinte monedas de *hombres*.

La multiplicidad de voces numerales no precisas, si resulta supérflua, se hace por lo mismo engorrosa, pues exige cierta atención para su apropiado empleo; y, por esta causa, tienden naturalmente á desaparecer. Los niños ya mayorcitos suelen preguntar: ¿puede decirse un rebaño de cochinos? ¿y una bandada de abejas? ¿y una collera de corderos? ¿y una recua de caballos? ¿y un banco de atunes?...

Así, pues, esta clase de voces desaparece poco á poco en las naciones dotadas de buen sentido en el lenguaje, pues pronto los naturales sienten (aunque no lo perciban por reflexión) cuán preferible es á ese lujo enojoso de vocablos el uso circunscrito de aquellos únicamente respecto de cuyo significado no cabe nunca dudar.

B.

El rigor sistemático de nuestra numeración hablada no se encuentra en otras lenguas de pueblos muy civilizados.

Los alemanes anteponen, por yuxtaposición, los nueve primeros dígitos á la voz *diez*, y esta yuxtaposición significa para ellos suma (literalmente dicen: *once*, *doce*, *tres-diez*,

(1) Es peculiar del inglés una voz que determina el núm. 3 en casos especiales exclusivos. Así dicen *a leash of partridges*, para significar par y medio de perdices, ó sean tres perdices; *a leash of hares*, tres liebres, ó par y medio de liebres.

cuatro-diez, *cinco-diez*, *seis-diez*, *siete-diez*, *ocho-diez*, *nueve-diez)* (1).

También anteponen los dígitos seguidos de la conjunción *und* á las demás decenas: (literalmente: uno y veinte, dos y veinte, tres y veinte, cuatro y veinte... cinco y treinta, seis y treinta, siete y cuarenta... ocho y setenta... nueve y noventa) (2).

Sólo desde ciento en adelante son multiplicadores (como entre nosotros) los dígitos colocados ante las centenas, los miles, ó bien las decenas y las centenas ante los miles, etc. (3)

En inglés (como en alemán) los dígitos preceden al *diez*, y desde veinte á cincuenta pueden ir antes ó después de las decenas (4).

En inglés, además, se cuenta por *veintenas*, score (5); *three score*, sesenta; *four score*, ochenta; *six score*, ciento veinte.

Pues todavía es peor el sistema francés, porque en él se anteponen los dígitos al *diez*, como sumandos hasta el diez y seis (6); desde sesenta á ciento se cuenta más por el sistema vigesimal que por el decimal (7); y, en vez de mil ciento, mil doscientos, mil trescientos... se dice once cientos, doce cientos, trece cientos (8)...

---

(1) Elf, zwölf, dreizehn, vierzehn, fünfzehn, sechszen, siebzehn, achtzehn, neunzehn.

(2) Ein und zwanzig, zwei und zwanzig, drei und zwanzig...

(3) Zwei Hundert, 200; drei Hundert, 300; vier Hundert, 400; fünf Hundert, 500;... zwei Tausend, 2 000; drei Tausend, 3 000; zehen Tausend, 10 000; zwanzig Tausend, 20 000; dreissig Tausend, 30 000; Hundert Tausend, 100 000... etc.

(4) Eleven, 11; twelve, 12; thirteen, 13; fourteen, 14; fifteen, 15; sixteen, 16; seventeen, 17; eighteen, 18; nineteen, 19... (*) twenty one, *ó bien* one and twenty, 21; twenty two, *ó bien*, two and twenty, etc., etc.

(5) *Score*, significa literalmente *muesca, mortaja, señal*. Una *score* sui géneris (en el sistema gráfico usado antiguamente en Inglaterra para llevar las cuentas los mercaderes con sus parroquianos) significaba *veinte*, y de aquí la supervivencia del significado numeral de esta palabra.

(6) Onze, 11; douze, 12; treize, 13; quatorze, 14; quinze, 15; seize, 16; dix-sep, 17; dix-huit, 18; dix-neuf, 19.

(7) Soixante, 60; soixante-un, 61; soixante-deux, 62; soixante-trois, 63; soixante-dix, 70; soixante-onze, 71; soixante-douze, 72; soixante-treize, 73; soixante-dix-neuf, 79; quatre-vingts, 80; quatre-vingt-un, 81; quatre-vingt-deux, 82; quatre-vingt-dix, 90; quatre-vingt-onze, 91; quatre-vingt-dix-neuf, 99.

(8) También se dice *mille cent; mille deux cents; mille trois cents;*... pero, en la práctica, prevalecen las expresiones *onze cents, douze cents, treize cents*...

(*) *Teens* es la terminación de estos ordinales ingleses, y se emplea sólo en frases como la siguiente: *She is in her teens*. Ella está en un período de edad que fluctúa entre los trece y los diez y nueve años.

C.

No es nuevo el método de contar diferencialmente, que empleamos para determinar las horas:

Las cinco menos veinte, las seis menos cuarto, las ocho menos cinco...

Ya en latín eran usuales las expresiones

duodeviginti,	20 menos 2 = 18,	*duodetricesimus*, vigésimo octavo.
undeviginti,	20 menos 1 = 19,	
duodetriginta,	30 menos 2 = 28,	*duodesexagesimus*, quincuagésimo octavo, etc.
undetriginta,	30 menos 1 = 29, etc.	

El sistema diferencial era en latín únicamente usado para expresar los números menores que el veinte, ó el treinta, ó el cuarenta,... en una ó dos unidades; es decir, para el diez y ocho y diez y nueve ó el veinte y ocho y veinte y nueve, ó el treinta y ocho y treinta y nueve;... pero se empleaba, en general, entre los *quichés* y los *mayas* de América. Unos y otros, como los *aztecas*, poseían un sistema completo vigesimal; pero los *mayas* y los *quichés*, para significar 41, 42, 43, 44, decían y dicen *uno-para-sesenta*, *dos-para-sesenta*, *tres-para-sesenta*, *cuatro-para-sesenta*, y al llegar al 61, dicen *uno-para-ochenta*, *dos-para-ochenta*, *tres-para-ochenta*, *cuatro-para-ochenta*, etc.; es decir, que ellos contaban las veintenas como nosotros los años dentro de cada siglo; pues en nuestra numeración hablada en vez de decir 1821, 1822, 1823, 1845, 1870... decimos el año 21 (de este siglo XIX), el año 22, el 23, el 45, el 70... La revolución del 40 no fué la más notable del siglo XIX (1).

D.

Ni tampoco es propio y exclusivo de las lenguas superiores el no derivar los ordinales de los números cardinales.

Los *groenlandeses* prescinden de su *uno*, para formar la palabra *primero*, que sacan de un radical que significa *desde luego*. También prescinden de su *dos* para la voz *segundo*, que significa *su-compañero*.

En Australia, los naturales del distrito de *Adelayda*, cuya numeración no pasa de *tres*—que significa también *mucho*,—designan los hijos por el orden de su nacimiento hasta el no-

(1) Lo análogo hacen los alemanes cuando dicen *ein viertel auf zwei;* un cuarto de la segunda hora, esto es, la una y cuarto. *Drei viertel auf sieben*, significa tres cuartos sobre las siete; ó bien, las siete menos cuarto; ó bien, un cuarto para las siete. Et sic de ceteris.

veno, y no solamente tienen nombres ordinales para indicar los varones, sino también para designar ordinalmente á las hembras. Los niños conservan estos apelativos numéricos hasta que sus padres, parientes y amigos se los reemplazan por nombres personales.

Los *maleses* tienen también hasta siete nombres para designar ordinalmente el nacimiento de los hijos y de las hijas.

Lo análogo ocurre entre los *dacotas* de la América del Norte, que tienen hasta cinco numerales de parentesco.

LECCIÓN III

Otros sistemas conocidos de numeración hablada.

Los dedos han enseñado al hombre las primeras nociones de Aritmética. No cabe dudar de que en todos los pueblos de la tierra se ha empezado contando por los dedos. Aun hoy mismo se recurre por los hombres civilizados á la cuenta digital (1).

En unos pueblos se ha contado, ó se cuenta todavía, por los dedos de una mano hasta 5, y se continúa después por los de la otra mano, agregando al cinco los nombres de los cuatro números primeros, sistema que puede representarse de este modo:

$$1, 2, 3, 4, 5; 5 + 1; 5 + 2; 5 + 3; 5 + 4; 2 \text{ veces } 5; (2 \text{ veces } 5) + 1; (2 \text{ veces } 5) + 2; (2 \text{ veces } 5) + 3, \text{ etc.}$$

Contar así de cinco en cinco es hacer uso de la NUMERACIÓN QUINARIA, como lo efectúan varios pueblos de la Polinesia. En griego, el verbo πεμπάζω, *contar por los cinco dedos*, *contar de 5 en 5*, y en sentido general, *computar*, *meditar*, es, sin duda, vestigio ó reliquia de una época en que preponderó

(1) Nada más frecuente que cuentas por este estilo: Ella estuvo aquí el viernes por la noche, hoy es miércoles... de modo que viernes, uno (y se señala un dedo); sábado, dos (y se señala otro); domingo, tres; lunes, cuatro; martes, cinco... hoy miércoles no se cuenta porque ya hemos contado el viernes... de modo que hace ya cinco noches que ella estuvo aquí.
Véase el apéndice de esta Lección.

el contar por cincos. Los números romanos son, sin duda, restos de un sistema quinario no conservado en la lengua hablada (1).

Contar hasta diez consecutivamente los dedos de las dos manos, y después agregar al diez los números primeramente mencionados... es hacer uso de la NUMERACIÓN DECIMAL, á la cual se han consagrado las precedentes lecciones.

Y contar por los dedos de las manos y de los pies es hacer uso del sistema hablado de NUMERACIÓN VIGESIMAL.

A la numeración decimal habían llegado muchos pueblos de América: los *apaches*, los *dakotas*, los *esquimales*, los *algonquines*... pero sólo alcanzó su completo desarrollo entre los peruanos que la trasmitieron á los chilenos, los *yuracarés* y tal vez los patagones.

Los peruanos tenían las mismas clases de las llamadas unidades que nosotros los europeos. El 1, el 10, el 100, el 1 000, el millón, el billón, el trillón... Y entre ellos, lo mismo que entre nosotros los españoles, los números dígitos antepuestos á las unidades de orden superior les servían de coeficientes ó multiplicadores, mientras que pospuestos hacían las veces de sumandos.

Como ejemplo notable de la numeración vigesimal, se presenta el sistema de los *nahuas*, ó pueblos de la Confederación azteca, cuya población más importante fué Méjico.

Tenían nombres para los números

$$1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 400, 8\,000.$$

Hasta veinte su numeración era quinaria, y desde el 20 en adelante perfectamente vigesimal,

$$\begin{array}{llll} 6 = 5 + 1; & 7 = 5 + 2; & 8 = 5 + 3; & 9 = 5 + 4; \\ 11 = 10 + 1; & 12 = 10 + 2; & 13 = 10 + 3; & 14 = 10 + 4; \\ 16 = 15 + 1; & 17 = 15 + 2; & 18 = 15 + 3; & 19 = 15 + 4. \end{array}$$

Estas combinaciones eran, sin duda, reliquia de las cuentas hechas por los dedos de las manos y de los pies, é igual á la de los pueblos que todavía dicen:

(1) I, II, III, IIII, V, VI, VII, VIII, VIIII, VV (ó X), etc. Ya se volverá sobre este punto.

Uno............	dos...........	tres............	cuatro.........	mano.
Mano y uno....	mano y dos.....	mano y tres.....	mano y cuatro.	dos manos.
Dos manos y uno	dos manos y dos.	dos manos y tres	dos manos y cuatro.......	dos manos y un pié.
Dos manos un pié y uno.....	dos manos un pié y dos......	dos manos un pié y tres.....	dos manos un pié y cuatro..	un hombre (1).

Desde veinte contaban los aztecas por veintenas, ó sea, por grupos de á veinte;

Dos veintenas, tres veintenas, cuatro veintenas... hasta veinte veintenas, ó sea *cuatrocientos* de los nuestros.

Desde cuatrocientos contaban por grupos de veinte veintenas;

Dos cuatrocientos, tres cuatrocientos, cuatro cuatrocientos... hasta

Veinte cuatrocientos, ó sea ocho miles de los nuestros; y desde este número contaban por grupos de octimillares: dos ocho miles, tres ocho miles, cuatro ocho miles, etc. (2).

Si en la numeración mejicana hubiese habido diez y nueve nombres simples para los 19 primeros grados de la pluralidad (en vez de tantas combinaciones del sistema quinario), ó si, como ahora decimos, los aztecas hubiesen tenido 19 números dígitos directos, su sistema vigesimal habría sido perfecto.

Los dígitos antepuestos eran coeficientes ó multiplicadores de las unidades de orden superior (veintenas, veintes de veintenas, octimillares, etc.).

---

(1) Los *achaguas* tenían cinco vocablos para los números *uno, dos, tres, cuatro, cinco*. Combinando el cinco con los cuatro números primeros llegaban hasta *nueve*. Con los dedos de ambas manos expresaban el *diez*, con los dedos de las manos y de los piés *veinte*. Las manos y los pies de dos hombres eran *cuarenta*. Las manos y los piés de tres hombres, *sesenta*. Las manos y los piés de veinte hombres, *cuatrocientos*.

El mismo vocablo, pues, significaba *cinco* y *todos-los-dedos-de-una-mano*. Con una misma voz decían, *los-dedos-de-ambas-manos* y *diez*, etc.

Entre los *muiscas* ó *chibchas* once era *pic-uno;* doce, *pie-dos;* trece, *pic-tres*... 20, *casa-una*, 40, *casa-dos*... ciento, *casa-cinco*...

En la lengua *guaraní* la palabra *uno* era la forma negativa de compañero; esto es: *sin-compañero*. La etimología de dos, de tres y de cuatro no está determinada; pero cinco era *cuatro-y-uno*, ó bien *de-persona-mano-una;* diez quería decir *de-persona-manos-dos;* veinte significaba *manos-pies-también;* y así mismo *de-persona-manos-pies-también;* esto es, *los-pies-y-las-manos*.

(2) El sistema vigesimal de los *nahuas* era también el de los *yucatecas, nicaraguatecas*...; y vigesimal asimismo, aunque no idéntico al de los mejicanos, por lo que tenía de diferencial, era la numeración hablada de los *mayas, quichés*...

Como se ve, no ha habido más que tres sistemas hablados de numeración,

el quinario,

el decimal, y

el vigesimal,

porque la Aritmética ha salido de la anatomía humana. Y, si alguien no quisiera asentir aún, ése debería tener presente el argumento que, con este mismo motivo de la influencia numérica de los dedos, empleaba ya Aristóteles hace más de 2 000 años.—Esto no puede ser efecto de la casualidad, decía el gran filósofo, porque lo que se produce siempre y en todas partes, no es obra del azar; es un hecho consecuencia de la misma naturaleza de las cosas.—Y, en efecto, la casualidad habría producido mayores variedades en los sistemas de numeración hablada, y no se habría limitado exclusivamente á los tres, *quinario*, *decimal* y *vigesimal*, á no haber tenido el hombre constantemente á la vista los grupos de sus dedos, con los cuales es natural que comparase todos los demás.

Así, necesariamente la sublime concepción del número puro, hubo de salir del número digital. Las manos y los pies nos han dado, no solamente los números, sino las *medidas* también: un *geme*, dos *palmos*, tres *codos*, veinte *pies*, cien *brazas; pentcha*, en persa, es cinco y mano; πεμπάζω, en griego, es *meditar* y contar de cinco en cinco, etc.

La aritmética modular precedió á la aritmética pura; pero á ésta tenía al fin que elevarse el ser racional, porque calcular no es combinar módulos, sino combinar ideas.

Las naciones más progresivas y adelantadas de la tierra se han decidido por el sistema DECIMAL, descartando el QUINARIO por reducido, y el VIGESIMAL por amplio.

Así el sistema decimal, usado por los antiguos arias, por los hebreos, los árabes, los peruanos... es el que hoy prevalece en todos los pueblos civilizados.

Sin embargo, patentes son las huellas del sistema vigesimal aun en la Europa misma. En la lengua *gaélica* (Irlanda y Escocia) para traducir, por ejemplo, nuestro 51, se usaría una construcción tal como «*uno-diez-y-dos-veintenas.*» En el país de Gales para 36 tendríamos «*uno-y-quince-sobre-veinte,*» y en bretón 71 sería «*once-y-tres-veintenas.*» En francés, la numeración hablada decimal, es sin duda el fondo del sistema; pero la numeración vigesimal de los antiguos celtas ha sido tan preponderante, que á las expresiones, procedentes del latín, *septante*, *huitante* y *nonante* para 70, 80 y 90, son preferidas las frases *soixante-dix*, *quatre-vingts*, y *quatre-vingt-dix*, «*sesenta-diez*,» «*cuatro-veintes*» y «*cuatro-veinte-diez*.» Nadie dice en francés para 73 *septante-trois*, sino *soixante-treize*, ni para 95 dirá tampoco *nonante-cinq*, en vez de *quatre-vingt-quinze*, etc.

Y esto, como es natural, se extiende hasta más allá del 100; pues para 120, 140, 160... hallamos con frecuencia en francés «*seis-veintes*», «*siete-veintes*», «*ocho-veintes*»... y un Hospicio ó Asilo de París se llama de los «Quinze-vingts», por ser 300 el número de pobres allí albergados.

Quizá sea también resto de costumbre céltica el uso inglés de contar por veintes, *score: three score and ten*, tres-veinte-y-diez; *four score and thirteen*, cuatro-veinte-y-trece, etc., son acaso reliquias del sistema céltico vigesimal.

La estructura, pues, de los sistemas de numeración hablada no deja duda de que la cuenta digital fué el medio originariamente adoptado por el hombre para sus primeros y sencillos cómputos; aserción confirmada no solamente por la etimología patente aún de muchas voces numéricas superiores al cinco, que significan mano y pie, sino también, y, SOBRE TODO, en la construcción y organización de los sistemas hablados, siempre QUINARIA, DECIMAL ó VIGESIMAL, cuando no conjuntamente QUINARIO-VIGESIMAL...

APÉNDICE

La cuenta digital, aunque expedita, es incómoda é insuficiente; y, por eso, desde muy antiguo han venido inventando los pueblos de cierta cultura intelectual sencillos aparatos con que hacer cómputos á estilo de los de los dedos, para que, desempeñando esos aparatos el mismo oficio que los dedos al contar, quedase libre el uso de las manos.

Todos estos aparatos (pertenecientes á la numeración palpable) tenían y tienen de común la repetición de un mismo punto, trazo ó medio significativo del 1. Así la repetición de un punto indica los números 2, 3, 4, 5 y 6 en los *dados* y en las fichas del *dominó*.

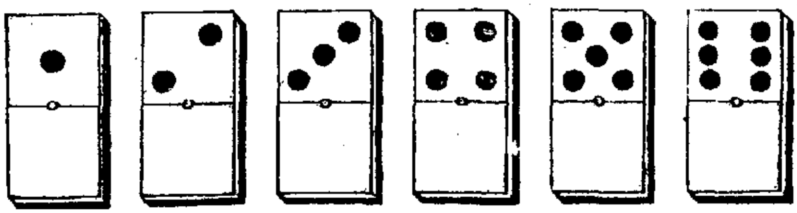


Figura 2.ª

La repetición de las campanadas es el medio empleado en los relojes para indicar las horas desde las *dos* en adelante. Al pase repetido de las cuentas de un rosario acuden los que rezan reiterando unas mismas oraciones. Señalando muchas veces unas rayas se indica el número de los objetos que se reciben ó se entregan, ó los fenómenos que ocurren mezclados con otros, etc.

Conviene mucho observar que los signos, trazos ó *medios* repetidos están muy lejos de ser los símbolos abstractos de los números puros de la numeración escrita. Las cifras

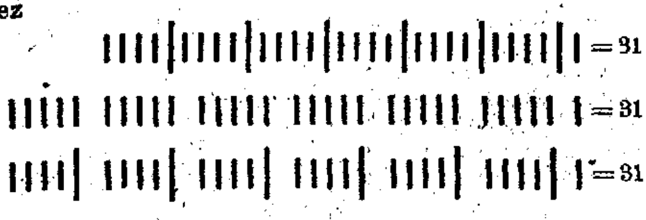
1, 2, 3, 4, 5,...
13, 14, 15, 16, 29,...
118, 305, 473,... 1 000, 78 436... etc.

indican grados de la escala de la pluralidad con entera abstracción de toda propiedad física, geométrica ó mecánica;... al paso que los signos de las fichas del *dominó*, ó los de los *dados*, son puntos puestos allí en cierto número; los valores de los naipes son representación de los palos llamados *oros, copas, espadas* y *bastos* en número de dos oros,... de tres copas,... de cuatro espadas,... de cinco, seis, siete bastos, etc. Y, así, en los dominós ó en los naipes se ven grupos de figuras que es preciso contar, porque no son verdaderos números. El siete de oros, no es el número siete, ni el cuatro de copas es el cuatro puro, ni el as de oros es la unidad indivisible. Cuando vemos las dos cifras que representan el 31, no hay que contar para saber de cuál grado de la pluralidad se trata, como indefectiblemente habría que hacerlo, si nos encontrásemos una expresión equivalente de trazos repetidos, tal como la que sigue:

|||||||||||||||||||||||||||||||

Y ¿cuál no sería la dificultad, si en vez del 31 nos hubiésemos encontrado con 310 rayas, ó con el número 3 100... expresado por trazos verticales?

Para introducir, pues, algún orden cuando se recurre á las rayas, *la última de cada grupo de á cinco* se indica con un trazo más visible ó más largo que los otros, ó bien los grupos se escriben algo distantes, ó se recurre á todos estos medios á la vez



Acostumbrados como estamos á ver constantemente el cinco en nuestros dedos, los grupos de cuatro trazos seguidos de otro diferente en tamaño nos son muy fáciles de contar. Por esto cualquier persona de poca cultura, una criada, por ejemplo, aprende en brevísimo tiempo á leer la escala de un termómetro; ó los milímetros de un metro...

En el rosario, cada diez cuentas iguales están separadas por otra más gruesa.

Entre los aparatos relativamente modernos, y cuya construcción exige algún cuidado, merece mención el tablero contador *ó ábaco* de billar, que consiste en un marco rectangular, liso ó con adornos, donde se sujetan horizontalmente paralelos y unos bajo otros, gruesos alambres rectos, en los cuales están ensartadas bolas, en número de cuarenta regularmente, las cuales pueden correr por ellos con facilidad de izquierda á derecha ó al revés: las bolas quinta, décima, décimaquinta, etc., son mayores ó de diferente color que las demás, ó las dos cosas á la vez. Las bolas suelen sustituírse por discos. Al empezar una partida, cada alambre se destina á uno de los jugadores, y todas las bolas están juntas á la izquierda del marco; mas, á medida que va haciendo *tantos* cada jugador, se van pasando á la derecha, en el alambre á él destinado, bolas en número igual al de los *tantos* hechos. El número de partidas que cada uno gana, se apunta en alambres suplementarios. Este sistema pertenece al llamado por Humboldt de *numeración palpable*.

Este ábaco tiende visiblemente á desaparecer; porque las modernas mesas de billar tienen en el larguero de una de las bandas un contador de ruedas de engranaje, y además un timbre que suena á cada *tanto* que se anota.

Actualmente las escuelas de párvulos poseen ábacos análogos en una de las formas siguientes:

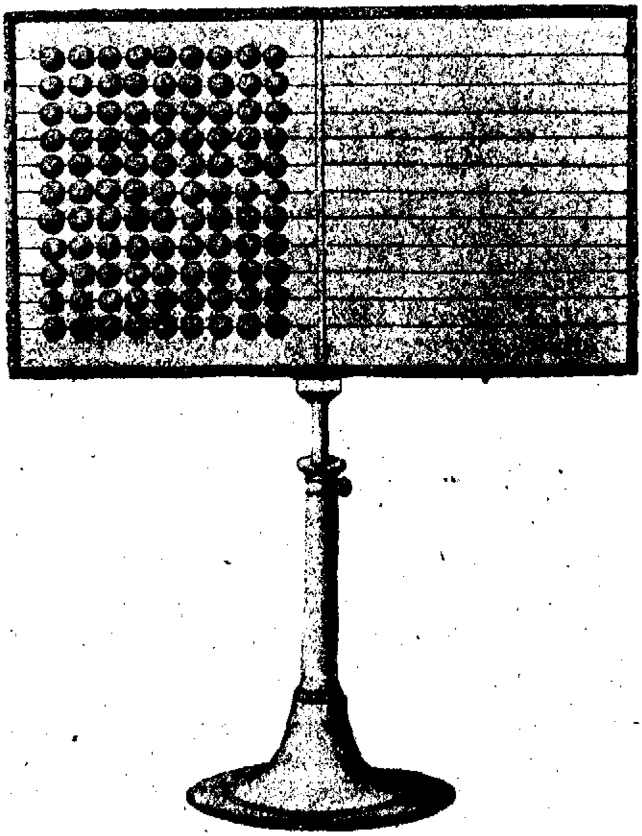
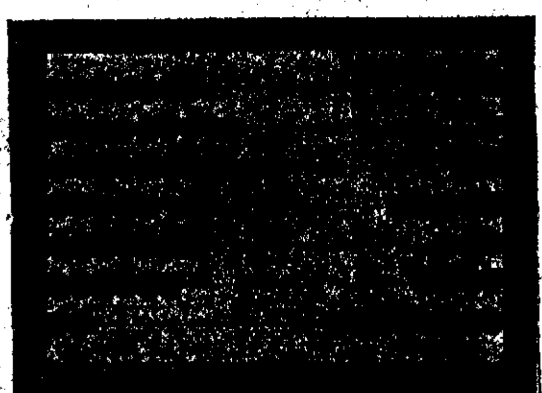


Figura 8.ª



Estos ábacos están imaginados para enseñar á los niños el sistema decimal de nuestra numeración escrita (en que cada cifra tiene un valor absoluto y otro locativo ó de posición).

Pero, como una bola, ó dos, ó tres bolas... no son el concepto puro de los grados de la escala de la pluralidad, 1, 2, 3, 4...; y, por otra parte, como los guarismos representados por las bolas de cada alambre, utilizados en cada caso particular, no se *leen*, sino que se *cuentan*, no faltan quienes consideren que el ábaco de los números en las escuelas de párvulos no es un medio tan eficaz de enseñanza como se pondera, ni tan propio, como se dice, del estado de nuestra civilización. Y, verdaderamente, los hechos dan la razón á los que tal objetan, ya que en gran número de escuelas, al cabo de algún tiempo, los ábacos constituyen más bien objetos de

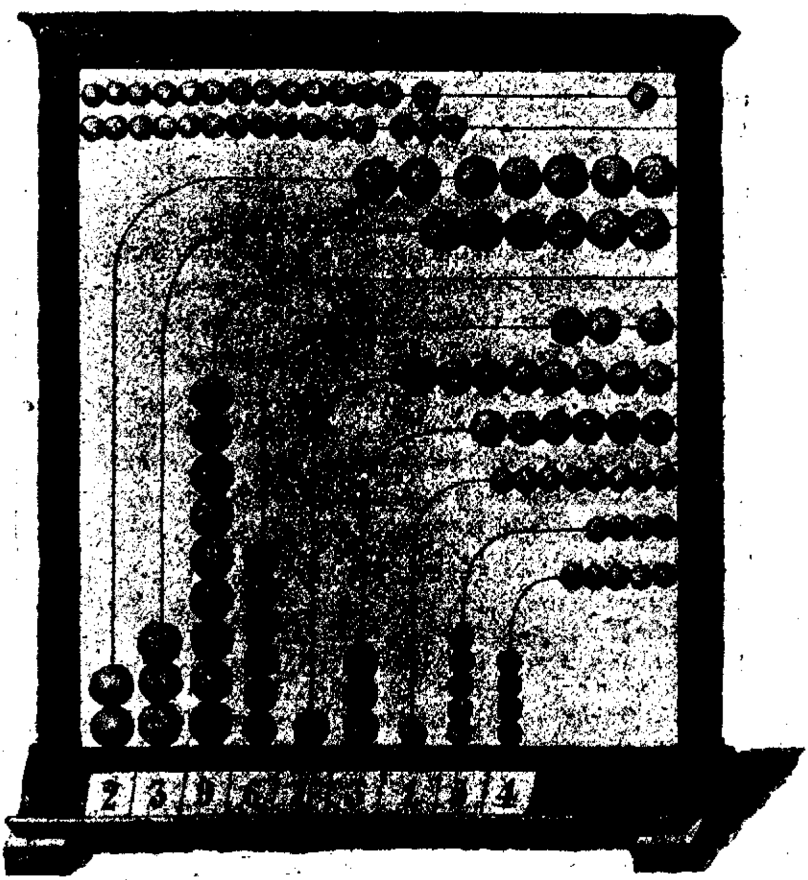


Figura 5.ª

adorno que medio positivo de enseñanza. Sin embargo, sea lo que quiera de la eficacia pedagógica del ábaco de los párvulos, el aparato es muy fácil de comprender.

El plano del marco está vertical, y horizontales y paralelos los alambres, unos debajo de otros; el alambre inferior se destina á las unidades; el inmediato de encima, á las decenas; el superior que sigue, á las centenas, etc.: por manera que en la figura 2.ª se supone representado el número 3 125 348 por las bolas situadas á la derecha.

La figura 5.ª es una variante que por evidente no necesita explicación especial.

Los antiguos etruscos habían imaginado otro ábaco, conocido por el nombre de *abacus numerorum*. Era éste un tablero horizontal dividido en líneas paralelas; la primera para las unidades, la segunda para las decenas, la tercera para las centenas, etc. Primitivamente se hicieron los cálculos con piedrecitas (los *cálculi*, de *calx*, *calcis*, la *cal*, de donde viene el verbo *calcular*); después con fichas, cuyo valor aumentaba decimalmente, según la línea ó columna en que se ponían. Luego se perfeccionaron estos ábacos, y las líneas ó columnas se convirtieron en ranuras.

Este ábaco etrusco fué el que usaron los romanos, y de éstos pasó á los pueblos neolatinos. Á falta del ábaco etrusco, se salpicaba de arena fina una superficie plana y horizontal, y con un punzón ó estilo de madera se marcaban en la arena surcos paralelos que hacían las veces de las ranuras citadas. Muchos ábacos romanos han llegado hasta nosotros. En el siglo XVII Mad. Sevigné, y en el XVIII Buffon, hablan (como de práctica bastante común) de las cuentas por fichas, hechas por las mujeres que no sabían leer.

Los chinos poseen un ábaco especial llamado *suan pan*, y lo manejan con tal destreza, que causa maravilla. Mientras una persona lee rápidamente los sumandos de una cuenta, otra va haciendo la suma, con tanta velocidad, que la tiene concluída al terminar la lectura. El ábaco chino es un tablero horizontal en forma de rectángulo, dividido á lo largo en dos mitades por una varilla. En alambres perpendiculares á la varilla se ven bolas ensartadas. La mitad del tablero más distante del que calcula no tiene en cada alambre más que una bola cuyo valor es 5. En la mitad más próxima hay en cada alambre cinco bolas, cada una de las cuales vale 1. Las bolas que valen 5 se distinguen de las que valen 1 en el tamaño ó en el color, ó en ambas cosas á la vez.

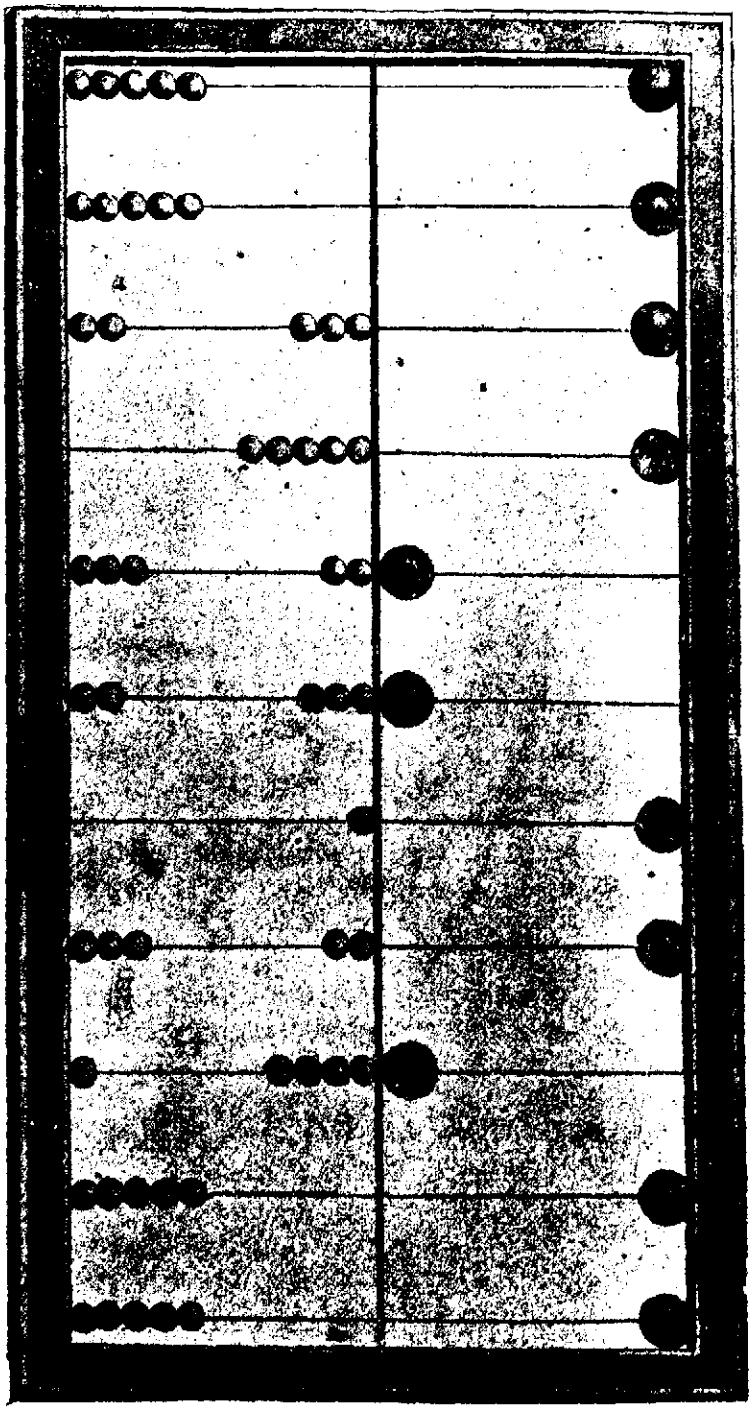


Figura 6.ª

El *suan pan* ha sido en todas épocas decimal, y los chinos han podido siempre servirse de este ábaco para sus cuentas, por ser decimal su sistema de pesas y medidas. Así, el alambre que está á la izquierda de otro, hace valer á sus bolas 10 veces más de lo que valen las bolas del alambre á la derecha. En la práctica toman como primero cualquier alambre. El resultado del cálculo aparece próximo á la varilla, á uno y otro lado de ella. El ejemplo de la figura representa el número 3 578 129.

Pero un solo aparato no podrá ser de gran utilidad en los pueblos cuyo sistema métrico difiere del decimal. Un inglés, en rigor, necesitaría un ábaco especial para sumar libras, chelines y peniques; otro para los pesos llamados *avoirdupois;* otro para los *troy*... etc.: y, efectivamente, la historia nos demuestra que los ingleses tuvieron que recurrir á especiales ábacos de no poca complicación.

Consta que las cuentas ú operaciones aritméticas concernientes á los reyes de Inglaterra, antes de la conquista por los normandos (y ciertamente sucedería lo mismo con las de los soberanos de otras naciones europeas) se efectuaban sobre un tablero horizontal por medio de fichas—regularmente monedas,—dispuestas en filas paralelas, las cuales representaban valores más y más altos, conforme ascendían en la serie. Cuando la conquista, las operaciones se hicieron sobre una mesa llamada *scaccarium* ó *scaccharium*. Esta mesa estaba cubierta con un paño lleno de rayas que formaban cuadros, casas ó casillas. La raya inferior representaba peniques; la segunda, docenas de peniques, ó sea chelines: la tercera, veintenas de chelines, ó sea libras; la cuarta, decenas de libras; la quinta, centenas de libras; la sexta, millares... y así sucesivamente, ascendiendo ya en el sistema decimal puro.

Las indicaciones se siguieron haciendo con fichas, ó bien con monedas. Como estas rayas, formando casilleros, se llaman en inglés *checkers* ó *chequers*, y servían para hacer las cuentas, se nombró en Inglaterra *Exchequer* al tribunal de las Contribuciones, y, por extensión, al Tesoro público.

Esta clase de ábaco, no enteramente decimal, ha tenido uso en Inglaterra hasta una época que pudiéramos llamar reciente. Las casas de cambiar monedas tenían por muestra un tablero de esta clase; y, últimamente, los tuvieron las posadas, tabernas y cafés donde la gente se reunía para saldar ó solventar sus cuentas. Es rara coincidencia que un tablero dividido en casillas se ve también á la puerta de una posada en la desenterrada Pompeya.

Los dedos, pues, no solamente han sido el origen de la numeración hablada en sus tres clases, quinaria, decimal y vigesimal, sino que han hecho quinarios ó decimales los rosarios, las escalas termométricas, los metros, y los ábacos de contar.

(Véase más adelante el ÁBACO natural.)

LECCIÓN IV

Numeración escrita.

Los números pueden expresarse por escrito.

1.° Se escriben (como todas las palabras de nuestra lengua) simbolizando los sonidos con que pronunciamos los nombres de los números:

Uno, dos, tres,... treinta,... treinta y cinco,...

2.° Se escriben ó representan gráficamente, poniendo en vez de ellos grupos de puntos, rayas ó signos de igual forma, como pasa en las fichas de los juegos de *dominó*, en los *dados* de los juegos de azar, en los naipes, en las escalas de los termómetros, en los metros, en las graduaciones de los sextantes, etc. (1).

(1) Los objetos materiales que se usan para representar números, como por ejemplo, los garbanzos con que las sirvientes hacen sus *cálculos*, las cuentas de los rosarios, las fichas del tanteo de los juegos, los ábacos ó contadores de las mesas de billar, etc., los dedos mismos de que nos servimos á veces para hacer pequeños cálculos... no pertenecen á la numeración *escrita*, sino á la numeración *palpable*. La numeración *palpable*, especialmente la digital, ha existido en todos los pueblos de los tiempos más remotos: la NUMERACIÓN ESCRITA, por imperfecta que sea, supone siempre eminente grado de cultura, y por eso no aparece nunca en los pueblos primitivos y salvajes.

Conviene no confundir la acepción general en que hoy usamos la frase *aritmética palpable*, con el ingenioso sistema inventado por el famoso NICOLÁS SAUNDERSON, uno de los matemáticos más notables de Inglaterra, que se quedó ciego á consecuencia de las viruelas cuando tenía doce meses. Nació en 1682, murió en 1739. Su sistema de *aritmética palpable* le sirvió para inventar una máquina con la cual hacía fácilmente las operaciones más complicadas.

3.° Se escriben con las letras del alfabeto, como acontece en los números romanos. Esta clase de numeración escrita con letras supone un gran estado de cultura, por muchos que sean sus inconvenientes. Las letras son ya símbolos de los números, no sólo independientes de toda propiedad física, geométrica ó mecánica, sino símbolos graduados en serie convencional (1).

4.° Se escriben, de un modo independiente y universal, (exteriorizando la idea, y nó cualidad alguna física ni mecánica, de tiempo ni de espacio) con las cifras llamadas árabes:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,

30, 31, 64, 77, 200, 239, 1 111, etc. (2)

Los VOCABLOS uno, dos, tres,... treinta,... no son comprendidos por los que no hablan español.

Los trazos, cifras, guarismos, símbolos ó signos 1, 2, 3,... 30,... son entendidos por todo el mundo civilizado; son, pues, signos universales.

Por tanto, hay dos clases de escritura para los números: una universal ó ideográfica (3) que pinta las ideas de núme-

---

(1)

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M...
uno,	cinco,	diez,	cincuenta,	ciento,	quinientos,	mil...

El convenio de la numeración romana es el siguiente:

Toda letra, si está seguida de otra de igual ó de menor valor, se suma con la siguiente:

Así,

III = 3
VI = 6
XII = 12
LXX = 70
MDCLXVI = 1 666

pero, á toda letra precedida por otra de menor valor se le resta la pequeña, así:

IV = 4
IX = 9
XL = 40
XC = 90, etc.

(2) Véase el Apéndice á esta Lección.

(3) Ideográfica, significa que pinta las ideas.

ro, y otra fonética (1), propia de cada nación, que pinta los sonidos expresivos de los grados de la pluralidad.

La ideográfica se aprende estudiando la Aritmética.

Llámase *notación* el método de expresar los números por medio de signos escritos llamados CIFRAS ó *guarismos*.

NOTACIÓN, es, pues, sinónimo de NUMERACIÓN ESCRITA; ó sea, sistema convencional con que expresamos gráficamente los números.

La escritura ideográfica ó notación depende de cuatro ideas:

1.ª De haberse inventado un corto número de trazos, símbolos ó signos llamados *cifras* significativas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, para expresar (en el sistema decimal) los 9 primeros grados de la escala de la pluralidad; y otro signo ¡invento admirable! el CERO, para indicar la carencia de cifras correspondientes á alguno de los órdenes locativos del sistema.

2.ª De haberse supuesto *órdenes* ó *jerarquías* de posición en los lugares que sobre la superficie en que se hace la escritura ocupan esos trazos, símbolos ó signos llamados *cifras* ó *guarismos*.

3.ª De haberse convenido que cada cifra significativa vale en el segundo lugar tantas veces más que en el primero, como cifras, ó trazos, ó signos tiene el sistema de numeración; que vale en el tercero tantas veces más que en el segundo como cifras ó trazos tiene el sistema; que vale en el cuarto tantas veces más que en el tercero como trazos, cifras ó signos tiene el sistema escrito... Y así sucesivamente (2).

4.ª De haberse admitido que la YUXTAPOSICIÓN de una cifra á otra significa SUMA; esto es, que el valor de la cifra de la izquierda se suma con el valor de la cifra que está á la derecha (3)...

---

(1) Fonética, de *fonos*, sonido; raíz de donde salen cacofonía, sinfonía, afonía, fonógrafo, teléfono, etc., etc.

(2) El cuerpo de doctrina que enseña á operar con la numeración escrita en que cada cifra tiene un *valor por sí* y otro *locativo*, se ha llamado por muchos y se llama todavía ARITMÉTICA DE POSICIÓN.

(3) Importa fijarse bien en que la YUXTAPOSICIÓN significa SUMA en Aritmética y no MULTIPLICACIÓN como en Álgebra:

abc en Álgebra $= a \times b \times c$,

mientras que

234 en Aritmética $= 200 + 30 + 4$.

Lo mismo que en la numeración hablada, para explicar la numeración escrita, es preciso suponer conocidas las ideas fundamentales del sumar, del multiplicar y de la elevación á potencias.

Los sistemas de numeración escrita pueden ser muchos.

I.

PRIMERA APLICACIÓN.

A) Inventemos un trazo para el *uno*, principio de la escala de la pluralidad, y sea ese trazo el signo 1 *(uno)*. (1)

B) Inventemos, por otra parte, un signo que no indique ningún grado de la escala, y sea el signo 0 *(cero)*. (1)

Ya tenemos dos signos, el 1 y el 0; el primero para expresar el primer grado de la pluralidad, y el segundo (que no expresa grado ninguno) para indicar, en caso necesario, puestos y jerarquías vacíos.

El 0 es, pues, un signo esencialmente *locativo*.

Con estas dos solas cifras, trazos ó signos (1 y 0), ya tenemos lo suficiente para escribir todos los grados de la escala de la pluralidad.

C) Convengamos en que el 1, colocado en segundo lugar, valga tantas veces más que en el primero, como trazos, cifras ó signos tiene el sistema; que colocado en el tercer lugar, valga tantas veces más que en el segundo como cifras tiene el sistema, etc., etc., etc. Y nada nos falta ya para escribir todos los grados.

Como el número de trazos, cifras ó signos que tiene el sistema es sólo *dos* (el 1 y el 0), un uno en segundo lugar, valdrá dos veces más que en el primero; esto es, valdrá *dos*: colocado en tercer lugar, valdrá dos veces más que en el segundo; esto es, valdrá cuatro: colocado en cuarto, valdrá

(1) Pudiera ser otro trazo cualquiera. Fácil es imaginar los que se deseen.

dos veces más que en el tercero; esto es, *ocho:* colocado en el quinto, valdrá dos veces más que en el cuarto; esto es, *diez y seis:* colocado en el sexto, valdrá dos veces más que en el quinto; esto es, *treinta y dos...* y, así sucesivamente,

sesenta y *cuatro*,
ciento y *veintiocho*,
doscientos cincuenta y *seis*, etc., etc.,

según que el signo 1 esté colocado en el

sexto,
séptimo ú
octavo lugar, etc., etc.

De suerte, que de esta manera podremos escribir los números

Uno,
dos,
cuatro,
ocho,
diez y seis,
treinta y dos,
sesenta y cuatro, etc., etc.

Pero ahora hace falta saber cómo indicaremos las jerarquías de lugar.

En la superficie del papel podemos considerar un puesto, sitio ó posición cualquiera como el primer lugar, y á su izquierda (1) (también pudiera ser á su derecha, ó encima, ó debajo,...) podremos suponer el segundo lugar, y á continuación del designado como segundo, podremos suponer el tercero, el cuarto, el quinto, el sexto, etc., etc.

Es, pues, indiferente que el segundo puesto esté á la izquierda ó á la derecha, ó encima ó debajo del primero (ó en cualquiera otra posición); y, SIENDO INDIFERENTE, convengamos DE UNA VEZ Y PARA SIEMPRE en que, ya escogido sitio, puesto, punto ó posición, como *primer* lugar, se considere como *segundo* el lugar que se encuentre inmediato á la izquierda; como *tercero*, el siguiente á la izquierda del segun-

(1) La palabra izquierda ha de entenderse, no como la izquierda del número, sino como la izquierda del observador, del lector ó del operador. Siempre ha de entenderse así, aun cuando se usen (como efectivamente se usan por extensión), los pronombres posesivos ó genitivos, etc., etc.; de modo que, cuando se diga coloquemos á *la derecha del 2* tres ceros, ó bien coloquemos á *su derecha* tres ceros... ha de tomarse en el sentido de que los ceros se escribirán desde el 2 hacia nuestra derecha, como sigue:

2 000, etc.

do; como *cuarto*, el inmediato á la izquierda del tercero; como *quinto*, el próximo á la izquierda del cuarto... y así sucesivamente.

Ahora bien: un 1 colocado en puestos consecutivos significará cada uno de los números que se acaban de indicar; así:

Uno............ se escribirá.	1
dos........................	10
cuatro.	100
ocho.	1 000
diez y seis..................	10 000
treinta y dos................	100 000
sesenta y cuatro.............	1 000 000

Vemos, pues, que sólo con los dos signos *1* y *0* se pueden expresar el uno, el dos, el cuatro, el ocho, el diez y seis, etc.

Pero ¿cómo podremos escribir los números intermedios?

Si *uno* se escribe 1 en el sistema binario (que así se llama el sistema de dos cifras), y si *dos* se escribe 10, es claro que *tres* se escribirá así: 11.

En efecto; 1 en segundo lugar, es *dos*, y 1 en primero, es *uno:* luego su *yuxtaposición* ó *suma* será *tres*.

Si *cuatro* se escribe en dicho sistema binario 100, es claro que *cinco* se escribirá 101.

En efecto; aquí hay un *uno* en tercer lugar, que vale *cuatro*, no hay ningún *uno* en segundo lugar; pero hay un 1 en primero, que vale *uno:* luego la SUMA ó CONJUNTO de esa expresión del sistema binario 101 significa *cuatro* y *uno:* luego la expresión 101 vale *cinco*.

Siete se formará así, 111: en efecto; un 1 en tercer lugar, vale *cuatro;* un 1 en segundo, vale dos, y un 1 en primero vale *uno:* luego la YUXTAPOSICIÓN ó SUMA de esa expresión (que vale parcialmente cuatro + dos + uno) vale, en totalidad, *siete*.

		Sistema binario.				
Si ocho	es............	1	0	0	0	
nueve	será..........	1	0	0	1	
diez	»	1	0	1	0	
once	»	1	0	1	1	
doce	»	1	1	0	0	
trece	»	1	1	0	1	
catorce	»	1	1	1	0	
quince	»	1	1	1	1	(ó sea 8 + 4 + 2 + 1, del sistema decimal.)
		ocho	cuatro	dos	uno	

Si diez y seis se escribe 10000, los números comprendidos entre diez y seis y treinta y dos serán:

Diez y siete................	10001
diez y ocho................	10010
diez y nueve......	10011
veinte....	10100 (1)
veinte y uno..............	10101
veinte y dos	10110
veinte y tres..............	10111
veinte y cuatro.......	11000 (2)
veinte y cinco.............	11001
veinte y seis	11010
veinte y siete......	11011
veinte y ocho..............	11100 (3)
veinte y nueve............	11101
treinta....................	11110 (4)
treinta y uno	11111 (5)
treinta y dos..............	100000

II.

SEGUNDA APLICACIÓN.

Inventemos un trazo que valga uno, y sea 1 *(uno)*.

Inventemos otro trazo que valga dos, y sea 2 *(dos)*.

Inventemos la cifra locativa 0 *(cero)*.

Tendremos, pues, que el sistema TERNARIO constará de los signos 1, 2 y 0.

Convengamos en que el 1, colocado en segundo lugar, vale tres veces más que en el primero; que el 1 colocado en tercer lugar, vale tres veces más que en el segundo; que el 1 colocado en cuarto lugar, vale tres veces más que en el tercero... y así sucesivamente.

---

(1) Como el 1 en quinto lugar vale en el sistema binario *diez y seis*, y el 1 en tercero vale *cuatro*, es claro que su YUXTAPOSICIÓN ó SUMA hace *veinte*.

(2) Como el 1 en quinto lugar es *diez y seis*, y el 1 en cuarto es *ocho*, claro es que la suma ó yuxtaposición ha de ser *veinte y cuatro*.

(3) El 1 en quinto lugar es *diez y seis*, el 1 en cuarto es *ocho*, el 1 en tercero es *cuatro;* luego la yuxtaposición ó suma será *veinte y ocho*.

(4) El 1 en quinto lugar es *diez y seis*, el uno en cuarto es *ocho*, el 1 en tercero *cuatro*, y el 1 en segundo, *dos:* luego, por su yuxtaposición, valdrán *treinta*.

(5) Diez y seis + ocho + cuatro + dos + uno = treinta y uno.

En el sistema ternario, pues,

Uno	será..............	1
tres	»	10
nueve	»	100
veintë y siete	»	1000
ochenta y uno	»	10000
	etc., etc.	

y los números intermedios se obtendrán (análogamente á los del sistema binario) del modo siguiente:

Uno................	1	diez y seis...........	121
dos................	2	diez y siete..........	122
tres................	10	diez y ocho..........	200 (3)
cuatro...............	11	diez y nueve.........	201
cinco................	12	veinte	202
seis.................	20 (1)	veinte y uno.........	210
siete................	21	veinte y dos.........	211
ocho................	22	veinte y tres.........	212
nueve...............	100	veinte y cuatro.......	220
diez................	101	veinte y cinco........	221
once................	102	veinte y seis.........	222
doce................	110	veinte y siete........	1000
trece................	111	veinte y ocho........	1001
catorce..............	112	etc., etc.	
quince..............	120 (2)		

III.

TERCERA APLICACIÓN.

Inventemos un trazo para el uno, y sea 1 *(uno)*.
Otro para el dos, y sea 2 *(dos)*.
Otro para el tres, y sea 3 *(tres)*.
Inventemos la cifra locativa, y sea 0 *(cero)*.
Tendremos con las cuatro cifras

1, 2, 3 y 0

el sistema CUATERNARIO, siempre que convengamos en que cada 1 en segundo lugar vale cuatro veces más que en el primero; en que cada 1 en tercer lugar vale cuatro veces más

(1) Si un 1 en segundo lugar vale *tres*, dos veces el 1 en el mismo sitio valdrá *seis*.
(2) *Nueve* del 1 en tercer lugar, y *seis* del 2 en segundo, son, sumados ó yuxtapuestos, *quince*.
(3) Si un 1 en tercer lugar vale *nueve*, dos veces el 1 en el mismo sitio valdrá, por consiguiente, *dos veces nueve*; esto es, *diez y ocho*.

que en el segundo; en que cada 1 en cuarto lugar vale cuatro veces más que en el tercero... y así sucesivamente.

Entonces

Uno	será...........	1	diez	será.......	22
dos	»	2	once	»	23
tres	»	3	doce	»	30 (2)
cuatro	»	10	trece	»	31
cinco	»	11	catorce	»	32
seis	»	12	quince	»	33
siete	»	13	diez y seis	»	100
ocho	»	20 (1)	diez y siete	»	101
nueve	»	21	etc., etc.		

IV.

CUARTA APLICACIÓN.

El sistema QUINARIO tendrá los siguientes trazos ó cifras:

1, 2, 3, 4 y 0

y el convenio será que cada 1 á la izquierda valdrá cinco veces más que cada 1 que esté inmediatamente á su derecha.

Uno..................	1	catorce...............	24
dos..................	2	quince................	30
tres..................	3	diez y seis	31
cuatro...............	4	diez y siete..........	32
cinco................	10	diez y ocho...........	33
seis..................	11	diez y nueve..........	34
siete................	12	veinte................	40
ocho.................	13	veinte y uno..........	41
nueve................	14	veinte y dos..........	42
diez..................	20	veinte y tres..........	43
once..................	21	veinte y cuatro........	44
doce..................	22	veinte y cinco........	100
trece................	23	etc., etc., etc.	

V.

El sistema de seis cifras, ó SENARIO, tendrá las siguientes:

1, 2, 3, 4, 5 y 0

(1) Si un 1 en segundo lugar vale *cuatro* en el sistema cuaternario, dos veces el 1 en el mismo lugar, valdrá *ocho*.

(2) Si un 1 vale *cuatro* en segundo lugar, tres veces ese 1 valdrá *doce*

y el convenio será que cualquier 1 á la izquierda valdrá seis veces más que cualquier otro 1 inmediato á la derecha.

. . . .
. . . .

VI.

El sistema DECIMAL tendrá las siguientes cifras:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0,

y el convenio será que cada *uno* á la izquierda, valdrá diez veces más que cada *uno* contiguo á la derecha.

Uno.....	1	doce...............	12
dos......	2	trece..............	13
tres.....	3	catorce, etc........	14
cuatro...	4	veinte.............	20
cinco....	5	treinta.	30
seis......	6	cuarenta, etc.......	40
siete.....	7	ciento.............	100
ocho.....	8	mil...............	1 000
nueve...	9	diez mil........	10 000
diez....	10	cien mil.......	100 000
once.....	11	un millón....	1 000 000

VII.

Se ve, pues, que puede haber (sin inconveniente teórico) tantos sistemas de numeración como se quiera, y que todos consisten:

1.° En expresar con ciertos trazos el primero ó los primeros grados de la escala de la pluralidad.

2.° En el convenio de que cada *trazo, colocado* á la izquierda, valga tantas veces más de lo que el mismo trazo valdría colocado inmediatamente á la derecha, como cifras tuviere el sistema de numeración en que el aritmético calcule.

3.° En que un signo locativo, que no exprese, por sí solo, grado ninguno de la escala de la pluralidad, haga ocupar á las cifras significativas el lugar que les corresponda, y

4.° En que la yuxtaposición significa suma; esto es, que el valor de toda cifra á la izquierda se adiciona á lo que valga la cifra que esté inmediatamente á la derecha...

En el sistema decimal tiene nombre cada orden de cifras.

Las cifras del primer orden se llaman.	*unidades*,
las del segundo orden................	*decenas*,
las del tercero.......	*centenas*,
las del cuarto............	*millares*,
las del quinto......	*decenas de millar*, ó *miriadas*,
las del sexto........................	*centenas de millar*,
las del séptimo......................	*millones*,
las del octavo.......................	*decenas de millón*,
y así sucesivamente..................	*centenas de millón*,
	millares de millón,
	decenas de millar de millón,
	centenas de millar de millón,
	billones,
	decenas de billón, etc.

Etc., etc.

Los números se leen dando á cada cifra un apelativo según el orden que ocupa.

Así el número siguiente del sistema decimal se lee (empezando desde la izquierda),

6	9	8	7	5	2,	9	8	5	6	7	2	3	4	8
seiscientos	noventa	y ocho billones	setecientos	cincuenta	y dos mil	novecientos	ochenta	y cinco millones	seiscientos	setenta	y dos mil	trescientos	cuarenta	y ocho.

Análogamente se leen los demás números del sistema decimal.

Las palabras

decenas, *centenas*, *millares*, etc.,

son propias y exclusivas del sistema decimal.

Para leer en los demás sistemas, es preciso recurrir á otras palabras más generales, llamando

protoenas	á las cifras del primer orden,	
deutenas	á las cifras colocadas en segundo,	
trienas	á las en	tercero,
tetraenas	á las en	cuarto,
pentaenas	á las en	quinto,
hexaenas	á las en	sexto,
heptaenas	á las en	séptimo,
octaenas	á las en	octavo,
eneaenas	á las en	noveno,
decaenas	á las en	décimo,
endecaenas	á las en	onceno,
dodecaenas	á las en	duodécimo, etc.

Y, empezando siempre por la izquierda, leeremos cualquier guarismo de cualquier sistema de numeración.

Por ejemplo; el siguiente guarismo del sistema quinario se leerá:

dos hexaenas quinarias,
tres pentaenas,
cuatro tetraenas,
dos trienas,
tres deutenas,
cuatro protoenas (1).

2 3 4 2 3 4

El siguiente guarismo del sistema duodecimal se leerá como sigue, empezando por la izquierda:

dos heptaenas duodecimales,
cinco pentaenas,
siete tetraenas,
nueve protoenas.

2 0 5 7 0 0 9

Estas palabras son también aplicables al sistema decimal; de modo que en vez de decir

348

trescientos cuarenta y ocho,

podemos leer:

tres trienas del sistema decimal, cuatro deutenas y ocho protoenas.

---

(1) La etimología de estas palabras es completamente griega. Vienen:

1.° *De las raíces* πρῶτος.......... primero.
δεύτερος......... segundo.
τρίτος........... tercero.
τέταρτος......... cuarto.
πέμπτος.......... quinto.
ἕκτος............ sexto.
ἕβδομος......... séptimo.
ὄγδοος.......... octavo.
ἔννατος.......... noveno.
δέκατος......... décimo.

Y 2.° De la terminación colectiva y numeral *«ena»*, cuyo masculino *«eno»* viene del latín *«enus»* (casi *inus*), que connota cualidad de semejanza [como en mor*eno* (color de moro), alabastr*ino*, can*ino*, etc.].

Esta terminación sale de la raíz griega *is, inos*, que significa *fuerza*, como en *quin*INA (esencia ó fuerza de la quina); *alcal*INO (fuerza de los álcalis).

Este mismo radical griego *is, inos* explica el latino *vis* (fuerza, virtud) y las voces latinas y españolas *vir, viri*; varón; varonía; varonil; virtud; virgen; virginidad, etc.

De lo expuesto se deduce:

1.º Que el número puro es un concepto puro de la inteligencia, igual para todos los hombres civilizados;

2.º Que su forma ideográfica escrita varía con los sistemas de numeración.

Por lo cual, y para no confundir el concepto con la forma,

al *concepto intelectual* se llama siempre NÚMERO.

Y se designa

la *forma ideográfica escrita* con el nombre de GUARISMO.

Por consiguiente, aunque en algún caso pueda tomarse la forma por la esencia, preciso es siempre distinguir con gran cuidado el concepto de NÚMERO de la idea de GUARISMO.

Los guarismos se dividen en

dígitos y
compuestos.

Son *dígitos* los que tienen valor por sí, sin necesidad de ningún valor de posición.

Son *compuestos* los que para su forma ideográfica escrita necesitan más de una cifra.

ADVERTENCIA. Los números ordinales se indican con los correspondientes cardinales, agregando á la derecha de éstos una *o* pequeñita á manera de exponente, y debajo de ella puede *ó no* ponerse un punto.

1.º 2.º 3.º 4.º 5.º 6.º 7.º 8.º 9.º 10.º
1º 2º 3º 4º 5º 6º 7º 8º 9º 10º

Desde 10 en adelante se suelen escribir como si fueran números cardinales.

Para expresar gráficamente un número puro cualquiera, se escriben sucesivamente los dígitos de cada orden de izquierda á derecha.

Cada dígito es el coeficiente ó multiplicador del valor correspondiente á cada orden.

Y el valor correspondiente á cada orden es una potencia del número de cifras del sistema. Así, los dígitos del primer orden, ó protoenas, no tienen más valor que el suyo propio: los dígitos del segundo orden, ó deutenas, son el producto de cada dígito por lo que en cada sistema valga la expresión 10: los dígitos del tercer orden, ó trienas, son el producto de cada dígito por lo que en cada sistema valga la expresión 100: los dígitos colocados en cuarto lugar, ó tetraenas, son el producto de cada dígito por lo que en cada sistema valga la expresión 1 000...

Y así sucesivamente.

Cada dígito posee, pues, dos valores: uno como dígito, y otro como deutena, triena, tetraena, pentaena, etc., según el lugar que ocupe. El valor de cada dígito, con independencia de toda posición, se llama *absoluto*; y *relativo* el que tiene locativamente.

Así, en el sistema decimal, el dígito

$$3 = 3 \times 10^0$$

vale 3; y en segundo lugar,

$$30 = 3 \times 10^1 = \text{tres veces } 10^1;$$

y en tercero, cuarto, quinto, sexto, en séptimo, etc., vale

$$\begin{aligned} 300 &= 3 \times 10^2 = \text{tres veces } 10^2 \\ 3\,000 &= 3 \times 10^3 = \text{tres veces } 10^3 \\ 30\,000 &= 3 \times 10^4 = \text{tres veces } 10^4 \\ 300\,000 &= 3 \times 10^5 = \text{tres veces } 10^5 \\ 3\,000\,000 &= 3 \times 10^6 = \text{tres veces } 10^6 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

De modo que colocar un cero, dos, tres... á la derecha de un dígito, ó, lo que es lo mismo, hacer ocupar á un dígito el segundo, el tercero, el cuarto lugar... equivale á multiplicarlo por lo que en cada sistema valgan las expresiones

10, 100, 1 000, etc. (iguales á 10^1, 10^2, 10^3, etc.).

El dígito 1 seguido de un cero ó de varios expresa un grado $>$ que el mayor que pueda formarse con las cifras más altas de orden inferior: 10 en el sistema decimal > 9; $100 > 99$; $1000 > 999$, etc.

Lo cual es evidente, teniendo en cuenta la generación gráfica de los números: se escribe 10 después de haber agotado todos los dígitos (el 9 en el sistema decimal); 100, después de 99; 1 000, después de 999... etc. Y lo análogo en los demás sistemas de numeración.

RESUMEN.

¿Pueden escribirse los números de un modo independiente del sonido?

Sí: por medio de la escritura ideográfica.

¿De cuántas ideas depende esta escritura?

De cuatro:

1.ª De haberse imaginado un corto número de trazos, cifras ó signos expresivos en absoluto del primero ó de los primeros grados de la escala de la pluralidad, y también la cifra 0, *cero*, puramente locativa.

2.ª De haber supuesto jerarquía en los lugares que ocupan las cifras.

3.ª De haber convenido que cada cifra á la izquierda vale tanto más que colocada inmediatamente á la derecha como cifras tiene el sistema de numeración. Cada cifra posee, pues, un valor *absoluto* y otro *local* ó de posición; y

4.ª De haber establecido que la yuxtaposición de las cifras significa *suma*.

¿Cuántos sistemas de numeración escrita puede haber?

Cuantos se quiera. Pero, por nuestra poca fuerza intelectual, sólo pueden ser accesibles los de corto número de dígitos.

¿En qué consiste el sistema quinario?

¿En qué el decimal?

¿En qué el duodecimal?

¿Qué nombre tienen en el sistema decimal las cifras, según el lugar que ocupan?

Unidades, decenas, centenas, millares, decenas de millar, centenas de millar, millones, etc.

¿Qué nombres tienen en los demás sistemas, y, de un modo general, también en el decimal?

Protoenas, deutenas, trienas, tetraenas, pentaenas, hexaenas, heptaenas, octoenas, etc.

¿Qué es guarismo?

La forma ideográfica escrita de cualquier número, distinta en cada sistema.

¿Qué es número?

El concepto invariable de grado de la escala de la pluralidad, independiente, por tanto, de la forma escrita.

¿Cómo se dividen los guarismos?

En dígitos y compuestos.

¿Cuáles son los dígitos?

Los grados de la escala de la pluralidad que se escriben con una sola cifra en el sitio de las protoenas.

¿Cuáles son los compuestos?

Los grados de la escala de la pluralidad que se escriben con más de una cifra.

APÉNDICE.

Las cifras de nuestra numeración proceden de la India, cuyos habitantes las atribuían á la Divinidad. Pero, respecto á su introducción en Europa, hay diferencia de opiniones.

Dícese que Gerberto de Aurillac, después Papa Silvestre II, halló esas cifras ya en uso, hacia fines del siglo x, entre los árabes españoles. Efectivamente, Gerberto estuvo en Cataluña; pero no hay indicios seguros para estimar como cierta la aserción de que en Cataluña aprendiese la *ciencia india*. Afirmación más probable es que Leonardo de Pisa introdujera esos símbolos en una obra titulada *Liber abbaci*. (1212). Otros suponen que las Tablas Alfonsinas, en que colaboraron muy principalmente los árabes matemáticos de la corte de Don Alfonso el Sabio, deben haber sido la primer obra importante en que el sistema apareciese.

Lo que sí se estima como cierto es que, antes del siglo XII, y quizá ya en el IX, las cifras eran conocidas por los persas y los árabes, quienes las atribuían á los habitantes de la India, y hasta les daban nombres que significan *Ciencia India* (1). Tampoco puede determinarse con exactitud cómo el sistema se extendiera por Europa.

Las cifras árabes (así llamadas todavía, aunque los árabes las reconociesen como *indias*) se hallan ya en un manuscrito italiano terminado en 1300, y en otros muchos manuscritos un siglo posteriores.

Ni tampoco cabe asegurar que los números arábigos fuesen de uso general antes de la invención de la IMPRENTA, pues consta que los comerciantes siguieron haciendo sus cuentas hasta el siglo XVI en números romanos.

Así, pues, hasta la difusión del álgebra ó poco antes no parece probable que la numeración arábiga se hiciese en Europa de uso general (2).

---

(1) Los árabes la llamaban *hendesseh*.

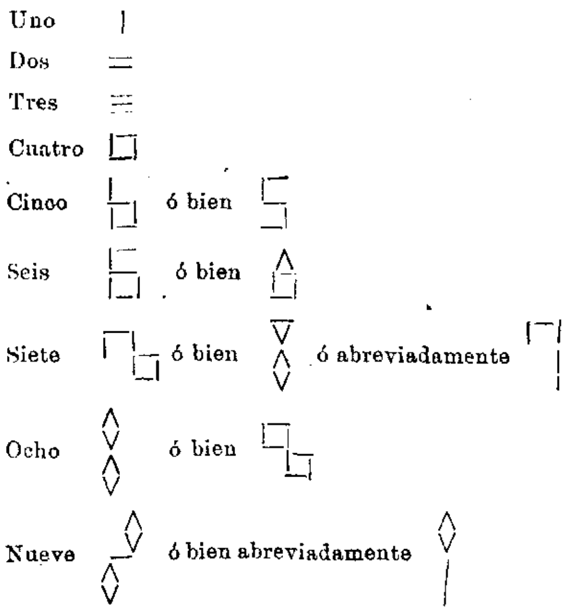
(2) Dícese que la obra más antigua escrita sobre esta materia se titula *Algorithmus demonstratus*, por Jordanus de Namur (siglo XIII), tratado de Aritmética comentado y publicado por Jacobo Faber (nació en 1455) poco después de la invención de la imprenta en el siglo XV. El monje *Planudio* (Planudes), (nació en Nicomedia; en 1325 era embajador en Venecia del Emperador Bizantino, Andrónico) escribió también una obra titulada *Aritmética India, modo de calcular según los indios*.

Todavía en la misma época, Sacro Bosco (Juán Halifax) dió una Aritmética en versos latinos, cuyas cifras tienen casi las mismas formas que las nuestras.

Asegúrase también que en tiempo de Carlo-Magno, ya habían traído á Europa los árabes la *Ciencia india*... pero todo cuanto se diga sobre los comienzos de la ciencia en Europa, ha de recibirse con suma circunspec-

¿Cuál pudo ser el orígen de los trazos, rasgos ó cifras con que se escriben los *números arábigos*, es decir, nuestros guarismos?

Nada de cierto se sabe; y, sin embargo, no han faltado quienes conjeturen que los dígitos se indicaran en un principio por medio de tantas rayas como unidades tenía cada dígito.



El *cero* fué primitivamente un punto: para hacerlo más visible se convirtió en un circulito.

W. Donisthorpe presentó en la revista inglesa titulada *Nature*, del 30 de Septiembre de 1875, el siguiente tránsito, análogo á lo anterior, desde la escritura numérica simbolizada por rayas á la escritura cursiva y corriente (fig. 7).

Tampoco se sabe el orígen de los trazos ó símbolos de la numeración romana. Pero se supone que, como los de los números arábigos ó indios, se indicaran al principio también por rayas: una raya para cada uno de los diez primeros grados.

Esta conjetura, sostenida aún este siglo por *Leslie* en su *Filosofía de la Aritmética*, se expresa ya en el *Cursus Mathematicus* de Dechales (1690), quien la da como opinión ad-

---

ción, por falta de códices, ó por las infidelidades de los copistas, que no siempre conservaban las nuevas cifras, y las sustituían por los números romanos, ó al revés.

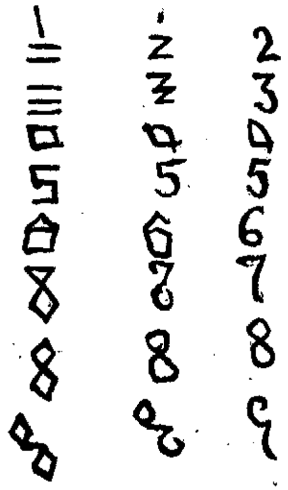


Figura 7.ª

mitida por muchos en su tiempo. También se encuentra la indicación de estas ideas en la obra *De numeris Libri Duo*, de Juan Noviomagus (1539).

En tal hipótesis los primeros números romanos se habrían indicado por medio de rayitas verticales

│	Uno,
│ │	dos,
│ │ │	tres,
│ │ │ │	cuatro,
│ │ │ │ │	cinco,
│ │ │ │ │ │	seis,
│ │ │ │ │ │ │	siete,
│ │ │ │ │ │ │ │	ocho,
│ │ │ │ │ │ │ │ │	nueve,
│ │ │ │ │ │ │ │ │ │	diez.

Al llegar á diez se señalaría por medio de otra raya diagonal

Figura 8.ª

que este número se había ya tomado en cuenta; y, á fin de ahorrar trabajo, se simbolizarían las once rayas por medio de dos solamente en forma de aspa X;

y, así, por medio de una figura semejante á la equis, se marcaría luego el diez. Tomando la mitad superior de la X se representaría la mitad de diez; esto es, cinco con una figura parecida á la V;

y, desde que tal cosa se imaginara, los diez primeros números hubieron de aparecer en la forma siguiente:

I II III IIII V VI VII VIII VIIII X
Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

No es muy satisfactoria la manera de explicar por rayas y ahorros de trazos, los símbolos

L para cincuenta
C para ciento
D ó bien IↃ para quinientos
M, CIↃ, ↀ, para mil,

ni tampoco la época en que empezó el sistema diferencial de la numeración romana, en cuya virtud (cuando se trata de números que no llegan al ciento) toda letra de menor valor se resta de la que le sigue en categoría (la I ante la V y la X, y la X ante la L y la C), si la menor está colocada inmediatamente antes de la mayor; al paso que se suma colocada después (método hasta cierto punto de carácter locativo).

I II III IV V VI VII VIII IX X
XX XXX XL L LX LXX LXXX XC C
CC CCC CCCC D DC DCC DCCC DCCCC M

Figura 9.ª

Por ingeniosas que parezcan estas conjeturas, más fácil resulta la explicación de los que pretenden que los primeros grados hasta el 10 de la numeración romana son jeroglíficos de la mano y de los dedos (fig. 9.ª).

Las representaciones gráficas abreviadas resultarían primeramente así:

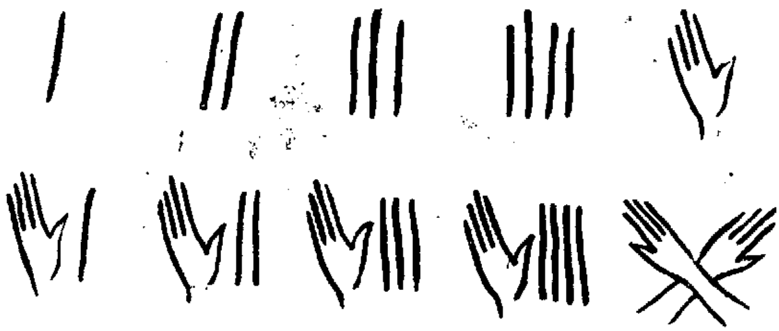


Figura 10.

y, con el transcurso de los tiempos y la necesidad de ahorrar tiempo y trabajo, aparecerían como sigue:

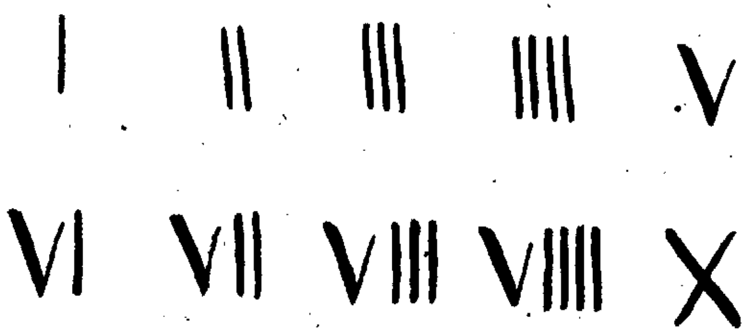


Figura 11.

Mas, como se vé, todas estas no son sino conjeturas.

De cualquier modo el sistema romano resulta como sigue:

I	XI	XXI	XL (5)
II	XII	XXII	L
III	XIII (1)	XXIII	LX
IV ó bien IIII	XIV (2)	XXIV	LXX
V	XV	XXV	LXXX (6)
VI	XVI	XXVI	XC
VII	XVII	XXVII	C
VIII	XVIII (3)	XXVIII	
IX	XIX (4)	XXIX	
X	XX	XXX	

CC		M ó bien CIↃ; (I); $\overline{\text{I}}$	
CCC		MM ó bien CIↃCIↃ	
CCCC		MMM	
D ó bien	IↃ	MMMM	
DC ó bien	IↃC	IↃↃ ó bien $\overline{\text{V}}$	= 5 000
DCC ó bien	IↃCC	CCIↃↃ	= 10 000
DCCC ó bien	IↃCCC	IↃↃↃ ó bien $\overline{\text{D}}$	= 50 000
DCCCC ó bien	IↃCCCC	CCCIↃↃↃ ó bien $\overline{\text{C}}$	= 100 000
		IↃↃↃↃ	= 500 000
	$\overline{\overline{\text{X}}}$ ó bien	CCCCIↃↃↃↃ	= 1 000 000

En rigor la numeración romana no tiene más que siete signos

I, V, X, L, C, D, M.

esto es:

El uno.................................. I

cinco veces el uno........................ V
el doble del cinco........................ X

cinco veces el diez....................... L
el doble del cincuenta.................... C

cinco veces el ciento..................... D
el doble del quinientos................... M

---

(1) También, aunque raro, XIIV = X + IIV = 10 + 3
(2) » » XIIII
(3) » » XIIX = X + IIX = 10 + 8
(4) » » XVIIII
(5) » » XXXX
(6) » » XXC

Evidente formación de orígen digital

Un dedo..................................	I
una mano..................................	V
dos manos (ó un hombre)..................	X
una mano de hombres (ó 5 veces 10)........	L
dos manos de hombres (gente)............	C
una mano de gente (ó 5 veces 100).	D
dos manos de gente (ó 2 veces 500).........	M

Los grados intermedios entre los siete signos de la numeración romana se indicaban por la repetición de las letras menores en valor: de modo que las expresiones resultantes no eran verdaderos números, pues había que contar los símbolos repetidos, como hoy pasa en el juego de naipes cuando se dice, cinco de oros, ó bien, seis de bastos, etc... ó con los puntos de las fichas del *dominó* ó los de los *dados*... ó las campanadas de un reloj, etc.

III, IIII, XX, XXX, XXXIII,
LXXXVIII, CC, CCC, CCCCLXXXIII = 483

CCCCIↃↃↃↃ	CCCIↃↃↃ	CCIↃↃCCIↃↃ		CIↃCIↃCIↃ	CCCCLXXXIII
un millón	ciento	veinte	y	tres mil	cuatrocientos ochenta y tres

Esta misma cantidad puede escribirse también del modo siguiente:

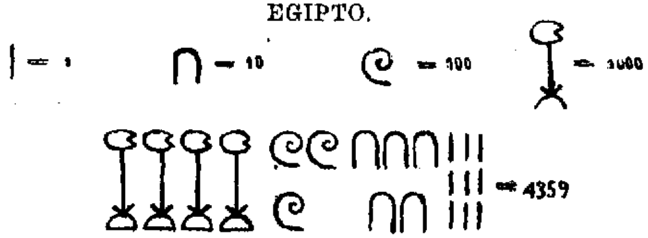
$\overline{X}$ $\overline{C}$ CCIↃↃCCIↃↃ MMM CCCC LXXXIII

De cualquier modo, estas expresiones son siempre incómodas y engorrosas, mezcla de símbolos numéricos y de unidades repetidas, correspondientes á distintos órdenes que necesariamente hay que contar. Y no se olvide que los ejemplos presentados distan, y mucho, de ser de los de mayor complicación.

Esta clase de sistemas de pocos signos que necesitan acudir al recurso de la repetición, es todo lo más á que pueden llegar los pueblos primitivos.

Y, como prueba, véanse los siguientes ejemplos de la numeración de los antiguos egipcios y asirios.

EGIPTO.



ASIRIA.

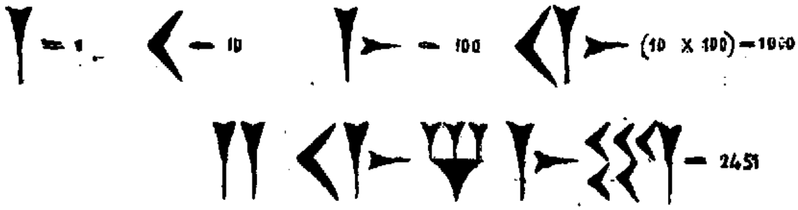


Figura 12.

Los mejicanos no tenían verdadera numeración escrita: sólo sabían simbolizar el 20, y sus potencias. Representaban el 20 por una bandera cuadrada, el 400 por una pluma y el 8000 por una bolsa (1). Una pluma era 400, pintada con todas sus barbas; pintada con sólo las de un lado, significaba 200; la mitad de las barbas de un lado, indicaban el 100; las barbas de un lado y la mitad de las del lado opuesto, representaban 300.

La bandera estaba dividida en 4 cuarteles. Si todos aparecían de color, significaban el 20; si quedaba un cuartel en blanco, había que restar 5 del 20; si dos, 10; si tres, 15.

Estos eran los símbolos numéricos: para lo demás se acudía á la repetición. El uno se expresaba por un pequeñito círculo, y los números siguientes, del 2 al 19, se indicaban por la repetición del circulillo; tres, cuatro, cinco, seis... diez y siete... circulitos eran la representación del número 3, del 4, del 5, del 6... del 17... Tres banderas significaban 60; cuatro plumas, 1 600; diez bolsas, 80 000...

¡Cuán superior á estos pobres recursos sea la numeración de procedencia india ó arábiga, es cosa que no necesita ponderación! Pero ocurre preguntar: ¿cabe siquiera presumir có-

(1) La bolsa era representación de los sacos que contenían 8 000 almendras de cacao.

mo pudo llegarse á la aritmética locativa ó de posición? Si nada ocurre *por saltos* en la historia del progreso ¿qué antecedentes serían los del sistema decimal venido á Europa desde la India por medio de los árabes?

Un sistema de numeración escrita, de uso en China (1), en el Japón y entre los pueblos *tamiles* del Indostán, consiste en la traducción fiel de la numeración hablada; por manera que, para expresar las unidades, las decenas, las centenas, etc., se usan dos clases de signos: los unos expresivos del término correspondiente de la progresión décupla propia del sistema decimal que allí siguen, y los otros expresivos del número de veces que ese término se repite. (Por esto se ha dado á esta clase de numeración escrita con dobles signos el nombre de «Numeración por multiplicadores ó coeficientes»).

Para hacer rápidamente comprender este sistema, supongamos que sé adopten las letras de nuestro alfabéto, iniciales de las voces unidades, decenas, centenas y millares para expresar los valores locativos ó de posición, y que se eche mano de las cifras árabes para los multiplicadores ó coeficientes respectivos; y, en tales supuestos, si se quiere escribir el guarismo 3 852, por ejemplo, según lo hacen los *tamiles*, que colocan los coeficientes delante de los valores décuplos, tendremos:

3 M	8 C	5 D	2 U
tres millares	ocho cientos	cinco dieces	y dos unos;

y, si se quiere representar el mismo número según lo hacen los chinos, que colocan los coeficientes sobre las diferentes clases de unidades, resultará

$$\begin{matrix} 3 & 8 & 5 & 2 \\ M & C & D & U \end{matrix}$$

ó sea también tres millares, ocho cientos, cinco dieces y dos unos.

Como es facilísimo de ver, el sistema de los coeficientes, traducción fiel de la numeración hablada, podía por fortuna simplificarse y se simplificó.

En la expresión última pueden suprimirse los signos

y quedar sólo los coeficientes $\begin{matrix} M & C & D & U \\ 3 & 8 & 5 & 2 \end{matrix}$

con tal de que se sobreentienda que el lugar ocupado por cada

(1) En China hay otros sistemas más.

uno representa respectivamente, millares, centenas, decenas y unidades.

No hay testimonios históricos que prueben el cómo desde la numeración por coeficientes se hubo de llegar á la numeración locativa actual; pero es de altísima probabilidad que sucediera como queda expuesto, y que los sabios de la India, tan en contacto con los del Indostán, realizaran hace muchos siglos lo que éstos no han logrado aún.

Algo de este sistema por coeficientes se encuentra en la numeración escrita de los griegos.

Los griegos adoptaron el sistema de los fenicios y hebreos para indicar los números por letras; y copiaron tan servilmente el sistema hebreo, que cuando en el alfabeto griego faltaba alguna letra correspondiente al del hebreo, prefirieron siempre intercalar un nuevo signo á tener que pasar al carácter inmediato del propio alfabeto.

Hé aquí cómo los hebreos usaron las letras de su alfabeto para representar los números:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

כ	ל	מ	נ	ס	ע	פ	צ	ק
20	30	40	50	60	70	80	90	100

Véase á continuación el sistema alfabético numeral de los griegos:

α	ϐ	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ	ρ
20	30	40	50	60	70	80	90	100

Sería dificultar la explicación del sistema griego de dobles signos ó de coeficientes, el hacer uso de estos exóticos caracteres. Para allanar, pues, los conceptos, supongamos que las nueve primeras letras de los griegos se sustituyen por nuestras cifras arábigas, y que estas mismas cifras, seguidas de un tilde (como los nuestros acentuales), representan las decenas; seguidas de dos tildes, las centenas; seguidas de tres tildes, las millares, y seguidas de una m, las miríadas ó diez miles; y, en estos supuestos, tendríamos:

1 uno,	2 dos,	3 tres,	4 cuatro,	5 cinco,	6 seis,	7 siete,	8 ocho,	9 nueve,
$1'$ diez,	$2'$ veinte,	$3'$ treinta,	$4'$ cuarenta,	$5'$ cincuenta,	$6'$ sesenta,	$7'$ setenta,	$8'$ ochenta,	$9'$ noventa,
$1''$ ciento,	$2''$ doscientos,	$3''$ trescientos,	$4''$ cuatrocientos,	$5''$ quinientos,	$6''$ seiscientos,	$7''$ setecientos,	$8''$ ochocientos,	$9''$ novecientos,
$1'''$ mil,	$2'''$ dos mil,	$3'''$ tres mil,	$4'''$ cuatro mil,	$5'''$ cinco mil,	$6'''$ seis mil,	$7'''$ siete mil,	$8'''$ ocho mil,	$9'''$ nueve mil,
1m una miríada, ó bien 10 000	2m dos miríadas, ó bien 20 000	3m tres miríadas, ó bien 30 000	4m cuatro miríadas, ó bien 40 000	5m cinco miríadas, ó bien 50 000	6m seis miríadas, ó bien 60 000	7m siete miríadas, ó bien 70 000	8m ocho miríadas, ó bien 80 000	9m nueve miríadas, ó bien 90 000

Por consiguiente, á nuestro guarismo

46 379 268

correspondería en el sistema griego

$4'''$	$6''$	$3'$	7m	$9'''$	$2''$	$6'$	8
cuatro mil	seiscientos	treinta	y siete miríadas;	nueve mil	doscientas	sesenta	y ocho unidades

Como se ve, á cada dígito sigue la indicación del orden de sus unidades décuplas; y decenas, centenas, millares, miríadas, etc., se escriben con dos signos, uno de los cuales indica la clase de unidad décupla, y otro su coeficiente multiplicador.

Nada parecía más natural que el que aquellos matemáticos insignes hubieran llegado á suprimir los tildes, índices del valor locativo ó de posición, quedando reducidas sus dobles expresiones á sólo los coeficientes en determinados puestos; pero aquellos genios, Arquímedes, Apolonio, Diofanto, etc., nunca llegaron á la simplicísima idea de que la posición podía hacer el oficio de los tildes. Y es que nunca les fué dado inventar un carácter, trazo ó símbolo meramente locativo que ocupase el lugar de las unidades de cualquier orden no existentes en la expresión hablada. Por ejemplo: para escribir

60 070 030

ponían

$6'''$ 7m $3'$

en vez de

$6'''$ $0''$ $0'$ 7m $0'''$ $0''$ $3'$ 0

De aquí su dificultad en sumar los dos guarismos propuestos

$$\begin{array}{lllllllll} & 4''' & 6'' & 3' & 7^m & 9''' & 2'' & 6' & 8 \\ + & & & & & & 6''' & 7^m & 3' \end{array}$$

mientras que no habría habido ninguna colocándolos según sus correspondientes valores locativos.

$$\begin{array}{lllllllll} & 4''' & 6'' & 3' & 7^m & 9''' & 2'' & 6' & 8 \\ + & 6''' & 0'' & 0' & 7^m & 0''' & 0'' & 3' & 0 \end{array}$$

El modo de operar de los griegos, lleno de dificultades comparado con el nuestro, y ajeno al objeto de esta obra, se encontrará perfectamente explicado en la *Historia de la Astronomía antigua,* escrita por Delambre (1817).

Si escribir, en su acepción más general, es hacer visibles nuestros conceptos, á la numeración escrita corresponde el raro sistema numeral de los peruanos (1) y de otros varios pueblos de América.

Cuando la invasión de Pizarro era de uso general en el Perú un medio gráfico de muy diversa índole que todos los nuestros: el QUIPU.

Consistía el *Quipu* en un cordón de lana, generalmente de más de un metro de longitud, al que se prendían y del que colgaban cordoncillos de diversos colores, en los cuales se hacían nudos sistemáticamente y con arreglo á determinado plan. Había quipus con tantos cordoncillos, que pesaban media arroba.

«Cuando los cordoncillos, dice GARCILASO EL INCA, eran de diversos colores, se asentaba el oro en los amarillos; la plata, en los blancos; la gente de guerra, en los rojos; cuando de un mismo color, se ordenaban en ellos las cosas según la importancia que las unas respecto á las otras tenían. Si se trataba, por ejemplo, de armas, destinábase el primer cordoncillo á las lanzas; el segundo, á los dardos; el tercero, á los arcos, etc.; si de vecinos de una localidad, el primero, á los hombres de más de sesenta años; el segundo, á los que pasaban de cincuenta; el tercero, á los que habían cumplido los cuarenta... el último, á los niños de pecho. Los nudos hacían el oficio de números: los inferiores indicaban las unidades; los superiores inmediatos, las decenas; los que los se-

(1) Sería muy grosero pensar que todos los medios gráficos se reducen á trazar con tinta, lápiz, tiza, buril, etc., etc., caracteres ó signos especiales sobre superficies lisas, como el papel, el pergamino, los encerados, las pizarras, las láminas de cobre, etc., etc.

guían, las centenas; y así sucesivamente. Los nudos de cada orden de unidades formaban grupo; los de unidades distintas estaban separados los unos de los otros. Llegábase raras veces á las centenas de millar.»

«No pudiendo creer, escribe CIEZA, que por medio tal cupiesen tan exactas cuentas, rogué en Marcavillca al señor Guacarapora que me lo demostrase; y él, mandando traer los quipus, me dijo desde luego detalladamente cuánto por su parte se había entregado á los españoles desde que entró Pizarro en el valle de Jauja; cuánto les había dado en oro, en plata, en ropa, en maíz, en *llamas,* en otros objetos; cosa de que, en verdad, quedé espantado.»

Podrá quizás alguien creer que los quipus, como los ábacos contadores de billar, ó el *suan pan* de los chinos, ó los rosarios... fuesen aparatos auxiliares del cálculo, ó medios perfeccionados de la *numeración palpable*. Pero, á poco que se reflexione, se verá la diferencia. El tanteo de un ábaco de billar, la cuenta hecha con los dieces de un rosario... desaparecen no bien se ha obtenido el resultado. Pero los datos de los quipus, como los de nuestros libros de cuentas, estaban consignados en los cordoncillos para permanecer *indefinidamente* registrados en ellos como las letras de nuestro alfabeto en el papel, en el mármol ó en el bronce.

Y es que los quipus constituían una especie rara de escritura; pues no servían sólo para contar.

Hé aquí cómo describe esa escritura el Sr. D. Francisco Pí y Margall:

«Constituía el color en esta singular escritura el primer orden de signos ideológicos; así que con frecuencia cambiaba, no sólo en cada uno de los cordoncillos, sino también en cada uno de los hilos de que se componían. A lo largo de los cordoncillos se hacían nudos, y éstos constituían el segundo orden de signos. Variaban de significación los nudos, según estuviesen más ó menos lejanos del *cordón-tronco,* según formasen ó dejasen de formar grupo, según el puesto que en el grupo ocupasen, y tal vez, tal vez, según la forma que se les diese.

»Por poco que el lector reflexione comprenderá de seguro que para la expresión de conceptos no había de ser tan insuficiente el sistema como á primera vista parece. Había de dar mucho de sí la combinación de los nudos y quizá no menos la de los colores.

»Estoy, con todo, lejos de creer que por los solos quipus conociesen los peruanos, como algunos autores pretenden, su historia, sus leyes, su dogma, su culto, su ciencia y hasta su poesía. Lo desmienten, además de otros hechos, lo mucho que, según los primitivos historiadores de Indias, fiaban los

Incas á la tradición oral, y las muchas precauciones que adoptaron para que no se la interrumpiera ni se la falseara.

»Pero... servían los quipus, decididamente para todo lo que era ó podía ser objeto de numeración y cuenta. Por ellos llevaba la Administración una rigorosa estadística de los nacimientos, matrimonios y defunciones que ocurrían en todo el imperio; de la gente apta y la inepta para los servicios públicos; de los jefes, los oficiales, los soldados y las diversas unidades tácticas de que se componían los ejércitos; de la cuantía, reparto y cobranza de los tributos; de la aplicación que se les había dado; de las entradas y las salidas de los *tambos*, y los pósitos, y de los gastos é ingresos del Tesoro del Cuzco...

»Los quipus. á lo que parece, no fueron privativos de los peruanos. Se cree que los usaron en Quito los *puruas* mucho antes de perder su independencia, y en Méjico los *nahuas* mucho antes de conocer y adoptar la escritura jeroglífica. Dice Boturini que encontró verdaderos quipus en el país de los *tlaxcaltecas*. Entre los *nahuas*, según Clavijero, se les daba el nombre de *nepohualtzintzin*. Se dice también si en el Canadá los hubo desde remotos siglos.

»En el mismo Perú, y sobre todo en Quito, se asegura que había además *contadores*, que eran cajas de madera ó de barro divididas en cajetines, donde con pedrezuelas de diversos tamaños y colores se llevaban cuentas, y tal vez se recordaran también acontecimientos. Wiener, al fin de su libro *Perú y Bolivia*, nos da el diseño de uno que se encontró en Chucana. Desgraciadamente, ni él ni autor alguno indican la manera de usarlos.»

En España existe en uso todavía un sistema gráfico de numeración, sumamente ingenioso, pero no tan completo como el de los *quipus* peruanos, porque solamente sirve para llevar ciertas cuentas. Difiere en pormenores de una provincia á otra, aunque todos convienen en lo esencial.

He aquí el modo de practicarlo en Carmona y sus alrededores (provincia de Sevilla):

El sistema se denomina *cuentas por* TARJAS, y más comunmente en dicha provincia, *cuentas por* TAJAS.

Las *tarjas* ó las *tajas* son varas de higuera, ó de olivo, ó de manillas de pitones, en las cuales con navaja se hacen cortes de formas especiales que representan números.

Las varas de higuera, por su mayor tamaño, se prefieren para llevar las cuentas de las fanegas de aceituna durante los meses de la recolección de este fruto.

Regularmente estas tarjas son varas no pulimentadas de un metro ó poco más de longitud.

Cerca de uno de los extremos se hace un corte en dirección oblicua á la longitud, el cual penetra hasta la mitad del diámetro, y en seguida se hiende la vara á todo lo largo en dos listones como medios cilindros hasta llegar al corte oblicuo; de modo que la tarja resulte dividida en dos trozos de la forma siguiente, capaces de encajar exactamente el uno en el otro, como partes constituyentes de una vara misma.

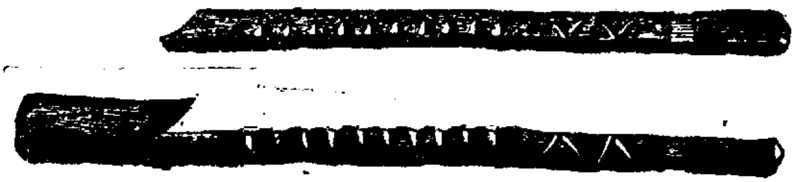


Figura 13.

Estos trozos ó *listones* tienen nombre diferente. El mayor se llama *el macho*, y el menor se llama *la hembra*.

Se preparan así tantas tarjas como grupos de *tareros*, ó sea de personas que cogen aceituna, pueda haber; y cada grupo se denomina *casa*.

Los *machos* quedan en poder del capataz del olivar, que es el representante del dueño, y cada *casa* conserva en su poder la hembra correspondiente.

Los *machos* se cuelgan del *tendedero*, que es una cuerda horizontal, sujeta por sus extremos en las ramas de dos olivos, y cada *casa* conoce su tarja por el número de orden que ocupa en la cuerda, previo el sorteo correspondiente.

El conjunto de *casas* que cogen aceituna en una hacienda se llama *cuadrilla* y ésta tiene un representante denominado *manijero;* con el que se entiende directamente el capataz para todo lo relativo á la medida y precio de las fanegas de aceituna, etc., etc,

Cuando una *casa* ha recogido cierto número de fanegas del fruto, el representante de dicha casa lleva al capataz la mitad de la correspondiente tarja, y entonces, yuxtapuestos *macho* y *hembra*, se hace con navaja un corte en las dos *mitades* yuxtapuestas en forma de *muesca ó mortaja* por cada una de las fanegas cogidas, y una incisión que se llama *media mortaja* por cada media fanega.

Hecho lo cual, el capataz vuelve á colgar del tendedero el macho, y el representante de la casa se lleva la hembra que le corresponde: no siendo posible que desconfíe ninguna de las dos partes, porque cada cual se lleva su comprobante.

En las primeras tarjas de á metro próximamente que se ponen en el tendedero no se hacen más que *mortajas* y *medias-mortajas*, indicadoras de fanegas y medias fanegas; y, cuando se han llenado los dos lados de cada tarja, se cuentan en presencia del capataz y del manijero, y se pasan los resultados á nuevas tarjas en que entran nuevos signos.

En las nuevas tarjas se hacen cinco distintas clases de señales, á saber:

Las *mortajas*, como antes, cada una de las cuales vale 1.

Las *medias mortajas*, cada una de las que vale $^1/_2$.

Las *crucetas ó dieces*, de las cuales cada una vale 10.

Los *bolos*, cada uno vale 100.

El *bolo* se indica en la tarja descortezándola toda al rededor á modo de cilindro, de modo que coja tanto al macho como á la hembra en forma de una faja de ocho á diez milímetros de altura.

El *medio bolo* vale 50. Se obtiene practicando media faja, de manera que resulte señalada en dos mitades repartidas con igualdad entre el macho y la hembra.

Todas las marcas resultan muy visibles, porque aparecen del color de la madera blanca sobre el fondo obscuro de las cortezas oscuras de las varas de higuera.

Completarán estos detalles las dos figuras que siguen, correspondientes á una sola tarja, vista de dos puntos diferentes.

10 mortajas 2 crucetas bolo

4 ½ mortajas ½ bolo

Figura 14.

Pongamos, por ejemplo, que haya que pasar de una tarja primitiva 182 fanegas y media á otra tarja secundaria. Entonces en la nueva tarja se señalará 1 bolo, $^1/_2$ bolo, 3 crucetas, 2 mortajas y media mortaja, terminado lo cual se inutiliza la tarja anterior, habida unanimidad entre el capataz y el manijero, ó la correspondiente casa.

Si, como queda dicho anteriormente, las tarjas de un metro ó poco más sirven para llevar la cuenta de las fanegas recolectadas de aceituna; también se lleva del mismo modo en tarjas más pequeñas la cuenta de los panes ó la de las cuartas de aceite suministradas á cada casa durante la recolección.

Terminada la cogida de aceituna y finiquitadas las cuentas pendientes á entera satisfacción de capataces y manijeros, se queman ó inutilizan todas las tarjas (1).

Un sistema análogo (no igual precisamente) servía en Inglaterra para llevar las cuentas de la recaudación de contribuciones é impuestos; pero las tarjas *(tallies)* se conservaban y archivaban como documentos de resguardo en el *Exchequer*, lo cual fué causa del horroroso incendio ocurrido en 1834, que destruyó el palacio del Parlamento.

La mano ha servido para oficios permanentes algo semejantes á los de los *quipus* y las *tarjas*, por lo cual se le ha dado el nombre de *ábaco natural*, considerada como aparato pára hacer todas las operaciones numéricas. Este estudio de la mano llegó á formar un arte muy complicado, por medio del cual se efectuaban cálculos de alguna importancia, y estaba tan infiltrado en las costumbres populares, que desde Juvenal, Plinio y San Isidoro hasta Nebrija, apenas hay escritor que no lo cite ó explique, incluyéndose en la enseñanza de la Aritmética hasta principios del siglo XVI. En las artes y religiones antiguas, tuvo gran consideración este sistema de numeración, que ha sido común á muchos pueblos. La estatua de Jano, por ejemplo, tenía los dedos de la mano de tal modo que expresaba el número 365, de los días del año.

Todavía permanecen en nuestras costumbres populares algunos restos de este ábaco primitivo con que se hacían los cálculos en la vida doméstica y en las ciencias; y entre ellos el modo de saber los días que tiene cada mes del año, contando por las articulaciones de los dedos llamadas vulgarmente nudillos, dando treinta días á todos los meses que corresponden al intermedio de dos articulaciones, y treinta y uno á los que corresponden á la prominencia articular ó nudillo; ejemplo que puede servir para demostrar hasta qué punto estaba estudiada la mano, considerada como ábaco matemático. También se conservan en España, especialmente entre los pastores y gente del campo, curiosísimas aplicaciones de la mano, fundadas en relaciones numéricas, que servían antiguamente para reducir los florines á reales, los zahenes (2) y tarjas á maravedises, y, sobre todo, los reales á maravedises.

Algunos autores han llamado también á la mano ábaco principal ó primitivo *(abacus primus, abacus princeps)*, porque los primeros hombres contaron indudablemente por los dedos de la mano, y de aquí proviene la numeración decimal.

---

(1) Debo todos estos curiosos pormenores á la amabilidad de mi ilustrado y bondadoso amigo el Sr. D. José Bugallal y Prieto, hacendado de Carmona.

(2) *Zahén*.—Dícese de una dobla que valía 445 maravedises.

LECCIÓN V

Sistema binario.

Como ejemplos de las ideas emitidas en la Lección IV, hallará el discípulo en los cuadros siguientes, escritos de once modos distintos, los grados de la escala de la pluralidad desde «el primero hasta el ciento cuarenta y cuatro».

El discípulo notará que el sistema binario, el ternario y los demás de pocas cifras significativas presentan el no pequeño inconveniente de nécesitar muchos trazos para expresar grados de la escala tan inferiores como los comprendidos entre uno y ciento, por lo cual no son de uso, ni podrán serlo nunca para las actuales operaciones de aritmética.

Para sistemas de señales, de telégrafos, etc., sería muy conveniente el binario, etc.

El sistema de doce cifras resultaría muy útil; pero, como el de diez es el usual y hablado; como, además basta para las necesidades del cálculo; y, como, en fin, en este sistema llamado decimal están escritas todas las tablas de Astronomía, Navegación, etc., no hay que pensar por ahora en sustituírlo con otro ninguno, por más ventajas teóricas que pueda ofrecer.

A la izquierda de cada guarismo, en los sistemas no usuales, se hallará su traducción al sistema decimal, para que el alumno no titubee en caso de duda.

SISTEMA BINARIO.

Tiene las dos cifras siguientes: **1, 0.**

Uno	1
Dos	10
Tres	11
Cuatro	100
Cinco	101
Seis	110
Siete	111
Ocho	1000
Nueve	1001
Diez	1010
Once	1011
Doce	1100
Trece	1101
Catorce	1110
Quince	1111
Diez y seis	10000
Diez y siete	10001
Diez y ocho	10010
Diez y nueve	10011
Veinte	10100
Veinte y uno	10101
Veinte y dos	10110
Veinte y tres	10111
Veinte y cuatro	11000
Veinte y cinco	11001
Veinte y seis	11010
Veinte y siete	11011
Veinte y ocho	11100
Veinte y nueve	11101
Treinta	11110
Treinta y uno	11111
Treinta y dos	100000
Treinta y tres	100001
Treinta y cuatro	100010
Treinta y cinco	100011
Treinta y seis	100100
Treinta y siete	100101
Treinta y ocho	100110
Treinta y nueve	100111
Cuarenta	101000
Cuarenta y uno	101001
Cuarenta y dos	101010
Cuarenta y tres	101011
Cuarenta y cuatro	101100
Cuarenta y cinco	101101
Cuarenta y seis	101110
Cuarenta y siete	101111
Cuarenta y ocho	110000
Cuarenta y nueve	110001
Cincuenta	110010
Cincuenta y uno	110011
Cincuenta y dos	110100
Cincuenta y tres	110101
Cincuenta y cuatro	110110
Cincuenta y cinco	110111
Cincuenta y seis	111000
Cincuenta y siete	111001
Cincuenta y ocho	111010
Cincuenta y nueve	111011
Sesenta	111100
Sesenta y uno	111101
Sesenta y dos	111110
Sesenta y tres	111111
Sesenta y cuatro	1000000
Sesenta y cinco	1000001
Sesenta y seis	1000010
Sesenta y siete	1000011
Sesenta y ocho	1000100
Sesenta y nueve	1000101
Setenta	1000110
Setenta y uno	1000111
Setenta y dos	1001000
Setenta y tres	1001001
Setenta y cuatro	1001010
Setenta y cinco	1001011
Setenta y seis	1001100
Setenta y siete	1001101
Setenta y ocho	1001110
Setenta y nueve	1001111
Ochenta	1010000
Ochenta y uno	1010001
Ochenta y dos	1010010
Ochenta y tres	1010011
Ochenta y cuatro	1010100
Ochenta y cinco	1010101
Ochenta y seis	1010110
Ochenta y siete	1010111
Ochenta y ocho	1011000
Ochenta y nueve	1011001
Noventa	1011010
Noventa y uno	1011011
Noventa y dos	1011100
Noventa y tres	1011101
Noventa y cuatro	1011110
Noventa y cinco	1011111
Noventa y seis	1100000
Noventa y siete	1100001
Noventa y ocho	1100010
Noventa y nueve	1100011
Ciento	1100100
Ciento uno	1100101
Ciento dos	1100110
Ciento tres	1100111
Ciento cuatro	1101000
Ciento cinco	1101001
Ciento seis	1101010
Ciento siete	1101011
Ciento ocho	1101100

Ciento nueve	1101101	Ciento veinte y siete.....	1111111
Ciento diez.............	1101110	Ciento veinte y ocho	10000000
Ciento once.............	1101111	Ciento veinte y nueve ...	10000001
Ciento doce.............	1110000	Ciento treinta..........	10000010
Ciento trece............	1110001	Ciento treinta y uno.....	10000011
Ciento catorce..........	1110010	Ciento treinta y dos. ...	10000100
Ciento quince.	1110011	Ciento treinta y tres.....	10000101
Ciento diez y seis.......	1110100	Ciento treinta y cuatro .	10000110
Ciento diez y siete.......	1110101	Ciento treinta y cinco ...	10000111
Ciento diez y ocho.......	1110110	Ciento treinta y seis.....	10001000
Ciento diez y nueve......	1110111	Ciento treinta y siete. ..	10001001
Ciento veinte.	1111000	Ciento treinta y ocho....	10001010
Ciento veinte y uno.....	1111001	Ciento treinta y nueve...	10001011
Ciento veinte y dos......	1111010	Ciento cuarenta.........	10001100
Ciento veinte y tres ...	1111011	Ciento cuarenta y uno...	10001101
Ciento veinte y cuatro...	1111100	Ciento cuarenta y dos ...	10001110
Ciento veinte y cinco ...	1111101	Ciento cuarenta y tres...	10001111
Ciento veinte y seis......	1111110	Ciento cuarenta y cuatro.	10010000

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema binario?

Dos: el 1 y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Un 1 á la izquierda vale doble que el situado ó supuesto contiguamente á la derecha.

¿Qué inconveniente tiene este sistema?

Exige muchas cifras aun para expresar los primeros grados de la escala de la pluralidad.

LECCIÓN VI

Sistema ternario.

Tiene las tres cifras siguientes: **1, 2, 0.**

Uno	1	Treinta y siete	1101
Dos	2	Treinta y ocho	1102
Tres	10	Treinta y nueve	1110
Cuatro	11	Cuarenta	1111
Cinco	12	Cuarenta y uno	1112
Seis	20	Cuarenta y dos	1120
Siete	21	Cuarenta y tres	1121
Ocho	22	Cuarenta y cuatro	1122
Nueve	100	Cuarenta y cinco	1200
Diéz	101	Cuarenta y seis	1201
Once	102	Cuarenta y siete	1202
Doce	110	Cuarenta y ocho	1210
Trece	111	Cuarenta y nueve	1211
Catorce	112	Cincuenta	1212
Quince	120	Cincuenta y uno	1220
Diez y seis	121	Cincuenta y dos	1221
Diez y siete	122	Cincuenta y tres	1222
Diez y ocho	200	Cincuenta y cuatro	2000
Diez y nueve	201	Cincuenta y cinco	2001
Veinte	202	Cincuenta y seis	2002
Veinte y uno	210	Cincuenta y siete	2010
Veinte y dos	211	Cincuenta y ocho	2011
Veinte y tres	212	Cincuenta y nueve	2012
Veinte y cuatro	220	Sesenta	2020
Veinte y cinco	221	Sesenta y uno	2021
Veinte y seis	222	Sesenta y dos	2022
Veinte y siete	1000	Sesenta y tres	2100
Veinte y ocho	1001	Sesenta y cuatro	2101
Veinte y nueve	1002	Sesenta y cinco	2102
Treinta	1010	Sesenta y seis	2110
Treinta y uno	1011	Sesenta y siete	2111
Treinta y dos	1012	Sesenta y ocho	2112
Treinta y tres	1020	Sesenta y nueve	2120
Treinta y cuatro	1021	Setenta	2121
Treinta y cinco	1022	Setenta y uno	2122
Treinta y seis	1100	Setenta y dos	2200

Setenta y tres.............	2201	Ciento nueve..............	11001
Setenta y cuatro...........	2202	Ciento diez...............	11002
Setenta y cinco............	2210	Ciento once...............	11010
Setenta y seis.............	2211	Ciento doce...............	11011
Setenta y siete............	2212	Ciento trece..............	11012
Setenta y ocho.............	2220	Ciento catorce............	11020
Setenta y nueve............	2221	Ciento quince.............	11021
Ochenta....................	2222	Ciento diez y seis..........	11022
Ochenta y uno..............	10000	Ciento diez y siete.........	11100
Ochenta y dos..............	10001	Ciento diez y ocho....	11101
Ochenta y tres.............	10002	Ciento diez y nueve.........	11102
Ochenta y cuatro...........	10010	Ciento veinte..............	11110
Ochenta y cinco............	10011	Ciento veinte y uno..... ..	11111
Ochenta y seis.............	10012	Ciento veinte y dos........	11112
Ochenta y siete............	10020	Ciento veinte y tres........	11120
Ochenta y ocho.............	10021	Ciento veinte y cuatro.....	11121
Ochenta y nueve............	10022	Ciento veinte y cinco......	11122
Noventa....................	10100	Ciento veinte y seis........	11200
Noventa y uno..............	10101	Ciento veinte y siete.......	11201
Noventa y dos..............	10102	Ciento veinte y ocho.......	11202
Noventa y tres.............	10110	Ciento veinte y nueve	11210
Noventa y cuatro...........	10111	Ciento treinta.............	11211
Noventa y cinco........ ..	10112	Ciento treinta y uno.......	11212
Noventa y seis.............	10120	Ciento treinta y dos.......	11220
Noventa y siete............	10121	Ciento treinta y tres..... .	11221
Noventa y ocho.............	10122	Ciento treinta y cuatro	11222
Noventa y nueve..	10200	Ciento treinta y cinco......	12000
Ciento..	10201	Ciento treinta y seis..... .	12001
Ciento uno.................	10202	Ciento treinta y siete......	12002
Ciento dos.................	10210	Ciento treinta y ocho......	12010
Ciento tres................	10211	Ciento treinta y nueve.....	12011
Ciento cuatro....	10212	Ciento cuarenta.....	12012
Ciento cinco...............	10220	Ciento cuarenta y uno.....	12020
Ciento seis................	10221	Ciento cuarenta y dos......	12021
Ciento siete...............	10222	Ciento cuarenta y tres.....	12022
Ciento ocho................	11000	Ciento cuarenta y cuatro...	12100

RESUMEN

¿Cuántas cifras tiene el sistema ternario?

Tres: 1, 2, y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Una cifra cualquiera de las dos significativas á la izquierda vale triple que la colocada ó supuesta contiguamente á la derecha.

LECCIÓN VII

Sistema cuaternario.

Tiene las cuatro cifras siguientes: **1, 2, 3, 0.**

Uno	1	Treinta y siete	211
Dos	2	Treinta y ocho	212
Tres	3	Treinta y nueve	213
Cuatro	10	Cuarenta	220
Cinco	11	Cuarenta y uno	221
Seis	12	Cuarenta y dos	222
Siete	13	Cuarenta y tres	223
Ocho	20	Cuarenta y cuatro	230
Nueve	21	Cuarenta y cinco	231
Diez	22	Cuarenta y seis	232
Once	23	Cuarenta y siete	233
Doce	30	Cuarenta y ocho	300
Trece	31	Cuarenta y nueve	301
Catorce	32	Cincuenta	302
Quince	33	Cincuenta y uno	303
Diez y seis	100	Cincuenta y dos	310
Diez y siete	101	Cincuenta y tres	311
Diez y ocho	102	Cincuenta y cuatro	312
Diez y nueve	103	Cincuenta y cinco	313
Veinte	110	Cincuenta y seis	320
Veinte y uno	111	Cincuenta y siete	321
Veinte y dos	112	Cincuenta y ocho	322
Veinte y tres	113	Cincuenta y nueve	323
Veinte y cuatro	120	Sesenta	330
Veinte y cinco	121	Sesenta y uno	331
Veinte y seis	122	Sesenta y dos	332
Veinte y siete	123	Sesenta y tres	333
Veinte y ocho	130	Sesenta y cuatro	1000
Veinte y nueve	131	Sesenta y cinco	1001
Treinta	132	Sesenta y seis	1002
Treinta y uno	133	Sesenta y siete	1003
Treinta y dos	200	Sesenta y ocho	1010
Treinta y tres	201	Sesenta y nueve	1011
Treinta y cuatro	202	Setenta	1012
Treinta y cinco	203	Setenta y uno	1013
Treinta y seis	210	Setenta y dos	1020

Setenta y tres	1021
Setenta y cuatro	1022
Setenta y cinco	1023
Setenta y seis	1030
Setenta y siete	1031
Setenta y ocho	1032
Setenta y nueve	1033
Ochenta	1100
Ochenta y uno	1101
Ochenta y dos	1102
Ochenta y tres	1103
Ochenta y cuatro	1110
Ochenta y cinco	1111
Ochenta y seis	1112
Ochenta y siete	1113
Ochenta y ocho	1120
Ochenta y nueve	1121
Noventa	1122
Noventa y uno	1123
Noventa y dos	1130
Noventa y tres	1131
Noventa y cuatro	1132
Noventa y cinco	1133
Noventa y seis	1200
Noventa y siete	1201
Noventa y ocho	1202
Noventa y nueve	1203
Ciento	1210
Ciento uno	1211
Ciento dos	1212
Ciento tres	1213
Ciento cuatro	1220
Ciento cinco	1221
Ciento seis	1222
Ciento siete	1223
Ciento ocho	1230
Ciento nueve	1231
Ciento diez	1232
Ciento once	1233
Ciento doce	1300
Ciento trece	1301
Ciento catorce	1302
Ciento quince	1303
Ciento diez y seis	1310
Ciento diez y siete	1311
Ciento diez y ocho	1312
Ciento diez y nueve	1313
Ciento veinte	1320
Ciento veinte y uno	1321
Ciento veinte y dos	1322
Ciento veinte y tres	1323
Ciento veinte y cuatro	1330
Ciento veinte y cinco	1331
Ciento veinte y seis	1332
Ciento veinte y siete	1333
Ciento veinte y ocho	2000
Ciento veinte y nueve	2001
Ciento treinta	2002
Ciento treinta y uno	2003
Ciento treinta y dos	2010
Ciento treinta y tres	2011
Ciento treinta y cuatro	2012
Ciento treinta y cinco	2013
Ciento treinta y seis	2020
Ciento treinta y siete	2021
Ciento treinta y ocho	2022
Ciento treinta y nueve	2023
Ciento cuarenta	2030
Ciento cuarenta y uno	2031
Ciento cuarenta y dos	2032
Ciento cuarenta y tres	2033
Ciento cuarenta y cuatro	2100

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema cuaternario?

Cuatro: 1, 2, 3 y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Una cifra significativa colocada á la izquierda vale el cuádruplo que la igual colocada ó supuesta contiguamente á la derecha.

LECCIÓN VIII

Sistema quinario.

Tiene las cinco cifras siguientes: **1, 2, 3, 4, 0.**

Uno	1	Treinta y siete	122
Dos	2	Treinta y ocho	123
Tres	3	Treinta y nueve	124
Cuatro	4	Cuarenta	130
Cinco	10	Cuarenta y uno	131
Seis	11	Cuarenta y dos	132
Siete	12	Cuarenta y tres	133
Ocho	13	Cuarenta y cuatro	134
Nueve	14	Cuarenta y cinco	140
Diez	20	Cuarenta y seis	141
Once	21	Cuarenta y siete	142
Doce	22	Cuarenta y ocho	143
Trece	23	Cuarenta y nueve	144
Catorce	24	Cincuenta	200
Quince	30	Cincuenta y uno	201
Diez y seis	31	Cincuenta y dos	202
Diez y siete	32	Cincuenta y tres	203
Diez y ocho	33	Cincuenta y cuatro	204
Diez y nueve	34	Cincuenta y cinco	210
Veinte	40	Cincuenta y seis	211
Veinte y uno	41	Cincuenta y siete	212
Veinte y dos	42	Cincuenta y ocho	213
Veinte y tres	43	Cincuenta y nueve	214
Veinte y cuatro	44	Sesenta	220
Veinte y cinco	100	Sesenta y uno	221
Veinte y seis	101	Sesenta y dos	222
Veinte y siete	102	Sesenta y tres	223
Veinte y ocho	103	Sesenta y cuatro	224
Veinte y nueve	104	Sesenta y cinco	230
Treinta	110	Sesenta y seis	231
Treinta y uno	111	Sesenta y siete	232
Treinta y dos	112	Sesenta y ocho	233
Treinta y tres	113	Sesenta y nueve	234
Treinta y cuatro	114	Setenta	240
Treinta y cinco	120	Setenta y uno	241
Treinta y seis	121	Setenta y dos	242

Setenta y tres	243	Ciento nueve	414
Setenta y cuatro	244	Ciento diez	420
Setenta y cinco	300	Ciento once	421
Setenta y seis	301	Ciento doce	422
Setenta y siete	302	Ciento trece	423
Setenta y ocho	303	Ciento catorce	424
Setenta y nueve	304	Ciento quince	430
Ochenta	310	Ciento diez y seis	431
Ochenta y uno	311	Ciento diez y siete	432
Ochenta y dos	312	Ciento diez y ocho	433
Ochenta y tres	313	Ciento diez y nueve	434
Ochenta y cuatro	314	Ciento veinte	440
Ochenta y cinco	320	Ciento veinte y uno	441
Ochenta y seis	321	Ciento veinte y dos	442
Ochenta y siete	322	Ciento veinte y tres	443
Ochenta y ocho	323	Ciento veinte y cuatro	444
Ochenta y nueve	324	Ciento veinte y cinco	1000
Noventa	330	Ciento veinte y seis	1001
Noventa y uno	331	Ciento veinte y siete	1002
Noventa y dos	332	Ciento veinte y ocho	1003
Noventa y tres	333	Ciento veinte y nueve	1004
Noventa y cuatro	334	Ciento treinta	1010
Noventa y cinco	340	Ciento treinta y uno	1011
Noventa y seis	341	Ciento treinta y dos	1012
Noventa y siete	342	Ciento treinta y tres	1013
Noventa y ocho	343	Ciento treinta y cuatro	1014
Noventa y nueve	344	Ciento treinta y cinco	1020
Ciento	400	Ciento treinta y seis	1021
Ciento uno	401	Ciento treinta y siete	1022
Ciento dos	402	Ciento treinta y ocho	1023
Ciento tres	403	Ciento treinta y nueve	1024
Ciento cuatro	404	Ciento cuarenta	1030
Ciento cinco	410	Ciento cuarenta y uno	1031
Ciento seis	411	Ciento cuarenta y dos	1032
Ciento siete	412	Ciento cuarenta y tres	1033
Ciento ocho	413	Ciento cuarenta y cuatro	1034

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema quinario?

Cinco: 1, 2, 3, 4 y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Un 1 colocado á la izquierda vale el quíntuplo que el colocado ó supuesto contiguamente á la derecha. Y lo dicho del 1 se entiende de cualquier otra cifra significativa.

LECCIÓN IX

Sistema senario.

Tiene las seis cifras siguientes: **1, 2, 3, 4, 5, 0.**

Uno	1
Dos	2
Tres	3
Cuatro	4
Cinco	5
Seis	10
Siete	11
Ocho	12
Nueve	13
Diez	14
Once	15
Doce	20
Trece	21
Catorce	22
Quince	23
Diez y seis	24
Diez y siete	25
Diez y ocho	30
Diez y nueve	31
Veinte	32
Veinte y uno	33
Veinte y dos	34
Veinte y tres	35
Veinte y cuatro	40
Veinte y cinco	41
Veinte y seis	42
Veinte y siete	43
Veinte y ocho	44
Veinte y nueve	45
Treinta	50
Treinta y uno	51
Treinta y dos	52
Treinta y tres	53
Treinta y cuatro	54
Treinta y cinco	55
Treinta y seis	100
Treinta y siete	101
Treinta y ocho	102
Treinta y nueve	103
Cuarenta	104
Cuarenta y uno	105
Cuarenta y dos	110
Cuarenta y tres	111
Cuarenta y cuatro	112
Cuarenta y cinco	113
Cuarenta y seis	114
Cuarenta y siete	115
Cuarenta y ocho	120
Cuarenta y nueve	121
Cincuenta	122
Cincuenta y uno	123
Cincuenta y dos	124
Cincuenta y tres	125
Cincuenta y cuatro	130
Cincuenta y cinco	131
Cincuenta y seis	132
Cincuenta y siete	133
Cincuenta y ocho	134
Cincuenta y nueve	135
Sesenta	140
Sesenta y uno	141
Sesenta y dos	142
Sesenta y tres	143
Sesenta y cuatro	144
Sesenta y cinco	145
Sesenta y seis	150
Sesenta y siete	151
Sesenta y ocho	152
Sesenta y nueve	153
Setenta	154
Setenta y uno	155
Setenta y dos	200

Setenta y tres	201
Setenta y cuatro	202
Setenta y cinco	203
Setenta y seis	204
Setenta y siete	205
Setenta y ocho	210
Setenta y nueve	211
Ochenta	212
Ochenta y uno	213
Ochenta y dos	214
Ochenta y tres	215
Ochenta y cuatro	220
Ochenta y cinco	221
Ochenta y seis	222
Ochenta y siete	223
Ochenta y ocho	224
Ochenta y nueve	225
Noventa	230
Noventa y uno	231
Noventa y dos	232
Noventa y tres	233
Noventa y cuatro	234
Noventa y cinco	235
Noventa y seis	240
Noventa y siete	241
Noventa y ocho	242
Noventa y nueve	243
Ciento	244
Ciento uno	245
Ciento dos	250
Ciento tres	251
Ciento cuatro	252
Ciento cinco	253
Ciento seis	254
Ciento siete	255
Ciento ocho	300
Ciento nueve	301
Ciento diez	302
Ciento once	303
Ciento doce	304
Ciento trece	305
Ciento catorce	310
Ciento quince	311
Ciento diez y seis	312
Ciento diez y siete	313
Ciento diez y ocho	314
Ciento diez y nueve	315
Ciento veinte	320
Ciento veinte y uno	321
Ciento veinte y dos	322
Ciento veinte y tres	323
Ciento veinte y cuatro	324
Ciento veinte y cinco	325
Ciento veinte y seis	330
Ciento veinte y siete	331
Ciento veinte y ocho	332
Ciento veinte y nueve	333
Ciento treinta	334
Ciento treinta y uno	335
Ciento treinta y dos	340
Ciento treinta y tres	341
Ciento treinta y cuatro	342
Ciento treinta y cinco	343
Ciento treinta y seis	344
Ciento treinta y siete	345
Ciento treinta y ocho	350
Ciento treinta y nueve	351
Ciento cuarenta	352
Ciento cuarenta y uno	353
Ciento cuarenta y dos	354
Ciento cuarenta y tres	355
Ciento cuarenta y cuatro	400

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema senario?

Seis: 1, 2, 3, 4, 5 y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema de seis cifras?

Un 1 colocado á la izquierda vale el séxtuplo que el colocado ó supuesto contiguamente á la derecha, etc.

LECCIÓN X

Sistema septenario.

Tiene las siete cifras siguientes: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 0.**

Uno	1	Treinta y siete	52
Dos	2	Treinta y ocho	53
Tres	3	Treinta y nueve	54
Cuatro	4	Cuarenta	55
Cinco	5	Cuarenta y uno	56
Seis	6	Cuarenta y dos	60
Siete	10	Cuarenta y tres	61
Ocho	11	Cuarenta y cuatro	62
Nueve	12	Cuarenta y cinco	63
Diez	13	Cuarenta y seis	64
Once	14	Cuarenta y siete	65
Doce	15	Cuarenta y ocho	66
Trece	16	Cuarenta y nueve	100
Catorce	20	Cincuenta	101
Quince	21	Cincuenta uno	102
Diez y seis	22	Cincuenta y dos	103
Diez y siete	23	Cincuenta y tres	104
Diez y ocho	24	Cincuenta y cuatro	105
Diez y nueve	25	Cincuenta y cinco	106
Veinte	26	Cincuenta y seis	110
Veinte y uno	30	Cincuenta y siete	111
Veinte y dos	31	Cincuenta y ocho	112
Veinte y tres	32	Cincuenta y nueve	113
Veinte y cuatro	33	Sesenta	114
Veinte y cinco	34	Sesenta y uno	115
Veinte y seis	35	Sesenta y dos	116
Veinte y siete	36	Sesenta y tres	120
Veinte y ocho	40	Sesenta y cuatro	121
Veinte y nueve	41	Sesenta y cinco	122
Treinta	42	Sesenta y seis	123
Treinta y uno	43	Sesenta y siete	124
Treinta y dos	44	Sesenta y ocho	125
Treinta y tres	45	Sesenta y nueve	126
Treinta y cuatro	46	Setenta	130
Treinta y cinco	50	Setenta y uno	131
Treinta y seis	51	Setenta y dos	132

Setenta y tres	133
Setenta y cuatro	134
Setenta y cinco	135
Setenta y seis	136
Setenta y siete	140
Setenta y ocho	141
Setenta y nueve	142
Ochenta	143
Ochenta y uno	144
Ochenta y dos	145
Ochenta y tres	146
Ochenta y cuatro	150
Ochenta y cinco	151
Ochenta y seis	152
Ochenta y siete	153
Ochenta y ocho	154
Ochenta y nueve	155
Noventa	156
Noventa y uno	160
Noventa y dos	161
Noventa y tres	162
Noventa y cuatro	163
Noventa y cinco	164
Noventa y seis	165
Noventa y siete	166
Noventa y ocho	200
Noventa y nueve	201
Ciento	202
Ciento uno	203
Ciento dos	204
Ciento tres	205
Ciento cuatro	206
Ciento cinco	210
Ciento seis	211
Ciento siete	212
Ciento ocho	213
Ciento nueve	214
Ciento diez	215
Ciento once	216
Ciento doce	220
Ciento trece	221
Ciento catorce	222
Ciento quince	223
Ciento diez y seis	224
Ciento diez y siete	225
Ciento diez y ocho	226
Ciento diez y nueve	230
Ciento veinte	231
Ciento veinte y uno	232
Ciento veinte y dos	233
Ciento veinte y tres	234
Ciento veinte y cuatro	235
Ciento veinte y cinco	236
Ciento veinte y seis	240
Ciento veinte y siete	241
Ciento veinte y ocho	242
Ciento veinte y nueve	243
Ciento treinta	244
Ciento treinta y uno	245
Ciento treinta y dos	246
Ciento treinta y tres	250
Ciento treinta y cuatro	251
Ciento treinta y cinco	252
Ciento treinta y seis	253
Ciento treinta y siete	254
Ciento treinta y ocho	255
Ciento treinta y nueve	256
Ciento cuarenta	260
Ciento cuarenta y uno	261
Ciento cuarenta y dos	262
Ciento cuarenta y tres	263
Ciento cuarenta y cuatro	264

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema septenario?

Siete: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Una cifra de las significativas colocada á la izquierda vale el séptuplo que la igual colocada ó supuesta contiguamente á la derecha.

LECCIÓN XI

Sistema octonario.

Tiene las ocho cifras siguientes: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0.**

Uno	1	Treinta y siete	45
Dos	2	Treinta y ocho	46
Tres	3	Treinta y nueve	47
Cuatro	4	Cuarenta	50
Cinco	5	Cuarenta y uno	51
Seis	6	Cuarenta y dos	52
Siete	7	Cuarenta y tres	53
Ocho	10	Cuarenta y cuatro	54
Nueve	11	Cuarenta y cinco	55
Diez	12	Cuarenta y seis	56
Once	13	Cuarenta y siete	57
Doce	14	Cuarenta y ocho	60
Trece	15	Cuarenta y nueve	61
Catorce	16	Cincuenta	62
Quince	17	Cincuenta y uno	63
Diez y seis	20	Cincuenta y dos	64
Diez y siete	21	Cincuenta y tres	65
Diez y ocho	22	Cincuenta y cuatro	66
Diez y nueve	23	Cincuenta y cinco	67
Veinte	24	Cincuenta y seis	70
Veinte y uno	25	Cincuenta y siete	71
Veinte y dos	26	Cincuenta y ocho	72
Veinte y tres	27	Cincuenta y nueve	73
Veinte y cuatro	30	Sesenta	74
Veinte y cinco	31	Sesenta y uno	75
Veinte y seis	32	Sesenta y dos	76
Veinte y siete	33	Sesenta y tres	77
Veinte y ocho	34	Sesenta y cuatro	100
Veinte y nueve	35	Sesenta y cinco	101
Treinta	36	Sesenta y seis	102
Treinta y uno	37	Sesenta y siete	103
Treinta y dos	40	Sesenta y ocho	104
Treinta y tres	41	Sesenta y nueve	105
Treinta y cuatro	42	Setenta	106
Treinta y cinco	43	Setenta y uno	107
Treinta y seis	44	Setenta y dos	110

Setenta y tres	111
Setenta y cuatro	112
Setenta y cinco	113
Setenta y seis	114
Setenta y siete	115
Setenta y ocho	116
Setenta y nueve	117
Ochenta	120
Ochenta y uno	121
Ochenta y dos	122
Ochenta y tres	123
Ochenta y cuatro	124
Ochenta y cinco	125
Ochenta y seis	126
Ochenta y siete	127
Ochenta y ocho	130
Ochenta y nueve	131
Noventa	132
Noventa y uno	133
Noventa y dos	134
Noventa y tres	135
Noventa y cuatro	136
Noventa y cinco	137
Noventa y seis	140
Noventa y siete	141
Noventa y ocho	142
Noventa y nueve	143
Ciento	144
Ciento uno	145
Ciento dos	146
Ciento tres	147
Ciento cuatro	150
Ciento cinco	151
Ciento seis	152
Ciento siete	153
Ciento ocho	154
Ciento nueve	155
Ciento diez	156
Ciento once	157
Ciento doce	160
Ciento trece	161
Ciento catorce	162
Ciento quince	163
Ciento diez y seis	164
Ciento diez y siete	165
Ciento diez y ocho	166
Ciento diez y nueve	167
Ciento veinte	170
Ciento veinte y uno	171
Ciento veinte y dos	172
Ciento veinte y tres	173
Ciento veinte y cuatro	174
Ciento veinte y cinco	175
Ciento veinte y seis	176
Ciento veinte y siete	177
Ciento veinte y ocho	200
Ciento veinte y nueve	201
Ciento treinta	202
Ciento treinta y uno	203
Ciento treinta y dos	204
Ciento treinta y tres	205
Ciento treinta y cuatro	206
Ciento treinta y cinco	207
Ciento treinta y seis	210
Ciento treinta y siete	211
Ciento treinta y ocho	212
Ciento treinta y nueve	213
Ciento cuarenta	214
Ciento cuarenta y uno	215
Ciento cuarenta y dos	216
Ciento cuarenta y tres	217
Ciento cuarenta y cuatro	220

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema octonario?

Ocho: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Una cifra significativa colocada á la izquierda vale ocho veces más que la igual contigua ó supuesta á la derecha.

LECCIÓN XII

Sistema novenario ó nonario.

Tiene las nueve cifras siguientes: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0.**

Uno	1	Treinta y siete	41
Dos	2	Treinta y ocho	42
Tres	3	Treinta y nueve	43
Cuatro	4	Cuarenta	44
Cinco	5	Cuarenta y uno	45
Seis	6	Cuarenta y dos	46
Siete	7	Cuarenta y tres	47
Ocho	8	Cuarenta y cuatro	48
Nueve	10	Cuarenta y cinco	50
Diez	11	Cuarenta y seis	51
Once	12	Cuarenta y siete	52
Doce	13	Cuarenta y ocho	53
Trece	14	Cuarenta y nueve	54
Catorce	15	Cincuenta	55
Quince	16	Cincuenta y uno	56
Diez y seis	17	Cincuenta y dos	57
Diez y siete	18	Cincuenta y tres	58
Diez y ocho	20	Cincuenta y cuatro	60
Diez y nueve	21	Cincuenta y cinco	61
Veinte	22	Cincuenta y seis	62
Veinte y uno	23	Cincuenta y siete	63
Veinte y dos	24	Cincuenta y ocho	64
Veinte y tres	25	Cincuenta y nueve	65
Veinte y cuatro	26	Sesenta	66
Veinte y cinco	27	Sesenta y uno	67
Veinte y seis	28	Sesenta y dos	68
Veinte y siete	30	Sesenta y tres	70
Veinte y ocho	31	Sesenta y cuatro	71
Veinte y nueve	32	Sesenta y cinco	72
Treinta	33	Sesenta y seis	73
Treinta y uno	34	Sesenta y siete	74
Treinta y dos	35	Sesenta y ocho	75
Treinta y tres	36	Sesenta y nueve	76
Treinta y cuatro	37	Setenta	77
Treinta y cinco	38	Setenta y uno	78
Treinta y seis	40	Setenta y dos	80

Setenta y tres	81
Setenta y cuatro	82
Setenta y cinco	83
Setenta y seis	84
Setenta y siete	85
Setenta y ocho	86
Setenta y nueve	87
Ochenta	88
Ochenta y uno	100
Ochenta y dos	101
Ochenta y tres	102
Ochenta y cuatro	103
Ochenta y cinco	104
Ochenta y seis	105
Ochenta y siete	106
Ochenta y ocho	107
Ochenta y nueve	108
Noventa	110
Noventa y uno	111
Noventa y dos	112
Noventa y tres	113
Noventa y cuatro	114
Noventa y cinco	115
Noventa y seis	116
Noventa y siete	117
Noventa y ocho	118
Noventa y nueve	120
Ciento	121
Ciento uno	122
Ciento dos	123
Ciento tres	124
Ciento cuatro	125
Ciento cinco	126
Ciento seis	127
Ciento siete	128
Ciento ocho	130
Ciento nueve	131
Ciento diez	132
Ciento once	133
Ciento doce	134
Ciento trece	135
Ciento catorce	136
Ciento quince	137
Ciento diez y seis	138
Ciento diez y siete	140
Ciento diez y ocho	141
Ciento diez y nueve	142
Ciento veinte	143
Ciento veinte y uno	144
Ciento veinte y dos	145
Ciento veinte y tres	146
Ciento veinte y cuatro	147
Ciento veinte y cinco	148
Ciento veinte y seis	150
Ciento veinte y siete	151
Ciento veinte y ocho	152
Ciento veinte y nueve	153
Ciento treinta	154
Ciento treinta y uno	155
Ciento treinta y dos	156
Ciento treinta y tres	157
Ciento treinta y cuatro	158
Ciento treinta y cinco	160
Ciento treinta y seis	161
Ciento treinta y siete	162
Ciento treinta y ocho	163
Ciento treinta y nueve	164
Ciento cuarenta	165
Ciento cuarenta y uno	166
Ciento cuarenta y dos	167
Ciento cuarenta y tres	168
Ciento cuarenta y cuatro	170

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema nonario?

Nueve: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Un 1 colocado á la izquierda vale nueve veces lo que el colocado ó supuesto contiguamente á la derecha, y lo mismo las otras cifras significativas.

LECCIÓN XIII

Sistema decimal.

Tiene las diez cifras siguientes: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.**

Uno	1	Treinta y siete	37
Dos	2	Treinta y ocho	38
Tres	3	Treinta y nueve	39
Cuatro	4	Cuarenta	40
Cinco	5	Cuarenta y uno	41
Seis	6	Cuarenta y dos	42
Siete	7	Cuarenta y tres	43
Ocho	8	Cuarenta y cuatro	44
Nueve	9	Cuarenta y cinco	45
Diez	10	Cuarenta y seis	46
Once	11	Cuarenta y siete	47
Doce	12	Cuarenta y ocho	48
Trece	13	Cuarenta y nueve	49
Catorce	14	Cincuenta	50
Quince	15	Cincuenta y uno	51
Diez y seis	16	Cincuenta y dos	52
Diez y siete	17	Cincuenta y tres	53
Diez y ocho	18	Cincuenta y cuatro	54
Diez y nueve	19	Cincuenta y cinco	55
Veinte	20	Cincuenta y seis	56
Veinte y uno	21	Cincuenta y siete	57
Veinte y dos	22	Cincuenta y ocho	58
Veinte y tres	23	Cincuenta y nueve	59
Veinte y cuatro	24	Sesenta	60
Veinte y cinco	25	Sesenta y uno	61
Veinte y seis	26	Sesenta y dos	62
Veinte y siete	27	Sesenta y tres	63
Veinte y ocho	28	Sesenta y cuatro	64
Veinte y nueve	29	Sesenta y cinco	65
Treinta	30	Sesenta y seis	66
Treinta y uno	31	Sesenta y siete	67
Treinta y dos	32	Sesenta y ocho	68
Treinta y tres	33	Sesenta y nueve	69
Treinta y cuatro	34	Setenta	70
Treinta y cinco	35	Setenta y uno	71
Treinta y seis	36	Setenta y dos	72

Setenta y tres	73
Setenta y cuatro	74
Setenta y cinco	75
Setenta y seis	76
Setenta y siete	77
Setenta y ocho	78
Setenta y nueve	79
Ochenta	80
Ochenta y uno	81
Ochenta y dos	82
Ochenta y tres	83
Ochenta y cuatro	84
Ochenta y cinco	85
Ochenta y seis	86
Ochenta y siete	87
Ochenta y ocho	88
Ochenta y nueve	89
Noventa	90
Noventa y uno	91
Noventa y dos	92
Noventa y tres	93
Noventa y cuatro	94
Noventa y cinco	95
Noventa y seis	96
Noventa y siete	97
Noventa y ocho	98
Noventa y nueve	99
Ciento	100
Ciento uno	101
Ciento dos	102
Ciento tres	103
Ciento cuatro	104
Ciento cinco	105
Ciento seis	106
Ciento siete	107
Ciento ocho	108
Ciento nueve	109
Ciento diez	110
Ciento once	111
Ciento doce	112
Ciento trece	113
Ciento catorce	114
Ciento quince	115
Ciento diez y seis	116
Ciento diez y siete	117
Ciento diez y ocho	118
Ciento diez y nueve	119
Ciento veinte	120
Ciento veinte y uno	121
Ciento veinte y dos	122
Ciento veinte y tres	123
Ciento veinte y cuatro	124
Ciento veinte y cinco	125
Ciento veinte y seis	126
Ciento veinte y siete	127
Ciento veinte y ocho	128
Ciento veinte y nueve	129
Ciento treinta	130
Ciento treinta y uno	131
Ciento treinta y dos	132
Ciento treinta y tres	133
Ciento treinta y cuatro	134
Ciento treinta y cinco	135
Ciento treinta y seis	136
Ciento treinta y siete	137
Ciento treinta y ocho	138
Ciento treinta y nueve	139
Ciento cuarenta	140
Ciento cuarenta y uno	141
Ciento cuarenta y dos	142
Ciento cuarenta y tres	143
Ciento cuarenta y cuatro	144

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema decimal?

Diez: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Un 1 colocado á la izquierda vale el décuplo que el situado ó supuesto contiguamente á la derecha, etc.

LECCIÓN XIV

Sistema undecimal.

Tiene las cifras siguientes: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, 0.**

Uno	1
Dos	2
Tres	3
Cuatro	4
Cinco	5
Seis	6
Siete	7
Ocho	8
Nueve	9
Diez	a
Once	10
Doce	11
Trece	12
Catooce	13
Quince	14
Diez y seis	15
Diez y siete	16
Diez y ocho	17
Diez y nueve	18
Veinte	19
Veinte y uno	1a
Veinte y dos	20
Veinte y tres	21
Veinte y cuatro	22
Veinte y cinco	23
Veinte y seis	24
Veinte y siete	25
Veinte y ocho	26
Veinte y nueve	27
Treinta	28
Treinta y uno	29
Treinta y dos	2a
Treinta y tres	30
Treinta y cuatro	31
Treinta y cinco	32
Treinta y seis	33
Treinta y siete	34
Treinta y ocho	35
Treinta y nueve	36
Cuarenta	37
Cuarenfa y uno	38
Cuarenta y dos	39
Cuarenta y tres	3a
Cuarenta y cuatro	40
Cuarenta y cinco	41
Cuarenta y seis	42
Cuarenta y siete	43
Cuarenta y ocho	44
Cuarenta y nueve	45
Cincuenta	46
Cincuenta y uno	47
Cincuenta y dos	48
Cincuenta y tres	49
Cncuenta y cuatro	4a
Cincuenta y cinco	50
Cincuenta y seis	51
Cincuenta y siete	52
Cincuenta y ocho	53
iincuenta y nueve	54
Sesenta	55
Sesenta y uno	56
Sesenta y dos	57
Sesenta y tres	58
Sesenta y cuatro	59
Sesanta y cinco	5a
Sesenta y seis	60
Sesenta y siete	61
Sesenta y ocho	62
Sesenta y nueve	63
Setenta	64
Setenta y uno	65
Setenta y dos	66

Setenta y tres	67	Ciento nueve	9a
Setenta y cuatro	68	Ciento diez	a0
Setenta y cinco	69	Ciento once	a1
Setenta y seis	6a	Ciento doce	a2
Setenta y siete	70	Ciento trece	a3
Setenta y ocho	71	Ciento catorce	a4
Setenta y nueve	72	Ciento quince	a5
Ochenta	73	Ciento diez y seis	a6
Ochenta y uno	74	Ciento diez y siete	a7
Ochenta y dos	75	Ciento diez y ocho	a8
Ochenta y tres	76	Ciento diez y nueve	a9
Ochenta y cuatro	77	Ciento veinte	aa
Ochenta y cinco	78	Ciento veinte y uno	100
Ochenta y seis	79	Ciento veinte y dos	101
Ochenta y siete	7a	Ciento veinte y tres	102
Ochenta y ocho	80	Ciento veinte y cuatro	103
Ochenta y nueve	81	Ciento veinte y cinco	104
Noventa	82	Ciento veinte y seis	105
Noventa y uno	83	Ciento veinte y siete	106
Noventa y dos	84	Ciento veinte y ocho	107
Noventa y tres	85	Ciento veinte y nueve	108
Noventa y cuatro	86	Ciento treinta	109
Noventa y cinco	87	Ciento treinta y uno	10a
Noventa y seis	88	Ciento treinta y dos	110
Noventa y siete	89	Ciento treinta y tres	111
Noventa y ocho	8a	Ciento treinta y cuatro	112
Noventa y nueve	90	Ciento treinta y cinco	113
Ciento	91	Ciento treinta y seis	114
Ciento uno	92	Ciento treinta y siete	115
Ciento dos	93	Ciento treinta y ocho	116
Ciento tres	94	Ciento treinta y nueve	117
Ciento cuatro	95	Ciento cuarenta	118
Ciento cinco	96	Ciento cuarenta y uno	119
Ciento seis	97	Ciento cuarenta y dos	11a
Ciento siete	98	Ciento cuarenta y tres	120
Ciento ocho	99	Ciento cuarenta y cuatro	121

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema undecimal?

Once: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Un 1 colocado á la izquierda vale once veces más que el contiguo ó supuesto á la derecha. Y así de las demás cifras significativas.

LECCIÓN XV

Sistema duodecimal.

Tiene las cifras siguientes: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, 0.**

Uno	1	Treinta y siete	31
Dos	2	Treinta y ocho	32
Tres	3	Treinta y nueve	33
Cuatro	4	Cuarenta	34
Cinco	5	Cuarenta y uno	35
Seis	6	Cuarenta y dos	36
Siete	7	Cuarenta y tres	37
Ocho	8	Cuarenta y cuatro	38
Nueve	9	Cuarenta y cinco	39
Diez	a	Cuarenta y seis	3a
Once	b	Cuarenta y siete	3b
Doce	10	Cuarenta y ocho	40
Trece	11	Cuarenta y nueve	41
Catorce	12	Cincuenta	42
Quince	13	Cincuenta y uno	43
Diez y seis	14	Cincuenta y dos	44
Diez y siete	15	Cincuenta y tres	45
Diez y ocho	16	Cincuenta y cuatro	46
Diez y nueve	17	Cincuenta y cinco	47
Veinte	18	Cincuenta y seis	48
Veinte y uno	19	Cincuenta y siete	49
Veinte y dos	1a	Cincuenta y ocho	4a
Veinte y tres	1b	Cincuenta y nueve	4b
Veinte y cuatro	20	Sesenta	50
Veinte y cinco	21	Sesenta y uno	51
Veinte y seis	22	Sesenta y dos	52
Veinte y siete	23	Sesenta y tres	53
Veinte y ocho	24	Sesenta y cuatro	54
Veinte y nueve	25	Sesenta y cinco	55
Treinta	26	Sesenta y seis	56
Treinta y uno	27	Sesenta y siete	57
Treinta y dos	28	Sesenta y ocho	58
Treinta y tres	29	Sesenta y nueve	59
Treinta y cuatro	2a	Setenta	5a
Treinta y cinco	2b	Setenta y uno	5b
Treinta y seis	30	Setenta y dos	60

Setenta y tres...............	61	Ciento nueve...............	91
Setenta y cuatro............	62	Ciento diez.................	92
Setenta y cinco.............	63	Ciento once.................	93
Setenta y seis...............	64	Ciento doce.................	94
Setenta y siete	65	Ciento trece................	95
Setenta y ocho..............	66	Ciento catorce	96
Setenta y nueve............	67	Ciento quince...............	97
Ochenta......................	68	Ciento diez y seis..........	98
Ochenta y uno...............	69	Ciento diez y siete.........	99
Ochenta y dos................	6a	Ciento diez y ocho..........	9a
Ochenta y tres..............	6b	Ciento diez y nueve.........	9b
Ochenta y cuatro............	70	Ciento veinte...............	a0
Ochenta y cinco.............	71	Ciento veinte y uno.........	a1
Ochenta y seis..............	72	Ciente veinte y dos.........	a2
Ochenta y siete.............	73	Ciento veinte y tres........	a3
Ochenta y ocho	74	Ciento veinte y cuatro......	a4
Ochenta y nueve............	75	Ciento veinte y cinco.......	a5
Noventa......................	76	Ciento veinte y seis........	a6
Noventa y uno...............	77	Ciento veinte y siete.......	a7
Noventa y dos	78	Ciento veinte y ocho........	a8
Noventa y tres.	79	Ciento veinte y nueve	a9
Noventa y cuatro............	7a	Ciento treinta...............	aa
Noventa y cinco.............	7b	Ciento treinta y uno.........	ab
Noventa y seis.	80	Ciento treinta y dos.........	b0
Noventa y siete.............	81	Ciento treinta y tres........	b1
Noventa y ocho	82	Ciento treinta y cuatro......	b2
Noventa y nueve............	83	Ciento treinta y cinco.......	b3
Ciento.......................	84	Ciento treinta y seis........	b4
Ciento uno..................	85	Ciento treinta y siete.......	b5
Ciento dos..................	86	Ciento treinta y ocho........	b6
Ciento tres..................	87	Ciento treinta y nueve.......	b7
Ciento cuatro...............	88	Ciento cuarenta..............	b8
Ciento cinco	89	Ciento cuarenta y uno.......	b9
Ciento seis..................	8a	Ciento cuarenta y dos	ba
Ciento siete.................	8b	Ciento cuarenta y tres	bb
Ciento ocho.................	90	Ciento cuarenta y cuatro.....	100

RESUMEN.

¿Cuántas cifras tiene el sistema duodecimal?

Doce: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, y la cifra locativa 0.

¿Cuál es el convenio del sistema?

Un 1 colocado á la izquierda ó cualquiera otra de las cifras significativas vale doce veces más que la igual contigua ó supuesta á la derecha.

APÈNDICE GENERAL Á LAS LECCIONES V Á XV

En toda lista de números consecutivos empezados á contar desde el uno, resulta lo siguiente, según el sistema de numeración que se adopte:

La primera columna de la lista, ó sea la columna de las protoenas, está formada por series repetidas de los dígitos de que consta el sistema, colocadas ordenadamente unas bajo otras. Así en el sistema *cuaternario* sólo se ven los dígitos del sistema unos bajo otros........................

La segunda columna, ó sea la de las deutenas, contiene los mismos dígitos, pero cada uno repetido tantas veces como cifras tiene el sistema. Así, en el mismo *cuaternario*, bajo 4 unos hay 4 doses; bajo estos 4 doses hay 4 treses; y bajo los 4 treses siguen 4 ceros, y así sucesivamente..............................

En la tercera columna, esto es, en la de las trienas, se repite cada dígito la segunda potencia del número de las cifras;

En la cuarta columna se repiten la tercera potencia;

En la quinta, la cuarta potencia... y así sucesivamente; de modo que en la columna de las trienas del sistema *cuaternario*, bajo 16 unos hay 16 doses; bajo estos doses, 16 treses; y bajo estos treses, 16 ceros, y así continuamente;

En la columna de las tetraenas, bajo 64 unos hay 64 doses; bajo los 64 doses vienen 64 treses; y bajo los 64 treses se colocan 64 ceros, etc., etc.;

	1
	2
	3
	0
	1
	2
	3
	0
1	1
1	2
1	3
1	0
2	1
2	2
2	3
2	0
3	1
3	2
3	3
3	0
0	1
0	2
0	3
0	0
&	&

La primera serie de los 4 unos, 4 doses y 4 treses de la columna de las deutenas empieza frente al primer cero de la columna de las protoenas; la primera serie de los 16 unos, 16 doses y 16 treses empieza frente á los dos ceros contiguos de las dos primeras columnas, la de las protoenas y la de las deutenas;

La primera serie de los 64 unos, 64 doses y 64 treses empieza frente á los tres primeros ceros de las tres columnas de las protoenas, deutenas y trienas;

Etc., etc.

Y así en todos los sistemas de numeración escrita. (Véanse.)

APÉNDICE ESPECIAL Á LA LECCIÓN V

El sistema binario parece haber sido usado por los chinos. Un jesuíta de Pekín comunicó á *Leibnitz* los siguientes símbolos chinos, llamados por ellos la *cova* ó lineación, atribuída á *Fohi*, fundador del imperio. La *cova* está en los templos de China y es tenida por un misterio.

cero	1	cero	1	cero	1	cero	1
cero	cero	1	1	cero	cero	1	1
cero	cero	cero	cero	1	1	1	1

Las dos líneas cortas significan *cero*.

La línea larga representa el *uno*.

Expresados estos símbolos conforme á nuestro convenio binario, resultará:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111;
tres ceros, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

Estos números se leen en chino de abajo arriba.

Por consiguiente, estos símbolos son equivalentes de los que en el sistema decimal se llaman el 0, el 1, el 2, el 3, el 4, el 5, el 6 y el 7.

Leibnitz asegura que existe otra *cova* que llega hasta 63. Pero no hay ningún otro testimonio de ello; de modo que solamente puede decirse que hay algún fundamento para creer que los chinos desde hace muchos miles de años tenían idea del signo locativo, y, por consiguiente, de la aritmética de posición.

LECCIÓN XVI

Composición de los guarismos por razón de su forma escrita.—Análisis del guarismo, nó del número.

La forma escrita es la condición del cálculo.

Una vez adquiridas las ideas de uno y de pluralidad y además las de grados de la pluralidad, las operaciones todas de la Aritmética dependen de la escritura.

Sin la pluma no es posible calcular (1).

El hombre no hace cálculos hablando, sino escribiendo.

El poder de la palabra queda aquí subordinado al poder de la escritura (2).

Los ojos y la mano son los sentidos del cálculo; nó los oídos y la boca.

A excepción del primer grado de la escala de la pluralidad, todos los números son conjuntos ó agregados del 1.

Dos es igual á uno, más uno.

$$(1+1=2)$$

Tres es igual á uno, más uno, más uno.

$$(1+1+1=3)$$

---

(1) No se olviden las *tarjas* andaluzas, los *quipus* peruanos, etc.; para las *mortajas* se necesitan nó plumas, sino *navajas;* para los encerados, tizas, etc.

(2) No se olvide el aparato de calcular inventado por el ciego.
Ni tampoco se olvide que hay máquinas notabilísimas de calcular usadas en los observatorios astronómicos, oficinas de estadística, etc., etc.

Cuatro, á uno, más uno, más uno, más uno.

$$(1 + 1 + 1 + 1 = 4)$$

Y así sucesivamente.

Pero los números pueden mirarse como conjuntos de conjuntos, ó agregaciones cualesquiera de sumandos (1).

Mas, desde el momento en que estos grados se consideran formados por grupos cualesquiera de sumandos, resulta ser inmenso el número de combinaciones con que se puede llegar á cada grado.

Esta composición puede ser *regular* ó *irregular*. Y la importancia de esta última es de tal naturaleza, que á ella hay que concederle sección aparte: la del sumar.

Pero hay una *composición característica* de los guarismos, sin cuyo conocimiento no se puede dar un paso en la ciencia de la Aritmética.

Esta composición es aquella que íntimamente depende de la *forma* escrita; es decir, del convenio que sirve de base á la expresión del NÚMERO por medio del GUARISMO.

En efecto:

Adoptado un sistema de numeración ¿cuál es la esencia, el fondo, lo general de cuanto queda expuesto acerca de la forma escrita?

Lo esencial es la composición de grupos ó conjuntos ajustados á cierta ley de generación; nó *ad libitum* y caprichosamente, sino de un modo especial, regular y escalonado ascendentemente; de tal modo que cada deutena valga más que una protoena, lo mismo que una triena vale más que una deutena, ó que una tetraena vale más que una triena, etcétera, etc., etc. (En una palabra, todo sistema ha de estar escalonado por potencias.)

Analicemos este modo de agrupación en un sistema cualquiera: en el quinario, por ejemplo.

En este sistema, colocamos solamente en el primer lugar

(1) Recuérdese que se llama sumando todo número que agregado á otro ú otros contribuye á la formación de un grado cualquiera de la escala de la pluralidad.

(además del 1) el 2, el 3, ó el 4: es decir, cualquiera de los pequeños conjuntos de *unos* que pueden formarse antes de llegar al quinto grado de la escala de la pluralidad; pues en cuanto tenemos que escribir el quinto grado (ó sea el cinco) ya nos es forzoso (por no haber en el sistema más que cuatro trazos ó cifras), pasar al lugar destinado á las deutenas; y en este segundo lugar tenemos que seguir escribiendo, mientras los grados de la escala de la pluralidad no lleguen á cinco deutenas (ó cinco grupos de á cinco); porque en cuanto tenemos ya cinco grupos de á cinco (ó sea veinte y cinco) ya nos es forzoso trasladarnos al lugar de las trienas, hasta llegar á cinco grupos de á veinte y cinco (ó sea ciento veinte y cinco), en cuyo caso ocupamos el lugar de las tetraenas... y así sucesivamente.

Ponemos, pues, además del 1, en el primer lugar:

el 2..............................	PROTOENAS.
el 3..............................	
el 4..............................	

Ponemos en el segundo lugar:

ó bien 1 conjunto de á cinco..........	DEUTENAS.
ó bien 2 conjuntos de á cinco..........	
ó bien 3 conjuntos de á cinco..........	
ó bien 4 conjuntos de á cinco..........	

Ponemos en el tercer lugar:

ó bien 1 conjunto de 5 cincos.........	TRIENAS.
ó bien 2 conjuntos de 5 cincos.........	
ó bien 3 conjuntos de 5 cincos.........	
ó bien 4 conjuntos de 5 cincos.........	

Y, así sucesivamente, con los grupos de á ciento veinte y cinco *unos* (tetraenas), ó de seiscientos veinte y cinco *unos* (pentaenas)... etc.

Por manera que, dado un grado de la escala de la pluralidad y admitiendo todavía que tenemos que expresarlo por escrito en el sistema quinario, empezaremos por averiguar cuál es la combinación más alta que ese *número* contiene de *grupos de á cinco;*
ó bien de *grupos de á cinco veces cinco;*
ó bien de *grupos de á cinco veces cinco por cinco;*
ó bien de *grupos de á cinco veces cinco por cinco y por cinco;*
etcétera, etc.; esto es, empezaremos por averiguar cuál es el

número mayor de... pentaenas, tetraenas, trienas, deutenas ó protoenas que contiene el número dado en el sistema quinario; ó lo que es lo mismo, cuál es el número de... quintas potencias, de cuartas potencias, de terceras, de segundas, de primeras que contiene el número.

Ejecutado esto, por ejemplo, con el número cincuenta y ocho, hallaremos que este grado de la escala está formado en el sistema quinario:

Por 2 grupos de á cinco cincos........ (ó sea 2×5^2)
Por 1 grupo de á cinco.............. (ó sea 1×5^1)
Por 1 grupo de á tres............... (ó sea 3×5^0)

por lo cual habremos de escribir ese número en el sistema quinario dándole la forma de

213;

y, he aquí cómo el *cincuenta y ocho* POR RAZÓN DE SU FORMA ESCRITA (Ó NOTACIÓN) EN EL SISTEMA QUINARIO se compondrá forzosamente de los tres sumandos siguientes:

200; dos trienas.
\+ 10; una deutena.
\+ 3; y tres protoenas.

$$213 = (2 \times 25) + (1 \times 5) + (3) = (2 \times 5^2) + (1 \times 5^1) + (3 \times 5^0)$$

descomposición capital, *á causa de la notación ó forma del guarismo*, del grado cincuenta y ocho de la escala de la pluralidad en el sistema quinario.

Pero si trabajásemos en el sistema decimal ese mismo NÚMERO se descompondría en la siguiente suma de solos dos sumandos:

50 ; cinco decenas ó grupos de á diez.
\+ 8 ; ocho unos.

$$58 = (5 \times 10) + (8) = (5 \times 10^1) + (8 \times 10^0)$$

Y, si escribiésemos el mismo grado de la pluralidad 58 en otros sistemas de los estudiados hasta ahora, obtendríamos agrupaciones como las siguientes:

Binario

$$\left.\begin{array}{rl} 100\,000 & ;\ 1 \text{ hexaena, ó grupo de treinta y dos.} \\ 10\,000 & ;\ 1 \text{ pentaena, ó grupo de diez y seis.} \\ 1\,000 & ;\ 1 \text{ tetraena, ó grupo de ocho.} \\ 10 & ;\ 1 \text{ deutena, ó grupo de dos.} \\ \hline 111\,010 & = 32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 0 \\ & = (1\times 2^5)+(1\times 2^4)+(1\times 2^3)+(0\times 2^2)+(1\times 2^1)+(0\times 2^0) \end{array}\right.$$

Ternario

$$\left.\begin{array}{rl} 2\,000 & ;\ 2 \text{ tetraenas, ó 2 grupos de veinte y siete.} \\ 10 & ;\ 1 \text{ deutena, ó 1 grupo de tres.} \\ 1 & ;\ 1 \text{ protoena, ó sea uno.} \\ \hline 2\,011 & = (2\times 27) + 0 + (1\times 3) + 1 \\ & = (2\times 3^3) + (0\times 3^2) + (1\times 3^1) + (1\times 3^0) \end{array}\right.$$

Cuaternario

$$\left.\begin{array}{rl} 300 & ;\ 3 \text{ trienas, ó 3 grupos de diez y seis.} \\ 20 & ;\ 2 \text{ deutenas, ó 2 grupos de á cuatro.} \\ 2 & ;\ 2 \text{ protoenas, ó 1 grupo de dos.} \\ \hline 322 & = (3\times 16) + (2\times 4) + 2 \\ & = (3\times 4^2) + (2\times 4^1) + (2\times 4^0) \end{array}\right.$$

Siempre es posible este género de descomposiciones en sumandos escalonados por productos de potencias; esto es, escalonados conforme al convenio de los sistemas de numeración; por ser un caso particular de una propiedad general tan importante como evidente; á saber:

Todo NÚMERO contiene á otro más pequeño cierto número de veces

exactamente
ó con sobrante.

Así el número 20 se puede dividir en 20 sumandos de á 1 sin sobrante:

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

ó bien en 10 sumandos de á 2, también sin sobrante:

$$\begin{array}{l}(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1) \\ = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2\end{array}$$

ó en 6 secciones de á 3, con un sobrante de á 2

$$\begin{array}{l}(1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)+[1+1] \\ = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2\end{array}$$

ó bien en 4 de á 5 sin sobrante

$$\begin{array}{l}(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1 \\ = 5 + 5 + 5 + 5\end{array}$$

ó bien en 3 sumandos de á 6, con un sobrante de 2

$$= \underbrace{(1+1+1+1+1+1)}_{6} + \underbrace{(1+1+1+1+1+1)}_{6} + \underbrace{(1+1+1+1+1+1)}_{6} + \underbrace{[1+1]}_{2}$$

ó bien en 2 secciones de á 7, con un sobrante de 6.

$$= \underbrace{(1+1+1+1+1+1+1)}_{7} + \underbrace{(1+1+1+1+1+1+1)}_{7} + \underbrace{(1+1+1+1+1+1)}_{6}$$

Etc., etc., etc.

Por consiguiente:

Dado un grado cualquiera de la escala de la pluralidad, este número contendrá

exactamente
ó con sobrante

alguna de las agrupaciones regular y normalmente escalonadas (por productos de potencias), constitutivas de los sumandos de los sistemas de numeración: esto es; contendrá

exactamente
ó con sobrante

protoenas, ó deutenas, ó trienas, ó tetraenas, ó pentaenas, etcétera.

Es decir, en el sistema quinario,

conjuntos de á cinco;
ó de á cinco por cinco (5^2);
ó de á cinco por cinco y por cinco (5^3)...

ó bien, si operamos en el septenario,

conjuntos de á siete;
ó de á siete por siete (7^2);
ó de á siete por siete y por siete (7^3)...

ó bien, si calculamos en el decimal,

conjuntos de dieces;
ó de dieces por diez (10^2);
ó de dieces por diez y por diez (10^3);

Y así de los demás sistemas.

Si el grado de la escala dado, contiene

exactamente

un número dígito de dodecaenas, undecaenas, decaenas, etc...

se escribirá ese dígito seguido de los ceros correspondientes; pero, si no contiene exactamente, sino

con sobrante

alguna de las altas agrupaciones regulares (dodecaenas, undecaenas, decaenas, eneaenas, etc...), entonces, después de escribir el dígito de dodecaenas, undecaenas... que quepan en el número, averiguaremos del mismo modo si el sobrante contiene á su vez

exactamente
ó con sobrante

alguna de las agrupaciones inferiores... Y así procederemos sucesivamente siempre que nos resulten sobrantes, hasta llegar á las protoenas ó cifras del primer lugar.

De aquí resultan las dos importantes proposiciones siguientes:

1.ª Todo grado de la escala de la pluralidad, por razón de su forma escrita, se descompone en tantos sumandos cuantas sean las cifras con que el número está escrito (1).

Y 2.ª Cada sumando consta de un dígito seguido de tantos ceros como cifras tenga el dígito á su derecha.

Hagamos, por tanto, aplicaciones.

En el sistema decimal el guarismo trescientos cuarenta y ocho

348

se descompone en los tres sumandos

$$\begin{array}{r} 300 \\ +\ 40 \\ +\ \ 8 \\ \hline 348 \end{array}$$

cada uno de los cuales contiene un dígito (esto es, una cifra significativa, bien sólo, ó bien seguido de tantos ceros como cifras resulten á la derecha).

(1) Se exceptúan los ceros.

En el mismo sistema decimal

394 856

se descompone, como sigue, en 6 sumandos:

$$\begin{array}{rr} & 300\,000 \\ + & 90\,000 \\ + & 4\,000 \\ + & 800 \\ + & 50 \\ + & 6 \\ \hline & 394\,856 \end{array}$$

En el sistema quinario el guarismo

342

(que vale tanto como 97 en el sistema decimal) se descompondrá en los sumandos siguientes:

$$\begin{array}{rrl} & 300 & = \text{setenta y cinco} \\ + & 40 & = \text{veinte} \\ + & 2 & = \text{dos}\,. \\ \hline & 342 & = \text{noventa y siete} \end{array}$$

En el sistema duodecimal el guarismo

124

(que corresponde al 172 del sistema decimal) se subdividirá en los tres términos siguientes:

$$\begin{array}{rrl} & 100 & = \text{ciento cuarenta y cuatro} \\ + & 20 & = \text{veinte y cuatro} \\ + & 4 & = \text{cuatro} \\ \hline & 124 & = \text{ciento setenta y dos} \end{array}$$

Y así respectivamente de los demás sistemas.

De donde resulta el enunciado que sigue:

Un sólo y mismo grado de la escala de la pluralidad, se descompone por causa de la NOTACIÓN, en sumandos, que son diferentes de un sistema de numeración á otro.

Por consiguiente:

Todos los sistemas de numeración son métodos de formación de sumandos, generados conforme al convenio de que cada dígito valga en la izquierda más que inmediatamente á la derecha tanto cuantas cifras hubiere (en el respectivo sistema de numeración):

Ó bien:

Todo guarismo es:

1.° Una suma de tantos sumandos como cifras significativas hubiere en el guarismo;

2.° Estos sumandos aparecen escritos de mayor á menor, empezando por la izquierda;

3.° Cada sumando es un producto de dos factores;

4.° Un factor es uno de los dígitos;

5.° Y el otro factor es una potencia del número de cifras del sistema de numeración en que se opere.

Los antiguos griegos temieron que su sistema de numeración escrita pudiera no permitirles algún día escribir todos los números posibles, y á remediar esta deficiencia consagraron su inventiva hombres de tanto genio como Arquímedes y Apolonio.

A nosotros los modernos no puede molestarnos semejante preocupación.

Nuestro admirable sistema de numeración escrita bastará siempre para todas nuestras necesidades aritméticas; porque con él podremos siempre simbolizar todos los números posibles, aun cuando no nos sea dable formarnos idea adecuada ni concepto siquiera aproximado de lo que representan nuestros guarismos de gran número de cifras (1).

RESUMEN.

¿Cómo se descomponen los números por razón de su forma escrita?

En sumandos.

¿En cuántos?

En tantos cuantos dígitos tenga el guarismo. (Se exceptúan, pues, los ceros.)

¿Cuánto vale cada sumando?

(1) Véase el Apéndice de esta Lección.

Lo que valga cada dígito seguido de tantos ceros como cifras hubiere á su derecha. (Se incluye la locativa.)

¿Esta clase de descomposición es dependiente del número ó del guarismo?

Lo es del guarismo, no del número; pero el número admite siempre las descomposiciones del guarismo.

¿Luego siempre es posible?

Sí.

¿Por qué?

Porque todo número contiene á otro MENOR cierto número de veces, exactamente ó con sobrante.

¿Luego los sumandos que por razón de su forma escrita integran un número, son diferentes de un sistema á otro?

Evidentemente.

¿Qué es, pues, todo guarismo?

Una suma, cuyos sumandos se ajustan á las reglas de los sistemas de numeración.

¿Y qué es todo sistema de numeración?

Un método de formación de sumandos ajustados á la ley de la notación.

APÉNDICE.

No cabe dar razón de los fenómenos más familiares sin recurrir á guarismos de gran número de cifras, de cuyo valor aritmético, sin embargo, no podemos jamás formar concepto ni aproximado siquiera.

De un lado, necesidad de grandes guarismos; de otro, imposibilidad de concebirlos.

Evidenciar en estilo jocoso este doble inconveniente de los cómputos es el objeto de los artículos titulados *Los billones* y *Los glóbulos de la sangre*, insertos en una obra mía publicada con el título de *En el umbral de la Ciencia*. Hé aquí lo principal de esos artículos, cuyo tono festivo tal vez contribuya á dar amenidad á nuestras graves lucubraciones numéricas, no reñida ciertamente con la seriedad científica, según lo han demostrado cien y cien veces cuantos autores han escrito de «Recreaciones aritméticas».

LOS BILLONES

—¡Quién fuera millonario!—oímos decir con suma frecuencia á los que apenas tienen, porque los millonarios no lo dicen. Y, sin embargo, todos somos BILLONARIOS.

¡Verdaderamente somos billonarios!

En la sangre existen unos globulillos tan diminutos, que

en un milímetro cúbico caben nada menos que cuatro millones. Se entiende, si la sangre es de hombre, pues si fuera de camello cabrían hasta 10 millones; y si de cabra, 18. La corpulencia del animal no tiene nada que ver con la finura ni la densidad de la sangre.

Todos saben que existen esos glóbulos; pero ¡qué pocos los han visto! ¡Cuán pocos se imaginan su exigüidad! ¿Quién su número?

Pero en este siglo de los portentos, no ha querido Mr. de Malassez que el problema quedara sin solución, y, por medio de un tubo capilar achatado, y de un microscopio cuyo ocular se hallaba dividido en retículas de dimensiones conocidas, ha llegado á contar con perfecta exactitud el número de esos seres misteriosos.

Suponiendo que el hombre encierre en su organismo hasta 12 litros y medio de sangre; como cada litro contiene un millón de milímetros cúbicos, y como cada milímetro cúbico encierra cuatro millones de glóbulos, resulta que en el hombre hay

$$12\,{}^{1}/_{2} \times 1\,000\,000 \times 4\,000\,000$$
$$= 50\,000\,000\,000\,000$$

—¡Cincuenta billones de glóbulos!

—Pero, ¿qué es un billón?

A cada instante de nuestra existencia tenemos que habérnoslas con BILLONES. Somos billonarios y ¡nadie sabe lo que es un billón!

—¡Hombre! No. Un billón es la unidad seguida de doce ceros:

1 000 000 000 000

¡Ya!

Pero es el caso que ese guarismo representa una noción tan obscura, que solamente recurriendo á espacios de tiempo considerables y á ficciones extravagantes de la imaginación es como podemos empezar á asombrarnos de lo que eso es. Una veterana revista inglesa, *Nautical Magazine,* demuestra que si se hubiese encomendado á DUENDES muy listos é industriosos la tarea de construír gotas de agua, encargando á cada operario el colocar en el orden conveniente un millón de moléculas por segundo de tiempo, sin serle nunca permitido pararse, ni descansar, ni dormir... cada uno de los tales duendes necesitaría 10 millones de años para terminar una gotita de la capacidad de un milímetro cúbico, y cinco billones de años para llenar una botella de medio litro de capacidad.

Yo me acuerdo de que, estando en la escuela—hace ya bastantes semanas—un ayudante me hacía escribir cantidades de 20 y 30 cifras—¡tantas cuantas en la pizarra cabían!—

y yo me quedaba como unas castañuelas de alegre y satisfecho cuando, sin tropezar, leía un guarismo que empezaba, v. gr.: 241 000 trillones... ¡Pobre de mí! ¡Qué ajeno me hallaba yo entonces de sospechar que no estaba haciendo otra cosa que poner nombres á indescifrables enigmas!

¿Habrá alguien que se imagine saber lo que es UN BILLÓN?

Hace años corrió por los periódicos la graciosa computación siguiente, que, por su ingenio, no debe caer en el pozo del olvido.

Imaginemos una persona de lengua tan expedita y pronunciación tan clara, que pueda contar 100 números, según la serie de los números naturales, diciendo muy de prisa 1, 2, 3, 4, 5, 6... sin omitir nunca ninguno, ni pasar nada por alto. Imaginemos también—contra lo evidente—que siempre invierta el mismo tiempo que en pronunciar 1, 2, 3, 4, 5... en decir, por ejemplo, 27 891, 27 892, 27 893... y tendremos, que si en cada minuto dice 100 números, en cada hora dirá:

$$60 \times 100 = 6\,000.$$

Y en cada día

$$6\,000 \times 24 = 144\,000.$$

Pues admitamos que llegue cuotidianamente hasta 200 000. Entonces en cada año dirá

$$365 \times 200\,000 = 73 \text{ millones.}$$

Echemos por largo, que para todo da la viña, y concedámosle al año hasta 100 millones. Y, así, en 10 000 años llegará á

$$10\,000 \times 100 \text{ millones} = 1 \text{ BILLON.}$$

Y ahora entra lo jocoso, que hasta este momento no había aparecido.

Entre los locos que andan sueltos porque no muerden, se hallan los fabricantes de eras y de cronologías. Según la cuenta de algunos buenos de estos señores, no hace 8 000 años todavía de la creación del mundo; por manera que, si nuestro padre Adán no se hubiese muerto aún, y jamás se hubiera ocupado más que en decir números sin saltar nunca ninguno, y sin comer, ni dormir, ni descansar, ni distraerse en ocasión ninguna ni por ningún motivo—ni aun por la tentación de la manzana,—todavía necesitaría más de 2 000 años para llegar á decir un millón de millones, ó sea UN BILLON. ¡La unidad seguida de doce ceros!

1 000 000 000 000

Hay un modo raro de contar en que no se cuenta, y sin embargo, se mide. El habituado á las grandes reuniones dice sin equivocación al entrar en un teatro muy concurrido: «Hoy hay más gente que anoche» (ó menos, según). Y, aunque el inteligente no se equivoque, claro es que este modo de computar no satisfaría á ninguna empresa, y de ahí lo necesario de una buena contabilidad.

Un cantante reproduce sin error la escala de las orquestas y, si lo hace con toda exactitud, su garganta ha de ejecutar precisamente:

para el *do*	522	vibraciones	por segundo.
para el *re*	567 $^1/_4$	»	»
para el *mi*	652 $^1/_2$	»	»
para el *fa*	696	»	»
para el *sol*	783	»	»
para el *la*	870	»	»
para el *si*	986 $^1/_4$	»	»

Si el cantante produce más ó menos vibraciones por segundo, los oídos inteligentes notan en seguida que se ha subido, ó se ha bajado; y los instrumentos de los físicos cuentan exactamente el número de vibraciones en que consistió la falta ó el exceso.

Así, pues, la sensación del *la* de las orquestas no es simplemente el conocimiento general de que fuera hay MOVIMIENTO, VIBRACIONES, sino el conocimiento concreto de que el número de vibraciones es ¡cosa admirable! de 870 cada segundo; es decir, que cuando de fuera conmueven mi oído 870 pulsaciones, digo que oigo un *la:* si lo conmueven 783, digo que oigo un *sol;* si 522, un *do;* si 696, un *fa,* etc. Verdaderamente el oído no cuenta, pero siente el batallón de pulsaciones como conjunto; y sabe apreciar perfectamente cuándo ese conjunto es la mitad ó el doble que otro conjunto de pulsaciones precedente ó siguiente; ó bien los $^4/_3$ ó bien los $^3/_2$, etc.; al modo con que podemos decir que un talego de monedas pesa la mitad, ó el doble, ó el tercio que otro, sin necesidad de conocer el número exacto de monedas contenidas en ninguno de los dos. La RELACIÓN, pues, puede sernos perfectamente perceptible, siendo del todo desconocidos los números absolutos sobre que recae el juicio en que la relación se apoya.

Pues, COMO FUERA DE NOSOTROS los fenómenos de la luz son pulsaciones del éter, sucede con nuestros juicios referentes á ellas lo mismo que con las referentes al sonido. El ojo distingue las relaciones existentes entre ellas, y las llama, según los casos,

violeta,	amarillo,
índigo,	naranjado y
azul,	rojo.
verde,	

Pero, así como los físicos de la acústica no se han contentado con el conocimiento de conjuntos y relaciones que dejaba satisfechos á los músicos, antes bien, por muchos métodos distintos han contado las vibraciones correspondientes á cada nota musical, del mismo modo los físicos de la óptica no se han contentado con el conocimiento que del colorido tienen los grandes poetas de la pintura; antes bien, por muchos métodos distintos han contado las vibraciones de la luz correspondientes á cada color, y se han encontrado con que las undulaciones etéreas son, no ya centenares ni millares como para el sonido, sino siempre considerable número de BILLONES.

Sigamos.

Todos, de niños, hemos andado detrás de la cocinera hasta obtener un poco de agua de jabón en una jícara, regularmente sin asa (en los experimentos de física debe resplandecer la economía). Antes nos habíamos procurado un canuto de caña, abierto por sus dos extremos á costa de algunos arañazos y de unos cuantos millones de glóbulos de sangre; que la letra con sangre entra, y no se cogen truchas sin remojo. Pues, provistos de tan complicados aparatos científicos, nos hemos puesto al balcón, no sin enredar en sus hierros los pies; y allí hemos estado haciendo pompas de colores, y llenando de agua de jabón á los transeuntes, hasta agotar el contenido de la jícara, que siempre tenía fin antes que nuestras ansias de soplar. ¡Válanos Dios, y qué poco sabíamos entonces que estábamos *haciendo ciencia* por todo lo alto!

La película de la pompa de colores no se rompe mientras tiene el grueso de una cienmilésima de milímetro. Los ópticos y los geómetras lo demuestran, y no hay más que creerlo. Con agua pura no pueden formarse pompas de colores; pero, agregando al agua su centésima parte de jabón, ya adquiere el líquido la viscosidad necesaria para el entretenido experimento.

Supongamos que haya una sola molécula de jabón en la película de la pompa de colores al tiempo de romperse, y claro es que esta molécula será la

$$\frac{1}{100} \text{ parte de } \frac{1}{100000} \text{ de milímetro;}$$

de manera que en un milímetro líneal podrían colocarse en fila, cuando menos, 10 millones de moléculas de jabón; y en el milímetro cúbico cabrían

$$10\,000\,000^3 = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

la unidad seguida de 21 ceros.

¡MIL TRILLONES de moléculas de jabón!

¡Oh, tú, sabio pasante, que en la escuela me hacías hacer aquellos endemoniados ejercicios de lengua á la pizarra, tanto mayores y primorosos cuanta más larga era ésta! ¿Qué sería de mí ahora sin tu previsora gimnasia? Yo te estoy sumamente re...co...no...cido...

Pero ¿de qué? ¿Sé yo acaso lo que es un trillón?

Después de bien reflexionado todo, te retiro mi explosión de gratitud.

La molécula de jabón no es un cuerpo simple; antes bien, resulta soberanamente complicado. En la cutícula de mis pompas de colores había ciertamente al desgarrárse

- jabón compuesto de..
  - sosa, compuesta de.....
    - sodio
    - oxígeno
  - ácido esteárico, de......
    - carbono
    - hidrógeno
    - oxígeno
  - ácido margárico, de.....
    - carbono
    - hidrógeno
    - oxígeno
  - ácido oleico, de.........
    - carbono
    - hidrógeno
    - oxígeno
- y agua, de..........
  - hidrógeno
  - oxígeno.

¿Qué tamaño debemos asignar á los componentes de sodio, carbono, hidrógeno y oxígeno? Si antes teníamos trillones, ¿qué nos saldrían ahora?

En virtud de atendibles consideraciones, estiman los que creen en las moléculas que en un milímetro lineal caben en fila 100 millones; de modo que el milímetro cúbico debe contener (no hay que asustarse)

un cuatrillón
1 000 000 000 000 000 000 000 000

¡la unidad seguida de 24 ceros!

¡Y estábamos hablando de billones! ¡Un billón! ¡Bah! ¡Qué insignificancia! No me vuelva Ud. á hablar más de billones en todos los días de su vida.

¿Sí? Pues, por dar á usted gusto, tijeretas han de ser.

Las cosas no son lo que parecen.

Una aguja penetra hacia el interior de mi epidermis: fuera, MOVIMIENTO: en mi conciencia, DOLOR: lo que en mí pasa no es lo mismo que en la aguja: á la aguja nada le DUELE.

Una cuerda de una guitarra vibra, es decir, está animada de rapidísimos movimientos de vaivén, que veo con los ojos, que siento con mis manos; si en la cuerda pongo á caballo una tira de papel doblada, el improvisado jinete es despedido irremediablemente y va al suelo. Fuera, MOVIMIENTO: en mi conciencia, sensación de SONIDO: yo oigo: la cuerda no oye. Lo que en mí pasa, no es lo mismo que en la cuerda.

Una flor despide menudísimas partículas aromáticas, que bombardean mi órgano olfatorio. Fuera, MOVIMIENTO: en mí, sensación agradable de aroma: en la flor no hay tal agrado.

El éter vibra, como el aire, ó análogamente. En verdad, nadie ha visto esas vibraciones, como se ven las del sonido; pero con los ojos de la inteligencia no podemos negar nuestro asentimiento á la teoría de la undulación. Fuera, excursiones de vaivén del éter; es decir, MOVIMIENTO; en mí, sensación de LUZ y de COLOR.

Hé aquí los clásicos números de Fresnel.

El total de vibraciones durante un segundo es

para el rojo....	=	497 000 000 000 000
» naranjado.	=	528 000 000 000 000
» amarillo...	=	559 000 000 000 000
» verde.....	=	601 000 000 000 000
» azul......	=	648 000 000 000 000
» índigo....	=	686 000 000 000 000
» violeta....	=	728 000 000 000 000

Así, cuando 497 billones de sacudimientos vibratorios del éter impresionan por segundo nuestra retina, decimos que vemos ROJO, cuando 528 billones, amarillo... etc.

Los fenómenos naturales no podrían explicarse suponiendo solamente diminutísimas las moléculas gaseosas; hay, además, que imaginarlas dotadas de movimientos enormes, vibratorios y translaticios; y diferentes para diferentes gases. Según los cálculos de Clausius, las moléculas del hidrógeno se mueven con una celeridad de 1 844 metros por segundo. La velocidad de un tren de ferrocarril es de 15 solamente: la de los últimos proyectiles de los cañones es de 700. Calcúlase que el libre trayecto de una de estas moléculas, en el estado común gaseoso, es como unas 5 000 veces el diámetro de la molécula misma: y que el número de choques de una molécula de oxígeno con sus compañeras, debe ser de 7 646 millones por segundo. La tensión de los fluídos gaseosos es la compleja resultante de los choques de esos corpúsculos gaseosos contra las paredes de los vasos que los contienen. En un cilindro de vapor, la presión contra el émbolo es la suma de los choques que de las moléculas recibe: si se dobla en el mismo cilindro el número de corpúsculos gaseosos, recibirá el émbolo, en el mismo tiempo que antes, doble número de golpes, etc.

Ahora bien: en un recipiente lleno de abejas, éstas no podrán apenas moverse; pero si se las va extrayendo hasta que en el vaso queden muy pocas, estas pocas no se estorbarán mutuamente tanto como antes, sino que ya podrán volar con celeridad suma y golpear con gran violencia las paredes que las retienen encerradas.

Esto es lo que ha hecho Crookes con las moléculas gaseosas en sus famosos tubos. Por medio de una bomba pneumática especial hace el vacío en esos tubos hasta una millonésima de atmósfera; redúcese así asombrosamente el número de los antes inevitables choques; la trayectoria libre de cada molécula es, por lo tanto, muy larga y rectilínea; y, entonces, ayudando la acción eléctrica, aparecen fenómenos de LUZ, de CALOR y de MOVIMIENTO, que confirman sorprendentemente las ideas admitidas acerca, no sólo de la pequeñez de las moléculas, sino de la prodigiosa energía de sus veloces movimientos.

Todo cuerpo constantemente golpeado, se calienta. Pues en los tubos de Crookes el bombardeo de las moléculas funde instantáneamente los metales, el platino inclusive; pone luminosas las paredes de los vidrios golpeados, y mueve ruedecitas de paletas construídas al efecto. Para estos fenómenos de luz y de fusión vuelven á aparecer, como condición imprescindible, los obscurísimos BILLONES.

Siempre, siempre estamos entre dos infinitos; el infinitamente grande de los espacios celestes, y el infinitamente pequeño de los diámetros y de las distancias moleculares.

Verdaderamente no tenemos ni aun idea de los números grandes.

Sabido es que en los Estados Unidos había en Tesorería en 1888 un sobrante de

150 millones de duros,

de que los yankees no sabían qué hacer. ¡Enorme suma sin empleo, insensatamente arrancada á la producción por el proteccionismo norte-americano! ¡Inútiles millones encerrados en las bóvedas de la Tesorería federal!

«¡Que me los traigan!»—oigo ya decir á alguno con las narices no tan largas como su codicia.—Pero ¡cuál no sería la sorpresa de este honrado codicioso, si le dijera alguna de aquellas fantásticas magas de los cuentos de niños: «Tuyos son, si cuentas en un año una á una las monedas».

A principios del año de 1888 fué necesario hacer el recuento de esos 150 millones de duros, y la tarea ocupó meses á veinte y cinco hombres expertos. Y cuenta que existían en billetes 25 millones de duros y que los peritos los contaban á razón de 5 000 billetes por hora. El oro no se contaba, sino que se computaba al peso. Los duros en plata también se contaban por sacos... La dificultad del recuento consistió en haber 10 millones en plata menuda, los cuales exigieron tres semanas... Si los 10 millones hubiesen estado todos en pesetas, un solo hombre habría necesitado tres años para contarlas.

Nó: nosotros, billonarios, no nos hacemos cargo de lo que es una cosa repetida un gran número de veces.—En los Estados Unidos ha inventado un constructor de cajas de hoja de lata un procedimiento para ahorrar una gota de soldadura en cada caja; y, como la máquina suelta botes por millares, el ahorro diario de estaño realiza una economía de 15 duros. Indudablemente, el pensar remunera. El salir de la rutina, paga bien.

Nó: no sabemos lo que son los grandes números. Para ayudar al concepto imaginativo, hubimos antes de recurrir á la idea de TIEMPO, y supusimos que nuestro padre Adán no se había muerto de fastidio contando

1 000 000 000 000

Pero es el caso que la idea de los *grandes tiempos* tampoco nos es concebible.

¿Qué es

1 000 000

de años? Parece que este numerillo (ya que tratamos de billones) debe ser una idea accesible á la imaginación.

Pues nó: traduzcamos ese TIEMPO en ESPACIO. Por ejemplo:

Supónese que algunas estrellas se hallan á tan enorme distancia de nosotros que su luz tarda en llegarnos un millón de años. ¡Bien pudiera suceder que en ese tiempo hubiese perecido el astro cuya luz nos hace el honor de entrar ahora por nuestros telescopios! Pero no pensemos en la muerte (que eso da ganas de llorar). Calculemos en kilómetros (que es lo que ahora hace al caso) la distancia á que se encuentra ese lejano sol, retirado filosóficamente allá en el abismo de los cielos. La luz camina á buen paso: 300 000 kilómetros por segundo, que no es poco correr (de aquí á los antípodas no hay más que 6 370). Pues un cálculo bien fácil nos hará ver que la distancia entre esa estrella y nosotros es de más de

9 millones de billones de kilómetros.
9 460 800 000 000 000 000 (1).

Y esto sin contar los días intercalares de los años bisiestos. ¿A qué? ¿No da lo mismo? ¿Quién se forma imagen ni concepto de semejante longitud?

Nó: nosotros BILLONARIOS ni aun imaginamos siquiera los grados algo creciditos de la escala de la pluralidad.

La cantidad pagada por Francia á Alemania, como indemnización de la guerra franco-prusiana de 1870, fué de 5 000 millones de francos. No llega ni con mucho á la quinta parte el número de minutos de la Era Cristiana hasta 1870 (2).

---

(1)

Un día tiene	24	horas.
cada hora	60	minutos.
	1440	
cada minuto	60	segundos.
	86400	
un año tiene	365	días.
	432000	
	518400	
	259200	
	31536000	
la luz anda por segundo	300000	kilómetros.
	9460800000000	
recorre, pues, en un millón de años	9460800000000000000	

¡Una friolera! 9 trillones y... un pico de billones!!

(2)

Un día tiene	24	horas.
	× 60	
Un día tiene	1440	minutos.
	365 ¼	
	7200	
	8640	
	4320	
	360	
Un año tiene	525960	minutos.
	1870	
	36817200	
	4207680	
	525960	
La Era Cristiana hasta 1870 tiene	983545200	minutos.

LECCIÓN XVII

Valor absoluto de las cifras. — Valor relativo. Valor correlativo.

En todo sistema, los primeros grados de la escala de la pluralidad se escriben con trazos ó cifras, que, en absoluto, y sin recurrir á convenio ninguno respecto á la significación locativa, tienen representación numérica, por no depender de ningún convenio la idea que simbolizan; y, así que se han agotado esas cifras destinadas al primer lugar (1), se recurre al convenio, en virtud del cual cada cifra colocada á la izquierda vale más de lo que valdría colocada en el inmediato lugar á la derecha, tantas veces cuantas cifras tiene el respectivo sistema de numeración.

(1) Los autores dicen «unidades de primer orden, unidades de segundo orden, unidades de tercero»..., etc.; pero ya hemos visto que la voz *unidad* tiene en matemáticas dos acepciones: 1.ª La de primer grado de la escala de la pluralidad. 2.ª La de módulo.

Si ahora se admite esa otra acepción, tendremos que:

3.ª Unidad significa también «cifra en determinado lugar».

Pero esta última acepción no es absoluta, puesto que depende del sistema de numeración adoptado; y, así, en el sistema decimal la idea de diez contiene *una «unidad»* (10) del segundo orden, mientras que en el sistema quinario contiene *dos* (20). En Aritmética pura no debería, pues, decirse *«unidad de tal orden»*, sino «cifra» *de tal orden*. Veremos que en la *«Aritmética modular»* podría tal vez pasar esa expresión en el sentido concreto de

«UNIDAD-MÓDULO».

Pero no es de esperar que la palabra unidad deje de emplearse en esta tercera acepción.

Por esto se dice que las cifras tienen dos valores:

uno absoluto,
y otro relativo (1).

El valor absoluto es el de cada cifra como *protoena*, independientemente de toda combinación locativa.

El valor relativo es el de cada cifra como deutena, ó triena, tetraena... esto es, el valor dependiente de la colocación respecto de las protoenas; ó, de otro modo, el valor relativo es el de cada cifra, como multiplicador ó coeficiente de alguna de las potencias del número de cifras que tenga el sistema de numeración.

Generalizando la idea dada en la Lección IV, diremos:

Llámanse dígitos aquellos grados de la escala de la pluralidad que se expresan por medio de una sola cifra en su valor absoluto.

Y llámase también «dígitos» á las cifras de cada sistema, exceptuando el cero.

Cada sistema de numeración tiene, pues, tantos «dígitos» como cifras significativas.

Así, el decimal, tiene nueve:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

El sistema undecimal, tiene diez:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9, a.

El duodecimal, once:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b.

El sistema quinario, tiene cuatro:

1, 2, 3, 4.

El binario, sólo tiene el

1.

(1) Los libros de Matemáticas dicen, con incorrección manifiesta, que los *números* tienen esos dos valores: absoluto y relativo. No son los *números*, sino las *cifras*: el valor de los números es invariable, porque cada número representa un grado de la escala de la pluralidad; ése y no otro.

Los demás guarismos de cada sistema se llaman «compuestos».

Si las deutenas valen más que las protoenas tantas veces como cifras tuviere un sistema, podemos decir, generalizando, por ejemplo, que las hexaenas son deutenas de las pentaenas, puesto que las hexaenas valen más que las pentaenas tantas veces como cifras tiene el sistema; y, llevando la generalización á su último límite, diremos que

En todo sistema una cifra cualquiera es deutena de la contigua colocada á la derecha.

Si las trienas valen más que las protoenas tantas veces como el número de cifras que tuviere el sistema, multiplicado por sí mismo (ó sea elevado á la segunda potencia), generalizando, diremos que

En todo sistema, cualquier cifra es triena de la que estuviere situada dos lugares á la derecha: por tanto, las dodecaenas son trienas de las decaenas: las heptaenas lo son de las pentaenas, y los millares son centenas de las decenas, etcétera, etc.

En general:

Son deutenas, trienas, tetraenas, pentaenas... correlativas (ó en segundo respecto) las cifras que distan de otras, lo que distan de las protoenas las deutenas, trienas, tetraenas, pentaenas... naturales.

Así las dodecaenas son pentaenas de las octoenas, los millones son millares de millar...

Y así sucesivamente.

RESUMEN

¿Qué valores pueden tener las cifras?

Tres: absoluto, relativo y correlativo. Es decir, valor independiente de todo convenio sistemático; valor locativo respecto de las protoenas; y valor jerárquico de un valor locativo respecto de otro locativo.

¿Cuál es el valor absoluto?

El de cada dígito independientemente de la posición locativa.

¿Cuál es el valor relativo?

El de cada dígito respecto de las protoenas, ó sea como multiplicador ó coeficiente de una potencia del número de cifras que tenga el sistema de numeración en que se opere.

¿Cuál es el valor correlativo?

El de las cifras de un orden respecto de las cifras de cualquier otro orden; de modo que se llaman deutenas, trienas... correlativas las cifras que distan de otras lo que las deutenas, trienas... naturales distan de las protoenas.

¿Qué és dígito?

El guarismo que se escribe con una sola cifra: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

¿Qué es guarismo compuesto?

El que se escribe con más de una cifra: 10, 11, 12..., 321, 480, 79 647, 6 000 000...

LECCIÓN XVIII

Doble lectura de los guarismos.—Reglas generales del decimal.

De lo expuesto en la lección anterior se deduce que hay varios modos de leer los guarismos. El siguiente del sistema decimal

5 431

se leerá, en general,

cinco mil cuatrocientos treinta y uno

y, en particular,

quinientas cuarenta y tres decenas, más uno

ó bien

cincuenta y cuatro centenas, más treinta y uno

ó

cincuenta y cuatro centenas, más tres decenas, más uno.

Leamos el siguiente guarismo del sistema decimal en todos los modos posibles

3 456 789

tres millones, cuatrocientos cincuenta y seis mil, setecientos ochenta y nueve

ó bien

trescientas cuarenta y cinco mil seiscientas setenta y ocho decenas, más nueve ó bien

treinta y cuatro mil quinientas sesenta y siete centenas y ochenta y nueve (ó sea ocho decenas y nueve, esto es, 80 + 9)

ó bien

tres mil cuatrocientos cincuenta y seis millares y setecientos ochenta y nueve (ó 3 456 millares, 7 centenas, 8 decenas y 9)

ó bien

trescientas cuarenta y cinco decenas de millar y seis mil setecientos ochenta y nueve (ó 6 millares, 7 centenas, 8 decenas y 9)

ó bien

treinta y cuatro centenas de millar y cincuenta y seis mil setecientos ochenta y nueve (ó 5 decenas de millar, 6 millares, 7 centenas, 8 decenas y 9), etc., etc.

Léanse de todos los modos posibles los siguientes guarismos del sistema decimal

2 444
347 896
34 870 476
97 670 005
147 678 905
23 456 789

En general, en el sistema decimal para leer un guarismo, se divide en períodos de á tres cifras de derecha á izquierda. El período extremo de la izquierda (por el cual empieza siempre la lectura) puede, pues, contener una, dos ó tres cifras. Los autores llaman al primer período de la derecha donde están las protoenas, deutenas y trienas, período de las unidades; al segundo, período de los millares; al tercero, período de los millones; al cuarto, período de los millares de millón; al quinto, período de los billones; al sexto, período de los miles de billón...

Cada dos de estos períodos forman lo que se llama sección, como sigue:

SECCIÓN DE LOS BILLONES		SECCIÓN DE LOS MILLONES		SECCIÓN DE LAS UNIDADES	
Período de los millares de billón.	Período de los billones.	Período de los millares de millón.	Período de los millones.	Período de los millares.	Período de las unidades.
8 3 5	9 2 4	6 7 1	8 6 2	4 7 9	5 3 8

Este guarismo se lee:

Ochocientos treinta y cinco mil	novecientos veinte y cuatro BILLONES	seiscientos setenta y un mil	ochocientos sesenta y dos MILLONES	cuatrocientos setenta y nueve mil	quinientos treinta y ocho.

Si hubiese habido otra sección de seis cifras á la izquierda, se habría llamado

sección de los trillones;

y si otra aún,

sección de los cuatrillones;

y así sucesivamente, cada sección hacia la izquierda,

quintillones,
sextillones,
septillones,
octillones,
nonillones,
decillones,
undecillones,
dodecillones...

Muchas personas hacen escribir una coma ó un punto entre el período de los millares y el período de las unidades, y un sub-uno, un sub-dos, un sub-tres, en vez de la coma ó del punto al final de la sección de los millones, de la de los billones, de la de los trillones... como sigue:

34_4 $567{,}876_3$ $456{,}667_2$ $438{,}916_1$ $994{,}567$

ó bien

34_4 567.876_3 456.667_2 438.916_1 994.567

Este guarismo se lee en el sistema decimal:

Treinta y cuatro cuatrillones,
quinientos sesenta y siete mil ochocientos setenta y seis trillones,
cuatrocientos cincuenta y seis mil seiscientos sesenta y siete billones,
cuatrocientos treinta y ocho mil novecientos dieciséis millones,
novecientos noventa y cuatro mil quinientos sesenta y siete.

No es de aconsejar el uso de la coma ó del punto ni el de los subdígitos; porque, sobre no ser ordinariamente necesarios, pueden inducir á error, confundiendo un guarismo natural con los llamados quebrados decimales (de que se hablará en la Aritmética modular). Hoy está proscrito el uso de tales índices.

Lo que sí debe hacerse es escribir cada sección de seis cifras algo apartada de la inmediata, y cada período de tres cifras, algo separado de su compañero dentro de cada sección, como sigue:

34 567 876 456 667 438 916 994 567

Cuando el guarismo pasa de billones, pueden, sin inconveniente, indicarse las secciones y los períodos, señalando un punto sobre la última cifra de cada período:

$$3\dot{4}\ 56\dot{7}\ 87\dot{6}\ 45\dot{6}\ 66\dot{7}\ 43\dot{8}\ 91\dot{6}\ 99\dot{4}\ 567$$

Hay quienes duplican ó triplican... los puntos en la última cifra de los billones, trillones...

$$3\ddddot{4}\ 56\dot{7}\ 87\dddot{6}\ 45\dot{6}\ 66\ddot{7}\ 43\dot{8}\ 91\dot{6}\ 99\dot{4}\ 567$$

Hay también quienes proceden como sigue:

$$3\dot{4}\ 557\ 87\dot{6}\ 456\ 66\dot{7}\ 438\ 91\dot{6}\ 994\ 567$$

ó bien

$$3\overset{4}{4}\ 56\dot{7}\ 87\overset{3}{6}\ 45\dot{6}\ 66\overset{2}{7}\ 53\dot{8}\ 91\overset{1}{6}\ 99\dot{4}\ 567$$

Ninguno de estos recursos y otros análogos es de censurar, atendiendo á que los índices de secciones y períodos señalados sobre las cifras no pueden inducir en error.

Los ingleses, alemanes, norteamericanos y muchos italianos leen los guarismos como nosotros; pero los franceses siguen otro método en cuanto el guarismo pasa de nueve cifras.

Así,

931 744 384

se lee del mismo modo por franceses, ingleses, alemanes... y españoles; pero, en teniendo el guarismo diez cifras ó más, ya hay variación, y, por cierto, capital.

Hé aquí el sistema francés.

Cada período de 3 cifras tiene nombre diferente:

Período de los quintillones	Período de los cuatrillones.	Período de los trillones.	Período de los billones.	Período de los millones.	Período de los millares.	Período de las unidades.
3 2 5	4 5 4	6 7 4	9 9 9	9 9 8	7 4 8	6 5 5

Que se lee

Trescientos veinte y cinco QUINTILLONES	cuatrocientos cincuenta y cuatro CUATRILLONES	seiscientos setenta y cuatro TRILLONES	novecientos noventa y nueve BILLONES	novecientos noventa y ocho MILLONES	setecientos cuarenta y ocho MILLARES	seiscientos cincuenta y cinco.

De donde resulta que los trillones franceses corresponden á los billones de los ingleses, alemanes... y españoles; y nuestros trillones corresponden á los quintillones de los franceses, etc. (Véase el Apéndice de esta lección).

Análogamente á lo ya expuesto respecto del sistema decimal, todo guarismo de otro cualquier sistema puede leerse de varios modos.

Sea el guarismo

876432

de un sistema diferente del decimal, podrá leerse así

> ocho hexaenas, siete pentaenas, seis tetraenas, cuatro trienas, tres deutenas y dos protoenas (de tal sistema).

ó bien

> ocho pentaenas, siete tetraenas, seis trienas, cuatro deutenas, y tres protoenas de deutenas, más dos

ó bien

> ocho tetraenas, siete trienas, seis deutenas, y cuatro protoenas de trienas, más tres deutenas, más dos protoenas.
> Etc., etc., etc.

(Véase el Apéndice de esta lección).

RESUMEN

¿Cómo se leen los guarismos?

De un modo general con referencia á las protoenas, y de otros varios modos cuando conviene expresar los valores de las cifras superiores con referencia á otras inferiores, pero siempre superiores á las protoenas.

¿Cómo se dividen los guarismos para su lectura?

Los ingleses, los alemanes, los norteamericanos... y nosotros los españoles los dividimos en secciones de á seis cifras y subdividimos cada sección en períodos de á tres cifras.

Los franceses dividen los guarismos solamente en períodos de á tres cifras.

¿Qué nombre damos á cada sección de á seis cifras, empezando por la derecha, en el sistema decimal?

Unidades,
millones,
billones,
trillones,
cuatrillones,
quintillones,
etc.

¿Cómo se llama cada uno de los dos períodos que componen una sección?

El de la izquierda en cada sección toma el nombre de período de los millares, y el de la derecha toma el mismo nombre que da á conocer cada sección. Ejemplos: Período de los millares de billón y período de los billones; período de los millares de millón y período de los millones; período de los millares y período de las unidades.

¿Se dividen los guarismos del mismo modo por los franceses que por los ingleses, alemanes... y españoles?

No. Los franceses dividen los guarismos por períodos de á tres cifras, y á cada período dan nombre distinto.

¿Cómo?

Conforme á los dos ejempos siguientes:

SISTEMA ESPAÑOL

346 000 000 000 000 000 000
= trescientos cuarenta y seis trillones.

SISTEMA FRANCÉS

346 000 000 000 000 000 000
= trescientos cuarenta y seis quintillones.

APÉNDICE

Los franceses leían antiguamente sus guarismos lo mismo que nosotros los españoles, dividiéndolos en secciones de á seis cifras, y cada sección en dos períodos de á tres. Hé aquí la autoridad que trae LITTRÉ:

Billion.—Hist. XVI^{e}s.—Ung billion vault mille milliers de millions, EST. DE LA ROCHE. *Arismetique,* f° 7. L'on peut diviser les figures de six en six, en commençant toujours à dextre et sus la premiere figure d'une chescune sixiesme, la premiere exceptée, l'on peult metre ung petit point; et doit on savoir que toutes les figures, depuis le premier point jusques au second, si tant en y a, sont tous millions; et du second au tiers sont millions de millions; et du tiers au quart sont millions de millions de millions; et ainsi des aultres pointz, en proferant ce vocable million autant de fois comme il y aura de pointz; ou, qui veult, le premier point peult signifier million, le second point billion, le tiers point trillion, le quart quadrillion, etc.

El mismo LITTRÉ dice luego:

Billion.—ETIMOLOGÍA.—Palabra formada por el modelo de millón, con *bi* en lugar de *bis,* para indicar el grado superior inmediato al de millón. Estas formas, *billón, trillón,* etc., fueron creadas en el siglo XVI para significar secciones de seis en seis cifras. Así, contando de derecha á izquierda, las seis primeras cifras representan la sección de las unidades; las cifras desde el 7.° orden al 12.°, ambos inclusive, forman la sección de los millones; las cifras del 13.° al 18.°, representan los billones... y así sucesivamente. Por esta razón dice EST. DE LA ROCHE, que un billón vale mil millares de millones. Hasta mediados del siglo XVII no se dispuso que las divisiones, en lugar de practicarse de seis en seis cifras, fuesen de tres en tres cifras, de donde resultó dividido por 1000 el antiguo billón, el antiguo trillón, etc. Este nuevo modo de contar tardó en ser admitido en Inglaterra, puesto que LOCKE, *Essai sur l'entendement humain,* II, 16, echa en cara á sus compatriotas el no poder contar los guarismos superiores sino repitiendo siempre el nombre de millón.»

WEBSTER en su *Diccionario inglés* dice al artículo *Billion:* palabra formada arbitrariamente del latín *bis, dos veces,* y del bajo-latín *millio*... Según el método francés de numerar, significa mil millones, 1 000 000 000; y, conforme al método inglés, un millón de millones, ó bien 1 000 000 000 000.

El mismo WEBSTER en el artículo *Numeración*, dice:

En nuestro actual sistema de numeración se ha decidido por los autores emplear las palabras unidad, decena, centena, millar, millón, billón, trillón, cuatrillón, quintillón, sextillón, septillón, etc. Puro anhelo ó lujo de exposición en la mayor parte de los casos; porque los términos billón, trillón, etcétera, aunque definidos por los tratadistas de Aritmética, no tienen nunca aplicación en el uso corriente, y nunca hay necesidad de emplear cantidades tan considerables (1). A propósito de esto, dice TONSTAL, que en su tiempo (Enrique VIII), el cálculo común por millones pasaba luego á millones de millones, etc... y RECORDE no usa más que el vocablo *millón* repetido; de manera que parece que los billones ú otros guarismos de orden más elevado nunca fueron otra cosa sino mera fantasía de los autores de Aritmética. La probabilidad de esto aumenta por su distinto valor en diferentes naciones. En Inglaterra, el billón es un millón de millones; un trillón, un millón de billones... y cada nueva denominación es un millón de veces la que le precede. La palabra billón, según el sistema de numeración francés, vale un millar de millones 1 000 000 000 (2); según el sistema inglés, un millón de millones, á saber: 1 000 000 000 000.

Sin embargo de lo manifestado por WEBSTER, parece que en Inglaterra están en uso ambos sistemas de leer guarismos. Algunos autores modernos de Aritmética (JACKSON entre otros) llaman al sistema francés de dividir los guarismos en períodos de tres cifras, *el sistema breve (the short system)*; y al otro, el de dividirlos por secciones de seis cifras, formada cada una de dos períodos de á tres, *el sistema largo (the long system)*.

Y JACKSON agrega que el primer modo es el más adecuado para leer los guarismos de pocas cifras, y el segundo, para leer los de muchas.

Véase el cuadro siguiente:

(1) Si se trata de *libras* y *peniques* esto es cierto. Pero no lo es, evidentemente, cuando se trata de las undulaciones de la luz, de la distancia de las estrellas, etc., etc.

(2) En el Diccionario de LITTRÉ se encuentra el artículo siguiente:

«MILLIARD. *s. m.* Mil veces un millón ó diez veces cien millones. Es sinónimo de billón.»

Los franceses, sin embargo, prefieren en la conversación y en la literatura corriente la voz *milliard* á la de *billion*: *un milliard entier: des milliards accumulés.*

SISTEMA LARGO

5.ª Sección. Cuatrillones	de cuatrillón	centenas de millar	9
		decenas de millar	3
		millares	2
		centenas	4
		decenas	6
		unidades	5
4.ª Sección. Trillones.	de trillón	centenas de millar	9
		decenas de millar	5
		millares	6
		centenas	0
		decenas	2
		unidades	4
3.ª Sección. Billones	de billón	centenas de millar	3
		decenas de millar	4
		millares	6
		centenas	8
		decenas	9
		unidades	0
2.ª Sección. Millones	de millón	centenas de millar	2
		decenas de millar	0
		millares	4
		centenas	5
		decenas	7
		unidades	6
1.ª Sección. Unidades.	de unidades	centenas de millar	8
		decenas de millar	9
		millares	7
		centenas	3
		decenas	2
		unidades	1

SISTEMA BREVE

10.º período. Octillones.	de octillón	centenas	9
		decenas	3
		unidades	2
9.º período. Septillones.	de septillón	centenas	4
		decenas	6
		unidades	5
8.º período. Sextillones.	de sextillón	centenas	9
		decenas	5
		unidades	6
7.º período. Quintillones.	de quintillón	centenas	0
		decenas	2
		unidades	4
6.º período. Cuatrillones.	de cuatrillón	centenas	3
		decenas	4
		unidades	6
5.º período. Trillones.	de trillón	centenas	8
		decenas	9
		unidades	0
4.º período. Billones.	de billón	centenas	2
		decenas	0
		unidades	4
3.er período. Millones.	de millón	centenas	5
		decenas	7
		unidades	6
2.º período. Millares.	de millar	centenas	8
		decenas	9
		unidades	7
1.er período. Unidades.	de unidades	centenas	3
		decenas	2
		unidades	1

LECCIÓN XIX

Valor de un dígito seguido de ceros.—Valor de las expresiones aritméticas formadas de varios dígitos iguales puestos á continuación unos de otros.

Sabemos que en las deutenas, trienas... el dígito es el coeficiente de una potencia del número de cifras del sistema correspondiente de numeración.

$$40 \text{ en el sistema decimal} = 4 \times 10^1 = 10 + 10 + 10 + 10$$

Esto, no obstante, importa mucho el análisis siguiente:

Por ejemplo:

40, en el sistema decimal, está formado por 10 sumandos iguales á 4:

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 40;$$

es decir, que la cifra significativa 4 del guarismo propuesto, puede formar el 40, si se repite el número de veces expresado por un 1 seguido de un cero.

En el sistema quinario se escribe el número 20 también con un 4 seguido de un cero; pues bien, el 4 deutenas del sistema quinario es igual á

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4;$$

es decir, que la cifra significativa con que se escribe veinte en el sistema quinario, expresará también dicho grado de la escala de la pluralidad, si se repite el número de veces que en el mismo sistema quinario vale un 1 seguido de un cero.

Generalizando, tendremos la importante proposición siguiente:

Todo número expresado por un dígito seguido de ceros es una suma de sumandos iguales al dígito, en la cual el dígito entra como sumando el número de veces que en cada sistema valga un 1 seguido de los ceros que tuviere el número propuesto.

Así, el guarismo del sistema decimal

384

divisible en

300 = 3 repetido 100 veces.
+ 80 = 8 repetido 10 veces.
+ 4 = 4 repetido 1 vez.

384

está compuesto:

1.° De un sumando 4

2.° De diez sumandos
8
8
8
8
8
8
8
8
8
8

Y 3.° De cien sumandos
3
3
3
3
3
etc.,
etc.

El guarismo del sistema quinario

342

divisible en

300 = tres triemas quinarias.
+ 40 = cuatro deutenas »
+ 2 = dos protoenas »

342

se compone:

1.°	De un sumando	2
2.°	De cinco sumandos	4 4 4 4 4
Y 3.°	De veintinco sumandos	3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

El guarismo del sistema ternario

212

divisible en

200	= dos trienas ternarias
+ 10	= una deutena »
+ 2	= dos protoenas
212	

es igual á los sumandos siguientes:

2
1
1
1
2
2
2
2
2
2
2
2
2

El guarismo del sistema binario

111

divisible en

$$\begin{array}{rl} 100 & = \text{una triena binaria} \\ +\ 10 & = \text{una deutena} \ \text{»} \\ +\ 1 & = \text{una protoena} \\ \hline 111 & \end{array}$$

es igual á los sumandos siguientes:

$$\begin{array}{l} 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right. \end{array}$$

y así de los demás sistemas.

De lo dicho es consecuencia inmediata que todo guarismo expresado por un dígito cualquiera, colocado á continuación de sí mismo cierto número de veces como

66, 222, 5 555, 99 999

está formado por la repetición del mismo dígito, como sumando, tantas veces como valga en el correspondiente sistema de numeración un guarismo formado sólo de unos, en igual número que cifras hubiere en el guarismo dado:

$$2222 = 2 \times 1111.$$

Por ejemplo:
en el sistema decimal el guarismo

888

se puede descomponer en los términos:

$$\begin{array}{r} 800 \\ +\ 80 \\ +\ 8 \\ \hline 888 \end{array}$$

ó lo que es lo mismo,

en el sumando	8	cien veces	$= 8 \times 10^2$
en el sumando	8	diez veces	$= 8 \times 10^1$
en el propio sumando	8	una vez	$= 8 \times 10^0$

ó, en último resultado, como si se repitiera el sumando 8 ciento once veces

$$8 \times 111.$$

En el sistema quinario el guarismo

4444

se descompone en

$$\begin{array}{rl} 4000 = & \text{cuatro tetraenas quinarias} \\ +\ 400 = & \text{cuatro trienas} \quad » \\ +\ 40 = & \text{cuatro deutenas} \quad » \\ +\ 4 = & \text{cuatro protoenas} \quad » \\ \hline 4444 & \end{array}$$

ó lo que es lo mismo,

en el sumando 4 repetido ciento veinte y cinco veces $= 4 \times 10^3$
en el sumando 4 repetido veinte y cinco veces $= 4 \times 10^2$
en el sumando 4 repetido cinco veces $= 4 \times 10^1$
y en el sumando 4 una vez $= 4 \times 10^0$

ó bien

el sumando 4 repetido el número de veces que en el mismo sistema quinario vale la expresión 1111; esto es:

$$\begin{array}{rl} 1000 = & \text{ciento y veinte y cinco} \\ +\ 100 = & \text{veinte y cinco} \\ +\ 10 = & \text{cinco} \\ +\ 1 = & \text{uno} \end{array}$$

en junto, ciento cincuenta y seis.

En el sistema ternario el guarismo

22 (que vale *ocho*)

es la suma siguiente: $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right. = 2 \times 11$

en que entra el 2 como sumando tantas veces como vale en el mismo sistema ternario el guarismo 11 (esto es, *cuatro*).

Y así de los demás sistemas.

RESUMEN

¿A qué es igual un guarismo escrito con un dígito seguido de ceros?

A una suma de tantos sumandos iguales al dígito, como exprese, en el correspondiente sistema, un 1 seguido de los ceros que hay en el guarismo propuesto.

¿A qué es igual cualquier guarismo?

A tantas sumas por el estilo de las anteriores como cifras significativas tuviere el guarismo.

¿A qué es igual una expresión formada por un dígito escrito á continuación de sí mismo cierto número de veces?

A una suma en que el dígito entra como sumando tantas veces como valga en el correspondiente sistema, una expresión formada por tantos unos como dígitos iguales hubiere.

LECCIÓN XX

De la cifra máxima de cada sistema.

¿Cuándo escribimos en cualquier sistema de numeración una deutena, es decir, la expresión representada por un 1 y un 0? ¿Cuándo escribimos 10?

Cuando tenemos que anotar por escrito aquel grado de la escala de la pluralidad inmediatamente superior al representado por la cifra más alta del sistema.

Así, en el decimal representamos con la expresión

10

el grado inmediato superior al 9, que es la cifra mayor del sistema de diez cifras.

Así, en el sistema octonario escribimos

10

cuando tenemos que expresar el grado ocho, que es el inmediato superior al 7, cifra máxima de dicho sistema.

Así, en el sistema de cinco cifras ponemos

10

cuando necesitamos escribir el cinco, grado inmediato superior al 4, cifra máxima del sistema quinario.

De modo que si

Z

representa, en general, la cifra mayor de cualquier sistema, tendremos que una deutena, ó sea 10, es siempre igual á Z más 1.

$$10 = Z + 1$$

Ahora bien:

¿Cuándo escribimos, sea cual fuere el sistema de numeración, la expresión representada por el 1 seguido de dos ceros, es decir, una triena, es decir, 100?

Cuando tenemos que expresar el grado inmediato superior al que represente la cifra máxima puesta una vez á continuación de sí misma.

Así, después de 99, escribimos 100 en el sistema decimal (10^2).

Así, después de 44 (veinticuatro) escribimos 100 (veinticinco) en el sistema quinario (5^2).

Así, después de 55 (treinta y cinco en el sistema de seis cifras) escribimos 100 (que significa treinta y seis en dicho sistema (6^2).

De modo que en cualquier sistema de numeración, una triena, ó sea 100, es igual á Z Z más 1.

$$100 = Z\,Z + 1 \text{ (1)}$$

¿Cuándo escribimos una tetraena, es decir,

$$1\,000,$$

es decir, un 1 y tres ceros, en los sistemas de numeración?

Cuando hemos escrito una expresión formada por tres ci-

---

(1) No se olvide nunca (Lec. V, nota) que en Aritmética la yuxtaposición significa SUMA (*y no* MULTIPLICACIÓN, como en Álgebra).

Así, pues, las expresiones

$$\begin{array}{r} Z + 1, \\ Z\,Z + 1, \\ Z\,Z\,Z + 1, \\ Z\,Z\,Z\,Z + 1... \end{array}$$

significan, aritméticamente consideradas,

$$\begin{array}{r} Z \text{ protoenas} + 1 \\ Z \text{ deutenas} + Z \text{ protoenas} + 1 \\ Z \text{ trienas} + Z \text{ deutenas} + Z \text{ protoenas} + 1 \\ Z \text{ tetraenas} + Z \text{ trienas} + Z \text{ deutenas} + Z \text{ protoenas} + 1 \end{array}$$

Ó sea, en el sistema decimal,

$$\begin{array}{rrr} 9 \text{ unidades} + 1 = & 9 + 1 = & 10 \\ 9 \text{ decenas} + 9 \text{ unidades} + 1 = & 99 + 1 = & 100 \\ 9 \text{ centenas} + 9 \text{ decenas} + 9 \text{ unidades} + 1 = & 999 + 1 = & 1\,000 \\ 9 \text{ millares} + 9 \text{ centenas} + 9 \text{ decenas} + 9 \text{ unidades} + 1 = & 9\,999 + 1 = & 10\,000 \end{array}$$

fras máximas del sistema; de suerte que siempre una tetraena, ó sea 1 000, es igual á Z Z Z más 1.

$$1\,000 = ZZZ + 1 \text{ (1)}$$

Así, después de haber anotado

$$444$$

(que significa en el sistema quinario ciento veinticuatro) escribimos el grado inmediato superior (que es ciento veinticinco) con la expresión

$$1\,000 \text{ (es decir, una tetraena)} = (5^3)$$

En general,

una pentaena, ó sea 10 000, es igual á Z Z Z Z + 1 (1)
una hexaena, ó sea 100 000, es igual á Z Z Z Z Z + 1 (1)
una heptaena, ó sea 1 000 000, es igual á Z Z Z Z Z Z + 1 (1)
una octaena, etc., etc.

De forma que, si se agrega un 1 á cualquier expresión escrita únicamente con la cifra máxima de un sistema, puesta varias veces á continuación de sí misma, obtendremos el grado inmediato superior de la escala de la pluralidad; el cual se escribirá en dicho sistema con un 1 seguido de tantos ceros como cifras máximas puestas á continuación unas de otras había en el guarismo; ó, lo que es idéntico, una potencia del número de cifras del sistema igual al número de ceros.

Por tanto, en el sistema decimal,

Diez	$10 = 9 + 1 = (10^1)$	Sistema decimal.
Ciento	$100 = 99 + 1 = (10^2)$	
Mil	$1\,000 = 999 + 1 = (10^3)$	
Diez mil	$10\,000 = 9\,999 + 1 = (10^4)$	
Cien mil	$100\,000 = 99\,999 + 1 = (10^5)$	
Un millón	$1\,000\,000 = 999\,999 + 1 = (10^6)$	

Cinco	$10 = 4 + 1 = (10^1)$	Sistema quinario.
Veinte y cinco	$100 = 44 + 1 = (10^2)$	
Ciento veinte y cinco	$1\,000 = 444 + 1 = (10^3)$	
Seiscientos veinte y cinco	$10\,000 = 4444 + 1 = (10^4)$	

Ocho	$10 = 7 + 1 = (10^1)$	Sistema octonario.
Sesenta y cuatro	$100 = 77 + 1 = (10^2)$	
Quinientos doce	$1\,000 = 777 + 1 = (10^3)$	
Cuatro mil noventa y seis	$10\,000 = 7777 + 1 = (10^4)$	

Doce	$10 = b + 1 = (10^1)$	Sistema duodecimal
Ciento cuarenta y cuatro	$100 = bb + 1 = (10^2)$	
Mil setecientos veinte y ocho	$1\,000 = bbb + 1 = (10^3)$	
Veinte mil setecientos treinta y seis	$10\,000 = bbbb + 1 = (10^4)$	

(1) Véase la nota de la página anterior.

Por consiguiente:

En el sistema decimal

$$\begin{array}{rl} 10 = \quad 9+1 = & (10^1) \\ +\,10 = +\,9+1 = + & (10^1) \\ \hline \end{array}$$

$$20 = \left(\begin{smallmatrix}2 \text{ veces} \\ \text{el } 9\end{smallmatrix}\right) + 2 = (2 \times 10^1) = (\text{al dígito} \times \text{por la } 1.^{\text{a}} \text{ potencia de } 10).$$

Luego 20 está compuesto de cierto número de veces el 9 (cifra máxima) más 2, que es la cifra significativa del 20.

Por tanto:

$$\begin{array}{rl} 10 = \quad 9+1 = & (10^1) \\ +\,10 = +\,9+1 = + & (10^1) \\ +\,10 = +\,9+1 = + & (10^1) \\ \hline \end{array}$$

$$30 = \left(\begin{smallmatrix}3 \text{ veces} \\ \text{el } 9\end{smallmatrix}\right) + 3 = (3 \times 10^1) = (\text{al dígito} \times \text{por la } 1.^{\text{a}} \text{ potencia del } 10).$$

Luego 30 está compuesto de cierto número de veces el 9, más la cifra significativa con que el guarismo está escrito.

Así:

$$\begin{array}{rl} 10 = \quad 9+1 = & (10^1) \\ +\,10 = +\,9+1 = + & (10^1) \\ +\,10 = +\,9+1 = + & (10^1) \\ +\,10 = +\,9+1 = + & (10^1) \\ +\,10 = +\,9+1 = + & (10^1) \\ \hline \end{array}$$

$$50 = \left(\begin{smallmatrix}5 \text{ veces} \\ \text{el } 9\end{smallmatrix}\right) + 5 = (5 \times 10^1) = (\text{al dígito} \times \text{por la } 1.^{\text{a}} \text{ potencia del } 10).$$

Luego 50 está formado por cierto número de veces el 9, más el dígito que entra en la representación del guarismo 50.

Pasemos ahora á números mayores: en el sistema decimal

$$100 = 99 + 1 = (10^2)$$

pero

$$99 = 90 + 9$$

pero

90 = á cierto número de veces la cifra máxima del sistema decimal

pero

9 = también á una vez dicha cifra máxima.

Luego

100

que es igual á 99 más 1,
es igual á cierto número de veces la cifra máxima + 1.

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} 100 &= 99 + 1 = (10^2) \\ + 100 &= + 99 + 1 = + (10^2) \\ + 100 &= + 99 + 1 = + (10^2) \end{aligned}$$

$$300 = \left(\begin{matrix}\text{cierto n.° de veces} \\ \text{el 9}\end{matrix}\right) + 3 = (3 \times \text{por la 2.ª potencia de 10}).$$

Luego 300 es igual á cierto número de veces la cifra máxima del sistema decimal, más el valor absoluto de la cifra significativa 3, que aparece en el guarismo 300.

Continuemos:

$$\begin{aligned} 1\,000 &= 999 + 1 \\ &= (900 + 90 + 9) + 1 \end{aligned}$$

pero

900 es igual á cierto número de veces la cifra máxima,

pero

90 es también igual á cierto número de veces dicha cifra;

pero

9 es la misma cifra.

Luego

999 es igual á cierto número de veces la cifra máxima,

luego

1 000, 2 000, 3 000,... 6 000, 7 000, etc.

son iguales á cierto número de veces la cifra máxima más el valor absoluto, ó no locativo de la cifra con la cual en cada caso se representa el guarismo en el sistema decimal.

Generalizando tendremos:

$$\begin{array}{rl} 10 = & (Z+1) \\ +\ 10 = & +(Z+1) \\ +\ 10 = & +(Z+1) \\ \hline 30 = & \left(\begin{smallmatrix}3 \text{ veces} \\ Z\end{smallmatrix}\right) + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 100 = & (ZZ+1) \\ +\ 100 = & +(ZZ+1) \\ +\ 100 = & +(ZZ+1) \\ +\ 100 = & +(ZZ+1) \\ \hline 400 = & \left(\begin{smallmatrix}\text{cierto n.}^\circ \text{ de veces} \\ Z\end{smallmatrix}\right) + 4 \end{array}$$

Etc., etc.

De donde resulta:

Que cualquier guarismo acabado en cero (esto es, desde una deutena en adelante) es igual á cierto número de veces la cifra máxima del respectivo sistema más el valor absoluto (ó no locativo) del dígito con el cual el guarismo se escribe.

Pasemos ahora á guarismos de cualquier clase.

Supongamos el guarismo del sistema decimal

4860

Este guarismo es igual

á cierto número de veces el 9, dígito máximo del sistema + 4 + 8 + 6.

porque ese guarismo se descompone en

4000
800
60

y sabemos que el

4000

está compuesto por cierto número de veces el 9, más 4;

el

800

por cierto número de veces el 9, más 8,

y el

60

por cierto número de veces el 9, más 6.

Luego todo guarismo acabado en un sólo cero es igual á una ó muchas veces el dígito mayor del sistema, más lo que sumen los dígitos con que el guarismo esté escrito.

Supongamos ahora que el guarismo NO acabe en un cero, y sea tal como 36. Este guarismo se descompone en

$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

El 30 (que acaba en un cero) es igual á cierto número de veces el 9 más 3: si á esto se agrega el 6, resultará que el 36 es igual á (cierto número de veces el 9) + (3 + 6), que son las cifras significativas con que el número está escrito; pero como 3 + 6 suman 9, diremos que el 36 está formado exactamente por cierto número de veces el 9.

Si en vez de 36 se nos hubiese dado 37, este guarismo estaría formado de (cierto número de veces el 9) + (3) + (7); pero 3 + 7 suman también otro nueve, con la excedencia de un uno,

Luego el 37 está formado por (cierto número de veces el 9) + (un excedente).

Pasemos á otro sistema.

Sea, por ejemplo, el guarismo

312

del sistema quinario: (vale 82 en el decimal).

En el sistema quinario el dígito mayor es

4.

Ese guarismo 312 es descomponible en

$$\begin{array}{r} 300 \\ +\ 10 \\ +\ 2 \\ \hline 312 \end{array}$$

El 300 (que vale 75 en el sistema decimal) es igual (á cierto número de veces el 4) + 3;

El 10 (que vale 5 en el sistema decimal) es igual (á cierto número de veces el 4) + 1.

Luego el número 312 es igual á

cierto número de veces el 4
+ 3 + 1 + 2;

pero como $(3+1+2)$ suman seis, esto es, $4+2$, diremos que el 312 del sistema quinario es igual á

cierto número de veces su dígito mayor 4
+ una excedencia de 2.

Luego, en general,

Todo guarismo está formado exactamente por repeticiones de la cifra máxima si se le rebaja el valor absoluto de sus cifras.

Pero con el valor absoluto de las cifras pueden ocurrir dos cosas:

1.° O bien forman una suma exacta de cifras máximas,

2.° O bien dejan un excedente.

En el primer caso, el guarismo todo está formado exactamente por repeticiones de la cifra máxima.

Y en el segundo caso, si se quita el excedente, resultará un número menor que el propuesto, pero también formado todo por repeticiones de la misma cifra máxima.

Luego todo número está formado por repeticiones de la cifra máxima

exactamente
ó con una excedencia menor que la misma cifra máxima.

Y, en caso de que haya excedente, ha de encontrarse la excedencia en la suma del valor absoluto (ó no locativo) de las cifras.

De lo dicho resulta, que

La diferencia entre dos guarismos escritos con idénticas cifras es siempre un múltiplo exacto de 9, sin excedencia ninguna.

Sean los guarismos 654 y 456 escritos con las mismas cifras: su diferencia 198 es una suma exacta de nueves.

En efecto:

$$654 = (\text{cierto número de veces el } 9) + (6+5+4)$$
$$456 = (\text{cierto número de veces el } 9) + (4+5+6)$$

Por consiguiente,

$$654 = (\text{cierto número de veces el } 9) + (9+6)$$
$$456 = (\text{cierto número de veces el } 9) + (9+6)$$

ó, lo que es lo mismo,

$$
\begin{array}{l}
654 = (\text{cierto número de veces el } 9) + 6 \\
456 = (\text{cierto número de veces el } 9) + 6
\end{array}
$$

Luego la diferencia será = (cierto número exacto de veces el 9) sin sobrante ninguno, porque el 6 de arriba se destruye con el de abajo, al obtener el resíduo.

Y efectivamente

198 es un múltiplo de 9

porque

$$
\begin{array}{rrl}
 & 100 = & (\text{cierto número de veces } 9) + 1 \\
+ & 90 = & (\text{cierto número de veces } 9) \\
+ & 8 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 8 \\
\hline
 & 198 = & (\text{cierto número de veces } 9) + (\text{otro cierto número de veces } 9) + \\
 & & (1 + 8) = 9
\end{array}
$$

Luego 198 = cierto número de veces nueve sin sobrante (1)

RESUMEN

¿A qué es igual todo guarismo?

A cierto número de veces la cifra máxima más el valor absoluto (nó locativo) de las cifras con que está escrito.

¿Cuándo es un guarismo una suma exacta de cifras máximas?

En general: cuando de cualquier guarismo se rebaja el valor absoluto de sus cifras.

Y, en particular, cuando la suma de las cifras es una suma exacta de cifras máximas.

¿Y qué sucede cuando la suma de las cifras no hace una suma exacta de cifras máximas?

Entonces el guarismo es una suma de cifras máximas, más un sobrante.

¿Cómo se llama á ese sobrante?

Excedencia ó excedente.

APÉNDICE

El *Dictionnaire des sciences mathématiques* de Montferrier trae traducido un trozo de la *Exposición de las raíces del cálculo y de la aritmética*, obra escrita por Avicena (Ibn

(1) Véase el Apéndice de esta Lección.

Sina), el más ilustre de los médicos árabes de *Oriente* (nació en 980 y murió en 1037). Este trozo (que también trae LAROUSSE) dice así:

«Has de tener en cuenta desde ahora para siempre, que todo número, sea el que sea, no es otra cosa que el número 9 ó su múltiplo, más un excedente, porque los números no se representan más que por nueve signos y además el punto (1), el cual no expresa ningún número. Si llegas á conocer este excedente y el multiplicador novenario, el número te será conocido.

»Todo múltiplo de nueve cuyas cifras sumes horizontalmente sin tener en cuenta su valor de posición, te ha de dar de modo forzoso el número 9, ya solo, ya extraído del total por la misma operación. Así:

18	nos	da	$1+8=9$
27	»	»	$2+7=9$
36	»	»	$3+6=9$
45	»	»	$4+5=9$, etc.

»Siempre que sumando en análoga forma las cifras de un número cualquiera, te encuentres con 9 como resultado de tu operación horizontal, puedes estar seguro de que el número es un múltiplo de 9; y, si no, después de extraído el 9, te quedará un sobrante variable entre *uno* y *ocho*.

»Todo número compuesto de signos (cifras) no repetidos cambia forzosamente de valor si se cambia ó altera el orden de los signos componentes. Pero has de saber que entre el primer número y los que puedan resultar del cambio de orden de los signos (cifras) componentes, no puede existir jamás otra diferencia que la de 9 ó un múltiplo de 9. Así:

En 12	cambiando	sus cifras	obtenemos	21	y la diferencia es	9
42	»	»	»	24	....	$18 = 2 \times 9$
85	»	»	»	58	....	$27 = 3 \times 9$
357	»	»	»	375	....	$18 = 2 \times 9$
				537	....	$180 = 20 \times 9$
				573	....	$216 = 24 \times 9$
				753	....	$396 = 44 \times 9$.»

AVICENA sabía, pues, no sólo que los guarismos están en el sistéma decimal formados por repeticiones del nueve con sobrante ó sin él, sino también que las diferencias de los guarismos escritos con las mismas cifras son siempre un múltiplo de 9.

---

(1) El punto significa aquí el cero. Primitivamente el cero, ó sea la cifra locativa, era un punto.

Y sabía asimismo que de esta propiedad pueden salir las pruebas llamadas del 9 para las cuatro principales operaciones aritméticas.

No era, pues, tan escaso, como algunos piensan, el saber aritmético de los persas y los árabes al finalizar el siglo x. Hoy la generalidad de los hombres de carrera ignoran lo que AVICENA y sus discípulos sabían hace ya nueve siglos.

LECCIÓN XXI

Número de cifras máximas de cada guarismo. Excedencias.

Si todo guarismo está formado

exactamente
ó con excedencia

por *cierto número de veces* la cifra máxima, ¿pudiera averiguarse con facilidad cuál es ese *número de veces?*

Sabemos que 9 es la cifra máxima del sistema decimal.

$$
\begin{array}{rll}
10 = & (9) & + \text{un excedente de } 1 \\
20 = & (9+9) & + \quad 2 \\
30 = & (9+9+9) & + \quad 3 \\
40 = & (9+9+9+9) & + \quad 4 \\
50 = & (9+9+9+9+9) & + \quad 5 \\
60 = & (9+9+9+9+9+9) & + \quad 6 \\
70 = & (9+9+9+9+9+9+9) & + \quad 7 \\
80 = & (9+9+9+9+9+9+9+9) & + \quad 8 \\
90 = & (9+9+9+9+9+9+9+9+9) & + \quad 9 \\
= & 9+9+9+9+9+9+9+9+9 & + \quad 9 \\
= & 10 \text{ veces } 9 & \\
99 = & 90+9 = (10 \text{ veces } 9)+9 = 11 \text{ veces } 9 & \\
100 = & (11 \text{ veces } 9)+1 &
\end{array}
$$

El análisis anterior nos demuestra que hay un momento en que la excedencia, siempre en aumento gradual, iguala á la cifra máxima, y entonces la excedencia se incorpora al número de veces que la cifra máxima se repite, y aumenta, por tanto, en una unidad ese número de veces, como acabamos de ver que sucede con el noventa, igual á 9 veces la cifra má-

xima, más un excedente igual á esta misma cifra; lo cual hace que también 90 sea igual á 10 veces el 9.

Y como de 90 á 100 va otra vez la cifra máxima, + 1, resulta que

$$100 = (11 \text{ veces } 9) + 1$$

Ahora bien, ¿puede este número de veces obtenerse mecánicamente?

Sí: procediendo del modo que sigue:

$$100 = \left\{ \begin{array}{rl} (10 \text{ veces } 9) & \text{ó sea } 90 \\ +(\ 1 \text{ vez } \ \ 9) & \text{ó sea } \ 9 \\ +1 & \text{ó sea } \ 1 \\ \hline (11 \text{ veces } 9) + 1 & = \ 100 = (10^2) \end{array} \right.$$

Generalizando, tendremos que

$$200 \ (\text{ó sea, } 2 \times (10^2)$$

tiene las cifras máximas y el sobrante que siguen:

$$200 = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rr} & 10 \text{ veces } 9 \\ + & 1 \text{ vez } \ \ 9 \\ & +1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{rr} & 10 \text{ veces } 9 \\ + & 1 \text{ vez } \ \ 9 \\ & +1 \end{array} \right. \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{rr} & 20 \text{ veces } 9 \\ + & 2 \text{ veces } 9 \\ & +2 \\ \hline & (22 \text{ veces } 9) + 2 \end{array} \right.$$

Por tanto, el número de cifras máximas de

$$300 \ (\text{ó sea, } 3 \times (10^2)$$

será

$$\begin{array}{rr} & 30 \text{ veces } 9 \\ + & 3 \text{ veces } 9 \\ & +3 \\ \hline & (33 \text{ veces } 9) + 3 \end{array}$$

Y el número de cifras máximas y él excedente necesario para componer

$$3\,000 \ (\text{ó sea, } 3 \times (10^3)$$

se obtendrán como sigue:

300 veces 9
30 veces 9
3 veces 9 + 3

(333 veces 9) + 3

Así, el número de cifras máximas y el excedente del guarismo del sistema decimal

40 000

serán

4 000 veces el 9
\+ 400 veces el 9
\+ 40 veces el 9
\+ 4 veces el 9
\+ 4

= (4 444 veces el 9) + 4

Así, el número de nueves y la excedencia contenidos en

50 000

serán

(5 555 nueves) + 5

Así, el número de nueves y la excedencia contenidos en

600 000

serán

(66 666 nueves) + 6

Así, el número de nueves y la excedencia contenidos en

8 000 000

serán

(888 888 nueves) + 8

Y, en general, el número de nueves y la excedencia contenidos en cualquier guarismo formado por un dígito seguido de ceros, será igual al mismo dígito puesto á continuación de sí mismo tantas veces como ceros hubiere en el guarismo, á lo que siempre habrá que agregar el valor absoluto del dígito, considerado como protoena.

500 000 000 = (al 5 puesto á continuación de sí mismo 8 veces por haber ocho ceros) + 5
= 55 555 555 veces el nueve) + 5
etc., etc.

Entendido ésto, fácil será saber el número de nueves y la excedencia contenidos en cualquier guarismo (no precisamente en los guarismos terminados en ceros).

¿Cuántos nueves hay y cuál es la excedencia en el guarismo decimal

543?

Este guarismo se descompone en

$$\begin{array}{r} 500 \\ +\ 40 \\ +\ \ 3 \\ \hline \end{array}$$

El 500 tiene tantos nueves como expresen dos cincos (por ser dos los ceros de 500) colocados á continuación uno de otro, + una excedencia de 5 protoenas

		Columnas de los nueves.		Excedencias.
	=	55 nueves	+	5
El 40, por no haber más que un cero, tiene	=	4 nueves	+	4
El 3 no contiene ningún nueve, pero constituye en la expresión total una excedencia	=		+	3

Examimando esta expresión, vemos que en las excedencias se encuentran de arriba hacia abajo, todas las cifras del guarismo propuesto 543;

Que la primera columna de los nueves (esto es, la de sus protoenas) contiene todas las cifras del 543 menos una: esto es, contiene las dos primeras cifras del guarismo: el 5 y el 4;

Y que la otra columna de los nueves (la de sus deutenas) contiene sólo la primera cifra (ó sea el 5).

Examinemos ahora el guarismo

7645

Este guarismo se descompone en:

		Columnas de los nueves.	Excedencias.
7000	=	777	+ 7
+ 600	=	66	+ 6
+ 40	=	4	+ 4
+ 5	=		+ 5

También aquí (como antes) la columna de las excedencias contiene, de arriba abajo, todas las cifras del guarismo propuesto: esto es, el 7, el 6, el 4 y el 5.

La primera columna de los nueves (la de sus protoenas) contiene todas las cifras del guarismo menos una (el 5, que ya está en la columna de excedencias); contiene el 7, el 6 y el 4: esto es, contiene las tres primeras del guarismo propuesto.

La segunda columna de los nueves (la de sus deutenas) contiene todas las cifras menos dos: contiene el 7 y el 6 (faltan el 4 y el 5 de la derecha del guarismo);

Y la tercera columna (la de las trienas) contiene todas las cifras menos las tres de la derecha; esto es, contiene sólo el 7 inicial, por faltar el 6, el 4 y el 5 de la derecha.

Sea ahora el guarismo del sistema decimal

8 765 436

descomponible como sigue:

	8 000 000 =	888 888	nueves	+ 8	de excedencia
+	700 000 =	77 777	»	+ 7	»
+	60 000 =	6 666	»	+ 6	»
+	5 000 =	555	»	+ 5	»
+	400 =	44	»	+ 4	»
+	30 =	3	»	+ 3	»
+	6 =			+ 6	»

Aquí también la columna de las excedencias contiene, de arriba á abajo, todas las siete cifras del guarismo propuesto 8, 7, 6, 5, 4, 3, 6.

La primera columna de los nueves (la de las protoenas), todas menos las de la derecha: sólo falta el 6;

La segunda columna de los nueves (la de las deutenas), todas menos las dos de la derecha: faltan el 3 y el 6;

La tercera columna de los nueves (la de las trienas), todas menos tres: faltan el 4, el 3 y el 6;

La cuarta columna de los nueves (la de las tetraenas), todas las cifras menos cuatro: faltan el 5, el 4, el 3 y el 6;

En la quinta columna de los nueves (la de las pentaenas) faltan cinco: que son el 6, el 5, el 4, el 3 y el 6;

Y en la sexta columna de los nueves, faltan seis cifras; que son: el 7, el 6, el 5, el 4, el 3 y el 6.

Realicemos ahora las operaciones antes indicadas.

543 =	55 nueves	+ 5	
+	4 »	+ 4	
		+ 3	

Si sumamos los nueves, tendremos:

543 = 55 nueves	+ 5	de excedencia
+ 4 »	+ 4	»
	+ 3	»

(59 nueves) + (5 + 4 + 3) de excedencias

Pero como estas excedencias dan á su vez otro nueve, con un sobrante de 3, habremos de agregar ese nueve de las excedencias al 59, suma anterior de nueves, lo que nos dará finalmente

(60 nueves) + 3 de sobrante.

Pero, según este modo de operar, no se obtiene de una vez el resultado; por lo cual, para lograrlo desde luego, se empezará computando antes de todo los nueves contenidos en las excedencias y agregando el número de nueves que resulte á la primera columna de los nueves.

Volvamos al segundo de los ejemplos anteriores:
¿Cuántos nueves hay en

7 645?

¿Cuál es la excedencia?
Formemos la correspondiente piña de descomposición:

7 645 = 777 nueves	+ 7	de excedencia.
+ 66 »	+ 6	»
+ 4 »	+ 4	»
	+ 5	»

849 nueves + 4, sobrante de las excedencias después de extraídos sus nueves,

y digamos:

$7+6+4+5$ de las excedencias $= 22$:
22 contiene dos nueves con un sobrante de 4.
Escribo el 4 en la columna de las excedencias y llevo 2 nueves á la suma de los nueves;

y sigo diciendo:

2 nueves de las excedencias $+ 7 + 6 + 4$ de la primera columna de los nueves $= 19$: escribo 9 debajo de esta primera columna y llevo 1 á la columna siguiente: y digo:
1 que llevaba $+ 7 + 6 = 14$; escribo 4 debajo de la segunda columna de nueves, y llevo 1, para agregar á la tercera columna de los nueves, y digo:
1 que llevaba más $7 = 8$; y escribo el 8.

Luego el guarismo del sistema decimal

7 645

es igual á

$$\begin{array}{l} (849 \text{ nueves}) + (4 \text{ unidades}) \text{ de excedencia} \\ = (849 \times 9) \quad + 4 = 7641 + 4 = 7645 \end{array}$$

Formemos la piña para el cálculo de los nueves y de la excedencia del guarismo

8 765 436

anteriormente estudiado, y tendremos:

$$\begin{array}{r} 888\,888 + 8 \\ 77\,777 + 7 \\ 6\,666 + 6 \\ 555 + 5 \\ 44 + 4 \\ 3 + 3 \\ + 6 \\ \hline 973\,937 + 3 \end{array}$$

y digo:

$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 6$ de las excedencias $= 39$;
$39 = 4$ nueves $+ 3$;
Pongo 3 en el sitio de las excedencias, y
Llevo 4 á la suma de los nueves;
Y en seguida sumo la piña de los nueves, según es uso sumar.

¿Cuántos nueves hay en 67 435, y cuál es la excedencia?
Respuesta: 7 492 nueves y un sobrante de 7 unidades.

$$\begin{array}{rcr} 6666 & + & 6 \\ 777 & + & 7 \\ 44 & + & 4 \\ 3 & + & 3 \\ & + & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\underset{\text{nueves}}{7492}\right) + \left(\underset{\text{unidades}}{7}\right) \text{ (1)}$$

Por manera que el guarismo

67 435

del sistema decimal está formado por

7 492 sumandos iguales á 9
\+ 7 unidades de excedencia.

¿Cuántos nueves hay en el guarismo

57 231

y cuál es la excedencia?

Excedencia, ninguna.
Nueves, 6 359.

¿Cuál es la excedencia y cuántos nueves hay en el guarismo

545 454?

Excedencia, ninguna.
Nueves, 60 606

Pero ahora ocurre preguntar:

¿No habría medio de encontrar el número de nueves de un guarismo, así como su excedencia, caso de haberla, sin necesidad de escribir piñas de agrupaciones como las que preceden?

En efecto: nada más fácil. No hay necesidad de escribir agrupación ninguna en piña.

Sea el guarismo

67 435

(1) Véase el Apéndice á esta Lección.

La columna de las excedencias contiene todas las cifras del guarismo que se nos ha propuesto

67 435

y, por cierto, en el mismo orden.

Luego, para hallar el sobrante de las excedencias, sumaremos el valor absoluto de las cifras del guarismo.

$$6 + 7 + 4 + 3 + 5;$$

deduciremos de esa suma el número de nueves en ella comprendido, y el sobrante que resulte (si lo hay) se escribirá como tal.

En el presente caso del guarismo 67 435, la suma es = 25; en la cual se comprenden 2 nueves con un sobrante de 7. Escribamos este siete.

$$\ldots . + 7$$

Sumemos ahora, con el 2 que indica los nueves hallados en las excedencias, todas las cifras del guarismo menos una, la de la derecha, y encontraremos

$$([2] + 6 + 7 + 4 + 3 = 22);$$

escribamos el 2 y reservemos 2 para seguir la suma según es uso; y tendremos

$$\ldots 2 + 7;$$

Sumemos el 2 de la reserva con las cifras del guarismo propuesto, menos las dos de la derecha

$$([2] + 6 + 7 + 4 = 19);$$

escribamos 9 y reservemos 1 para seguir sumando, y tendremos

$$..92 + 7$$

Agreguemos el 1 de la anterior reserva á las cifras del guarismo, menos las tres de la derecha, lo que nos dará

$$([1] + 6 + 7 = 14);$$

escribamos el 4 y reservemos 1 para continuar la suma, y resultará

$$.492 + 7$$

Y, por último, agreguemos el 1 de la reserva al 6 inicial, y el último resultado de la operación será

(7 492 nueves) + 7

De donde, generalizando, resulta:

1.° Para hallar en el sistema decimal el número de nueves (cifras máximas) de un guarismo, juntamente con el sobrante, si lo hay, se empieza por hallar en primer lugar el excedente, y para ello se suman las cifras por su valor absoluto; y el sobrante (después de DEDUCIR la cifra máxima *cuantas veces se pueda*) se escribe á la derecha precedido del signo +.

2.° El número de veces que la cifra máxima estaba contenida en las excedencias, se agrega como RESERVA á la suma de todas las cifras del guarismo, menos una (la de la derecha), lo cual dará las protoenas del número de veces que el 9 está contenido en el guarismo.

3.° Después, agregando la reserva (si la hubiere), se sumarán todas las cifras del guarismo, menos las dos últimas de la derecha, lo que dará las deutenas.

4.° En seguida, agregando la reserva (si la hubiere), se sumarán todas las cifras del guarismo dado, menos las tres últimas de la derecha, lo que dará las trienas...

5.° Y así sucesivamente, hasta terminar con todas las cifras del guarismo (sin alterar nunca el orden en que las cifras se encuentran colocadas en el guarismo propuesto).

Ejemplo:

¿Cuál es la excedencia y cuál el número de nueves del guarismo del sistema decimal

$$
\begin{array}{llr}
8\,934? = & 8+9+3+4 = 24 = & 2 \text{ de reserva} + 6 \\
& +[2]+8+9+3 = 22 = & 2 \text{ de reserva} + 2 \\
& +[2]+8+9 = 19 = & 1 \text{ de reserva} + 9 \\
& +[1]+9 = 9 = & +9 \\
\hline
& & 9\ \ 9\ \ 2+6
\end{array}
$$

1.° Excedencia:

$8+9+3+4=24$; de donde, excluyendo el 9 cuantas veces se pueda (que son 2 veces), nos resultará un excedente de 6 y una reserva de 2.

2.° Número de nueves:

2 (de la reserva) + 8 + 9 + 3 = 22 = 2 decenas (que reservo) y 2 unidades que escribo.

2 (decenas reservadas) + 8 + 9 = 19 = 1 centena (que reservo) y 9 decenas que escribo.

1 (centena reservada) + 8 = 9 centenas;

de modo que el guarismo

8 934

está compuesto de

992 veces el nueve, + una excedencia de 6.

¿Cuántos nueves forman el guarismo 64 687 del sistema decimal? ¿Cuál es la excedencia?

Respuesta:

Excedencia = 4
Número de nueves = 7 187

¿Cuántos cuatros y cuál es la excedencia del guarismo 3 223 del sistema quinario?

Respuesta:

Excedencia	= 2 =	3 + 2 + 2 + 3 = 2 de res. + 2
Número de cuatros = 414		+ [2] + 3 + 2 + 2 = 1 de res. + 4
		+ [1] + 3 + 2 = 1 de res. + 1
		+ [1] + 3 = 4
		4 1 4 + 2

De lo expuesto resulta que toda potencia del número de cifras que tiene un sistema, es igual á una expresión de tantos unos como unidades tiene el exponente de la potencia, multiplicados por la cifra máxima correspondiente, y además 1 (multiplicados por 9 en el sistema decimal: por 4 en el quinario, etc.):

(1) Claro es que los que sepan partir podrán hallar el número de nueves, de onces, de cincos, etc., dividiendo. Pero siempre resultará que la investigación del número de cifras máximas por medio de la suma ha de ser *más fácil* que por medio de la división.

Además de esto, la división no da á conocer la composición del guarismo, mientras que la suma lleva la ventaja de que hace desde luego comprender dicha composición.

SISTEMA DECIMAL.

1.ª pot.ª de 10, ó sea	10; 10^1=(	1 × 9)+ 1; un	1, porque el exp. es 1.
2.ª pot.ª de 10, ó sea	100; 10^2=(	11 × 9)+ 1; dos	1, porque el exp. es 2.
3.ª pot.ª de 10, ó sea	1 000; 10^3=(	111 × 9)+ 1; tres	1, porque el exp. es 3.
4.ª pot.ª de 10, ó sea	10 000; 10^4=(	1 111 × 9)+ 1; cuatro	1, porque el exp. es 4.
5.ª pot.ª de 10, ó sea	100 000; 10^5=(	11 111 × 9)+ 1; cinco	1, porque el exp. es 5.
6.ª pot.ª de 10, ó sea	1 000 000; 10^6=(	111 111 × 9)+ 1; seis	1, porque el exp. es 6.
7.ª pot.ª de 10, ó sea	10 000 000; 10^7=(	1 111 111 × 9)+ 1; siete	1, porque el exp. es 7.

SISTEMA QUINARIO.

1.ª pot.ª de 5, ó sea nuestro	5; 10^1 = (	1 × 4) + 1
2.ª pot.ª de 5, ó sea nuestro	25; 10^2 = (	11 × 4) + 1
3.ª pot.ª de 5, ó sea nuestro	125; 10^3 = (	111 × 4) + 1
4.ª pot.ª de 5, ó sea nuestro	625; 10^4 = (	1 111 × 4) + 1
5.ª pot.ª de 5, ó sea nuestro	3 125; 10^5 = (	11 111 × 4) + 1
6.ª pot.ª de 5, ó sea nuestro	15 625; 10^6 = (	111 111 × 4) + 1

RESUMEN

¿Se puede saber de un modo fácil y como si dijéramos mecánico cuál es el número de cifras máximas de un guarismo?

Sí:

¿Cómo?

Si no hay excedencias, sumando todas las cifras menos una, de izquierda á derecha, lo que dará las protoenas: sumando, según es uso, todas las cifras menos dos, lo que dará las deutenas: sumando todas las cifras menos tres, lo que dará las trienas... etcétera.

A las protoenas hay que agregar el número de nueves (cifras máximas) que den las excedencias si las hay.

¿Y para hallar el excedente hay algo nuevo que ejecutar?

No: lo manifestado en la Lección anterior.

¿A qué es igual una potencia cualquiera del número de cifras de un sistema?

APÉNDICE

Las piñas de agrupaciones formadas para hallar el número de cifras máximas darán el mismo resultado si se escriben todas las cifras del guarismo en un renglón, y debajo un lugar hacia la derecha, todas las dichas cifras menos una, y luego dos lugares á la derecha todas menos dos, y luego tres lugares á la derecha todas menos tres... como sigue:

¿Cuántos nueves hay en

7 817?

Método normal.	Método equivalente.
777 + 7	781 + 7
88 + 8	78 + 1
1 + 1	7 + 8
+ 7	+ 7
868 + 5	868 + 5

¿Cuántos nueves hay en el guarismo

7 893 456 786?

Método normal.	Método equivalente.
777777777 + 7	789345678 + 6
88888888 + 8	78934567 + 8
9999999 + 9	7893456 + 7
333333 + 3	789345 + 6
44444 + 4	78934 + 5
5555 + 5	7893 + 4
666 + 6	789 + 3
77 + 7	78 + 9
8 + 8	7 + 8
+ 6	+ 7
877050754 + 0	877050754 + 0

Es de evidencia que el resultado ha de ser idéntico por ambos procedimientos, puesto que, por el *método equivalente*, cada columna contiene de abajo arriba las mismas cifras que aparecen de arriba abajo por el *método normal*.

ARITMÉTICA PURA

LIBRO II

INTEGRACIÓN

INTEGRACIÓN

LECCIÓN I

Del sumar.

En el Libro I queda explicado el género de suma que sirve de base á la formación de los guarismos.

Sabemos, pues, que todos los sistemas de numeración son métodos de suma; no de sumandos cualesquiera, sino de sumandos ajustados á las reglas de la notación, y que cualquier guarismo en cualquier sistema es la suma de cierto número de esos sumandos especiales de la numeración escrita.

Toca ahora tratar de la SUMA DE GUARISMOS cualesquiera.

No hay operación (1) más importante que ésta, ni tampoco más desdeñada.

Y, sin embargo, en el profundo conocimiento de la operación de sumar está toda la Aritmética; que, en cuanto se conocen debidamente, las *bases de la integración de los gua-*

(1) Llámase *operación* el procedimiento de cálculo que nos conduce á la solución de un problema.

Hay en aritmética pura cuatro operaciones fundamentales:

Sumar, restar, multiplicar y partir.

Y otras dos que son casos importantísimos del multiplicar y del partir, á saber: la elevación á potencias ó involución, y la extracción de raíces ó evolución.

Calcular es componer y descomponer los números mediante esas operaciones y el cálculo mental.

rismos», todas las dificultades de la ciencia se resuelven con suma facilidad.

«Sumar es hallar, atendiendo á la forma escrita, EL GRADO DE LA ESCALA DE LA PLURALIDAD Á QUE ASCIENDE LA REUNIÓN *de varios* NÚMEROS EXPRESADOS POR MEDIO DE GUARISMOS».

Los números que se suman se llaman *guarismos-sumatorios* ó, simplemente, Sumandos. Pero Sumando es, propiamente, todo Número que agregado á otro ó á otros contribuye á la formación de un grado cualquiera de la escala de la pluralidad.

El resultado de la operación de sumar se llama SUMA.

La operación de sumar se indica con este signo $+$, que se lee *mas*.

Así $4+4$ se lee: *cuatro mas cuatro*.

Antes de sumar se ejercita á los niños, durante algunos meses, en cantar la siguiente tabla de sumar:

1 y 1, 2	4 y 1, 5	7 y 1, 8
1 y 2, 3	4 y 2, 6	7 y 2, 9
1 y 3, 4	4 y 3, 7	7 y 3, 10
1 y 4, 5	4 y 4, 8	7 y 4, 11
1 y 5, 6	4 y 5, 9	7 y 5, 12
1 y 6, 7	4 y 6, 10	7 y 6, 13
1 y 7, 8	4 y 7, 11	7 y 7, 14
1 y 8, 9	4 y 8, 12	7 y 8, 15
1 y 9, 10	4 y 9, 13	7 y 9, 16
2 y 1, 3	5 y 1, 6	8 y 1, 9
2 y 2, 4	5 y 2, 7	8 y 2, 10
2 y 3, 5	5 y 3, 8	8 y 3, 11
2 y 4, 6	5 y 4, 9	8 y 4, 12
2 y 5, 7	5 y 5, 10	8 y 5, 13
2 y 6, 8	5 y 6, 11	8 y 6, 14
2 y 7, 9	5 y 7, 12	8 y 7, 15
2 y 8, 10	5 y 8, 12	8 y 8, 16
2 y 9, 11	5 y 9, 14	8 y 9, 17
3 y 1, 4	6 y 1, 7	9 y 1, 10
3 y 2, 5	6 y 2, 8	9 y 2, 11
3 y 3, 6	6 y 3, 9	9 y 3, 12
3 y 4, 7	6 y 4, 10	9 y 4, 13
3 y 5, 8	6 y 5, 11	9 y 5, 14
3 y 6, 9	6 y 6, 12	9 y 6, 15
3 y 7, 10	6 y 7, 13	9 y 7, 16
3 y 8, 11	6 y 8, 14	9 y 8, 17
3 y 9, 12	6 y 9, 15	9 y 9, 18

Después se les hace cantar, como más compendiosa y para ejercitarlos en los signos + y =, la siguiente tabla:

2 + 2 = 4	5 + 5 = 10
3 + 2 = 5	6 + 5 = 11
4 + 2 = 6	7 + 5 = 12
5 + 2 = 7	8 + 5 = 13
6 + 2 = 8	9 + 5 = 14
7 + 2 = 9	
8 + 2 = 10	
9 + 2 = 11	6 + 6 = 12
	7 + 6 = 13
3 + 3 = 6	8 + 6 = 14
4 + 3 = 7	9 + 6 = 15
5 + 3 = 8	
6 + 3 = 9	
7 + 3 = 10	7 + 7 = 14
8 + 3 = 11	8 + 7 = 15
9 + 3 = 12	9 + 7 = 16
4 + 4 = 8	
5 + 4 = 9	8 + 8 = 16
6 + 4 = 10	9 + 8 = 17
7 + 4 = 11	
8 + 4 = 12	
9 + 4 = 13	9 + 9 = 18

Más tarde se les hace aprender la

Tabla de sumar.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Con esta tabla á la vista se hace observar á los alumnos, que son iguales los guarismos anotados en las diagonales que de arriba abajo van de derecha á izquierda, y que difieren en dos unidades los que van de izquierda á derecha.

Para sumar se disponen los sumandos unos debajo de otros y de tal modo que las cifras de cada orden (esto es, de cada potencia) caigan respectivamente unas debajo de otras; esto es, protoenas bajo protoenas, deutenas bajo deutenas, trienas bajo trienas, etc., etc.

Para sumar bien se necesita una gran práctica. Quien no la adquiere podrá llegar á saber lo que es sumar, pero nunca sabrá sumar.

Sucede con el sumar una cosa parecida á lo que pasa con el leer; que, siendo muchos los que leen, pocos llegan á hacerlo con sentido, rapidez y exactitud.

Así, todo el mundo suma; pero ¡qué rara es la persona que llega, sin equivocarse, á finalizar una adición algo larga!

Resulta, por tanto, de grandísima importancia ejercitar á los niños en esta capital operación, lo mismo que á los hombres inexpertos. Una de las cosas que más se oponen á la práctica del sumar, es la precisión de escribir bien los sumandos, por el mucho tiempo que su escritura exige y la dificultad de ordenarlos pronto y de manera que se correspondan exactamente las cifras del mismo orden: protoenas bajo protoenas, deutenas bajo deutenas..., etc.

De modo que el disponer bien una suma depende, más que de la habilidad aritmética, de la habilidad caligráfica.

Los maestros pierden lastimosamente en las escuelas un tiempo preciosísimo dictando guarismos y guarismos y más guarismos á sus alumnos: mientras los niños escriben, no suman. Y lo peor es que, como los discípulos no estampan los guarismos para escribirlos con buenos caracteres, sino para que les sirvan inmediatamente en ejercicios aditivos, se acostumbran á hacerlos mal, apresurados y sin primor, y sin el cuidado preciso para colocarlos unos bajo otros. Los maestros, sin querer, contribuyen á la general perversión caligráfica.

Y, como no todos tienen facilidades para enmendar la escritura, y muchos, cuando empiezan á calcular, han llegado ya á una edad en que es muy difícil todo cambio, de ahí el que la carencia de habilidad manual, impida la pronta adquisición de otra habilidad en orden muy distinto, cual es la de operar con expedición y exactitud.

De aquí la utilidad de los cuadernos para sumar, tan extendidos en otros países y tan escasos en España.

De aquí también la necesidad de recomendar todos los medios que faciliten la repetición de los ejercicios del sumar y ahorren la fatiga del escribir. Uno de los más felices es el sistema del inglés Jakson, consistente en cuadrados dispuestos como sigue:

1	5	6	7	4	8	5	7	4
7								3
5		1	5	7	6	8		4
8		2				5		4
9		3				5		5
5		6				4		3
5		9	3	4	5	1		3
8								2
7	5	5	7	3	6	4	5	9

Con los dos cuadrados precedentes hay para hacer, cuando menos, 96 sumas; procediendo así:

Se empieza á sumar por el 1 del cuadrado menor en sentido *dextrorsum* (como se mueven las agujas de un reloj) y se adiciona el 1 con el 5, y con el 7, y con el 6, y con el 8, y con el 5, etc., hasta dar la vuelta al cuadrado; lo que nos producirá 74 como suma.

Después no se empieza ya por el 1 de la esquina, sino por el 5 escrito á su derecha, y se sigue hasta dar la vuelta al cuadrado y concluír por el 1; operación que, si no nos hemos equivocado, volverá á darnos el mismo 74 de antes.

Luego, para una tercera adición, se empieza por el 7 que está á la derecha del 5 que antes nos sirvió de inicio...

Y así sucesivamente, lo que nos dará 16 sumas.

Hecho esto, volveremos á empezar por el 1, pero en sentido *sinistrorsum* (contrario al movimiento de las agujas de un reloj), sumando el 1 con el 2 inmediato y con el 3 y con el 6, y con el 9 y con el otro 3..., hasta dar la vuelta, etc., etc., lo que nos dará otras 16 sumas.

Y si se procede análogamente con el cuadrado mayor dando en primer lugar en sentido *dextrorsum* todas las vueltas posibles, y, terminadas, dándolas en segundo lugar al revés ó en sentido *sinistrorsum*, obtendremos 64 nuevas sumas, siempre con los mismos sumandos y siempre en combinación diferente.

También pueden obtenerse nuevas adiciones dando á cada cuadrado dos vueltas ó tres, ya hacia la derecha, ya hacia la izquierda; ó bien vuelta y media, ó vuelta y cuarto, etc., etc., ó bien muchas más combinaciones sumando los dígitos de ambos cuadrados, ya en un sentido, ya en otro, ya un cuadrado en un sentido, ya el otro cuadrado en sentido contrario...

En general, cualquier suma se dispone de modo que las protoenas estén debajo de las protoenas, las deutenas debajo de las deutenas, las trienas debajo de las trienas... y así sucesivamente. Por debajo del último guarismo se traza una raya, y otra debajo de la suma. Esta última suele suprimirse.

Así, si tuviéramos que sumar los guarismos del sistema decimal,

$$869 + 438 + 1796 + 71$$

prepararíamos la operación de uno de los dos modos siguientes:

$$\begin{array}{r}869\\438\\1796\\71\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}869\\438\\1796\\71\\\hline\end{array}$$

Colocadas ya las cifras en correspondencia unas debajo de otras, se efectúa la operación de sumar, como se expresa á continuación.

Se empieza por la derecha (1), es decir, por la columna de las protoenas desde arriba hacia abajo (2) agregando sucesivamente el valor de las cifras protoenas unas á otras, y cuando se haya llegado así sumando hasta la última inferior de la columna sucederá una de dos cosas:

1.° O la suma encontrada de las protoenas se escribe en el sistema de numeración en que se trabaje con un solo dígito,

2.° O la suma de las cifras del primer orden se escribe con más de una cifra.

(1) Podríamos empezar por la izquierda, ó por el centro... pero se tocaría el inconveniente de tener casi siempre que hacer una segunda suma, y la operación no resultaría de la primera vez.

(2) No hay inconveniente en hacerlo de abajo arriba.

Ahora bien:

1.º Si esa suma parcial de las cifras protoenas ó del primer orden se escribe con un dígito, se pone ese dígito por debajo de la raya, en la misma dirección vertical de las protoenas; y se procede á sumar las cifras de la segunda columna, como en el ejemplo siguiente del sistema decimal

$$\begin{array}{r} 24 \\ 32 \\ 21 \\ 22 \\ \hline 9 \end{array}$$

2.º Pero, si la suma parcial de la primera columna se escribe con más de una cifra (caso el más común), entonces bajo la raya y también bajo las protoenas se escribe de las dos (ó más) cifras que expresen la suma parcial, solamente la de la derecha, y la otra (ú otras) que se llaman RESERVA, se guarda (ó guardan) para sumarla (ó sumarlas) con las cifras de la segunda columna, la de las deutenas: como en el ejemplo siguiente del sistema decimal

$$\begin{array}{r} 24 \\ 65 \\ 78 \\ \hline \end{array}$$

donde se dirá

cuatro y cinco son nueve; nueve y ocho son diez y siete;

diez y siete se escribe en el sistema decimal con un uno y un siete (17); pues bajo la raya y en el sitio de las protoenas se escribe el 7, y el 1 (que es la RESERVA) se guarda para agregarlo á las cifras de la segunda columna, la de las deutenas, como sigue:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ 65 \\ 78 \\ \hline 7 \end{array}$$

Hecho esto con la primera columna, se procede con la segunda como si no existiese ya la primera.

Y, habiendo procedido con la segunda columna, la de las deutenas, como queda indicado, se pasa á la tercera (si la hay) como si no existiesen ya las otras dos..., y así sucesivamente hasta llegar á la última columna de la izquierda.

Y, si la suma parcial de la última columna (que es siempre la primera de la izquierda) se escribe con más de una cifra, entonces se ponen por debajo de la raya todas las cifras resultantes.

EJEMPLO EN EL SISTEMA DECIMAL

		1 2 2 3 4
24 678 984		24 678 984
3 478 972		3 478 972
11 074 890	se procede así:	11 074 890
24 691		24 691
90 201 190		90 201 190
		129 458 727

EJEMPLO EN EL SISTEMA CUATERNARIO:

		2 1
231		231
322	Se procede así:	322
221		221
13		13
		2113

Se dice:

Uno y dos, tres; tres y uno, cuatro; cuatro y tres, siete; siete se escribe en el sistema cuaternario con dos cifras, el 1 y el 3; escribo sólo el 3 y agrego el 1 á las cifras de la columna inmediata (que es, en este ejemplo, la central) diciendo: uno y tres, cuatro; cuatro y dos, seis; etc., etc.

EJEMPLO EN EL SISTEMA QUINARIO:

		3 4 3
4343		4342
3423		3423
1234	Se procede así:	1234
4443		4443
3243		3243
		33400

Se dice:

Dos y tres, cinco; cinco y cuatro, nueve; nueve y tres, doce; doce y tres, quince, que se escribe 30 en el sistema quinario; pongo, pues, el cero y agrego el 3 como reserva á las cifras de la columna inmediata, que es la de las deutenas quinarias, etc., etc.

EJEMPLO EN EL SISTEMA DUODECIMAL:

9 8 7 6 b a b b 9 7 9 7 6 a a a 6 8 9 7 8 9 8 7 6 7 a 4 a b a b 7 a	Se procede así:	1 5 7 5 3 4 9 8 7 6 b a b b 9 7 9 7 6 a a a 6 8 9 7 8 9 8 7 6 7 a 4 a b a b 7 a ――― 3 2 1 6 7 b 5 1

Se dice:

Once y diez, veinte y uno; veinte y uno y ocho, veinte y nueve; veinte y nueve y diez, treinta y nueve, y diez, cuarenta y nueve: ahora bien: como cuarenta y nueve se escribe en el sistema duodecimal 41, pongo el 1, y utilizo el 4 para agregarlo como reserva á la segunda columna, en la cual procedo análogamente, etc., etc.

SUMAS EN EL SISTEMA CUATERNARIO Y SUS CORRESPONDENCIAS EN EL DECIMAL.

Cuaternario	Decimal	Cuaternario	Decimal	Cuaternario	Decimal
10 11 3		11 10 10		12 11 3	
1111	85	1203	99	2331	189
130	28	1003	67	3132	222
133	31	1333	127	3323	251
1133	95	2323	187	3333	255
2312	182	1230	108	3321	249
1111	85	3312	246	3333	255
2222	170	112	22	3210	228
3331	253	3321	249	3322	250
32201	929	101101	1105	131223	1899
1.er ejemplo.		2.° ejemplo.		3.er ejemplo.	

Explicación:

Sumo la primera columna de la derecha (en el 1.er ejemplo del sistema cuaternario) y hallo por resultado 13, que en dicho sistema se escribe *31*.

Pongo 1 bajo la raya y reservo 3 para seguir sumando.

Sumo esta reserva con la segunda columna y resulta 20 deutenas cuaternarias, que se escribe *110*.

Pongo un cero bajo la raya y reservo *11* que en dicho sistema representa 5 del decimal, y digo, cinco de la reserva y uno, seis; y uno, siete; y uno, ocho; y uno, nueve; y tres, doce; y uno, trece; y dos, quince; y tres, diez y ocho, que en el sistema cuaternario se escribe *102*.

Pongo, pues, el 2 bajo la raya, y reservo *10* que en el ya dicho sistema representa 4, del decimal; y digo, cuatro de la reserva y uno, cinco; y uno, seis; y dos, ocho; y uno, nueve; y dos once; y tres, catorce, que en el sistema cuaternario se escribe *32*.

Como no hay más columnas que sumar, pongo el *32* debajo de la raya, y queda terminada la suma.

Análogamente se ha de proceder para efectuar las sumas en los ejemplos 2.° y 3.° del cuadro expuesto.

Por causa de la brevedad se suma sin repetir los resultados de la agregación parcial de cada dígito: supongamos el ejemplo siguiente del sistema decimal:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \\ \hline \end{array}$$

Así, en vez de decir 3 y 4, 7; 7 y 7, 14; 14 y 9, 23; 23 y... etcétera, etc., se dirá: tres, siete, catorce, veintitres, treinta y uno, treinta y ocho, etc.

También, por brevedad, es costumbre no escribir las reservas en lo alto de las columnas; sin embargo de que el escribirlas conviene mucho cuando las sumas son largas y no se tiene seguridad ni práctica en el sumar.

También cuando hay muchos sumandos suelen registrarse las reservas debajo de cada columna, escritas con cifras pequeñitas: ejemplo en el sistema decimal:

$$\begin{array}{rrrr} & & 4 & 7 \\ & & 9 & 8 \\ & 3 & 4 & 7 \\ & 8 & 7 & 8 \\ & 6 & 7 & 6 \\ & 6 & 8 & 9 \\ & 7 & 9 & 6 \\ & 9 & 9 & 9 \\ & 9 & 8 & 7 \\ & 9 & 4 & 7 \\ & 7 & 8 & 5 \\ & 5 & 5 & 9 \\ & 6 & 5 & 9 \\ & 4 & 9 & 8 \\ \hline 8 & 9 & 6 & 5 \\ & & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} \\ \hline \end{array}$$

Es de gran importancia adquirir la práctica de sumar diciendo sólo los resultados parciales sin nombrar los sumandos.

Y es del mayor interés adquirir el poder de sumar en silencio.

OBSERVACIÓN.—Cuando sumamos, desde la segunda columna en adelante hacia la izquierda, cometemos voluntariamente un error para enmendarlo en el acto: en vez de sumar decenas, centenas, millares..., ó en general deutenas, trienas, tetraenas, pentaenas... etc., que son lo que respectivamente expresan los dígitos de la segunda columna, de la tercera, de la cuarta..., sumamos siempre los dígitos como si fueran protoenas; pero, como escribimos el resultado en el segundo lugar, en el tercero, en el cuarto..., enmendamos en el acto el error que por brevedad y sencillez hemos á sabiendas cometido.

Supongamos el ejemplo siguiente del sistema decimal:

$$\begin{array}{r} 34 \\ 50 \\ 62 \\ 51 \\ 82 \\ \hline 9 \end{array}$$

Después de haber sumado los dígitos de la primera columna, en la que no hay reserva, no decimos, al calcular la segunda, lo siguiente:

Tres decenas y cinco decenas, son ocho decenas; ocho decenas y seis decenas, son catorce decenas; catorce decenas y cinco decenas, son.... etc; sino que, simplificando, decimos: tres, ocho, catorce, diez y nueve, veintisiete. Este veintisiete, es diez veces menor de lo que debe ser; pues no se trata de veinte y siete protoenas del sistema decimal, sino de veinte y siete decenas, ó sea de doscientos setenta unos; pero, como al escribir en segundo lugar el 7 que hemos obtenido, lo hacemos valer 70, y al llevar al tercer lugar el 2 de la reserva le hacemos valer, no dos, sino doscientos, queda enmendado en el acto el error, con gran ahorro de palabras, y, sobre todo, de tiempo.

LECCIÓN II

Pruebas comunes.—Prueba de la cifra máxima.

El hombre no es infalible, y suele equivocarse con la mayor frecuencia en sus cómputos, especialmente en todas las operaciones de la Aritmética.

Siempre conviene, pues, y á veces es absolutamente preciso, comprobar esas operaciones.

PRUEBAS.

Las pruebas de una operación son otras que dan los mismos resultados de la primera, si ésta se ha ejecutado bien, ó que presentan indicios muy probables de haber sido correctamente ejecutada.

Las pruebas no han de ser más difíciles que la operación primitiva, y su grado de probabilidad (caso de ser probables únicamente) ha de ser muy considerable.

Sólo una gran probabilidad puede hacer admisible una prueba; porque á resultados idénticos cabe llegar habiendo á la vez error en la operación y en sus comprobaciones; y puede existir discrepancia en los resultados siendo exacta la operación y errónea la prueba, ó errónea la operación y exacta la prueba.

A prueba muy difícil ó de poca probabilidad no debe, pues, nunca recurrirse.

Las pruebas del sumar son varias.

1.ª Si se ha hecho la suma adicionando las columnas de arriba hacia abajo, regularmente se repite la operación, para comprobar el resultado, adicionando las mismas columnas de abajo hacia arriba.

Esta comprobación es muy cómoda, porque no hay necesidad de escribir nuevos signos. Se funda en que es de escasa probabilidad la coincidencia de una equivocación igual á otra anterior.

2.ª Hecha la suma, según las reglas, se prescinde de un sumando (regularmente del primero de arriba): en seguida se suman los restantes, y á la segunda suma que resulte se agrega el primer sumando antes eliminado: esta tercera suma debe aparecer igual á la primera, si no ha habido equivocación en ninguna de las tres.

EJEMPLO (SISTEMA DECIMAL).

348	348		348	sumando separado mentalmen
647	—		647	
784	647		784	
897	784		897	
———	897		———	
2 676	———		2 676	
	2 328	suma de los 3 íd.	———	
	+ 348	sumando separado	2 328	suma comprobatoria en que mentalmente se ha unido el sumando separado.
	———			
	2 676	suma comprobatoria		

Al hacer esta comprobación, se debe practicar de memoria todo lo más posible, por causa de la brevedad; así es que se hace casi siempre como se indica en la tercera operación sin separar sino mentalmente el primer sumando. Las más veces se ponen las comprobaciones en papel aparte.

3.ª En las casas de comercio y en donde quiera que se hacen adiciones que contienen muchos sumandos, se suele comprobar la suma del modo siguiente:

Se dividen las columnas largas de sumandos en secciones, regularmente de á diez ó doce sumandos; se escribe al lado derecho la suma de cada sección, y, hecho esto, la suma de todas estas secciones ha de ser la total que se comprueba.

POR EJEMPLO (SISTEMA DECIMAL).

1 861		
1 862		
2 681		
2 682		
8 161	———	17 247
8 162		
8 611		
8 612		
8 216		
8 126	———	41 727
8 888		
8 884		
8 880		
1 111		
2 235	———	29 998
88 972	=	88 972

Esta comprobación suele verificarse en papel aparte.

También en las casas de comercio se suele sumar poniendo en papel aparte la suma de cada columna.

Así, las cifras de la derecha en el papel aparte 7, 1, 8, 6, 3, 7, resultan ser las de la suma, y además el 6, en que termina (en dicho papel aparte) la columna de las hexaenas. En el mismo papel constituyen las reservas las cifras 4, 5, 3, 4 y 5, que ocupan el segundo lugar (esto es, el de las decenas ó deutenas).

486 167	47
486 287	51
946 876	38
7 646	46
911 111	53
423 374	67
547 867	(Papel aparte.)
960 000	
970 005	
997 484	
6 736 817	

Este procedimiento es muy conocido, fácil y seguro: es de aconsejar su práctica.

También es de recomendar la siguiente, para cuando se suma de arriba abajo y se comprueba de abajo arriba:

486 167	
486 287	
946 876	
7 646	
111 111	
423 374	
347 867	
960 000	
970 005	
997 484	
5 736 817	*Suma.*
554 354	*Reservas.*

	3 9 8
	7 9
	8 9
	7 9
	9 4
	1 8 9
	2 9 9
	5 4 7
	7 8 9
	9 9
	2 9
	4 9
	9 6
	1 9 7
	2 9 6
	3 9 8
	5 9 6
	6 7 4
	1 8 9
	1 9 8
Suma.......	5 3 8 4
Reservas....	5 18 15

Hay, por último, otra prueba muy eficaz: la prueba de la cifra máxima. Verificada la suma, se la comprueba como sigue:

Se suman parcial y horizontalmente las cifras de los sumandos; y, en cuanto la suma parcial pase de la cifra máxima del sistema, la excedencia (ó lo que sobre) se agregará á las demás cifras hasta obtener otro valor que exceda del valor de la cifra máxima... y así sucesivamente hasta llegar al fin.

Si hay entonces todavía excedencia, se escribe el excedente junto á la raya de la suma, separado por un paréntesis; y, si la operación está bien hecha, el excedente de los sumandos será igual al excedente de la suma. O se empieza por el de éste.

Ejemplo en el sistema decimal, cuya cifra máxima es 9.

```
 466
 328
 546  (8
─────
1 340  (8
```

Hecha la suma, se le saca el excedente, diciendo:

$$1+3+4+0=8$$

como el 8 no contiene ningún 9, se escribe el 8 á la derecha de la suma, separada de ella por un paréntesis.

Y en seguida se empieza á comprobar por el sumando superior diciendo: 4 y 6 son 10; fuera de 9 queda 1 de excedencia; 1 excedente y 6 son 7 y 3 del segundo sumando son 10; fuera de 9 queda 1 de excedencia; 1 y 2 son 3 y 8 son 11; fuera de 9 quedan 2 de excedencia; 2 y 5 del tercer sumando son 7 y 4 son 11; fuera de 9 quedan 2; 2 y 6 son 8. Entonces se escribe un (8 pequeño á la derecha del último sumando, que es el 546, y como la excedencia final de los sumandos es igual á la de la suma, debemos dar por buena la adición.

Otros ejemplos de la prueba de los nueves:

```
 85 765
 14 821
 46 853
 29 762  (4  excedencia de los sumandos
―――――――
176 701  (4  excedencia de la suma

 15 184
 44 632
 25 798
 56 673  (6  excedencia de los sumandos
―――――――
142 287  (6  excedencia de la suma
```

Supongamos la siguiente suma en el sistema octonario, cuyo dígito mayor es 7. La operación se hará como sigue:

```
 447
 572
 433
 567  (1
―――――
2 463  (1
```

Primeramente se extraen los sietes de la suma diciendo: 2 y 4 son 6, y 6, 12; fuera de los siete quedan 5; 5 y 3, 8; fuera de los siete, uno; y este (1 se escribe separado á la derecha de la suma.

Inmediatamente, se procede á la comprobación diciendo: 4 y 4 son 8; fuera de 7, uno (de excedencia): y 7, son 8; fuera de 7, uno; y 5, 6 y 7, 13; fuera de 7, seis; 6 y 2, 8: fuera de 7, uno; 1 y 4, 5, y 3, 8; fuera de 7, uno; 1 y 3, 4; y 5, 9; fuera de 7, dos; 2 y 6, 8; fuera de 7, uno; 1 y 7, 8; fuera de 7, uno; y se escribe el 0 á la derecha del último sumando.

Como el excedente final de los sumandos es igual al de la suma, la suma está bien hecha.

Puede suceder que alguna suma parcial de las cifras adicionadas horizontalmente produzca una excedencia igual á la cifra máxima. Entonces en el sistema decimal se dice 9 fuera de 9, cero; y se vuelve á empezar hasta que se llega al fin. Claro es que en el sistema septenario se diría: 6 fuera de 6, cero; y en el octonario, 7 fuera de 7, cero; y lo análogo en cualquier otro sistema de numeración.

SISTEMA DECIMAL.

3 672		En gracia á la brevedad se ahorran muchas palabras diciendo:
5 438		3, 9; 0: 7, 9; 0: 5, 9; 0:
7 423	(0	3, 11; 2: 9; 0: 4, 6, 9; 0:
16 533	(0	1, 7. 12; 3: 6, 9; 0
		Excedentes iguales, suma buena.

Esta prueba de la cifra máxima se funda en lo siguiente:

1.° En la suma no puede haber más ni menos de lo que hubiere en los sumandos.

2.° Los sumandos están compuestos de la cifra máxima más el valor absoluto (no locativo) de sus cifras.

3.° Este valor absoluto está compuesto también de la cifra máxima, ó exactamente ó con excedencia.

4.° Si exactamente, el valor absoluto de las cifras de la suma no debe dejar sobrante ó excedente; porque, si lo dejase, habría en ella algo más que en los sumandos.

5.° Si con excedencia, el valor absoluto de las cifras de la suma debe dejar el mismo sobrante; porque, si no dejase ninguno, ó lo dejase mayor ó menor, resultaría que la suma no estaba formada de la cifra máxima el mismo número de veces y del modo mismo que los sumandos.

La prueba de la cifra máxima llega á hacerse con una celeridad extraordinaria, para lo cual hay muchas razones.

En la práctica nunca se hace caso de la cifra máxima ni de las combinaciones evidentes que suman su valor, porque es inútil agregarlas, para eliminarlas después.

Así, en el sistema decimal no se toman en cuenta los nueves, ni aquellas evidentes combinaciones que dan nueve por resultado, como

81, 18, 72, 63, 36, 54, 45,
621, 612, 126, 1 116, etc., etc.

Ni aun otras combinaciones más complicadas, por ejemplo.

297, 792, 4995, 693,
396, 369, 7821, 6336, 6633,
6921, 2691, 12996, 4491, 1944,
y otras muchas análogas.

El hábito de combinar tan corto número de cifras de modos que al fin resultan sobremanera conocidos, hace rapidísima mentalmente la prueba de la cifra máxima; y especialmente la prueba de los nueves en el sistema decimal.

3 699		6 314	
972		5 721	
795		3 263	
431		9 792	
225		2 763	
992		5 445	
7 227	(4	2 123	(0
14 341	(4	35 421	(0

Así un calculador ejercitado advierte al primer golpe de vista que el 4 es el sobrante de la suma siguiente, porque las sumas sucesivas de cada dos ó tres sumandos importan 9 siempre, excepto al final en que se encuentra el 4 excedente.

452	
736	
612	
216	
814	
554	
274	(4
3 658	(4

Observación.—Ninguna de las anteriores pruebas de sumar es exacta rigurosamente, porque pueden deslizarse en la prueba equivocaciones que compensen con exactitud un error padecido al hacer la operación.

La única prueba infalible sería la de la cifra máxima, si, en vez de contentarnos con saber que tanto los sumandos como la suma están compuestos de la dicha cifra, *exactamente* ó con *excedencia*, averiguáramos el número fijo de veces que sumandos y suma contienen á la cifra máxima con exactitud ó con excedencia; pero, aunque no difícil (como hemos visto), el medio de averiguación del número fijo de cifras máximas es un tanto complicado para prueba, la cual nunca ha de ser más enojosa que lo sería el repetir la operación.

Á pesar de ser falibles las pruebas del sumar, deben siempre efectuarse, por ser de altísima probabilidad que no hay equivocación cuando coinciden la operación y su prueba.

La comprobación más fácil del sumar es la adición de abajo arriba, si la operación se ha hecho al contrario.

Por último:

Cuando interesa inmensamente la exactitud de las operaciones aritméticas (como sucede en los Observatorios astronómicos), no hay más recurso para obviar la falibilidad de los calculadores, que encargar el mismo cálculo á dos parejas, que lo trabajan en mesas y salas separadas, y que entregan los resultados á otra pareja de comprobadores, quienes los dan por buenos cuando los encuentran conformes.

Ésta se llama prueba por dobles manos.

LECCIÓN III

Sumas horizontales (1).

Muchas veces para ciertos trabajos se necesita sabér lo que importan cada día cierto número de artículos de consumo, y además es preciso conocer por semanas ó por meses ó por años lo que se ha gastado en cada artículo, juntamente con lo que se ha gastado en todos.

Otras veces el censo de población, los fenómenos atmosféricos, etc., etc., exigen operaciones análogas. Para hacerlas con facilidad, suele ser preciso sumar horizontalmente, y la generalidad de las plantillas, facturas, cuadernos ó estados se dispone como sigue, ó de un modo semejante.

Provincia de N...

PUEBLOS	Hombres.	Mujeres.	Niños.	Niñas.	TOTALES.
M	1 500	1 521	829	1 040	4 890
N......	1 381	1 141	755	832	4 109
L.....	1 215	1 108	943	512	3 778
O......	980	1 012	813	720	3 525
	5 076	4 782	3 340	3 104	16 302

(1) Esta lección, por el fondo corresponde más bien á la Aritmética modular que á la Aritmética pura. Pero aparece en este sitio por la generalidad de los preceptos operatorios. Y, además y principalmente, porque para combinaciones de números puros se necesita saber sumar guarismos no dispuestos en columnas: tal sucede en los cuadrados mágicos, etc.

Provincia de X...

PUEBLOS	Agricultores.	Menestrales.	Marineros.	Militares.	Sirvientes.	TOTAL.
Z.	3 009	820	315	2 570	2 572	9 286
V	8 913	2 615	1 161	6 345	6 340	25 374
R	5 421	2 609	2 013	5 027	5 014	20 084
S	10 892	7 427	3 168	10 415	11 195	43 097
	28 235	13 471	6 657	24 357	25 121	97 841

Los ejemplos anteriores son exiguos casos de los infinitos que hay análogos, y en los que varían los géneros, clases, especies ó individualidades á que se refieren los sumandos, pero no la disposición de los sumandos, en renglones horizontales y columnas verticales.

Empiézase, pues, sumando horizontalmente, pero efectuando el cálculo del mismo modo que si los sumandos estuvieran colocados ordenadamente unos debajo de otros; para lo cual se van sumando primero las cifras de primer orden ó protoenas desde cualquiera de los extremos de cada renglón horizontal, y, hallada la suma de las protoenas, se escribe á la derecha en la columna de totales y en el mismo renglón horizontal, solamente la cifra de la derecha, y la otra ú otras se guardan como reserva para agregarlas á las cifras de segundo orden ó deutenas.

Síguense luego sumando las deutenas como se sumaron las protoenas... y así se continúa con las demás cifras de los órdenes superiores (caso de haberlas) hasta sumarlas todas y obtener una suma total del primer renglón horizontal. Obtenida ya la suma del primer renglón horizontal, se procede luego del mismo modo á la suma horizontal de cada uno de los demás renglones; y, ya sumados todos los renglones, se suman de arriba abajo los totales obtenidos, y se logra así un TOTAL DE TOTALES.

Hecho esto, se suman verticalmente las columnas de sumandos y se escriben las sumas que resulten, al pie de su respectiva columna; y, después que se haya concluido con todas, se suman horizontalmente los totales de todas las columnas, y su suma ha de ser igual al anterior *total de totales*.

Por ejemplo:

	Carne.	Tocino.	Aceite.	Vino.	Pan.	TOTAL.
Miércoles.....	5	8	1	7	9	30
Jueves........	2	7	2	9	2	22
Viernes.......	7	9	1	11	1	29
	14	24	4	27	12	81

Donde se dirá

5 y 8 son 13, y 1, son 14, y 7, son 21, y 9, son 30; así se obtiene todo el gasto del miércoles y se escribe la suma á la derecha en la columna del total; se sigue con las otras partidas horizontales del jueves;

$$2 + 7 + 2 + 9 + 2 = 22$$

y el 22 se escribe en la columna de totales bajo el 30.

Hecho esto, se continúa con las partidas del viernes

$$7 + 9 + 1 + 11 + 1 = 29$$

y el 29, total del viernes, se escribe bajo el 30 y el 22 acabados de sentar.

Obtenidos ya los totales parciales correspondientes al miércoles, al jueves y al viernes, se saca verticalmente la suma total, $30 + 22 + 29 = 81$; y se anota.

En seguida se procede á sumar las columnas correspondientes á la carne, al tocino... Para la carne se dirá

5 y 2, 7, y 7, 14,

que se escribe debajo; y así se sabe el importe de la carne en los tres días: se suman del mismo modo las otras columnas verticales y se ponen las sumas en la parte inferior de sus respectivas columnas; por cuyo medio se averigua lo gastado durante los tres días en los otros artículos: tocino, aceite, vino y pan.

Por último, horizontalmente se adicionan las sumas de las columnas; y, si todas las operaciones se han hecho con exactitud, esta última suma será igual al *total general ó de totales*. Y, en efecto, las protoenas dan

$$4 + 4 + 4 + 7 + 2 = 21$$

Se anota el 1 en el *total de totales* poniendo un punto debajo y se pasa á las deutenas diciendo

2 de la reserva $+ 1 + 2 + 2 + 1 = 8$;

y se señala el 8 con otro punto debajo.

	Carne.	Queso.	Uvas	Pan.	Tocino.	Fideos.	Fruta.	TOTAL.
Domingo......	36	21	19	14	10	24	13	137
Lunes.........	9	32	24	23	8	13	8	117
Martes.........	22	15	42	31	40	39	22	211
Miércoles......	54	54	38	56	25	48	17	287
Jueves	7	43	51	72	32	53	23	281
Viernes........	34	8	27	28	15	92	32	236
Sábado........	42	12	39	39	58	36	15	241
Domingo	55	61	8	15	19	4	25	187
	259	246	243	278	207	309	155	1 697

La prueba de estar bien hechas estas operaciones será el que todos los totales parciales den el total general 1 697: para efectuar esto se sumarán dichos totales horizontal y ordenadamente.

DIAS.	Pan.	Chorizo	Leche.	Queso.	Jamón	Tabaco.	Huevos.	Carne.	Fideos	TOTALES
1	20	10	11	11	10	12	11	20	17	122
2	17	17	12	10	11	13	10	24	18	132
3	16	16	10	12	12	15	12	26	16	135
4	13	17	11	17	13	17	15	30	15	148
5	15	18	13	12	15	19	13	41	14	163
6	14	19	15	13	17	21	20	48	13	180
7	21	11	14	14	18	23	22	31	12	166
8	20	12	16	15	20	11	21	17	11	143
9	11	13	13	15	30	10	17	34	17	160
10	12	14	12	16	31	30	18	36	19	188
11	13	15	17	10	17	15	19	38	20	164
12	18	16	18	11	20	16	14	37	21	171
13	19	10	20	12	24	17	13	35	23	173
14	15	12	19	10	23	18	12	36	25	170
15	14	20	11	11	22	22	11	38	27	176
16	12	11	30	12	21	20	15	49	29	190
17	11	10	15	13	16	23	13	41	32	174
18	10	13	16	14	14	11	12	42	35	167
19	12	21	17	15	13	12	11	43	33	177
20	15	18	19	13	12	13	16	45	36	187
	298 +	293 +	309 +	256 +	359 +	318 +	295 +	705 +	433	3 286

Por tanto, si se nos diera el primero de los dos estados siguientes para que hiciéramos las correspondientes sumas, tendríamos que devolverlo, después de efectuadas las operaciones, según expresa el segundo estado.

DIAS.	Carne.	Legumbres.	Tocino.	Pan.	Gallina.	Vino.	Aceite.	Carbón.	Agua.	Jabón.	TOTALES DE CADA DÍA.
1	40	10	20	80	4	15	10	25	10	20	
2	45	9	15	71	2	19	8	10	12	5	
3	41	11	14	69	7	11	9	15	17	3	
4	50	18	37	21	9	7	4	9	17	1	
5	20	7	2	15	7	7	8	10	12	30	
6	40	12	13	10	11	2	1	3	17	1	
7	38	4	20	30	11	1	7	4	15	6	
8	42	30	30	18	9	7	6	5	14	»	
9	28	4	10	15	8	2	4	6	7	15	
10	25	5	8	9	4	3	5	7	6	»	
11	31	9	7	6	12	4	8	9	3	»	
12	21	2	11	4	10	8	4	6	7	2	
13	15	1	9	2	7	2	1	3	4	»	
14	17	»	»	16	1	8	3	2	5	2	
15	19	4	18	13	»	4	1	5	6	7	
16	21	»	7	»	2	»	2	»	1	3	

DIAS.	Carne	Legumbres.	Tocino.	Pan.	Gallina.	Vino.	Aceite.	Carbón.	Agua.	Jabón.	TOTALES DE CADA DÍA.
1	40	10	20	80	4	15	10	25	10	20	234
2	45	9	15	71	2	19	8	10	12	5	196
3	41	11	14	69	7	11	9	15	17	3	197
4	50	18	37	21	9	7	4	9	17	1	173
5	20	7	2	15	7	7	8	10	12	30	118
6	40	12	13	10	11	2	1	3	17	1	110
7	38	4	20	30	11	1	7	4	15	6	136
8	42	30	30	18	9	7	6	5	14	»	161
9	28	4	10	15	8	2	4	6	7	15	94
10	25	5	8	9	4	3	5	7	6	»	72
11	31	9	7	6	12	4	8	9	3	»	89
12	21	2	11	4	10	8	4	6	7	2	75
13	15	1	9	2	7	2	1	3	4	»	44
14	17	»	»	16	1	8	3	2	5	2	54
15	19	4	18	13	»	4	1	5	6	7	77
16	21	»	7	»	2	»	2	»	1	3	86
	493	126	221	379	99	100	81	119	158	95	1 866

LECCIÓN IV

Reglas generales del sumar, comunes á todos los sistemas de numeración.

Para la práctica de las Lecciones anteriores se pondrán ejemplos suficientes de sumas en cada uno de los sistemas binario, ternario... hasta el duodecimal.

Y, para que las reglas dadas se estudien con perfección hasta en sus menores detalles, se especificarán y repetirán para cada caso en la parte que parezca necesaria.

Las reglas siguientes son comunes á todos los sistemas:

1.ª Escritos los sumandos unos bajo otros, de modo que se correspondan las cifras de un mismo orden, se traza una raya horizontal por debajo del último sumando; y en seguida se procede á la operación, la cual se empieza sumando los dígitos de la primera columna de la derecha (la de las protoenas), según su valor absoluto.

2.ª La suma obtenida de las protoenas se imagina escrita como corresponda al sistema en què se trabaje.

3.ª Esta suma necesitará para su expresión una sola cifra, ó dos, ó más.

4.ª Si necesita sólo una cifra, ésta se escribirá bajo la raya, en el sitio de las protoenas; y acto continuo se procederá á sumar los dígitos de la segunda columna (la de las deutenas).

5.ª Si la suma de la primera columna, ó de las protoenas, exige en su expresión escrita dos cifras, se escribirá sólo la de la derecha bajo la raya y bajo la primera columna, y la otra cifra se guardará para agregarla (como reserva) á los dígitos de la segunda columna, ó sea la de las deutenas, que en seguida se sumarán por su valor absoluto, y no por el locativo.

6.ª Si la suma de la primera columna se escribe con tres (ó más) cifras, se pone la de la derecha bajo la raya, y con las otras dos (ó más) se constituye la reserva, por el valor que en cada sistema tuvieren esas dos cifras (ó más).

7.ª Esta reserva se agrega á los dígitos de la segunda columna, la de las deutenas, dándoles de valor (nótese bien esto) lo que en el sistema en que se trabaje representen las dos (ó más) cifras que constituyen la reserva. Por ejemplo: si la columna de las protoenas en el sistema ternario importa setenta y tres, imaginaremos escrito este grado de la pluralidad en dicho sistema, ó sea en la forma

2 201:

y, concebida esta forma del sistema ternario, escribiremos el 1 bajo la raya y bajo la columna de las protoenas; y, constituiremos la reserva con el resto de la expresión (ó sea con la forma 220); pero al empezar á sumar la columna inmediata, daremos al

220

su valor en el sistema ternario, ó sea

veinticuatro (deutenas ternarias) $= 18 + 6$ del decimal.

8.ª Con las demás columnas se procederá como se acaba de decir respecto de la primera, ó sea la de las protoenas; pero empezando por la reserva, si la hay...

9.ª En fin, bajo la raya y al pie de la última columna, se pondrá íntegramente lo que ella sume (incluyendo en su importe lo que habría sido reserva si hubiese habido más columnas), y dándole la forma exigida por el sistema en que se opere.

Observación.—En rigor, la reserva que consta de dos cifras constituye una reserva doble; pues sólo la cifra de la derecha de la reserva forma en realidad la reserva especial correspondiente á la columna correspondiente, pues la otra cifra pertenece á la columna siguiente situada á la izquierda de la inmediata. Si la reserva tuviese tres cifras, sería, en rigor, reserva triple, pues, etc.

Otra observación para los que ya saben la operación de partir.

En realidad, para sumar en el sistema que se quiera no se necesita pensar cómo se escriben los grados de la escala de la pluralidad en dicho sistema. Si una columna suma, por ejemplo, 17 en el sistema binario, ¿qué pondré al pie de la respectiva columna, y cuánto llevaré de reserva?

Digo: 17 partido 2, da 8 y sobra 1.

Pues pongo el 1 sobrante bajo la columna, y llevo de reserva á la inmediata el cuociente 8. En efecto, 17 en el sistema binario se escribe 10 001, que se descompone en

10 000 + 1 = ocho pares + uno.

Y ¿si la suma 17 perteneciese al sistema ternario? Entonces se diría:

diez y siete entre tres, á cinco y sobran dos.

Pues pongo dos al pie de la columna y llevaré de reserva á la inmediata el cuociente cinco.

Si la suma 17 perteneciese al sistema cuaternario, se dividiría el diez y siete entre cuatro: se pondría el sobrante 1 al pie de la columna y se llevarían 4 de reserva.

Si la suma 17 perteneciera al sistema decimal, se pondría 7 al pie y se llevaría de reserva 1, porque

$$\begin{array}{r|l} 17 & 10 \\ \cline{2-2} 7 & 1 \end{array}$$

Si la suma 17 fuese en el sistema duodecimal, la reserva sería también 1; y el sobrante 5, etc., etc.

En general:

Dada la suma de una columna, se divide su importe por el número de cifras del sistema; se escribe el sobrante bajo la columna respectiva, y el cuociente se lleva como reserva á la inmediata columna de la izquierda.

Cuando hay que sumar guarismos colocados, no en columnas unos bajo otros, sino en líneas horizontales, como aconte-

ce regularmente en la Aritmética modular, entonces es preciso sumar primero todas las protoenas, luego todas las deutenas, después todas las trienas..., etc., etc. Claro es que á las deutenas se agregará la correspondiente reserva de las protoenas (si la hay); y á las trienas la de las deutenas..., etcétera, etc.

Para esta clase de sumas en sentido horizontal, es necesario mucha práctica.

La suma de dos dígitos nunca llega á dos deutenas.

En efecto; en el sistema decimal la cifra máxima es 9, y $9 + 9 = 18 < 20$.

En el sistema quinario la cifra máxima, es 4; y $4 + 4 = 13 < 20$ (= ocho < diez).

Y lo mismo en los demás sistemas de numeración.

Si la suma de dos dígitos es mayor que la cifra máxima, el número se escribe con dos cifras; y de estas la protoena es < que el menor de los sumandos. Lo que evidencian las tablas del sumar.

La suma de varios números es = á la suma de los dígitos de un mismo orden (ó sea de una misma columna) de todos los sumandos:

$$\left.\begin{array}{r} 36\,467 \\ 7\,453 \\ 48\,889 \\ 48\,646 \\ 37\,986 \end{array}\right\}\text{ En el sistema decimal.}$$

$$\begin{array}{r} \hline 31 \\ 31 \\ 31 \\ 36 \\ 14 \\ \hline 179\,441 \\ \hline \end{array}$$

Lo mismo se evidenciaría de cualquier otro sistema.

Por consiguiente: el número de sumas parciales es = al número de columnas; ó bien = al número de cifras que tenga el mayor sumando (inclusos los ceros si los hay).

Dispuestos ordenadamente los dígitos unos bajo otros,

según es uso, en cada suma parcial han de entrar todos los dígitos de cada columna, y sólo ellos, con más la reserva que venga de la anterior.

Por consiguiente:

La regla del sumar es en todos los sistemas como sigue:

Se suman los valores absolutos de todos los dígitos de un mismo orden; la suma, si tiene una cifra, se escribe bajo la raya y en el lugar correspondiente al orden de los dígitos sumados, y, si tiene más de una cifra, la de la derecha se escribe bajo su respectiva columna, y la que haga de decenas en la misma suma parcial, se agregará como reserva á los dígitos del orden inmediato superior...

Sumada la última columna, se sientan íntegramente bajo la raya todas las cifras que la expresan.

APÉNDICE.

Regularmente, sólo en la Aritmética modular se emplean los procedimientos horizontales de la adición; pero también, á veces, se exigen para combinaciones de Aritmética pura, según ocurre en los cuadrados mágicos, donde, no sólo hay que sumar guarismos colocados en líneas horizontales, sino también dispuestos diagonalmente.

Los ÁBACOS MÁGICOS son cuadrados divididos en casillas también cuadradas, en los cuales se colocan números correspondientes á una progresión regular, dispuestos de tal mane-

2	7	6
9	5	1
4	3	8

ra, que, adicionados en sentido vertical, horizontal ó diagonal, den la misma suma, ó el mismo producto, ó la misma serie armónica, según que la progresión á que los números correspondan sea aritmética, geométrica ó armónica. En la figura anterior suman 15, en cualquier sentido, los números de la progresión aritmética 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Combinaciones de esta clase eran muy conocidas desde los primitivos tiempos por los indios, los egipcios y los chinos; porque entre ellos, lo mismo que entre los europeos de la Edad media, se hallaba arraigada la creencia de que los talismanes que tenían esculpidos semejantes cuadrados poseían cualidades astrológicas y divinatorias de portentosas virtudes. Manuel Moscópulo, de Constantinopla, escribió una obra en griego, á mediados del siglo XV, sobre tan extraordinarias virtudes. (Hay quienes atribuyen la obra á otro Moscópulo, cretense, que vivía á mediados del siglo XIII.) Un cuadrado con el número 1 en su interior $\boxed{1}$, era el símbolo de Dios, á causa de su unidad y de su inmutabilidad; y la razón consistía en que $1 \times 1 = 1$. Un cuadrado con un 2 dentro, representaba la imperfección de la materia, por la gran razón de ser imposible arreglar mágicamente una serie de 4 términos. El cuadrado dividido en 9 casillas estaba consagrado á Saturno, y simbolizaba todas sus influencias; el de 16, á Júpiter; el de 25, á Marte; el de 36, al Sol; el de 49, á Venus; el de 64, á Mercurio; y, en fin, á la Luna, el de 81 casillas.

Modernamente, las propiedades de los ábacos mágicos han sido objeto del estudio de grandes inteligencias: entre otros, han escrito sobre el asunto LEIBNITZ, FRENICLE, BACHET, LA HIRE, SAUBIN y varios más, citados por MONTUCLA en su *Historia de las Matemáticas*, en el *Diccionario* de HUTTON, en las *Recreaciones Matemáticas* del mismo autor, en la *Enciclopedia metódica* y en otras obras.

Tómese de una progresión aritmética cualquiera una serie de términos tal, que su número sea un cuadrado (por ejemplo, nueve términos, dieciséis términos, veinticinco términos, etc.). Al efecto, pueden servir los 16 primeros grados de la escala de la pluralidad. Si los escribimos en dos líneas, como sigue:

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9

la suma vertical de cada dos números *correspondientes* da 17, por la conocida propiedad de las series aritméticas, de que cada dos términos equidistantes de los extremos suman lo mismo que los extremos. Si los escribimos en cuatro líneas, formando un cuadrado, las diagonales 1, 6, 11, 16, y 4, 7, 10,

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

13, sumarán $2 \times 17 = 34$, por constar cada una de dos pares de números *correspondientes:* $1 + 16$ y $6 + 11$; $4 + 13$ y $7 + 10$.

Evidentemente, ninguno de los números de las diagonales se halla en más de una hilera ni en más de una columna; pero, sin estar en diagonal, muchos otros números del cuadrado pueden llenar esta condición: por ejemplo, 5, 2, 15, 12. Ahora bien, siempre que del cuadrado se escojan cuatro términos, de tal modo que de cada hilera y de cada columna no salga más que un solo término, la suma de los cuatro será también 2 veces 17. Si en lugar de los términos $1 + 6 + 11 + 16 = 34$ de una diagonal, tomamos los términos $1 + 10 + 7 + 16$, muy fácilmente se notará que también han de sumar 34; porque el segundo término 10 es mayor en 4 unidades que su correspondiente de la diagonal, y el tercer término 7, cuatro unidades menor que su correspondiente 11. Lo mismo es fácil de hacer ver de cualesquiera otros cuatro números del cuadrado; de manera que siempre sumarán 34 cuatro términos cualesquiera del anterior ábaco, como no pertenezcan más que á una sola hilera y á una sola columna. Hé aquí varios cuadrados mágicos del 34:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1	16	11	6
13	4	7	10
8	9	14	3
12	5	2	15

4	11	14	5
6	13	12	3
9	2	7	16
15	8	1	10

13	4	5	12
16	6	11	1
3	9	8	14
2	15	10	7

16	3	10	5
8	2	13	11
9	15	4	6
1	14	7	12

8	12	5	9
11	1	16	6
13	7	10	4
2	14	3	15

8	10	3	13
15	1	12	6
9	7	14	4
2	16	5	11

13	2	3	16
12	7	6	9
8	11	10	5
1	14	15	4

8	12	5	9
10	1	16	7
13	6	11	4
3	15	2	14

10	11	5	8
15	2	16	1
6	7	9	12
3	14	4	13

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

8	1	12	13
5	16	9	4
11	2	7	14
10	15	6	3

13	4	14	3
12	9	7	6
1	16	2	15
8	5	11	10

3	6	15	10
14	7	2	11
4	9	16	5
13	12	1	8

Por supuesto que, para que haya cuadrado mágico, no es necesario que la progresión empiece por 1, ni tampoco que la razón aritmética sea 1. Los términos 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, que no empiezan por 1, y cuya razón aritmética es 2, y los 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, cuya razón es 3, forman ábacos mágicos en las figuras siguientes:

14	28	18
24	20	16
22	12	26

27	24	39
42	30	18
21	36	33

El número de los ábacos mágicos es mucho mayor de lo que á primera vista pudiera imaginarse.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

La figura formada con los 16 primeros grados de la pluralidad (según el cuadro inmediato) puede dar lugar á las 24, combinaciones siguientes, empezadas siempre por uno de los términos de la primera columna de la izquierda del cuadrado.

1 6 11 16	5 2 11 16	9 2 7 16	13 2 7 12
1 6 15 12	5 2 15 12	9 2 15 8	13 2 11 8
1 10 7 16	5 10 3 16	9 6 3 16	13 6 3 12
1 10 3 15	5 10 15 4	9 6 15 4	13 6 11 4
1 14 7 12	5 14 3 12	9 14 7 4	13 10 7 4
1 14 11 8	5 14 11 4	9 14 3 8	13 10 3 8

Estas 24 combinaciones permiten que de cada columna se saque fácilmente una hilera con que formar un cuadrado en que ningún número esté repetido; si bien sería una casualidad que las cuatro hileras escogidas así *ad libitum* y sin sujeción á propósito ninguno, diesen un cuadrado mágico.

1	6	11	16
5	2	15	12
9	14	7	4
13	10	3	8

Conservándose invariable la primera columna de la anterior combinación, se ve que ésta puede escribirse de cuatro modos:

1	6	11	16	1	6	11	16
5	2	15	12	5	2	15	12
9	14	7	4	9	14	3	8
13	10	3	8	13	10	7	4
1	6	11	16	1	6	11	16
5	10	15	4	5	14	3	12
9	14	3	8	9	2	15	8
13	2	7	12	13	10	7	4

Conservándose invariable la segunda columna, la tercera, la cuarta, tendríamos nuevos modos análogos, etc. En fin, el cálculo de las combinaciones demuestra que el número de los cuadrados posibles en que ningún número se repite pasa de 191 millones (191 102 976), y que el modo de formar hileras que sumen 34 es todavía mucho mayor; de suerte, que sería verdaderamente cosa de magia que en tan enorme multitud de cuadrados no se encontrasen muchos que reuniesen las condiciones de los anteriores ábacos mágicos, de sumar 34 en sentido horizontal, vertical y diagonal. FRENICLE encontró 880 métodos de formarlos. Falta aún un método general, pues las reglas matemáticas descubiertas son diferentes, según que la raíz del cuadrado es impar ó par; y, siendo par, hay que distinguir si la raíz es *imparmente* par ó *parmente* par. Es raíz *parmente* par la que dividida por 2 da un número par; como

$$4 = \sqrt{16};\ 8 = \sqrt{64};\ 12 = \sqrt{144}:$$

y es *imparmente* par la raíz par que dividida por 2 da un número impar; como

$$6 = \sqrt{36};\ 10 = \sqrt{100},\ \text{etc.}$$

La serie de los 25 primeros grados de la escala de la pluralidad da mágicamente cuadrados mágicos que suman 65, como en el ábaco siguiente:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

La serie de los 36 primeros números da 111.

29	12	28	9	7	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
14	24	21	22	13	17
2	1	34	33	6	35
11	25	10	27	30	8

Hay cuadrados mágicos que todavía continúan siendo mágicos cuando se les quita una banda entera alrededor.

1	35	34	5	30	6
33	11	25	24	14	4
28	22	16	17	19	9
8	18	20	21	15	29
10	23	13	12	26	27
31	2	3	32	7	36

Los hay también que, divididos en cuadrados iguales, son, no sólo mágicos en su totalidad, sino en sus subdivisiones.

1	63	62	4	9	55	54	12
60	6	7	57	52	14	15	49
8	58	59	5	16	50	51	13
61	3	2	64	53	11	10	56
17	47	46	20	25	39	38	28
44	22	23	41	36	30	31	33
24	42	43	21	32	34	35	29
45	19	18	48	37	27	26	40

Cada uno de los cuatro cuadrados parciales de la anterior figura da mágicamente 130, y el total da el doble, 260.

El siguiente cuadrado corresponde á la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

128	1	32
4	16	64
8	256	2

En este cuadrado, los productos horizontales, verticales ó diagonales dan siempre 4 096.

Al libro de Hútton, titulado *Recreaciones matemáticas*, puede acudir quien desee conocer más á fondo las propiedades de estos cuadrados.

LECCIÓN V

Ejercicios de sumar en el sistema binario.

Número de sus cifras, **dos:** el **1** y el **0.**
En el sistema binario hay:

			Traducción en el sistema decimal.
1	PROTOENA, ó sea la potencia 0 del 2, número de cifras del sistema.	$2^0 =$	1
1	DEUTENA, ó sea la 1.ª potencia del 2...........................	$2^1 =$	2
1	TRIENA, ó sea la 2.ª potencia del 2..............	$2^2 =$	4
1	TETRAENA, ó sea la 3.ª potencia del 2...........................	$2^3 =$	8
1	PENTAENA, ó sea la 4.ª potencia del 2.	$2^4 =$	16
1	HEXAENA, ó sea la 5.ª potencia del 2..........................	$2^5 =$	32
1	HEPTAENA, ó sea la 6.ª potencia del 2..........................	$2^6 =$	64
1	OCTOENA, ó sea la 7.ª potencia del 2	$2^7 =$	128
1	ENEAENA, etc., etc.		

Por consiguiente:

En el sistema binario, traducido al decimal,

Un 1	En el 1.er lugar vale	En el 2.º lugar vale	En el 3.er lugar vale	En el 4.º lugar vale	En el 5.º lugar vale	En el 6.º lugar vale	En el 7.º lugar vale	En el 8.º lugar vale	En el 9.º lugar vale	En el 10.º lugar vale	En el 11.º lugar vale
del decimal	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

EJEMPLOS.

Sistema binario	Traducción al decimal.
10 10 1 1	
1 0 1 1 0	= 16 + 4 + 2 = 22
1 1 0 0 1	= 16 + 8 + 1 = 25
1 0 1 0 0	= 16 + 4 = 20
1 1 0 1 0	= 16 + 8 + 2 = 26
1 0 1 0 1	= 16 + 4 + 1 = 21
1 1 1 0 0 1 0	= 64 + 32 + 16 + 2 = 114

1 + 1 = dos, que se escribe 10: pongo 0 y reservo para las deutenas el 1, que vale uno en la 2.ª columna.

Uno de la reserva + 1 + 1 = tres, que se escribe 11; pongo 1 y llevo á la 3.ª columna el 1 de reserva que vale en ella uno.

Uno de la reserva + 1 + 1 + 1 = cuatro, que se escribe 100: pongo 0 y llevo á la 4.ª columna 10 de reserva que vale dos.

Dos de la reserva + 1 + 1 = cuatro: pongo 0, y llevo dos.

Dos de la reserva + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = siete, que se escribe así: 111, y lo copio como final de la operación.

Nota. Demuestre el discípulo que está bien la traducción al sistema decimal de los ejemplos siguientes:

Suma en el sistema binario.		Traducción al sistema decimal.
100 11 10 1		
1 1 1 1 0	=	30
1 1 1 1 1	=	31
1 1 1 0 1	=	29
1 1 1 1 0	=	30
1 1 1 0 1	=	29
1 0 0 1 0 1 0 1	=	149

Suma en el sistema binario.		Traducción al sistema decimal.
100 10 11 1		
1 1 0 1 0	=	2 6
1 0 1 0	=	1 0
1 1 1 0	=	1 4
1 1 1 1 1	=	3 1
1 0 1 0	=	1 0
1 1 0 1 1	=	2 7
1 1 1 0 1 1 0	=	1 1 8

Suma en el sistema binario.		Traducción al sistema decimal.
101 11 100 10		
1 1 0 0 1	=	2 5
1 1 1 1	=	1 5
1 0 1 1	=	1 1
1 1 1 0	=	1 4
1 1 1 0	=	1 4
1 0 1 1	=	1 1
1 1 0 1 0	=	2 6
1 1 1 0 1 0 0	=	1 1 6

LECCIÓN VI

Ejercicios de sumar en el sistema ternario,

Número de sus cifras, **tres:** el **1**, el **2** y el **0**.
En el sistema ternario hay:

			Traducción en el sistema decimal.
2	PROTOENAS, ó sea dos múltiplos de la potencia 0 del 3.....	$1 \times 3^0 =$	1
		$2 \times 3^0 =$	2
2	DEUTENAS, ó sea dos múltiplos de la 1.ª potencia del 3......	$1 \times 3^1 =$	3
		$2 \times 3^1 =$	6
2	TRIENAS, ó sea dos múltiplos de la 2.ª potencia del 3......	$1 \times 3^2 =$	9
		$2 \times 3^2 =$	18
2	TETRAENAS, ó sea dos múltiplos de la 3.ª potencia del 3......	$1 \times 3^3 =$	27
		$2 \times 3^3 =$	54
2	PENTAENAS, ó sea dos múltiplos de la 4.ª potencia del 3......	$1 \times 3^4 =$	81
		$2 \times 3^4 =$	162
2	HEXAENAS, ó sea dos múltiplos de la 5.ª potencia del 3......	$1 \times 3^5 =$	243
		$2 \times 3^5 =$	486
2	HEPTAENAS, ó sea dos múltiplos de la 6.ª potencia del 3......	$1 \times 3^6 =$	729
		$2 \times 3^6 =$	1458
2	OCTOEÑAS, etc., etc.		

Por consiguiente:
En el sistema ternario, traducido al decimal,

	En el 1.er lugar vale	En el 2.º lugar vale	En el 3.er lugar vale	En el 4.º lugar vale	En el 5.º lugar vale	En el 6.º lugar vale	En el 7.º lugar vale	En el 8.º lugar vale	En el 9.º lugar vale
Un 1	1	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
Un 2	2	6	18	54	162	486	1 458	4 374	13 122

EJEMPLOS.

Sistema ternario.		Traducción al decimal.		
10 10 2				
1 2 1	=	9 + 6 + 1	=	16
2 0 1	=	18 + 1	=	19
1 1 1 1	=	27 + 9 + 3 + 1	=	40
2 2 2	=	18 + 6 + 2	=	26
2 2 2 2	=	54 + 18 + 6 + 2	=	80
2 0 2 0 1	=	162 + 18 + 1	=	181

1 + 1 + 1 + 2 + 2 = siete; que se escribe 21: pongo el 1 y llevo á la reserva el 2

2 de la reserva + 2 + 1 + 2 + 2 = nueve; que se escribe 100: pongo 0 y llevo 10, á la reserva, que vale tres.

tres de la reserva + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 = once; que se escribe 102: pongo 2 y llevo 10, á la reserva, que vale tres.

tres de la reserva + 1 + 2 = seis; que se escribe 20, y lo pongo completo por final de suma.

Nota. Demuestre el alumno que las siguientes traducciones al sistema decimal están bien hechas.

Sistema ternario.		Traducción al decimal.	
2 10 10		3	
2 0 1 2	=	5 9	
1 2 0 1	=	4 6	
2 1 2 0	=	6 9	
1 2 0 2	=	4 7	
2 0 2 1	=	6 1	
1 0 1 2	=	3 2	
2 0 2 1	= (1 de sobrante	6 1	(6
1 1 1 2 2 0	= (1	3 7 5	(6

Sistema ternario.		Traducción al decimal.	
12 11 10		1	
2 2 2 2	=	8 0	
1 1 1 1	=	4 0	
1 2 1 2	=	5 0	
2 1 2 1	=	7 0	
1 2 2 1	=	5 2	
2 1 1 2	=	6 8	
1 2 1 2	= (0 sobrante	5 0	(5
1 2 0 0 1 2	= (0	4 1 0	(5
10 10 10		5	
1 2 0 2	=	4 7	
2 0 1 1	=	5 8	
1 2 0 2	=	4 7	
2 1 2 0	=	6 9	
2 2 1 2	=	7 7	
1 0 2 0	=	3 3	
2 0 1 2	= (0 sobrante	5 9	(3
1 1 2 1 1 0	= (0 sobrante	3 9 0	(3

Háganse las pruebas de la cifra máxima de estas sumas: fuera del 2 para el sistema ternario, y fuera del 9 para el decimal.

Sistema ternario.		Traducción al decimal.
10 10 2		
2 1 2 1	=	7 0
2 2 2 2	=	8 0
2 1 2 0	=	6 9
2 0 1 1	=	5 8
1 1 0 1	=	3 7
1 1 1 1	=	4 0
1 2 1 2 (0	=	5 0 (8
1 1 2 2 2 2 (0	=	4 0 4 (8

10 10 12 11 12 12 11 10		
2 0 2 2 1 2	=	5 6 3
2 0 0 0 2 1	=	4 9 3
2 2 2 1 2	=	2 3 9
2 1 2 0 1 1 2 1	=	5 6 3 2
2 1 2 1 2 1 2 1	=	5 7 4 0
1 2 1 2 1 2 0 0	=	4 0 9 5
1 1 1 2 2 2 2 0 1	=	1 0 1 9 8
2 1 2 2 2 2 (0	=	6 4 7 (4
1 1 0 1 1 1 2 1 1 1 (0	=	2 7 6 0 7 (4

Sistema ternario.		Traducción al decimal.
10 11 11 10 2 10 10 10		
1 1 1 1 2 0 2 2	=	3 3 0 2
1 2 1 2 2 0 0 0 1	=	1 2 3 1 3
1 2 1 1 1 0 2	=	1 3 3 4
2 1 1 2 0 0 2 1	=	5 5 1 5
2 1 2 2 2 1 2 1 1	=	1 7 4 6 4
2 1 0 0 0 0 0	=	1 7 0 1
2 0 0 0 0 0 2 2 2	=	1 3 1 4 8
1 1 1 1 1 1 1 1 1 (0	=	9 8 4 1 (7
1 0 0 2 1 1 2 2 0 2 1 (0	=	6 4 6 1 8 (7

Para hacer la prueba de la cifra máxima del sistema ternario, se suman los unos y se excluyen los doses, del modo siguiente, aplicado al segundo ejemplo de la pág. 250.

$1 + 1 = 2$; fuera del 2, cero
$1 + 1 = 2$; fuera del 2, cero
$1 + 1 = 2$; fuera del 2, cero
$1 + 1 = 2$; fuera del 2, cero
$+ 1$; queda 1 de sobrante en los sumandos.

La suma, en este caso, da también 1 de sobrante.

Luego la operación está bien efectuada.

Advertencia para los que sepan partir:

La suma de una columna cualquiera en el sistema ternario se parte por tres: el cuociente se guarda para la reserva, y el sobrante se escribe bajo la raya de la suma al pie de la columna respectiva. La reserva puede anotarse en lo alto de la inmediata columna de la izqrierda.

LECCIÓN VII

Ejercicios de sumar en el sistema cuaternario.

Número de las cifras, **cuatro:** el **1**, el **2**, el **3** y el **0**.
En el sistema cuaternario hay:

			Traducción en el sistema decimal.
3	PROTOENAS, ó sea tres múltiplos de la potencia cero del 4......	$1 \times 4^0 =$	1
		$2 \times 4^0 =$	2
		$3 \times 4^0 =$	3
3	DEUTENAS, ó sea tres múltiplos de la 1.ª potencia del 4.......	$1 \times 4^1 =$	4
		$2 \times 4^1 =$	8
		$3 \times 4^1 =$	12
3	TRIENAS, ó sea tres múltiplos de la 2.ª potencia del 4.......	$1 \times 4^2 =$	16
		$2 \times 4^2 =$	32
		$3 \times 4^2 =$	48
3	TETRAENAS, ó sea tres múltiplos de la 3.ª potencia del 4.......	$1 \times 4^3 =$	64
		$2 \times 4^3 =$	128
		$3 \times 4^3 =$	192
3	PENTAENAS, ó sea tres múltiplos de la 4.ª potencia del 4.......	$1 \times 4^4 =$	256
		$2 \times 4^4 =$	512
		$3 \times 4^4 =$	768
3	HEXAENAS, ó sea tres múltiplos de la 5.ª potencia del 4.......	$1 \times 4^5 =$	1 024
		$2 \times 4^5 =$	2 048
		$3 \times 4^5 =$	3 072
3	HEPTAENAS, ó sea tres múltiplos de la 6.ª potencia del 4.......	$1 \times 4^6 =$	4 096
		$2 \times 4^0 =$	8 192
		$3 \times 4^6 =$	12 288

3 OCTOENAS, etc., etc.

Por consiguiente:

En el sistema cuaternario, traducido al decimal,

	En 1.er lugar vale	En 2.º lugar vale	En 3.er lugar vale	En 4.º lugar vale	En 5.º lugar vale	En 6.º lugar vale	En 7.º lugar vale	En 8.º lugar vale
Un 1..........	1	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384
Un 2..........	2	8	32	128	512	2 048	8 192	32 768
Un 3..........	3	12	48	192	768	3 072	12 288	49 152

EJEMPLOS.

Sistema cuaternario.			Traducción al decimal.
$\underbrace{}_{10}\ \underbrace{1}_{3}\ \underbrace{1}_{3}$ 1	=	16 + 4 + 1 =	21
122	=	16 + 8 + 2 =	26
1211	=	64 + 32 + 4 + 1 =	101
313	=	48 + 4 + 3 =	55
1313	=	64 + 48 + 4 + 3 =	119
2331	=	128 + 48 + 12 + 1 =	189
3333 (1	=	192 + 48 + 12 + 3 =	255 (1
23332 (1	=	512 + 192 + 48 + 12 + 2 =	766 (1

1 + 2 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 = catorce, que se escribe 32: pongo 2 y llevo tres de reserva, que vale 3.

3 de la reserva + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 = quince, que se escribe 33: pongo 3 y llevo de reserva tres.

3 de reserva + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = diez y nueve, que se escribe 103: pongo 3 y llevo de reserva 10, que vale cuatro.

4 de reserva + 1 + 1 + 2 + 3 = once, que se escribe 23, y que copio íntegramente por final de suma.

Nota. Demuestre el discípulo que están bien hechas la siguientes traducciones al sistema decimal:

Sistema cuaternario.		Traducción al decimal.
$\underbrace{1}_{10}\ \underbrace{1}_{11}\ \underbrace{1}_{3}$ 1	Sobrante de la cifra máxima.	85
130		28
133		31
1133		95
2312		182
1111		85
2222		170
3331 (2		253 (2
32201 (2		929 (2

Sistema cuaternario.		Traducción al decimal.	
11 10 10			
1 2 0 3		9 9	
1 0 0 3		6 7	
1 3 3 3		1 2 7	
2 3 2 3		1 8 7	
1 2 3 0		1 0 8	
3 3 1 2		2 4 6	
1 1 2		2 2	
3 3 2 1	(1	2 4 9	(7
1 0 1 1 0 1	(1	1 1 0 5	(7
12 11 3			
2 3 3 1		1 8 9	
3 1 3 2		2 2 2	
3 3 2 3		2 5 1	
3 3 3 3		2 5 5	
3 3 2 1		2 4 9	
3 3 3 3		2 5 5	
3 2 1 0		2 2 8	
3 3 2 2	(0	2 5 0	(0
1 3 1 2 2 3	(0	1 8 9 9	(0

Háganse las pruebas de la *cifra máxima*, que es el 3 para las sumas del sistema cuaternario, y el 9 para las del decimal.

Para hacer la prueba de la cifra máxima en el sistema cuaternario se sumarán todas las cifras significativas (menos los 3), y el sobrante de los sumandos (después de excluir 3 siempre que la suma exceda de 3) ha de ser igual al de la suma.

Si los sumandos no dan sobrante, tampoco ha de darlo la suma.

En el primer ejemplo de la página 254 se dirá:

1 y 1 y 1 = 3; fuera de 3, cero.
1 y 2 = 3; íd. de 3, íd.
2 y 1 = 3; íd. de 3, íd.
2 y 1 = 3; íd. de 3, íd.
1 y 1 y 1 = 3; íd. de 3, íd.
1 y 2 = 3; íd. de 3, íd.
1 sobrante de los sumandos

2 y 2 = 4; fuera de 3, 1.

El sobrante de la suma es, pues, igual al de los sumandos; luego la suma operada está exacta.

ADVERTENCIA PARA LOS QUE SEPAN PARTIR.

Para sumar en el sistema cuaternario, se procede como sigue:

1.° Se suma la columna de las protoenas;

2.° Se parte por cuatro, número de cifras que tiene el sistema;

3.° El sobrante, si lo hay, se escribe bajo la raya, al pie de la columna de las mismas protoenas;

4.° El cuociente se lleva de reserva á la columna inmediata de la izquierda, que es la de las deutenas;

5.° Y en seguida se procede con la columna de las deutenas, como se hizo con la de las protoenas...

Y así sucesivamente.

Por tanto, en el último ejemplo de la cuartilla 166 diremos:

$1 + 2 + 3 + 3 + 1 + 3 + 2 =$ quince; quince entre cuatro, á tres, y sobran tres; escribo este sobrante tres bajo la columna de las protoenas, y llevo el cuociente tres como reserva á lo alto de la columna de las deutenas;

Y continúo: $3 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 1 + 2 =$ veinte y dos; veinte y dos entre cuatro, á cinco, y sobran dos; escribo el 2 bajo la columna de las deutenas, y llevo el cuociente 5 (que en el sistema cuaternario se escribe 11) á lo alto de la columna de las trienas, etc., etc.

LECCIÓN VIII

Ejercicios de sumar en el sistema quinario.

Número de las cifras, **cinco:** el **1**, el **2**, el **3**, el **4** y el **0**.
En el sistema quinario hay:

		Traducción al sistema decimal.
4 PROTOENAS, ó sea cuatro múltiplos de la potencia cero del 5...	$1 \times 5^0 =$	1
	$2 \times 5^0 =$	2
	$3 \times 5^0 =$	3
	$4 \times 5^0 =$	4
4 DEUTENAS, ó sea cuatro múltiplos de la 1.ª potencia del 5....	$1 \times 5^1 =$	5
	$2 \times 5^1 =$	10
	$3 \times 5^1 =$	15
	$4 \times 5^1 =$	20
4 TRIENAS, ó sea cuatro múltiplos de la 2.ª potencia del 5....	$1 \times 5^2 =$	25
	$2 \times 5^2 =$	50
	$3 \times 5^2 =$	75
	$4 \times 5^2 =$	100
4 TETRAENAS, ó sea cuatro múltiplos de la 3.ª potencia del 5....	$1 \times 5^3 =$	125
	$2 \times 5^3 =$	250
	$3 \times 5^3 =$	375
	$4 \times 5^3 =$	500
4 PENTAENAS, ó sea cuatro múltiplos de la 4.ª potencia del 5....	$1 \times 5^4 =$	625
	$2 \times 5^4 =$	1 250
	$3 \times 5^4 =$	1 875
	$4 \times 5^4 =$	2 500
4 HEXAENAS, ó sea cuatro múltiplos de la 5.ª potencia del 5....	$1 \times 5^5 =$	3 125
	$2 \times 5^5 =$	6 250
	$3 \times 5^5 =$	9 375
	$4 \times 5^5 =$	12 500

4 HEPTAENAS, etc.

Por consiguiente:

En el sistema quinario, traducido al decimal,

	En el 1.er lugar vale	En el 2.º lugar vale	En el 3.er lugar vale	En el 4.º lugar vale	En el 5.º lugar vale	En el 6.º lugar vale	En el 7.º lugar vale
Un 1................	1	5	25	125	625	3 125	15 625
Un 2................	2	10	50	250	1 250	6 250	31 250
Un 3................	3	15	75	375	1 875	9 375	46 875
Un 4................	4	20	100	500	2 500	12 500	62 500

EJEMPLOS.

Sistema quinario.			Traducción al decimal.
3 10 11 4			
1 1 1	=	25 + 5 + 1 =	3 1
1 2 3	=	25 + 10 + 3 =	3 8
2 3 4	=	50 + 15 + 4 =	6 9
3 4 1	=	75 + 20 + 1 =	9 6
1 2 4 3	=	125 + 50 + 20 + 3 =	1 9 8
2 4 4 4	=	250 + 100 + 20 + 4 =	3 7 4
4 4 4 4	=	500 + 100 + 20 + 4 =	6 2 4
1 4 4 4 4 (5	=	625 + 500 + 100 + 20 + 4 =	1 2 4 9 (6
4 1 2 0 4 (5			2 6 7 9 (6

1 + 3 + 4 + 1 + 3 + 4 + 4 + 4 = veinte y cuatro; que se escribe 44: pongo, pues, el 4 y llevo de reserva 4.

4 de reserva + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = treinta, que se escribe 110: pongo 0 y llevo 11, que vale seis.

6 de la reserva + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 4 + 4 = veinte y siete, que se escribe 102: pongo 2 y llevo de reserva 10, que vale cinco.

5 de reserva + 1 + 2 + 4 + 4 = diez y seis, que se escribe 31: pongo 1 y llevo 3, que vale tres.

3 + 1 = 4; y lo copio por final de suma.

Nota. Demuestre el discípulo que están bien hechas las siguientes traducciones al sistema decimal.

Sistema quinario.	Traducción al decimal.
11 10 10	
1 1 1 1	1 5 6
2 2 2 2	3 1 2
3 3 3 3	4 6 8
4 4 4 4	6 2 4
4 3 2 4	5 8 9
2 4 3 4	3 6 9
1 4 4 4	2 4 9
1 4 2 4 (2	2 3 9 (0
4 4 0 1 1 (2	3 0 0 6 (0

2 4 5 5	
2 3 4	6 9
4 4 3 2 0	3 0 8 5
3 2 2	8 7
4 0 2	1 0 2
2 4 4 4	3 7 4
3 2 4 (2	8 9 (8
1 1 0 2 1 1 (2	3 8 0 6 (8

1 1 3 5 1	
3 4 4	9 9
2 4 0	7 0
4 4 1 4 3 2	1 5 2 4 2
2 4 0 0	3 5 0
2 0 0 0 4 0	6 2 7 0
4 0 0 0 0 0 (3	1 2 5 0 0 (7
2 1 0 1 1 1 1 (3	3 4 5 3 1 (7

Háganse las pruebas de la cifra máxima, que es el 4 para las sumas del sistema quinario, y el 9 para las sumas del decimal.

Para hacer la prueba de la cifra máxima en el sistema quinario se sumarán las cifras significativas (excepto los 4), y el sobrante de los sumandos (después de excluídos los 4) ha de ser igual al sobrante de la suma.

Si los sumandos no dan sobrante, tampoco ha de darlo la suma.

En el ejemplo primero de esta Lección se dirá:

$$
\begin{array}{ll}
1+1+1+1=4; & \text{fuera de 4, cero.} \\
2+3 \qquad\quad =5; & \text{íd. de 4, uno.} \\
1+2+3 \qquad =6; & \text{íd. de 4, dos.} \\
2+3 \qquad\quad =5; & \text{íd. de 4, uno.} \\
1+1+1+2=5; & \text{íd. de 4, uno.} \\
1+3 \qquad\quad =4; & \text{íd. de 4, cero.} \\
2+1 \qquad\quad =3 & \text{sobrante de los sumandos.} \\
\hline
1+2 \qquad\quad =3 & \text{sobrante de la suma.}
\end{array}
$$

A sobrantes iguales, suma buena.

ADVERTENCIA Á LOS QUE YA SABEN LA OPERACIÓN DE PARTIR.

Para sumar en el sistema quinario:

1.° Se suma la columna de los protoenas;

2.° La suma obtenida se parte por cinco, número de cifras del sistema;

3.° Se escribe el sobrante, si lo hay (y si no se pone cero) bajo la raya, al pie de la misma columna;

4.° El cuociente sirve de reserva para la columna de las deutenas, y en las columnas siguientes se procederá de un modo análogo;

5.° En la última columna de la izquierda se escribe íntegramente, según lo exige el sistema quinario, la suma que se obtenga

LECCIÓN IX

Ejercicios de sumar en el sistema senario.

Este sistema tiene **seis** cifras: el **1**, el **2**, el **3**, el **4**, el **5** y el **0**.

En el sistema senario hay:

			Traducción al sistema decimal.
5	PROTOENAS, ó sea cinco múltiplos de la potencia cero del 6....	$1 \times 6^0 =$	1
		$2 \times 6^0 =$	2
		$3 \times 6^0 =$	3
		$4 \times 6^0 =$	4
		$5 \times 6^0 =$	5
5	DEUTENAS, ó sea cinco múltiplos de la 1.ª potencia del 6......	$1 \times 6^1 =$	6
		$2 \times 6^1 =$	12
		$3 \times 6^1 =$	18
		$4 \times 6^1 =$	24
		$5 \times 6^1 =$	30
5	TRIENAS, ó sea cinco múltiplos de la 2.ª potencia del 6......	$1 \times 6^2 =$	36
		$2 \times 6^2 =$	72
		$3 \times 6^2 =$	108
		$4 \times 6^2 =$	144
		$5 \times 6^2 =$	180
5	TETRAENAS, ó sea cinco múltiplos de la 3.ª potencia del 6......	$1 \times 6^3 =$	216
		$2 \times 6^3 =$	432
		$3 \times 6^3 =$	648
		$4 \times 6^3 =$	864
		$5 \times 6^3 =$	1 080
5	PENTAENAS, ó sea cinco múltiplos de la 4.ª potencia del 6......	$1 \times 6^4 =$	1 296
		$2 \times 6^4 =$	2 592
		$3 \times 6^4 =$	3 888
		$4 \times 6^4 =$	5 184
		$5 \times 6^4 =$	6 480
5	HEXAENAS, etc.		

Por consiguiente:

En el sistema senario, traducido al decimal:

	En el 1.er lugar vale	En el 2.º lugar vale	En el 3.er lugar vale	En el 4.º lugar vale	En el 5.º lugar vale	En el 6.º lugar vale	En el 7.º lugar vale
Un 1......	1	6	36	216	1 296	7 776	46 656
Un 2......	2	12	72	432	2 592	15 552	93 312
Un 3......	3	18	108	648	3 888	23 328	139 968
Un 4......	4	24	144	864	5 184	31 104	186 624
Un 5......	5	30	180	1 080	6 480	38 880	233 280

EJEMPLOS.

Sistema senario.		Traducción al decimal.
2 4 3 5		
1 1 4	36 + 6 + 4 =	4 6
1 2 5	36 + 12 + 5 =	5 3
2 4 5	72 + 24 + 5 =	1 0 1
4 5 5	144 + 30 + 5 =	1 7 9
1 5 5 5	216 + 180 + 30 + 5 =	4 3 1
1 2 5 4 5	1 296 + 432 + 180 + 24 + 5 =	1 9 3 7
5 5 5 5 (6	1 080 + 180 + 30 + 5 =	1 2 9 5 (10
3 0 4 1 4 (6		4 0 4 2

4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = treinta y cuatro, que se escribe 54: pongo 4 y llevo 5 de reserva.

5 de reserva + 1 + 2 + 4 + 5 + 5 + 4 + 5 = treinta y uno, que se escribe 51: pongo 1 y llevo 5.

5 + 1 + 1 + 2 + 4 + 5 + 5 + 5 = veinte y ocho, que se escribe 44: pongo 4 y llevo 4.

4 + 1 + 2 + 5 = doce, que se escribe 20: pongo 0 y llevo 2.

2 de reserva y 1 = 3: copio el 3 por final de suma.

Nota. Demuestre el discípulo que están bien hechas las siguientes traducciones al sistema decimal.

Sistema senario.		Traducción al decimal.
2 3 4		
1 1 1	=	4 3
1 2 5 4 5	=	1 9 3 7
4 5 5	=	1 7 9
2 3 4	=	9 4
5	=	5
4 5 (6	=	2 9
1 4 3 3 1 (6		2 2 8 7

Sistema senario.	Traducción al decimal.
4 1 3 2	
2 2 2	8 6
2 0 0 0 0	2 5 9 2
4 4 3 1	1 0 2 7
1 2 3 4	3 1 0
5 0 0 0 0	6 4 8 0
5 5 0 0 0	7 5 6 0
5 5 5 0 0	7 7 4 0
5 5 5 5 0	7 7 7 0
5 5 5 5 5 (6	7 7 7 5 (5
5 1 5 2 2 0 (6	4 1 3 4 0 (5

Háganse las pruebas de la cifra máxima, que es el 5 para las sumas del sistema senario, y el 9 para las del sistema decimal.

La prueba de la cifra máxima del sistema senario se hará sumando las cifras significativas (con exclusión de los 5) que quepan en la suma, y el sobrante que resultare después de estas exclusiones, ha de ser en los sumandos igual al sobrante de la suma.

Si no hay sobrante en los sumandos, tampoco lo ha de haber en la suma.

En el ejemplo primero de esta Lección se dirá:

$1+1+4 = 6$; fuera de 5; uno.
$1+1+2+2 = 6$; íd. de 5; uno.
$1+4 = 5$; íd. de 5; cero.
$4+1 = 5$; íd. de 5; cero.
$1+2+4 = 7$; íd. de 5; dos.
2 es el sobrante de los sumandos.

$3+4 = 7$; fuera de 5, dos; sobrante de la suma.

A sobrantes iguales, suma buena.

ADVERTENCIA Á LOS QUE YA SABEN LA OPERACIÓN DE PARTIR.

Para sumar en el sistema senario:

1.° Se suma la columna de las protoenas;

2.° La suma obtenida se parte por 6, número de cifras del sistema;

3.° Se escribe el sobrante, si lo hay (si no se pone cero) bajo la raya, al pie de la dicha columna;

4.° El cuociente se lleva de reserva á la columna de las deutenas, y en las columnas sucesivas se procederá de un modo análogo;

5.° En la última columna de la izquierda se escribe íntegramente, según lo exige el sistema senario, la suma que se obtenga.

LECCIÓN X

Ejercicios de sumar en el sistema septenario.

Este sistema tiene **siete** cifras: **1, 2, 3, 4, 5, 6** y **0.**
En el sistema septenario hay:

		Traducción al sistema decima
6 PROTOENAS, ó sea seis múltiplos de la potencia cero del 7......	$1 \times 7^0 =$	1
	$2 \times 7^0 =$	2
	$3 \times 7^0 =$	3
	$4 \times 7^0 =$	4
	$5 \times 7^0 =$	5
	$6 \times 7^0 =$	6
6 DEUTENAS, ó sea seis múltiplos de la 1.ª potencia del 7.......	$1 \times 7^1 =$	7
	$2 \times 7^1 =$	14
	$3 \times 7^1 =$	21
	$4 \times 7^1 =$	28
	$5 \times 7^1 =$	35
	$6 \times 7^1 =$	42
6 TRIENAS, ó sea seis múltiplos de la 2.ª potencia del 7.......	$1 \times 7^2 =$	49
	$2 \times 7^2 =$	98
	$3 \times 7^2 =$	147
	$4 \times 7^2 =$	196
	$5 \times 7^2 =$	245
	$6 \times 7^2 =$	294
6 TETRAENAS, ó sea seis múltiplos de la 3.ª potencia del 7.......	$1 \times 7^3 =$	343
	$2 \times 7^3 =$	686
	$3 \times 7^3 =$	1 029
	$4 \times 7^3 =$	1 372
	$5 \times 7^3 =$	1 715
	$6 \times 7^3 =$	2 058
6 PENTAENAS, ó sea seis múltiplos de la 4.ª potencia del 7.......	$1 \times 7^4 =$	2 401
	$2 \times 7^4 =$	4 802
	$3 \times 7^4 =$	7 203
	$4 \times 7^4 =$	9 604
	$5 \times 7^4 =$	12 005
	$6 \times 7^4 =$	14 406

6 **HEXAENAS, etc., etc.**

Por consiguiente:

En el sistema septenario, traducido al decimal,

	En el 1.er lugar vale	En el 2.º lugar vale	En el 3.er lugar vale	En el 4.º lugar vale	En el 5.º lugar vale	En el 6.º lugar vale	En el 7.º lugar vale
Un 1......	1	7	49	343	2 401	16 807	117 649
Un 2......	2	14	98	686	4 802	33 614	235 298
Un 3......	3	21	147	1 029	7 203	50 421	352 947
Un 4......	4	28	196	1 372	9 604	67 228	470 596
Un 5......	5	35	245	1 715	12 005	84 035	588 245
Un 6......	6	42	294	2 058	14 406	100 842	705 894

EJEMPLOS.

Sistema septenario.		Traducción al decimal.
$\underbrace{1}_{}^{5}\ \underbrace{1}_{}^{10}$ ... $\overset{5}{1}\ \overset{10}{1}\ 6$	$= 49 + 7 + 6 =$	6 2
1 1 6	$= 49 + 7 + 6 =$	6 2
1 2 6	$= 49 + 14 + 6 =$	6 9
2 3 6	$= 98 + 21 + 6 =$	1 2 5
3 4 6	$= 147 + 28 + 6 =$	1 8 1
4 5 6	$= 196 + 35 + 6 =$	2 3 7
5 6 6	$= 245 + 42 + 6 =$	2 9 3
6 6 6	$= 294 + 42 + 6 =$	3 4 2
6 6 6 (3	$= 294 + 42 + 6 =$	3 4 2 (3
4 6 6 5 (3	=	1 7 1 3 (5

6 + 6 + 6 + ... = cincuenta y cuatro, que se escribe 105: pongo 5 y llevo 10, que vale siete.

7 de reserva + 1 + 1 + 2 + ... = cuarenta y uno, que se escribe 56: pongo 6 y llevo cinco.

5 de reserva + 1 + 1 + 1 + 2 + ... = treinta y cuatro, que se escribe 46, y lo copio por final de suma.

NOTA. Compruebe el discípulo si están bien hechas las traducciones siguientes al sistema decimal:

Sistema septenario.	Traducción al decimal.
$\overset{4}{1}\ \overset{5}{2}\ \overset{4}{4}\ 5$	4 7 4
6 5 2	3 3 1
2 3 4 5	8 6 6
6 6 6	3 4 2
3 3 3	1 7 1
6 4	4 6
3 3 3 3	1 2 0 0
6 4 2 (4	3 2 4 (1
1 3 6 4 2 (1	3 7 5 4 (1

Sistema septenario.	Traducción al decimal.
3 5 4 3	
633	318
426	216
16542	4734
16542	4734
16542	4734
334	172
251	134
10251 (3	2535 (0
102150 (3	17577 (0
1 2 2 3	
444	228
3521	1,289
225	117
326	167
21	15
21006	5151
21021	5160
21000 (4	5145 (1
101233 (4	17272 (1
3 3 5	
125	68
526	265
666	342
66	48
406	202
555	285
1214 (0 sobrante	452 (6
4563 (0	1662 (6
12 10 6	
2646	1014
4600	1666
1666	665
600	294
666	342
666	342
2666	1028
4655	1706
666	342
5666 (2 sobrante	2057 (8
36425 (2	9476 (8

	Traducción al sistema decimal.
7 PENTAENAS, ó sea siete múltiplos de la 4.ª potencia del 8....... $1 \times 8^4 =$	4 096
$2 \times 8^4 =$	8 192
$3 \times 8^4 =$	12 288
$4 \times 8^4 =$	16 384
$5 \times 8^4 =$	20 480
$6 \times 8^4 =$	24 576
$7 \times 8^4 =$	28 672

7 HEXAENAS, etc., etc.

Por consiguiente:

En el sistema octonario, traducido al decimal,

	En el 1.er lugar vale	En el 2.º lugar vale	En el 3.er lugar vale	En el 4.º lugar vale	En el 5.º lugar vale	En el 6.º lugar vale	En el 7.º lugar vale
Un 1.....	1	8	64	512	4 096	32 768	262 144
Un 2.....	2	16	128	1 024	8 192	65 536	524 288
Un 3.....	3	24	192	1 586	12 288	98 304	786 432
Un 4.....	4	32	256	2 048	16 384	131 072	1 048 576
Un 5.....	5	40	320	2 560	20 480	163 840	1 310 720
Un 6.....	6	48	384	3 072	24 576	196 608	1 572 864
Un 7.....	7	56	448	3 584	28 672	229 376	1 835 008

EJEMPLOS.

Sistema octonario.		Traducción al decimal.
6 7		
1 1 7	= 64 + 8 + 7 =	7 9
1 2 7	= 64 + 16 + 7 =	8 7
2 3 7	= 128 + 24 + 7 =	1 5 9
3 4 7	= 192 + 32 + 7 =	2 3 1
4 5 7	= 256 + 40 + 7 =	3 0 3
5 6 7	= 320 + 48 + 7 =	3 7 5
7 7 7	= 448 + 56 + 7 =	5 1 1
7 7 7	= 448 + 56 + 7 =	5 1 1
7 7 7 (3	= 448 + 56 + 7 =	5 1 1 (4
5 3 1 7 (3		2 7 6 7 (4

7 + 7 + 7 ... = sesenta y tres, que se escribe 77: pongo 7 y llevo 7.

7 de reserva + 1 + 2 + ... = cuarenta y nueve, que se escribe 61: pongo 1 y llevo 6.

6 de reserva + 1 + 1 + ... cuarenta y tres, que se escribe 53 y lo copio por final.

NOTA. Demuestre el discípulo que están bien hechas las siguientes traducciones al sistema decimal:

Sistema octonario.	Traducción al decimal.
3 3	
7 7	6 3
7 7 7	5 1 1
1 7 2	1 2 2
2 3 5	1 5 7
5 5 7	3 6 7
6 0 7	3 9 1
7 7 7 (1	5 1 1 (7
4 1 1 2 (1	2 1 2 2 (7

Sistema octonario.	Traducción al decimal.
3 7	6 6
7 7 7	5 1 1
7 0 0	4 4 8
2 2 7	1 5 1
7 1 7	4 6 3
7 0 0	4 4 8
7 2 6	4 7 0
7 0 0	4 4 8
7 4 7	4 8 7
7 3 7	4 7 9
7 0 0	4 4 8
7 7 7	5 1 1
7 0 0	4 4 8
7 7 7	5 1 1
7 7 7 (6	5 1 1 (7
1 4 2 7 6 (8	6 3 3 4 (7

ADVERTENCIAS Á LOS QUE SEPAN DIVIDIR PARA SUMAR EN EL SISTEMA OCTONARIO.

1.ª Se suma la columna de las protoenas.

2.ª La suma obtenida se parte por 8, número de cifras del sistema.

3.ª Se escribe el sobrante ó residuo, si lo hay (si no se pone cero), bajo la raya al pie de dicha columna.

4.ª El cuociente se lleva de reserva á la columna de las deutenas, y en las columnas sucesivas de trienas, tetraenas, etcétera, se procederá de un modo análogo. Si no hay cuociente, no hay reserva.

5.ª En la última columna de la izquierda se escribe íntegramente, según lo exige el sistema octonario, la suma que se obtenga.

PRUEBA DE LA CIFRA MÁXIMA.

En el sistema octonario se suman las cifras de los guarismos (como en los otros sistemas) por su valor absoluto (no locativo), y se excluyen los 7.

El sobrante de los sumandos (si lo hay) ha de ser igual al de la suma.

En el ejemplo primero de esta Lección, se dirá:

1 + 1 + 1 + 2 + 2	= 7; fuera de 7, cero.
3 + 3 + 4	= 10; íd. íd. íd. tres.
3 + 4	= 7; íd. íd. íd. cero.
5 + 5	= 10; íd. íd. íd. tres.
3 + 6	= 9; íd. íd. íd. dos.
2	es el sobrante de los sumandos.
5 + 3 + 1	= 9; fuera de 7, dos.

Igualdad de sobrantes, suma buena.

LECCIÓN XII

Ejercicios de sumar en el sistema nonario.

Este sistema tiene nueve cifras: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** y **0.**
En el sistema nonario hay:

		Traducción al sistema decimal.
8 PROTOENAS, ó sea ocho múltiplos de la potencia cero del 9......	$1 \times 9^0 =$	1
	$2 \times 9^0 =$	2
	$3 \times 9^0 =$	3
	$4 \times 9^0 =$	4
	$5 \times 9^0 =$	5
	$6 \times 9^0 =$	6
	$7 \times 9^0 =$	7
	$8 \times 9^0 =$	8
8 DEUTENAS, ó sea ocho múltiplos de la 1.ª potencia del 9......	$1 \times 9^1 =$	9
	$2 \times 9^1 =$	18
	$3 \times 9^1 =$	27
	$4 \times 9^1 =$	36
	$5 \times 9^1 =$	45
	$6 \times 9^1 =$	54
	$7 \times 9^1 =$	63
	$8 \times 9^1 =$	72
8 TRIENAS, ó sea ocho múltiplos de la 2.ª potencia del 9......	$1 \times 9^2 =$	81
	$2 \times 9^2 =$	162
	$3 \times 9^2 =$	243
	$4 \times 9^2 =$	324
	$5 \times 9^2 =$	405
	$6 \times 9^2 =$	486
	$7 \times 9^2 =$	567
	$8 \times 9^2 =$	648
8 TETRAENAS, ó sea ocho múltiplos de la 3.ª potencia del 9......	$1 \times 9^3 =$	729
	$2 \times 9^3 =$	1 458
	$3 \times 9^3 =$	2 187
	$4 \times 9^3 =$	2 916
	$5 \times 9^3 =$	3 645
	$6 \times 9^3 =$	4 374
	$7 \times 9^3 =$	5 103
	$8 \times 9^3 =$	5 832

		Traducción al sistema decimal.
8 **Pentaenas**, ó sea ocho múltiplos de la 4.ª potencia del 9	$1 \times 9^4 =$	6 561
	$2 \times 9^4 =$	13 122
	$3 \times 9^4 =$	19 683
	$4 \times 9^4 =$	26 244
	$5 \times 9^4 =$	32 805
	$6 \times 9^4 =$	39 366
	$7 \times 9^4 =$	45 927
	$8 \times 9^4 =$	52 488

8 **Hexaenas**, etc.

Por consiguiente:

En el sistema nonario, traducido al decimal,

	En el 1.er lugar vale	En el 2.o lugar vale	En el 3.er lugar vale	En el 4.o lugar vale	En el 5.o lugar vale	En el 6.o lugar vale	En el 7.o lugar vale
Un 1......	1	9	81	729	6 561	59 049	531 441
Un 2......	2	18	162	1 458	13 122	118 098	1 062 882
Un 3......	3	27	243	2 187	19 683	177 147	1 594 323
Un 4......	4	36	324	2 916	26 244	236 196	2 125 764
Un 5......	5	45	405	3 645	32 805	295 245	2 657 205
Un 6......	6	54	486	4 374	39 366	354 294	3 188 646
Un 7......	7	63	567	5 103	45 927	413 343	3 720 087
Un 8......	8	72	648	5 832	52 488	472 392	4 251 528

EJEMPLOS.

Sistema nonario.		Traducción al decimal.
6 7		
8 8	= 72 + 8 =	80
1 8 7	= 81 + 72 + 7 =	160
3 8 8	= 243 + 72 + 8 =	323
7 8	= 63 + 8 =	71
8 1 8	= 648 + 9 + 8 =	665
4 8	= 36 + 8 =	44
3 8	= 27 + 8 =	35
7 8	= 63 + 8 =	71
2 6 8 (1	= 162 + 54 + 8 =	224 (8
2 2 5 8 (1		1 673 (8

8 + 7 ... = Setenta y uno; que se escribe 78; pongo 8 y llevo 7.

7 de reserva + 8 + 8 + ... Cincuenta y nueve; que se escribe 65; pongo 5 y llevo 6.

6 de reserva + 1 + 3 + ... Veinte; que se escribe 22; y lo copio por final.

Nota. Compruebe el discípulo si están bien hechas las siguientes traducciones al sistema decimal.

Sistema nonario.		Traducción al decimal.	
4 3			
3 4 3		2 8 2	
5 7 8		4 7 6	
6 4 8		5 3 0	
3 2 1		2 6 2	
4 5 6		3 7 5	
7 8 0		6 3 9	
3 4 5		2 8 4	
5 6 4	(7	4 6 3	(8
4 4 7 8	(7	3 3 1 1	(8

Sistema nonario.		Traducción al decimal.	
7 6			
5 6 7		4 6 6	
8 0 4		6 5 2	
6 8 4		5 6 2	
8 8 7		7 2 7	
7 8 8		6 4 7	
5 5 6		4 5 6	
8 7 5		7 1 6	
4 6 6		3 8 4	
6 7 8		5 5 7	
5 6 8	(5	4 6 2	(4
7 6 4 4	(5	5 6 2 9	(4

Sistema nonario.		Traducción al decimal.	
3 3 5			
3 5 4 3		2 6 3 1	
7 8 1 2		5 7 6 2	
4 3 2 4		3 1 8 1	
5 6 7 8		4 2 0 2	
3 4 5		2 8 4	
6 4		5 8	
4 3 2 6		3 1 8 3	
3 0 7		2 5 0	
2 8		2 6	
3	(4	3	(5
2 8 7 6 5	(4	1 9 5 8 0	(5

Haga el discípulo la prueba de la cifra máxima.

En el ejemplo primero de esta Lección, se dirá (dejando de contar los 8):

$1+7$	$= 8$;	fuera de	8, cero.
$3+7$	$= 10$;	íd.	8, dos.
$2+1+4+3$	$= 10$;	íd.	8, dos.
$2+7$	$= 9$;	íd.	8, uno.
$1+2+6$	$= 9$;	íd.	8, uno.
1	sobrante final de los sumandos.		
$2+2+5$	$= 9$;	fuera de	8, uno, sobrante de la suma.

Y á igualdad de sobrantes, suma buena.

ADVERTENCIA Á LOS QUE SEPAN DIVIDIR.

Para sumar en el sistema nonario ó novenario se tendrá presente:

1.º Que ha de empezarse sumando la columna de las protoenas;

2.º La suma obtenida se parte por 9, número de cifras del sistema;

3.º Se escribe el sobrante ó residuo, si lo hay (si no, se pone cero), bajo la raya al pie de dicha columna;

4.º El cuociente se lleva de reserva á la columna de las deutenas; y en las sucesivas columnas de trienas, tetraenas... se procede de un modo análogo. Si no hay cuociente, no hay reserva; y

5.º En la última columna de la izquierda se escribe íntegramente, según lo exige el sistema nonario, la suma que se obtenga.

LECCIÓN XIII

Ejercicios de sumar en el sistema decimal.

Este sistema tiene **diez** cifras: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** y **0.**

En el sistema decimal hay:

		Traducción al sistema decimal.
9 PROTOENAS, ó sea nueve múltiplos de la potencia cero del 10..	$1 \times 10^0 =$	1
	$2 \times 10^0 =$	2
	$3 \times 10^0 =$	3
	$4 \times 10^0 =$	4
	$5 \times 10^0 =$	5
	$6 \times 10^0 =$	6
	$7 \times 10^0 =$	7
	$8 \times 10^0 =$	8
	$9 \times 10^0 =$	9
9 DEUTENAS, ó sea nueve múltiplos de la 1.ª potencia del 10...	$1 \times 10^1 =$	10
	$2 \times 10^1 =$	20
	$3 \times 10^1 =$	30
	$4 \times 10^1 =$	40
	$5 \times 10^1 =$	50
	$6 \times 10^1 =$	60
	$7 \times 10^1 =$	70
	$8 \times 10^1 =$	80
	$9 \times 10^1 =$	90
9 TRIENAS, ó seá nueve múltiplos de la 2.ª potencia del 10...	$1 \times 10^2 =$	100
	$2 \times 10^2 =$	200
	$3 \times 10^2 =$	300
	$4 \times 10^2 =$	400
	$5 \times 10^2 =$	500
	$6 \times 10^2 =$	600
	$7 \times 10^2 =$	700
	$8 \times 10^2 =$	800
	$9 \times 10^2 =$	900

9 TETRAENAS, etc., etc.

Por consiguiente:
En el sistema decimal

	En el 1.er lugar vale	En el 2.º lugar vale	En el 3.er lugar vale	En el 4.º lugar vale	En el 5.º lugar vale	En el 6.º lugar vale	En el 7.º lugar vale
Un 1......	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1000000
Un 2......	2	20	200	2 000	20 000	200 000	2000000
Un 3......	3	30	300	3 000	30 000	300 000	3000000
Un 4......	4	40	400	4 000	40 000	400 000	4000000
Un 5......	5	50	500	5 000	50 000	500 000	5000000
Un 6......	6	60	600	6 000	60 000	600 000	6000000
Un 7......	7	70	700	7 000	70 000	700 000	7000000
Un 8......	8	80	800	8 000	80 000	800 000	8000000
Un 9......	9	90	900	9 000	90 000	900 000	9000000

Sistema decimal.

EJEMPLOS.

```
 5 4
   3 9
 2 5 6
 9 9 0
   1 9
   9 4
   3 9
   9 4
   6 2
   6 0  (6
-------
1 6 5 3  (8
```

$9 + 6 + \ldots =$ cuarenta, que se escribe 43: pongo 3 y llevo 4.

$4 + 3 + 5 + \ldots =$ cincuenta y cinco, que se escribe 55: pongo 5 y llevo 5.

$5 + 2 + 9 =$ diez y seis, que se escribe 16: y lo copio por final.

Haga el discípulo estas sumas:

```
   3 4 6 7 8
  9 9 6 3 3 6
 8 1 6 4 6 1 1
  5 1 0 4 5 6
  7 8 9 4 7 6
 2 7 8 6 6 4 7
  7 2 1 8 6 3
  5 3 1 4 2 1
 -------------
```

```
     3 4 6 4 7 8
     7 8 4 3 2 2
     2 2 4 5 7 9
 6 4 1 4 4 6 7 1 7
   7 7 6 4 8 8 0
   5 5 5 4 4 5 1
   3 9 8 4 7 3 2
 -----------------
```

```
    3 8 4
  6 6 6 3
  7 2 4 6
  6 8 4 5
6 1 3 2 1
  6 1 2 9
  9 9 4 6
9 9 9 9 9
  1 3 4 9
---------
```

La prueba de los 9 en el primer ejemplo de los anteriores es como sigue:

$3 + 2 + 5 \qquad\quad = 10$; fuera de 9, uno
$1 + 6 + 1 + 4 = 12$; íd. de 9, tres
$8 + 3 + 4 \qquad\quad = 10$; íd. de 9, uno
$1 + 6 + 2 \qquad\quad = \ \ 9$; íd. de 9, cero
6 sobrante de los sumandos

$1 + 6 + 5 + 3 = 15$; fuera de 9, seis.

Igualdad de sobrantes, suma buena.

Las pruebas de la cifra máxima en el sistema decimal se harán sumando todas las cifras significativas, según su valor absoluto (no locativo) y excluyendo los 9 (ó las combinaciones evidentes que sumen 9). El sobrante que resultare después de hechas las exclusiones, ha de ser en los sumandos igual al sobrante de la suma.

Si no hay sobrante en los sumandos, tampoco lo ha de haber en la suma.

ADVERTENCIAS Á LOS QUE SEPAN DIVIDIR.

Para sumar en el sistema decimal se ha de tener presente:

1.ª Que ha de empezarse sumando la columna de las protoenas;

2.ª La suma obtenida se parte por 10, número de cifras que tiene el sistema;

3.ª Se escribe el sobrante ó resíduo, si lo hay (si no, se pone cero) bajo la raya al pie de dicha columna;

4.ª El cuociente se lleva de reserva á la columna de las deutenas; y en las sucesivas columnas de trienas, tetraenas... se procede de un modo análogo. Si no hay cuociente, no hay reserva; y

5.ª En la última columna de la izquierda se escribe íntegramente, según lo exige el sistema decimal, la suma que se obtenga.

LECCIÓN XIV

Ejercicios de sumar en los sistemas undecimal y duodecimal.

El undecimal tiene **once** cifras: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a (= 10)** y **cero**.

El duodecimal **doce** cifras: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a b (= 11)** y **cero**.

Poco esfuerzo de generalización bastará para comprender que el undecimal tiene diez protoenas ó múltiplos de 11^0; diez deutenas ó múltiplos de 11^1; diez trienas ó múltiplos de 11^2; diez tetraenas ó múltiplos de 11^3... etc., etc.;

Y que el duodecimal tiene once múltiplos de 12^0; once de 12^1; once de 12^2; once de 12^3; once de 12^4... etc., etc.;

Así como cuál ha de ser la manera de hacer las pruebas de la cifra máxima en ambos sistemas; la de *a* (=10) en el undecimal, y la de *b* (=11) en el duodecimal.

Lo que conviene ya en estos sistemas es la práctica; y, al efecto, se presentan los ejercicios siguientes:

Sistema undecimal.			Traducción al decimal.
4 5 6			
1 9 a	=	121 + 99 + 10 =	2 3 0
a	=	10 =	1 0
2 9 4	=	242 + 99 + 4 =	3 4 5
a 3 5	=	1 210 + 33 + 5 =	1 2 4 8
1 4 7 8	=	1 331 + 484 + 77 + 8 =	1 9 0 0
a 9 9	=	1 210 + 99 + 9 =	1 3 1 8
a a a	=	1 210 + 110 + 10 =	1 3 3 0
a a a (1	=	1 210 + 110 + 10 =	1 3 3 0 (7
5 8 8 0 (1			7 7 1 1 (7

a + a + ... = sesenta y seis, que se escribe 60: pongo 0 y llevo 6.

6 de reserva + 9 + ... = sesenta y tres, que se escribe 58: pongo 8 y llevo 5.

5 + 1 + 2 + ... cincuenta y dos, que se escribe 48: pongo 8 y llevo 4.

4 + 1 = 5, y escribo este 5 por final de suma.

Nota. Demuestre el discípulo que están bien hechas las siguientes traducciones al sistema decimal.

Sistema undecimal.	Traducción al decimal.
6 5 5	
7 9 a a	1 0 5 2 6
3 4 6	4 1 3
8 a 7	1 0 8 5
6 6 6	7 9 8
2 a 6 8	3 9 4 6
3 9 4 8	5 1 3 4
a a 6	1 3 2 6
6 a 9 (3	8 4 5 (7
1 7 0 a 5 (3	2 4 0 7 3 (7
5 6 5	
3 4 7 8	4 5 6 2
a a 8	1 3 2 8
a a a	1 3 3 0
a a a	1 3 3 0
a a a	1 3 3 0
1 1 8 9	1 5 4 9
9 9 9 (6	1 1 9 7 (8
9 5 3 9 (6	1 2 6 2 6 (8

PRUEBA DE LA CIFRA MÁXIMA.

En el sistema undecimal se suman las cifras de los guarismos, como en los otros sistemas, por su valor absoluto (no locativo) y se excluyen las *a*, ó sean los dieces.

El sobrante de los sumandos (si los hay) ha de ser igual al de la suma.

En el ejemplo primero se dirá:

	$1+9=10$;	fuera de 10, cero
	$2+9=11$;	íd. de 10, uno
	$1+4+3+5=13$;	íd. de 10, tres
	$3+1+4+7=15$;	íd. de 10, cinco
	$5+8=13$;	íd. de 10, tres
	$3+9=12$;	íd. de 10, dos
	$2+9=11$;	íd. de 10, uno
1		sobrante de los sumandos.
	$5+8=13$;	fuera de 10, tres.
	$3+8=11$;	íd. de 10, uno.
		1, sobrante de la suma.

Sobrantes iguales, suma buena.

ADVERTENCIAS Á LOS QUE SEPAN DIVIDIR, PARA SUMAR EN EL SISTEMA UNDECIMAL.

1.ª Se empezará sumando la columna de las protoenas;

2.ª La suma obtenida se parte por 11, número de cifras del sistema;

3.ª Se escribe el sobrante ó resíduo, si lo hay (si no, se pone cero), bajo la raya al pie de dicha columna;

4.ª El cuociente se lleva de reserva á la columna de las deutenas; y en las sucesivas columnas de trienas, tetraenas... se procede de un modo análogo. Si no hay cuociente, no hay reserva; y

5.ª Bajo la última columna de la izquierda se escribe íntegramente, según lo exige el sistema undecimal, la suma que se obtenga.

EJEMPLOS.

Sistema duodecimal.			Traducción al decimal.	
5 5				
2 9 b		= 288 + 108 + 11 =	4 0 7	
a b		= 120 11 =	1 3 1	
1 b a		= 144 + 132 + 10 =	2 8 6	
2 3 4		= 288 + 36 + 4 =	3 2 8	
b a 6		= 1 584 + 120 + 6 =	1 7 1 0	
b b		= 132 + 11 =	1 4 3	
b b b	(2	= 1 584 + 132 + 11 =	1 7 2 7	(7
2 8 a 4	(2		4 7 3 2	(7

b + b + a + ... = sesenta y cuatro, que se escribe 54: pongo 4 y llevo 5.

5 + 9 + a + ... = setenta, que se escribe 5 a: pongo a y llevo 5.

5 + 2 + 1 + ... = treinta y dos, que se escribe 28, y lo copio por final.

Sistema duodecimal.		Traducción al decimal.	
4 5 5			
a b 4 3		1 8 9 1 5	
3 4 a b		5 8 9 1	
7 7 4		1 0 9 6	
3 4 b		4 9 1	
7 b a		1 1 5 0	
2 3 9 5		4 0 0 1	
4 3 a		6 2 2	
b b b	(2	1 7 2 7	(8
1 7 7 4 5	(2	3 3 8 9 3	(8

5 6			
3 4 b		4 9 1	
a b		1 3 1	
b a		1 4 2	
2 3 b		3 3 5	
b a b		1 7 1 5	
a b a		1 5 8 2	
3 4		4 0	
9 9 9	(8	1 4 1 3	(8
3 4 7 5	(8	5 8 4 9	(8

PRUEBA DE LA CIFRA MÁXIMA.

En el sistema duodecimal se suman las cifras de los guarismos, por su valor absoluto (no locativo) y se excluyen las *b* ó sean los onces.

El sobrante de los sumandos (si lo hay) ha de ser igual al de la suma.

En el primer ejemplo anterior duodecimal, se dirá:

$2 + 9 = 11$;	fuera de 11, cero
$10 + 1 = 11$;	íd. de 11, cero
$10 + 2 = 12$;	íd. de 11, uno
$1 + 3 + 4 + 10 = 18$;	íd. de 11, siete
$7 + 6 = 13$;	íd. de 11, dos
2	sobrante de los sumandos.
$2 + 8 + a = 20$;	fuera de 11, nueve
$9 + 4 = 13$;	íd. de 11, dos
2	sobrante de la suma.

Sobrantes iguales, suma buena.

ADVERTENCIAS Á LOS QUE SEPAN DIVIDIR, PARA SUMAR EN EL SISTEMA DUODECIMAL.

1.ª Se empezará sumando la columna de las protoenas;

2.ª La suma obtenida se parte por 12, número de cifras del sistema;

3.ª Se escribe el sobrante ó resíduo, si lo hay (si no, se pone cero), bajo la raya al pie de dicha columna;

4.ª El cuociente se lleva de reserva á la columna de las deutenas; y en las sucesivas columnas de trienas, tetraenas... se procede de un modo análogo. Si no hay cuociente, no hay reserva; y

5.ª Bajo la última columna de la izquierda se escribe íntegramente, según lo exige el sistema duodecimal, la suma que se obtenga.

LECCIÓN XV

Clases de sumas y medios gráficos de consignar las reservas.

Ya el discípulo conoce la principal de las varias clases de sumas, que es la que sirve de base á los sistemas de numeración.

En efecto, todo guarismo es una suma de productos ordenados de mayor á menor, cuyos factores son, de una parte, las potencias sucesivas del número de las cifras de un sistema; y de otra parte, como coeficiente, alguno de sus dígitos.

Así, cualquier guarismo del sistema decimal es una suma de productos dispuestos de mayor á menor, cuyos factores son, de una parte, las potencias del 10, y de otra parte, alguno de los dígitos del mismo sistema decimal.

$$\begin{aligned} 34\,567 &= 30\,000 + 4\,000 + 500 + 60 + 7 \\ &= 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \end{aligned}$$

Tantos productos ó sumandos, como dígitos hay en el guarismo.

Conocida ya esta clase esencial de sumas, falta sólo enumerar las otras clases, que son tres:

1.ª Suma de sumandos desiguales;

2.ª Suma de sumandos iguales todos; y

3.ª Suma de sumandos todos iguales, menos uno menor.

EJEMPLOS EN EL SISTEMA DECIMAL

Sumandos desiguales.	Sumandos iguales.	Sumandos todos iguales menos uno menor.
38	38	38
85 647	38	38
10 004 714	38	38
819	38	38
246	38	38
8 723 103	38	14

En las sumas de sumandos desiguales puede haberlos iguales por casualidad, sin que por tal accidente se altere la clasificación.

342
2417
568
342
7684
342

Las sumas de productos de potencias ordenados de mayor á menor son la base esencial de los sistemas de numeración.

Las sumas de sumandos iguales dan origen á la operación de multiplicar.

Y las sumas de sumandos todos iguales menos uno menor, son el fundamento de la operación de partir.

Por manera, que sólo las sumas de sumandos todos desiguales (ó algunos iguales por casualidad) son el objeto exclusivo de la verdadera operación de sumar, ó sea INTEGRACIÓN.

El *modus operandi* del sumar es el usual y corriente, y el generalmente empleado, porque da de una vez la suma. Pero pudiera haber otros, como el siguiente, que algunos recomiendan especialmente para las sumas largas, porque facilita el repaso, pero con el inconveniente de requerir otra suma, y el de haber de escribir muchas más cifras. Además, mientras mayor es el número de las operaciones y el de los signos escritos, mayor resulta la posibilidad de nuevas equivocaciones, más largo el tiempo necesario para cada operación, y, por consiguiente, mayor la fatiga del trabajo. No obstante, el procedimiento es recomendable.

Sean los siguientes sumandos del sistema decimal: súmese cada columna y anótese debajo el resultado bajo la raya: súmense, por fin, las sumas parciales.

		6	4	8	7	
		5	3	9	2	
		4	5	7	8	
		9	1	9	9	
		8	7	8	8	
		9	9	9	7	
		4	6	6	8	
		8	6	4	9	
		9	9	9	9	
		9	9	9	9	
		9	9	8	8	
		8	8	8	8	
		7	7	7	7	
		9	8	7	9	
		7	8	9	9	
		9	7	8	8	
		9	9	4	7	
			1	3	2	Suma de las protoenas
		1	2	9		Suma de las deutenas
	1	1	5			Suma de las trienas
1	2	9				Suma de las tetraenas
1	4	1	9	2	2	Suma de las sumas de protoenas deutenas trienas tetraenas

En esta suma de las sumas parciales de las columnas ha habido abreviación; pues en rigor, el nuevo *modus operandi* habría exigido que tales sumas parciales se hubiesen sumado como sigue:

132	protoenas
129	deutenas
115	trienas
129	tetraenas
2	protoenas
12	deutenas
8	trienas
11	tetraenas
3	pentaenas
1	hexaenas
141922	

Por supuesto, que no es necesario en esta manera de operar empezar por las protoenas ni seguir orden ninguno: basta con sumar aisladamente las columnas y sumar después las sumas parciales.

```
      6 4 8 7                      6 4 8 7
      5 3 9 2                      5 3 9 2
      4 5 7 8                      4 5 7 8
      9 1 9 9                      9 1 9 9
      8 7 8 8                      8 7 8 8
      9 9 9 7                      9 9 9 7
      4 6 6 8                      4 6 6 8
      8 6 4 9                      8 6 4 9
      9 9 9 9                      9 9 9 9
      9 9 9 9                      9 9 9 9
      9 9 8 8                      9 9 8 8
      8 8 8 8                      8 8 8 8
      7 7 7 7                      7 7 7 7
      9 8 7 9                      9 8 7 9
      7 8 9 9                      7 8 9 9
      9 7 8 8                      9 7 8 8
      9 9 4 7                      9 9 4 7
  -----------                  -----------
    1 2 9     tetraenas          1 1 5     trienas
      1 1 5   trienas                1 3 2 protoenas
        1 3 2 protoenas            1 2 9   deutenas
      1 2 9   deutenas           1 2 9     tetraenas
  -----------                  -----------
  1 4 1 9 2 2                  1 4 1 9 2 2
```

Pero, fácil es de comprender que toda falta de orden sería siempre una perturbación; y que, por tanto, nada es mejor que el sistema de reservas en uso general.

```
  12 14 15
  6  4  8 7
  5  3  9 2
  4  5  7 8
  9  1  9 9
  8  7  8 8
  9  9  9 7
  4  6  6 8
  8  6  4 9
  9  9  9 9
  9  9  9 9
  9  9  8 8
  8  8  8 8
  7  7  7 7
  9  8  7 9
  7  8  9 9
  9  7  8 8
  9  9  4 7
-----------
1 4 1 9 2 2
```

El sistema de las reservas merece algunas consideraciones.

La reserva de las protoenas aparece siempre englobada en lo alto de las deutenas; englobada también se estampa la de las deutenas en lo alto de las trienas, y siempre englobada la de cualquier columna en lo alto de la siguiente.

Pero puede convenir el conocer en sus menores detalles la composición de las reservas; y por esto, y, más que por ello, por ser un fácil medio de comprobación (facilísimo), recomiendan muchos, con fundamento, el siguiente modo de operar.

Supongamos los siguientes sumandos del sistema cuaternario:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

Y se dirá:

1 y 1 son 2, y 2 son 4 (que es el número de las cifras que tiene el sistema cuaternario): se hará una señal al 2, por ejemplo, un tilde (ó se cruzará con una raya oblícua, ó se tachará de algún otro modo):

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2' \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

y se sigue diciendo:

3 y 3 son 6: pónese otra señal, por ejemplo, otro tilde, al segundo 3 porque 6 es un número mayor que el de las cifras componentes del sistema cuaternario, pues es igual á una vez ese número + un excedente de 2:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2' \\ 3 \\ 3' \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

y se sigue diciendo:

2 de excedencia + 2 son 4, número igual otra vez al de las cifras que forman el sistema cuaternario: se hace, por consiguiente, una nueva señal al último 2;

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2' \\ 3 \\ 3' \\ 2' \\ \hline \end{array}$$

y, como de esta suma final no ha resultado excedencia ninguna, se escribe un cero debajo de la columna que se acaba de sumar;

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2' \\ 3 \\ 3' \\ 2' \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

y el número de tildes, que es 3, constituirá la reserva para la columna inmediata, si la hay; y, si no, se escribirá íntegramente á la derecha del cero

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 2' \\ 3 \\ 3' \\ 2' \\ \hline 30 \\ \hline \end{array}$$

Por manera, que la suma de los sumandos dados, es 3 decenas cuaternarias (= 12 unidades en el sistema decimal).

Si hubiere dos columnas, se pondrá la reserva (ó sea el número de tildes, rayas ó señales) en lo alto de la segunda ó de las deutenas, y en seguida se procederá á sumar esta segunda columna, y se marcarán en ella las señales de modo que no se confundan con las correspondientes á la primera columna, según indica el ejemplo siguiente del mismo sistema cuaternario:

$$\begin{array}{rr} \underline{3} & \\ 3' & 1 \\ 2' & 1 \\ 1 & 2' \\ 1 & 3 \\ 2' & 3' \\ 1 & 2' \\ \hline & 0 \end{array}$$

Las nuevas señales son también 3 y el sobrante 1: lo escribo, pues, en el lugar de las deutenas, y con el nuevo número de señales constituyo la reserva, si hay más columnas; y, si no las hay, escribo el número 3 de tildes á la derecha del 1.

$$\begin{array}{rrr} & \underline{3} & \\ & 3' & 1 \\ & 2' & 1 \\ & 1 & 2' \\ & 1 & 3 \\ & 2' & 3' \\ & 1 & 2' \\ \hline 3 & 1 & 0 \end{array}$$

y la suma será 310 en el sistema cuaternario (= 52 en el sistema decimal).

Supongamos, ahora, el ejemplo en el mismo sistema como sigue:

$$\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ \hline & & \end{array}$$

y marcaremos los tildes según se indica en este otro:

$$\begin{array}{cccc}
 & \underbrace{3} & \underbrace{3} & \\
 & 2' & 3' & 1 \\
 & 3' & 2' & 1 \\
 & 2 & 1 & 2' \\
 & 3' & 1 & 3 \\
 & 2 & 2' & 3' \\
 & 2' & 1 & 2' \\
\hline
4 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

De este modo, y sin pensar en ningún sistema de numeración, se ha hecho una suma en el sistema cuaternario.

Entendido esto, supongamos ahora los siguientes sumandos del sistema decimal:

$$\begin{array}{ccc}
4 & 5 & 8 \\
7 & 9 & 8 \\
8 & 4 & 6 \\
9 & 5 & 6 \\
7 & 9 & 8 \\
9 & 7 & 9 \\
\hline
\end{array}$$

Procederemos como sigue:

Se empezará diciendo: 8 y 8 son 16, cantidad que contiene una vez á 10 (número de las cifras que componen el sistema) + un excedente de 6: se hace al segundo 8 la señal convenida para indicar que se ha llegado á 10 ó pasado de 10; y luego se seguirá agregando cada excedencia que resulte á las cifras inmediatas hasta obtener otro 10 ó un resultado que pase de diez:... marcándose, por consiguiente, las señales de modo análogo al seguido en los ejemplos del sistema cuaternario, sin más diferencia que la de anotar ahora una señal por cada diez unidades, mientras que antes se marcaba por cada cuatro. Terminada la operación aparecerán las señales como resultan del siguiente ejemplo.

$$\begin{array}{cccc}
 & \underbrace{4} & \underbrace{4} & \\
 & 4 & 5 & 8 \\
 & 7' & 9' & 8' \\
 & 8' & 5' & 6' \\
 & 9' & 4 & 6 \\
 & 7 & 9' & 8' \\
 & 9' & 7' & 9' \\
\hline
4 & 8 & 3 & 5
\end{array}$$

Sean ahora los sumandos, que siguen, del sistema duodecimal:

```
 2 4 6
 8 a 0
 b 5 3
 2 1 a
 7 3 b
 a 7 2
 -----

 =====
```

Se procederá así:

6 y 0 son 6, y 3 son 9, y *a* (que es diez) hacen 19, número igual á 12 + un excedente de 7: se hace una señal al a′, y se continuará la operación del mismo modo ya explicado en los ejemplos anteriores, con lo que al cabo se tendrá

```
   2  2
   2  4  6
   8′ a′ 0
   b  5  3
   2′ 1  a′
   7  3′ b′
   a′ 7  2
 ---------
 3 6  8  8
 =========
```

por lo que las cifras 3688 del sistema duodecimal (que valen tanto como 6152 en el decimal), serán la suma total de los sumandos dados (resultado obtenido como mecánicamente y sin pensar casi en el sistema duodecimal).

Este modo de sumar, generalizado, se recomienda mucho con esta variante:

Supongámonos operando en el sistema decimal. Y en lugar de hacer una señal cada vez que se obtenga 10 ó se pase de este número, se hará una señal cada vez que se obtenga 20, ó se pase de 20: sumada cada columna, se llevará como reserva á lo alto de la columna inmediata el doble de las señales; ó bien el doble + uno, cuando la suma de las cifras entre la última señal y la raya de la suma pase de 10.

	6	6	5	
	6	4	8	9
	9'	8	6	5
	9	9'	9'	1
	2	3	4	5'
	5	4	3	2
	4'	4	4	6
	3	3'	5'	2
	2	2	6	4
	7	6	2	3
	2	3	4	1
	1	1	2	1
	1	2	1	1'
	1	2	2'	2
	2'	3'	4	9
	9	2	1	7
6	9	2	6	8

La ventaja de esta manera de operar consiste en que es menor el número de señales que hay que hacer, y en que para todo el mundo es hasta familiar el contar hasta 20.

		12	14	15	
		6	4	8'	7
		5'	3'	9	2
		4	5	7	8
		9	1	9'	9'
		8'	7	8	8
		9	9'	9'	7'
		4	6	6	8
		8'	6	4	9
		9	9'	9'	9'
		9'	9	9	9
		9	9'	8	8'
		8'	8	8'	8
		7	7	7	7
		9	8'	7'	9'
		7'	8	9	9
		9	7'	8	8'
		9'	9	4'	7
1	4	1	9	2	2

LECCIÓN XVI

Ejercicios sobre las anotaciones gráficas de las reservas.

Por vía de ejercicio se ponen, á continuación, dos ejemplos de sumas en cada uno de los distintos sistemas de numeración estudiados; uno, para que se haga la adición según la regla general, y otro, para que se efectúe según esta otra regla auxiliar.

SUMAS EN EL SISTEMA BINARIO

Regla general.	Regla auxiliar.
10 10 10 11 1	100 11 10 1
1 0 1 1 1 0	1 1′1 1′1 1
1 1 0 0 0 1	1′1 1′1 1′0
1 0 1 0 1 0	1 1′1 1′0 0
1 1 0 0 1 0	1′1 1′0 0 0
1 0 0 1 1 1	1 1′0 0 0 0
1 0 1 0 1 1	1′0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 1 1 0 1	1 0 1 0 0 0 0 0 1

SISTEMA TERNARIO

Regla general.	Regla auxiliar.
11 11 12 5	11 10 2 1
2 2 2 2 2	1 2' 2' 2' 2
1 1 1 1 1	1' 2' 2' 2 0
2 1 2 1 2	1 2' 2 0 0
1 2 1 2 1	1 2 0 0 0
2 0 1 2 0	1 0 0 0 0
2 1 0 2 1	1 1' 1' 1' 1'
2 1 0 2 1	1 1 1 1 0
1 2 1 1 2	1' 1 1 1 2
1 2 2 2 1 1 1	1 1 0 2 2 2 2

SISTEMA CUATERNARIO

Regla general.	Regla auxiliar.
11 11 10 5	11 11 11 3
3 3 3 3 3	2' 2' 2' 3' 3
2 2 2 2 2	3' 3' 3' 2' 2'
1 1 1 1 1	1 1 1 3 2
1 2 3 1 2	2' 1' 2' 1' 1'
1 3 2 2 1	3' 2 1 2 1
3 2 2 1 1	1 1 1 1 1
2 1 2 3 2	2 2' 2' 2' 2'
3 1 1 2 1	3' 3' 3' 3' 3
1 1 1 0 0 2 1	1 1 2 0 0 0 3

SISTEMA QUINARIO

Regla general.	Regla auxiliar.
10 10 4 3	10 11 10 4
1 2 3 4 4	1' 2' 3' 4' 4
2 3 4 1 1	2 3' 4' 4' 1'
3 4 2 1 1	3' 4' 4' 1 2
2 3 4 4 2	4' 4 1 2' 3'
1 1 1 1 1	4 1' 2 3 4
3 3 3 3 3	1' 2 3' 4' 4'
2 2 2 2 2	2 3' 4' 4' 1
2 3 4 4 4	3' 4 4' 1 2'
4 1 1 2 3 3	1 0 0 4 0 2 1

SISTEMA SENARIO

Regla general.	Regla auxiliar.
4 5 4 5	4 5 4 5
1 2 3 4 5	5' 4' 3' 2 1
2 3 4 5 1	4' 3' 2 1' 5'
3 4 5 1 2	3 2 1 5 4
4 5 1 2 3	2' 1 5' 4' 3'
5 1 2 3 4	1 5' 4' 3' 2
1 2 3 4 5	1 2 3 4 5'
2 3 4 5 1	2 3' 4' 5' 1
3 4 5 1 2	3' 4 5' 1 2
4 1 5 1 4 5	4 1 5 1 4 5

SISTEMA SEPTENARIO

Regla general.

	4	4	4	4	
	1	2	3	4	5
	6	1	2	3	4
	5	6	1	2	3
	4	5	6	1	2
	3	4	5	6	1
	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5
	6	1	2	3	4
4	4	0	2	4	2

Regla auxiliar.

	5	5	4	5	
	6′	5′	4′	3	2
	1	2	3	4′	5′
	6′	1	2	3	4
	5′	6′	1′	2′	3′
	4	5′	6	1	1
	3′	4′	5′	6′	6′
	2	3	4′	5	2
	2	4′	6′	2′	1
4	6	0	0	1	3

SISTEMA OCTONARIO

Regla general.

	4	4	4	4	
	1	2	3	4	5
	6	7	1	2	3
	4	5	6	7	1
	2	3	4	5	6
	7	1	2	3	4
	5	6	7	1	2
	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5
4	1	2	3	4	1

Regla auxiliar.

	4	5	5	4	
	7′	6′	5′	4′	3
	2	1	2	3	4
	5′	6′	7′	2	3′
	1	2	3	4′	5
	1	2	3′	5	4′
	1	2′	5	6′	7′
	7′	7	7′	7′	7′
	2	3′	4′	5′	6
3	6	2	0	0	7

SISTEMA NOVENARIO Ó NONARIO

Regla general.	Regla auxiliar.
4 5 5 3	4 3 3
1 2 3 4 5	2 3 4 5
6 7 8 8 1	7' 8' 1 2
2 3 4 5 6	4 5' 6' 7'
7 8 8 7 5	5' 6 7' 7'
4 5 6 7 8	2 4' 1 6'
8 1 2 3 4	1 2 3 4
5 6 7 8 1	6' 8' 1 2
8 1 2 3 4	2 3 2' 1
5 0 2 0 3 7	8 6 6 1 7

SISTEMA DECIMAL

Regla general.	Regla auxiliar. (Señalando de 29 en 20).
4 4 4 3	2 2 3 4 3
1 2 3 4 5	6 9 8 7 6 5
6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6
9 8 7 6	1 2 5 6' 7' 8
5 4 3 2 1	1 1 2' 3 8 9'
1 2 3 4 5	1 1 2 4 5 7
6 7 8 9 0	1 1 4 5 7' 2
1 2 3 4	1 1 1 1 1 1
5 6 7 8 9	1 1' 1 1 1 1
2 8 2 6 9 0	1 5 0 9 5 8 '9

7 7 6	4 5 4
5 3 7 6	2 1 1 4
5 8 4 6	4 3 2 1
4′ 5′ 7′ 8′	1 2 4 3
8 9 9 4	2 1 4 4
3 7 3 3	6 7 8′ 1
6 5′ 4′ 3	1′ 0 0 4
3′ 4 5 6	2 0 4 5′
4 5 7 1	3 4′ 5 4
2 6 5 4′	7 4 6 9
3 1′ 4′ 5	8′ 7 6′ 2
6 4 3 3	1 1 1 1
2 8 0 0	1 1 1 1
2′ 0 6 7	1 1 1 6′
1 1 1 6′	2 3′ 4 1
6 1 1 2	3 4 3 2
2 1 1 1	3 3 2 1
6 9 5 3 5	5 1 7 6 9

7 6 5	5 7 4
5 0 7 5	1 5 6 1
4 5 3 2	2 6 1 2
6′ 1 2 3	2 3′ 6 1
3 5 3′ 4	6 6 5′ 6
6 1 2 5	1 2 8 3
1 7′ 2 2′	1 7 5 3
1 8 6 5	3′ 5′ 2 7′
9′ 8′ 5 7	4 0 1 0
2 0 8′ 5	3 3 5′ 5
6 7 3 1	1 4 8 2
1 7 0 5′	5 8 7 5
1 2 5 1	1 0 8′ 5′
3 5′ 1 3	3 0 2 0
5′ 5 6′ 4	1 1 0 5
5 3 1 6	2′ 1 1 0
1 3 5 1	9 1 1 1
6 6 8 7 9	4 9 9 0 6

7 6 5	8 6 5
1 1' 1 6	5 5 5 5
2 0 1 0	7' 5 7 7
6 0 3 0	5 7' 5' 6
1 3 0 1	7 6 3 2'
2 3 6 7	6 3 3 2
9' 5 5' 5	3' 1 2 1
9 5' 2 0	2 1 3 3
2 5 3 6'	3 6' 1 2
5' 7 5 5	1 2 1 6
7 7' 5 3	1 6 3 3
6 5 1 1	3 2 3' 5'
4' 3 6' 5	9' 5 2 0
7 5 3 6'	3 6' 5 2
2 5' 6 5	4 9 5 5
3 7 1 1	1 7 5 1
7' 5 7' 7	1 5' 2' 5
8 0 2 0 8	6 9 2 0 5

SISTEMA UNDECIMAL

Regla general.	Regla auxiliar.
3 3 4 3	4 4 5 3
1 2 3 4 5	1 2 5 2 5
2 7 8 9 0	2 7' 8' 9' 0
a 1 2 3 4	1 2 3 4 5
5 2 7 8 9	2 8' 8' 9' 1'
a 1 2 3	a' a' a' a' a
4 6 2 7 8	2' 8 a' 8' 8'
9 a a a a	8 2 2 a' 3
2 3 2 2 2	8' a' 1 2 3'
3 3 a 6 4 8	3 5 9 8 2 2

SISTEMA DUODECIMAL

Regla general.

	5	3	3	3	
	1	3	3	4	5
	2	a	7	8	b
	a	b	5	7	8
	9	9	2	3	2
	a	2	2	7	2
	7	b	5	4	3
	9	a	5	4	3
	8	2	1	2	2
5	1	1	7	6	0

Regla auxiliar.

		4	4	4	
	2	a'	b'	3	2
	2	2	3	a'	4
	a'	1	2	9'	b'
	4	5	6'	7	8'
	b'	b'	a'	b'	a
	5'	7'	6	7'	8'
	7	4	7'	2	8
	8'	4'	3	$\cancel{2}$	2'
4	5	0	4	7	0

ARITMÉTICA PURA

LIBRO III

DEL RESTAR

SUBSTRACCIÓN

LECCIÓN I

Del restar.

Restar es la operación contraria del sumar.

Agregando 1 á un guarismo, por ejemplo, al 1, se tiene el 2;

$$1 + 1 = 2$$

Agregando al 2 otro 1, resulta el 3;

$$2 + 1 = 3$$

Agregando al 3 otro 1, se tiene el 4;

$$3 + 1 = 4....$$

Y así, por sucesivas agregaciones del 1, se pueden obtener todos los números imaginables.

Ahora bien: supongamos que por sucesivas agregaciones se haya obtenido un guarismo cualquiera; el 9, por ejemplo. Si de 9 quitamos 1, tendremos el 8;

$$9 - 1 = 8;$$

si de 8 quitamos otro 1, resultará el 7;

$$8 - 1 = 7;$$

y, así sucesivamente, haciendo lo contrario del sumar, vendremos á parar al 1 de partida:

$$7 - 1 = 6;\ 6 - 1 = 5;\ 5 - 1 = 4;\ 4 - 1 = 3;\ 3 - 1 = 2;\ 2 - 1 = 1.$$

Pueden obtenerse muchos números por la agregación de otros números distintos del 1: por ejemplo,

$$11 + 2 = 13;\ 13 + 7 = 20;$$

Pues, quitando del 20 el 7, y de lo que resulte el 2, volveremos al 11 de partida:

$$20 - 7 = 13;\ 13 - 2 = 11.$$

Restar es, pues, aquella operación en que, dada una suma y uno de los sumandos, se ha de hallar el importe de los demás sumandos.

Y, cuando los sumandos son sólo dos, restar es: dada la suma y uno de los sumandos, hallar el otro sumando.

Si tenemos una suma de varios sumandos, como, por ejemplo, $3 + 4 + 5$,

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 4 \\ +\ 5 \\ \hline = 12 \end{array}$$

y si nos dan la suma 12 y uno de los sumandos, v. gr. el 5, el problema queda reducido á hallar el importe de los otros sumandos (que en el caso presente es $7 = 3 + 4$).

Análogamente, si tenemos la suma

$$6 + 2 = 8,$$

y nos dan la suma 8 y el sumando 6, el problema consiste en encontrar el otro sumando, 2.

Restar no es quitar, sino hallar lo que queda después de quitar.

DENOMINACIONES

Cuando se trata de *restar* (operación que también se llama *sustracción*, como á la de *sumar* se la denomina *adición*) la suma recibe el nombre de

minuendo *ó*
restando;

el sumando conocido se llama

sustraendo *ó*
restador;

y el resultado se denomina

residuo,
resto *ó* resta, *ó bien*
diferencia.

También el residuo se llama *exceso* del minuendo sobre el sustraendo.

Por esto se dice también que restar es hallar la diferencia de dos números, aun sin saber cuáles sumandos contribuyeron á la respectiva formación de cada uno.

Para restar con rapidez es preciso aprender de memoria una de las dos tablas siguientes, ó las dos.

TABLA DE RESTAR FUNDADA EN LA SUMA (1)

De 1 á 1 va 0	De 4 á 4 va 0	De 7 á 7 va 0
De 1 á 2 va 1	De 4 á 5 va 1	De 7 á 8 va 1
De 1 á 3 va 2	De 4 á 6 va 2	De 7 á 9 va 2
De 1 á 4 va 3	De 4 á 7 va 3	De 7 á 10 va 3
De 1 á 5 va 4	De 4 á 8 va 4	De 7 á 11 va 4
De 1 á 6 va 5	De 4 á 9 va 5	De 7 á 12 va 5
De 1 á 7 va 6	De 4 á 10 va 6	De 7 á 13 va 6
De 1 á 8 va 7	De 4 á 11 va 7	De 7 á 14 va 7
De 1 á 9 va 8	De 4 á 12 va 8	De 7 á 15 va 8
De 1 á 10 va 9	De 4 á 13 va 9	De 7 á 16 va 9
De 2 á 2 va 0	De 5 á 5 va 0	De 8 á 8 va 0
De 2 á 3 va 1	De 5 á 6 va 1	De 8 á 9 va 1
De 2 á 4 va 2	De 5 á 7 va 2	De 8 á 10 va 2
De 2 á 5 va 3	De 5 á 8 va 3	De 8 á 11 va 3
De 2 á 6 va 4	De 5 á 9 va 4	De 8 á 12 va 4
De 2 á 7 va 5	De 5 á 10 va 5	De 8 á 13 va 5
De 2 á 8 va 6	De 5 á 11 va 6	De 8 á 14 va 6
De 2 á 9 va 7	De 5 á 12 va 7	De 8 á 15 va 7
De 2 á 10 va 8	De 5 á 13 va 8	De 8 á 16 va 8
De 2 á 11 va 9	De 5 á 14 va 9	De 8 á 17 va 9
De 3 á 3 va 0	De 6 á 6 va 0	De 9 á 9 va 0
De 3 a 4 va 1	De 6 á 7 va 1	De 9 á 10 va 1
De 3 á 5 va 2	De 6 á 8 va 2	De 9 á 11 va 2
De 3 á 6 va 3	De 6 á 9 va 3	De 9 á 12 va 3
De 3 á 7 va 4	De 6 á 10 va 4	De 9 á 13 va 4
De 3 á 8 va 5	De 6 á 11 va 5	De 9 á 14 va 5
De 3 á 9 va 6	De 6 á 12 va 6	De 9 á 15 va 6
De 3 á 10 va 7	De 6 á 13 va 7	De 9 á 16 va 7
De 3 á 11 va 8	De 6 á 14 va 8	De 9 á 17 va 8
De 3 á 12 va 9	De 6 á 15 va 9	De 9 á 18 va 9

(1) El alumno debe dar la preferencia á esta tabla, por ser ella excelente preparación para la operación de *partir*.

TABLA DE RESTAR

18 — 9 = 9	11 — 9 = 2	7 — 7 = 0
17 — 9 = 8	11 — 8 = 3	7 — 6 = 1
17 — 8 = 9	11 — 7 = 4	7 — 5 = 2
16 — 9 = 7	11 — 6 = 5	7 — 4 = 3
16 — 8 = 8	11 — 5 = 6	7 — 3 = 4
16 — 7 = 9	11 — 4 = 7	7 — 2 = 5
15 — 9 = 6	11 — 3 = 8	7 — 1 = 6
15 — 8 = 7	11 — 2 = 9	6 — 6 = 0
15 — 7 = 8	10 — 9 = 1	6 — 5 = 1
15 — 6 = 9	10 — 8 = 2	6 — 4 = 2
14 — 9 = 5	10 — 7 = 3	6 — 3 = 3
14 — 8 = 6	10 — 6 = 4	6 — 2 = 4
14 — 7 = 7	10 — 5 = 5	6 — 1 = 5
14 — 6 = 8	10 — 4 = 6	5 — 5 = 0
14 — 5 = 9	10 — 3 = 7	5 — 4 = 1
13 — 9 = 4	10 — 2 = 8	5 — 3 = 2
13 — 8 = 5	10 — 1 = 9	5 — 2 = 3
13 — 7 = 6	9 — 9 = 0	5 — 1 = 4
13 — 6 = 7	9 — 8 = 1	4 — 4 = 0
13 — 5 = 8	9 — 7 = 2	4 — 3 = 1
13 — 4 = 9	9 — 6 = 3	4 — 2 = 2
12 — 9 = 3	9 — 5 = 4	4 — 1 = 3
12 — 8 = 4	9 — 4 = 5	3 — 3 = 0
12 — 7 = 5	9 — 3 = 6	3 — 2 = 1
12 — 6 = 6	9 — 2 = 7	3 — 1 = 2
12 — 5 = 7	9 — 1 = 8	2 — 2 = 0
12 — 4 = 8	8 — 8 = 0	2 — 1 = 1
12 — 3 = 9	8 — 7 = 1	1 — 1 = 0
	8 — 6 = 2	
	8 — 5 = 3	
	8 — 4 = 4	
	8 — 3 = 5	
	8 — 2 = 6	
	8 — 1 = 7	

Las dos tablas siguientes son de gran utilidad.

2 — 1 = 1	5 — 4 = 1	8 — 7 = 1
3 — 1 = 2	6 — 4 = 2	9 — 7 = 2
4 — 1 = 3	7 — 4 = 3	10 — 7 = 3
5 — 1 = 4	8 — 4 = 4	11 — 7 = 4
6 — 1 = 5	9 — 4 = 5	12 — 7 = 5
7 — 1 = 6	10 — 4 = 6	13 — 7 = 6
8 — 1 = 7	11 — 4 = 7	14 — 7 = 7
9 — 1 = 8	12 — 4 = 8	15 — 7 = 8
10 — 1 = 9	13 — 4 = 9	16 — 7 = 9
3 — 2 = 1	6 — 5 = 1	9 — 8 = 1
4 — 2 = 2	7 — 5 = 2	10 — 8 = 2
5 — 2 = 3	8 — 5 = 3	11 — 8 = 3
6 — 2 = 4	9 — 5 = 4	12 — 8 = 4
7 — 2 = 5	10 — 5 = 5	13 — 8 = 5
8 — 2 = 6	11 — 5 = 6	14 — 8 = 6
9 — 2 = 7	12 — 5 = 7	15 — 8 = 7
10 — 2 = 8	13 — 5 = 8	16 — 8 = 8
11 — 2 = 9	14 — 5 = 9	17 — 8 = 9
4 — 3 = 1	7 — 6 = 1	10 — 9 = 1
5 — 3 = 2	8 — 6 = 2	11 — 9 = 2
6 — 3 = 3	9 — 6 = 3	12 — 9 = 3
7 — 3 = 4	10 — 6 = 4	13 — 9 = 4
8 — 3 = 5	11 — 6 = 5	14 — 9 = 5
9 — 3 = 6	12 — 6 = 6	15 — 9 = 6
10 — 3 = 7	13 — 6 = 7	16 — 9 = 7
11 — 3 = 8	14 — 6 = 8	17 — 9 = 8
12 — 3 = 9	15 — 6 = 9	18 — 9 = 9

2 — 1 = 1	5 — 1 = 4	8 — 1 = 7
3 — 2 = 1	6 — 2 = 4	9 — 2 = 7
4 — 3 = 1	7 — 3 = 4	10 — 3 = 7
5 — 4 = 1	8 — 4 = 4	11 — 4 = 7
6 — 5 = 1	9 — 5 = 4	12 — 5 = 7
7 — 6 = 1	10 — 6 = 4	13 — 6 = 7
8 — 7 = 1	11 — 7 = 4	14 — 7 = 7
9 — 8 = 1	12 — 8 = 4	15 — 8 = 7
10 — 9 = 1	13 — 9 = 4	16 — 9 = 7
3 — 1 = 2	6 — 1 = 5	9 — 1 = 8
4 — 2 = 2	7 — 2 = 5	10 — 2 = 8
5 — 3 = 2	8 — 3 = 5	11 — 3 = 8
6 — 4 = 2	9 — 4 = 5	12 — 4 = 8
7 — 5 = 2	10 — 5 = 5	13 — 5 = 8
8 — 6 = 2	11 — 6 = 5	14 — 6 = 8
9 — 7 = 2	12 — 7 = 5	15 — 7 = 8
10 — 8 = 2	13 — 8 = 5	16 — 8 = 8
11 — 9 = 2	14 — 9 = 5	17 — 9 = 8
4 — 1 = 3	7 — 1 = 6	10 — 1 = 9
5 — 2 = 3	8 — 2 = 6	11 — 2 = 9
6 — 3 = 3	9 — 3 = 6	12 — 3 = 9
7 — 4 = 3	10 — 4 = 6	13 — 4 = 9
8 — 5 = 3	11 — 5 = 6	14 — 5 = 9
9 — 6 = 3	12 — 6 = 6	15 — 6 = 9
10 — 7 = 3	13 — 7 = 6	16 — 7 = 9
11 — 8 = 3	14 — 8 = 6	17 — 8 = 9
12 — 9 = 3	15 — 9 = 6	18 — 9 = 9

En la Lección inmediata estudiaremos otra tabla de la mayor importancia: la de sumar destinada á la explicación y análisis de uno de los procedimientos del restar.

Para restar se disponen el minuendo (ó la suma dada) y el sustraendo (ó el sumando conocido) de tal modo, que las cifras de cada orden resulten colocadas respectivamente unas debajo de otras; protoenas bajo protoenas, deutenas bajo deutenas... Por debajo del sustraendo se traza una raya horizontal.

Colocados ya los dígitos en correspondencia unos bajo otros, se efectúa la operación de restar como sigue cuando cada cifra del minuendo es mayor que la correspondiente del sustraendo, ó igual, respectivamente.

Se empieza por la derecha, ó sea por las protoenas, rebajando del valor de la cifra de primer orden que fuere minuendo el valor de la cifra del mismo orden que fuere sustraendo: se sabe por la tabla cuál es el residuo (ó sea el sumando desconocido), y se escribe este residuo por debajo de la raya, en el lugar correspondiente de las protoenas: en seguida se hace lo mismo con las deutenas ó dígitos del segundo orden, restando del que hiciere de minuendo el que aparezca como sustraendo, y escribiendo bajo ellos por debajo de la raya el residuo correspondiente conforme á la tabla: luego se hace lo mismo con las trienas ó cifras del tercer orden del minuendo y del sustraendo, después con las tetraenas ó del cuarto...

Y así sucesivamente.

Ejemplo en el sistema decimal

$$\begin{array}{r} 38\,567 \\ -12\,145 \\ \hline \end{array}$$

se dice: de 5 á 7 van 2, y se escribe el 2 por debajo de la raya en el lugar de las protoenas,

$$\begin{array}{r} 38\,567 \\ 12\,145 \\ \hline 2 \end{array}$$

En seguida: de 4 á 6 van 2, y se escribe este segundo 2 bajo los dígitos del segundo orden por debajo de la raya,

$$\begin{array}{r} 38\,567 \\ 12\,145 \\ \hline 22 \end{array}$$

y se continúa diciendo: de 1 á 5 van 4, y se pone el 4 en tercer lugar,

$$\begin{array}{r} 38\,567 \\ 12\,145 \\ \hline 422 \end{array}$$

luego: de 2 á 8 van 6, y se pone el 6 en cuarto lugar,

$$\begin{array}{r} 38\,567 \\ 12\,145 \\ \hline 6\,422 \end{array}$$

y, en fin, se dice: de 1 á 3 van 2, y se pone ese 2 en el quinto lugar

$$\begin{array}{r} 38\,567 \\ 12\,145 \\ \hline 26\,422 \end{array}$$

El número 26 422 es el sumando que se pide, porque unido al sumando conocido

$$12\,145$$

dan los dos la suma ó minuendo conocido,

$$38\,567;$$

así:

$$\begin{array}{r} 26\,422 \\ +\,12\,145 \\ \hline =38\,567 \end{array}$$

Observemos ahora que esta suma 38 567 se ha obtenido agregando el 2 al 5, el 2 al 4, el 4 al 1, etc., y de este modo sacamos el 7, el 6, el 5, etc., de manera que, rebajando del 7 el 5, del 6 el 4, del 5 el 1, etc., volvemos á hallar el sumando

$$26\,422$$

como sigue:

$$\begin{array}{r} 38\,567 \\ -\,26\,422 \\ \hline =12\,145 \end{array}$$

De modo análogo se procederá en los demás sistemas de numeración, cuando las cifras del minuendo sean mayores, respectivamente, que sus correspondientes del sustraendo, ó bien iguales á ellas.

SISTEMA BINARIO

$$\begin{array}{r} 11001110011 \\ -\quad 1000010001 \\ \hline =\ 10001100010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111111111 \\ -\quad 100011111 \\ \hline =\ 1011100000 \end{array}$$

SISTEMA TERNARIO

2221002211	2222222222
— 1120001100	— 1112210012
= 1101001111	= 1110012210

SISTEMA CUATERNARIO

1233223123	3333222111
— 122213112	— 3123221011
= 1111010011	= 210001100

SISTEMA QUINARIO

4433221144	3123443214
— 4333211034	— 1011342214
= 100010110	= 2112101000

SISTEMA SENARIO

5432105554	5555555555
— 4420004554	— 4342154320
= 1012101000	= 1213401235

SISTEMA SEPTENARIO

6666665432	4312566665
— 1245664232	— 4200156610
= 5421001200	= 112410055

SISTEMA OCTONARIO

7654321077	1234567076
— 1112220077	— 34222051
= 6542101000	= 1200345025

SISTEMA NONARIO

8343788876	3465788810
— 7001478865	— 23480000
= 1342310011	= 3442308810

SISTEMA DECIMAL

	9943000123		8997694561
—	9941000111	—	8997691111
=	2000012	=	3450

SISTEMA UNDECIMAL

	a3a9465aa8		aaaaaaaaa9
—	198465998	—	1234567431
=	a211000110	=	9876543678

SISTEMA DUODECIMAL

	b245321abb		babbbb987b
—	a2141109aa	—	111bb4387b
=	1031211111	=	a9a0076000

LECCIÓN II

Cifras del sustraendo mayores que sus correspondientes del minuendo.

PRIMER PROCEDIMIENTO

Supongamos que nos dan la siguiente operación de restar:

$$\begin{array}{r} 34 \\ -\ 18 \\ \hline \end{array}$$

¿Cómo podremos rebajar 8 de 4?

Con lo que hasta ahora sabemos, no tenemos lo suficiente para resolver el problema.

Hay dos maneras de hacerlo, y cada una necesita la exposición de previas consideraciones.

El discípulo estudiará en esta Lección uno de los procedimientos, y en la Lección inmediata el otro.

PRIMER PROCEDIMIENTO

Si todo minuendo es la suma de dos solos sumandos, el análisis de esta clase de sumas sugerirá la solución del problema.

Siendo dos los sumandos, la suma total estará constituída por sumas parciales y sucesivas de dos dígitos:

$$
\begin{array}{r}
2134 \\
+\ 7453 \\
\hline
9587 \\
\hline
\end{array}
$$

Y, en efecto, la suma 9587 es el resultado de las sumas parciales:

$4 + 3 = 7$ protoenas
$3 + 5 = 8$ deutenas
$1 + 4 = 5$ trienas
$2 + 7 = 9$ tetraenas

¿Cuántos casos de sumas de dos dígitos pueden ocurrir en el sistema decimal?

Los 81 consignados en la tabla que sigue á continuación:

TABLA DE SUMAR

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

En las tablas (como la anterior y la denominada de PITÁGORAS, de que se tratará en la multiplicación) formadas sobre un cuadrado dividido en casilleros, los dígitos encasillados en el primer renglón horizontal, así como los encasillados en la primera columna vertical de la izquierda, se conocen con el nombre de *argumentos*.

La anterior tabla de sumar está formada de tal modo, que si bajamos con la imaginación una línea vertical desde un argumento cualquiera de los del renglón horizontal de arriba, y al mismo tiempo tiramos horizontalmente otra línea imaginaria hacia la derecha desde otro argumento cualquiera de los de la columna de la izquierda, hallaremos en el casillero donde se corten las dos líneas imaginarias vertical y horizontal, la *suma* del argumento del renglón horizontal de arriba y del argumento de la columna vertical de la izquierda.

Así, para saber cuánto suman 4+5, bajaremos con la imaginación una vertical desde el argumento 4 del renglón horizontal de arriba, y extenderemos horizontalmente otra línea imaginaria hacia la derecha desde el argumento 5 de la columna vertical de la izquierda, y veremos que ambas líneas imaginarias se cortan en un casillero donde está registrado el número 9. De donde, por construcción, deduciremos que

$$4+5=9$$

Y análogamente de las demás combinaciones.

La tabla nos manifiesta que con los dígitos del sistema decimal no puede formarse el 2 más que de una sola manera: 1+1; que el 3 puede formarse de dos: 1+2 y 2+1; que el 4 puede obtenerse por medio de tres combinaciones: 1+3, 2+2 y 3+1; que cuatro combinaciones dan el 5: 1+4, 2+3, 3+2 y 4+1; que hay cinco medios de obtener el 6: 1+5, 2+4: etc., etc.

Pero lo que más interesa para la operación de restar, es que sólo 36 combinaciones dan sumas que se escriben con un dígito, y que las otras 45 combinaciones se escriben con dos cifras, de las cuales la decena es siempre un 1.

10 se obtiene por medio de nueve combinaciones:
11 por ocho combinaciones;
12 por siete;
13 por seis;
14 por cinco;
15 por cuatro;
16 por tres;
17 por dos, y
18 por una.

Y es también de observar que la protoena de estas sumas de dos dígitos es siempre otro dígito menor que sus sumandos componentes.

$9+1=10$: el 0 es <9; el 0 es <1
$9+2=11$: el 1 (protoena) es <2, y también <9
$9+3=12$: el 2 (protoena) es <3, y <9
$9+4=13$: el 3 (protoena) es <4, y <9; etc.

$8+2=10$: el 0 (protoena) es <2, y <8;
$8+3=11$: el 1 (protoena) es <3, y <8;
$8+4=12$: el 2 (protoena) es <4, y <8; etc.

Y así en las demás combinaciones cuyas sumas exigen dos cifras: en todas las cuales (repitámoslo):

la deutena es siempre un 1,
y la protoena es $<$ que cualquiera de sus dos componentes.

Para evidencia hagamos una suma como sigue:

$$
\begin{array}{rl}
456 & \\
+\ 789 & \\
\hline
15 & (6+9=15) \\
13 & (5+8=13) \\
11 & (4+7=11) \\
\hline
=1245 & \\
\hline
\end{array}
$$

Tomemos á la suma como minuendo y á uno de los dos sumandos como sustraendo, por ejemplo, al 789;

$$
\begin{array}{r}
1245 \\
-\ 789 \\
\hline
\end{array}
$$

y claro es que en esta forma no podremos restar, porque cada reserva está englobada en alguna suma parcial (respectivamente); pero demos al minuendo la forma de la primitiva suma, y ya será facilísima la operación.

Triénas	Deutenas	Protoenas	
11	13	15	
-7	-8	-9	
$=4$	5	6	$=456$

Por consiguiente, cuando una cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, tenemos la seguridad de que, englobada con la cifra contigua de la izquierda en el minuendo, hay un 1.

Así en la resta

$$\begin{array}{r} 34 \\ -\ 18 \\ \hline \end{array}$$

las sumas parciales dieron para constituír el minuendo,

$$20 + 14$$

de modo que, á fin de efectuar la sustracción pedida, tenemos que aumentar una deutena al 4 y rebajarla al 3.

Puesto, pues, el minuendo dado 34 en la forma

$$20 + 14$$

la operación propuesta de restar es ya muy fácil.

$$\begin{array}{rlcl} & 2 \text{ deutenas y} & & 14 \text{ protoenas} \\ - & 1 \text{ deutena} \quad \text{y} & & 8 \text{ protoenas} \\ \hline = & 1 \text{ deutena} & + & 6 \text{ protoenas} \quad = 16 \\ \hline \end{array}$$

Encontrado así el sumando pedido 16, veremos que este 16 formó con el sumando dado 18 la suma 34, como sigue:

$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ 16 \\ \hline 14 \\ +\ \ 2 \\ \hline =\ 34 \\ \hline \end{array}$$

resultado en el cual el 1 de la suma 14 de las protoenas 8 + 6 se englobó con el 2, suma de las deutenas 1 + 1.

Por consiguiente, para deshacer la suma 34, habremos de decir:

$$\begin{array}{lr} & 34 \\ & -\ 18 \\ \hline 14-8=6 & 16 \\ 2-1=1 \quad (1) & \\ \hline \end{array}$$

Si, en vez de una, hubiese en el sustraendo varias cifras mayores que sus correspondientes del minuendo, se procederá de modo análogo al acabado de explicar. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3452 \\ 1568 \\ \hline \end{array}$$

Sin necesidad de averiguar el otro sumando, podemos afirmar que, por ser las cifras del sustraendo mayores que sus correspondientes del minuendo, este fué constituído por las sumas parciales siguientes:

$$\begin{array}{rrrr} & & 1 & 2 \\ & 1 & 4 & \\ 1 & 3 & & \\ 2 & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & 2 \end{array}$$

Y, por tanto, á cada cifra del minuendo debe agregarse el 1 de la reserva incorporada en la inmediata cifra de orden superior, la cual habrá de computarse como una unidad más chica.

Y así diremos en el caso propuesto:

(1) Por lo expuesto se evidencia cuán sin razón se hace burla de los dómines que, en el caso actual, dirían:

$$\begin{array}{r} 34 \\ 18 \\ \hline \end{array}$$

8 de 4 no se puede restar; se toma de la cifra inmediata una unidad que vale 10; 10 y 4 14; 14 menos 8, 6; y se pone 6.

El 3, rebajada la unidad que se le quitó, queda en 2; 2 menos 1, 1; y se escribe.

Por manera, que 34 menos 18 es 16.

Et sic de cæteris.

$$\begin{array}{r} 3452 \\ 1568 \\ \hline \end{array}$$

De 8 á 12 van 4;
De 6 á 14 van 8;
De 5 á 13 van 8;
De 1 á 2 va 1.

Y, por tanto, tendremos

$$\begin{array}{r} 3452 \\ 1568 \\ \hline 1884 \\ \hline \end{array}$$

Y, en efecto,

$$\begin{array}{r} 1568 \\ +\ 1884 \\ \hline =3452 \\ \hline \end{array}$$

Lo dicho es aplicable á los sistemas de numeración distintos del decimal. Si una cifra del sustraendo es mayor que la correspondiente del minuendo, se agrega á esta cifra del minuendo la reserva 1, incorporada en la cifra inmediata, la cual reserva vale tanto como valga en el sistema la expresión 10. Y la cifra de donde se sacó la reserva se computa como una unidad más chica.

Sea la siguiente resta del sistema quinario:

$$\begin{array}{r} 4320 \\ 1443 \\ \hline \end{array}$$

Y se dirá:

De 3 á 5 van 2;
De 4 á 6 van 2;
De 4 á 7 van 3;
De 1 á 3 van 2;

de modo que la operación resultará así:

$$\begin{array}{r} 4320 \\ -\ 1443 \\ \hline =2322 \\ \hline \end{array}$$

Y, con efecto, los sumandos del sistema quinario

$$\begin{array}{r} 1443 \\ +\ 2322 \\ \hline \end{array}$$

dan

$$\begin{array}{r} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 3 \\ \hline 4320 \\ \hline \end{array}$$

Y, análogamente en los demás sistemas.

Para restar, según este procedimiento, se rebaja ordenadamente de cada dígito del minuendo cada uno de los del sustraendo, efectuando tantas restas parciales como cifras tuviere el sustraendo con inclusión de los ceros. Si en alguna de estas sustracciones parciales el dígito del sustraendo resulta $>$ que el de su mismo orden en el minuendo, se agrega á éste lo que valga la expresión 10 en el correspondiente sistema de numeración; y, hecha la resta, se rebajará en compensación un 1 á la cifra inmediata superior del minuendo (de la cual se sacó la reserva ($= 1$) en ella incorporada).

LECCIÓN III

Cifras del sustraendo mayores que sus correspondientes del minuendo.

SEGUNDO PROCEDIMIENTO.

Es de toda evidencia que si agregamos un 1 á un sumando, hay que agregar también otro 1 á la suma; y, por consiguiente, si agregamos un 1 á la suma y otro 1 á cualquiera de los sumandos, no hay que tocar á los demás sumandos.

18	18 + 1	18 + 2	18 + 3
+ 2	+ 2	+ 2	+ 2
20	20 + 1	20 + 2	20 + 3

Así, si agregamos 1 al sumando 18 y otro á la suma 20, no habrá que tocar al otro sumando 2.

Así, si agregamos 2 al mismo primer sumando 18 y también 2 á la suma 20, no habrá tampoco que tocar al segundo sumando.

Igualmente, si agregamos 3 al sumando 18 y también 3 á la suma 20, permanecerá invariable el propio sumando 2...

Por consiguiente, si agregamos cualquier número á un sumando, y *la misma cantidad á la suma*, no hay que tocar á los demás sumandos.

$$\begin{array}{rr} 18 & 18+72 \\ +2 & +2 \\ +5 & +5 \\ \hline 25 & 25+72 \\ \hline \end{array}$$

Esta preciosa propiedad de la suma sirve para orillar la dificultad que con frecuencia ocurre en la operación de restar cuando un dígito del sustraendo es de mayor valor que su correspondiente del minuendo.

Supongamos que nos hayan dado la suma 21 y el sumando 19, y que hayamos de averiguar cuál es el otro sumando.

Dispondremos la operación de restar del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 21 \\ -19 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

Pero ¿cómo se rebaja 9 de 1?

Sabemos

1.° Que 21 es una suma,

2.° Que 19 es un sumando,

3.° Que, si agregamos un número cualquiera á la suma 21 y el mismo número al sumando 19, no por eso variará el otro sumando que tratamos de buscar.

Pues bien, entre las muchas cantidades que podemos escoger, daremos preferencia á aquella que nos facilite más la operación del restar; y ninguna como la del número de cifras que tenga el sistema en que estemos operando.

Si estamos, pues, restando en el sistema decimal, agregaremos diez al minuendo (ó suma) y también 10 al sustraendo (ó sumando conocido) y, en vez de los guarismos dados, que son

$$\begin{array}{rcr} 21 & = & 20+1 \\ -19 & = & 10+9 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

tendremos estos dos

$$\begin{array}{rcr} 31 & = & 20+11 \\ -29 & = & 20+9 \\ \hline \end{array}$$

ya puedo restar: once menos nueve igual á dos; $11 - 9 = 2$ y escribo el 2;

$$\begin{array}{r} 20 + 11 \\ 20 + 9 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

y digo en seguida: 20 del minuendo menos 20 del sustraendo = cero; y nada más pongo por debajo de la raya.

En el ejemplo siguiente procederemos de un modo análogo:

$$\begin{array}{r} 94678 \\ 38521 \\ \hline \end{array}$$

No hay dificultad respecto de los tres primeros órdenes de dígitos, y tendremos

$$\begin{array}{r} 94678 \\ 38521 \\ \hline 157 \\ \hline \end{array}$$

pero, al llegar al cuarto orden, nos encontramos con que de 4 no se puede rebajar 8; entonces con la imaginación agregamos al 4 del minuendo (que representa millares) un diez (que locativamente vale 10 millares por tratarse de una agregación hecha á una cifra que ocupa el cuarto lugar) y un 1 al inmediato 3 del sustraendo. Y, hecho esto, en vez de los números dados

$$\begin{array}{r} 94678 \\ -38521 \\ \hline 157 \\ \hline \end{array}$$

tendremos

$$\begin{array}{r} 9c678 \\ 48521 \\ \hline 157 \\ \hline \end{array}$$

donde la letra c significa 14. Ahora bien; si de 14 rebajamos 8, nos quedan 6; y escribimos este 6 en el cuarto lugar; así:

$$\begin{array}{r} 9e678 \\ 48521 \\ \hline 6157 \\ \hline \end{array}$$

Y, continuando la operación, diremos: si de nueve rebajamos 4 quedarán 5; y la operación resultará terminada en la forma siguiente

$$\begin{array}{r} 94678 \\ 38521 \\ \hline 56157 \end{array}$$

Si sumamos el sustraendo con el resíduo, obtendremos la suma, ó sea el minuendo.

$$\begin{array}{r} 38521 \\ +56157 \\ \hline =94678 \end{array}$$

Al efectuar esta operación, notaremos que la suma de los dígitos del cuarto lugar 8 + 6 da por resultado 14; expresión representada por dos cifras (el 1 y el 4), de las cuales sólo escribimos el 4 bajo la raya, porque llevamos el 1 como reserva á la columna siguiente, quinta de la izquierda. Por esto, si restásemos por el primer procedimiento, se haría necesario sacar esa reserva del 9 del minuendo, en la cual estaba comprendida, y agregarla al 4 de la suma, entonces minuendo.

Como el minuendo es la suma del sustraendo y del resíduo, cada dígito del minuendo ha de ser la suma de los dos del sustraendo y del resíduo cuando esta suma no pasa de 10.

$$\begin{array}{r} 2222 \\ +6345 \\ \hline =8567 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8567 \\ -2222 \\ \hline =6345 \end{array}$$

Pero, cuando la suma pasa de 10, el dígito de la derecha es menor en la suma que cada uno de los dígitos-sumando, y el 1 de la izquierda se incorpora, como reserva, á los dígitos del orden inmediato superior:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 1 & 1 & \\ & 7 & 6 & 3 & 4 \\ + & 8 & 8 & 8 & 8 \\ \hline =1 & 6 & 5 & 2 & 2 \end{array}$$

Por lo cual es preciso en estos casos restituír á cada cifra del minuendo la reserva englobada en la inmediata superior.

Si en el sustraendo hubiere muchos dígitos mayores que sus correspondientes del minuendo, se procederá en consecuencia de lo acabado de exponer.

Sea el siguiente ejemplo del sistema *Quinario:*

$$\begin{array}{r} 34232 \\ 14414 \\ \hline \end{array}$$

agrego cinco al 2 de las protoenas del minuendo, y lo haré en la forma de 10 (que vale cinco en el sistema quinario): agregaré *otros* cinco á las deutenas del sustraendo en forma de 1; y, en vez de los guarismos dados, tendré

$$\begin{array}{r} 3423\,\text{siete} \\ 14424 \\ \hline 13 \\ \hline \end{array}$$

pudiendo ya restar, digo: de 4 á 7 van 3; y escribo el 3 en el lugar de las protoenas, y sigo diciendo: de 2 á 3 va 1; y escribo el 1 en el lugar de las deutenas. Al llegar á las trienas, veo que no puedo seguir; por lo cual agrego 5 al 2 del minuendo; y, en compensación, agrego también 5 en la forma de un 1 á las 4 tetraenas del sustraendo; con lo que tendré:

$$\begin{array}{r} 34\,\text{siete}\,32 \\ 1\,\text{cinco}\,414 \\ \hline 13 \\ \hline \end{array}$$

pudiendo ya restar las trienas, resto; y tendré

$$\begin{array}{r} 34\,\text{siete}\,32 \\ 1\,\text{cinco}\,414 \\ \hline 314 \\ \hline \end{array}$$

Siguiendo adelante, encuentro convertido en 5 tetraenas el primitivo 4 tetraenas del sustraendo: no puedo ya restar ese cinco del 4 que tiene encima, por lo cual agrego cinco al 4 tetraenas del minuendo, y en compensación agrego 1 al 1 de las pentaenas:

Entonces, bajo la raya escribo 4, diciendo

de 5 á 9 van 4

$$\begin{array}{r} 3\ \text{nueve}\ 232 \\ 2\ \text{cinco}\ 414 \\ \hline 4\,313 \\ \hline \end{array}$$

Por fin, y convertido por compensación en 2 el 1 del quinto lugar del sustraendo, diré para concluir: de 2 á 3 va 1; lo escribo, y, terminada ya la operación, resultará en la forma siguiente:

$$\begin{array}{r} 34232 \\ 14414 \\ \hline 14313 \\ \hline \end{array}$$

En efecto:

$$\begin{array}{r} \underset{\smile}{1}\,\underset{\smile}{1}\ \ \underset{\smile}{1}\ \ \\ 1\,4\,4\,1\,4 \\ +\,1\,4\,3\,1\,3 \\ \hline =3\,4\,2\,3\,2 \\ \hline \end{array}$$

De lo dicho se deduce:

1.° Si á minuendo y sustraendo se les agrega la misma cantidad, el resto no varía.

2.° Cuando un dígito del sustraendo es mayor que el correspondiente del minuendo, se agrega al del minuendo un número igual al de las cifras que tenga el sistema; y, para compensar, se agrega 1 en el sustraendo á la cifra inmediata de la izquierda.

Agregar lo que valga en un sistema la expresión

10

al dígito de un orden cualquiera del minuendo, es lo mismo que agregar en el sustraendo

1

á la cifra del orden inmediato superior de la izquierda.

$$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 16 \\ \hline =\ 19 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{De 6 á 15 van 9.} \\ \text{De 2 á 3 va 1.} \end{array}$$

En ningún sistema varía la diferencia si agregamos la forma 10 á un dígito del minuendo y la forma 1 al dígito inmediato superior del sustraendo:

$$\begin{array}{rcl} (35+10) = 45 & = & (30+15) \\ -(16+10) = 26 & = & (20+\ 6) \\ \hline & & 10+\ 9 = 19 \end{array}$$

Este segundo procedimiento es muy superior al primero, porque sólo exige la operación de sumar: á la cifra del minuendo menor que la correspondiente del sustraendo *se agregan* 10, y en compensación, á la inmediata del sustraendo *se agrega* 1. *Agregar* 10 y *agregar* 1; esto es todo lo que exige del operador el segundo procedimiento, mientras que el primero necesita dos operaciones contrarias: *agregar* y *rebajar*; agregar 10 y rebajar 1. Esto de hacer dos operaciones contrarias dificulta graudemente toda ejecución; por lo cual sólo es de aconsejar el segundo modo de operar.

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 5\ 7\ 4\ 4\ 0\ 7\ 6 \\ 1\ 9\ 7\ 6\ 3\ 0\ 0\ 9\ 8\ 4\ 4\ 6\ 9\ 8 \\ \hline 1\ 4\ 4\ 4\ 6\ 9\ 9\ 5\ 8\ 9\ 9\ 3\ 7\ 8 \end{array}$$

de 8 á 16..	8
de 10 á 17....	7
de 7 á 10......	3
de 5 á 14........	9
de 5 á 14..........	9
de 9 á 17.............	8
de 10 á 15...............	5
de 1 á 10................	9
de 1 á 10..................	9
de 4 á 10.....................	6
de 7 á 11.......................	4
de 8 á 12.........................	4
de 10 á 14..........................	4
de 2 á 3............................	1

APÉNDICE

De lo expuesto se deduce que
Si

$$m, n, p, q,$$

representan cifras de un sistema de s cifras;
Si además suponemos que

$$\begin{aligned} m &> n\ ; \\ p &> q\ ; \end{aligned}$$

Y si, por último, tenemos una resta de la forma

$$\begin{array}{r} m + q \\ -(n + p) \\ \hline \end{array}$$

la operación se efectuará en cualquier sistema con arreglo á la fórmula y disposición que sigue

$$\begin{array}{ll} \quad m & + (q + s) \\ -\ [(m + 1) & + p\ ] \end{array}$$

porque á $q < p$, agregaré en el minuendo, el valor de s (que es el número de cifras del sistema), y en compensación agregaré 1 al sustraendo en la cifra inmediata de la izquierda.

En general, si nos dan

$$\begin{array}{r} m + p + q \\ -(n + o + r) \\ \hline \end{array}$$

donde $n < m$; $p < o$ y $q < r$, transformaremos minuendo y sustraendo como sigue:

$$\begin{array}{llll} & m & + (p + s) & + (q + s) \\ - & (n + 1) & - (o + 1) & -\ r \\ \hline \end{array}$$

La s agregada al minuendo se escribe 10 y vale (según los sistemas) dos en el binario, tres en el ternario, cuatro en el cuaternario, cinco en el quinario,... diez en el decimal, once en el undecimal, doce en el duodecimal...

Y el 1 agregado al sustraendo un lugar á la izquierda del de la cifra del minuendo á que se agregó s, vale lo mismo que s, de modo que hay compensación perfecta, porque

1 un lugar á la izquierda = á lo que valga la expresión 10 un lugar á la derecha.

La fórmula en general será, pues,

$$\begin{array}{rrr} m & +(p+10) & +(q+10) \\ -(n+1) & -(o+1) & -r \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

Se llama *complemento* de un número la diferencia entre este número y la expresión de orden superior formada por un 1 seguido de tantos ceros como cifras tenga el número.

El complemento de 8 es

$$10-8=2$$

El de 57 es

$$100-57=43$$

El de 941 es

$$1\,000-941=59$$

El de 2 743 es

$$10\,000-2\,743=7\,257$$

etc., etc.

De aquí resulta que la diferencia entre dos números es igual á la suma del mayor con el complemento del menor, menos la unidad inmediata superior al menor.

$$\begin{aligned} 357-128 &= 357+(1\,000-128)-1\,000 \\ &= 357+872-1\,000 \\ &= 1\,229-1\,000 \\ &= 229 \end{aligned}$$

LECCIÓN IV

Pruebas.—Ejercicios.

La prueba de la operación de restar consiste en sumar el resto con el sustraendo, los cuales han de dar el minuendo.

Ó bien, en restar del minuendo el resíduo, lo cual ha de dar el sustraendo.

También puede hacerse la prueba de la cifra máxima considerando á sustraendo y resto como sumandos y al minuendo como suma: el sobrante de los dos sumandos, ó sea de sustraendo y resto ha de ser igual al sobrante del minuendo, que es la suma (teniendo cuidado de excluír cuantas veces se pueda la cifra máxima del sistema en el cual se esté operando). En algunas ocasiones los sobrantes (después de excluída la cifra máxima) son de tal evidencia, que no hay apenas necesidad más que de prestarles atención para convencerse de la exactitud del resíduo.

OPERACIONES DE RESTAR EN LOS DISTINTOS SISTEMAS

Binario.		Traducción al decimal.		Prueba
1101011	8)	107		101001
101001		41	(5	+ 1000010
1000010		66	(3	= 1101011

Ternario.	Traducción al decimal.	Pruebas.
1) 1221021	7) 1411	121020
121020 (0	438 (6	+ 1100001
1100001 (1	973 (1	1221021
Cuaternario.		
0) 3230121	0) 15129	2210011
2210011 (1	10501 (7	1020110
1020110 (2	4628 (2	3230121
Quinario.		
3) 14443021	5) 156011	1233010
1233010 (2	24130 (1	13210011
13210011 (1	131881 (4	14443021
Senario.		
4) 15543051	0) 557955	410001
410001 (1	32401 1)	15133050
15133050 (3	525554 8)	15543051
Septenario.		
5) 66665042	5) 5764145	12312011
12312011 (5	1112357 2)	54353031
54353031 (0	4651788 3)	66665042
Octonario.		
0) 77777777	3) 15097215	6005211
6005211 (1	1575561 3)	71772566
71772566 (6	13521654 0)	77777777
Nonario.		
0) 88888000	0) 43045992	71235000
71235000 (2	34153650 0)	17653000
17653000 (6	8892342 0)	88888000

Decimal.		Pruebas.
1) 14990167	1) 14990167	720167
720167 (5	720167 5)	14270000
14270000 (5	14270000 5)	14990167

Las pruebas consistentes en sumar el sustraendo y el residuo para ver si dan el minuendo (en cuyo caso la resta está bien efectuada) deben hacerse de memoria, para ahorrar el tiempo y el trabajo de copiar inútilmente guarismos que se tienen á la vista.

También debe hacerse de memoria la prueba de la cifra máxima, si bien convendría que consignen los resultados por escrito quienes no tengan aún práctica bastante.

Haga de memoria el discípulo las pruebas de los ejemplos siguientes, consistentes en la suma de sustraendo y residuo.

Undecimal.	
2aa aa 29 76	643 065 836
aa 23 45	1 759 994
2aa 00 06 31	641 305 842

Duodecimal.	
3a 74bb 0b	139 200 635
14 62bb 04	49 330 804
26 1200 07	89 469 831

Al restar cometemos á sabiendas el mismo error que al sumar para enmendarlo en el acto.

Así, en el sistema decimal, no restamos decenas, de decenas; centenas, de centenas; millares, de millares, etc.; sino dígitos, constantemente, de dígitos; pero, al colocar en segundo lugar el resto de decenas, el de las centenas en tercero, en cuarto el de los millares..., etc., enmendamos en el acto el error, ganando mucho en economía de tiempo y de trabajo.

MÁS EJEMPLOS

Haga de memoria el discípulo las pruebas de la suma de sustraendo y residuo:

Sistema binario.

$$\begin{array}{r} 1111100101 \\ 101011001 \\ \hline 1010001100 \end{array}$$

Sistema ternario

$$\begin{array}{r} 2101212212 \\ 221001020 \\ \hline 1110211122 \end{array}$$

Sistema cuaternario.

$$\begin{array}{rrl} ^{2}) & 3330333032 & \\ & 122320201 & (^{1} \\ \hline & 3202012231 & (^{1} \end{array}$$

Sistema quinario.

$$\begin{array}{rrl} ^{0}) & 4443240133 & \\ & 324321342 & (^{0} \\ \hline & 4113413241 & (^{0} \end{array}$$

Sistema senario.

$$\begin{array}{rrl} ^{5}) & 5552230213 & \\ & 1422310430 & (^{0} \\ \hline & 4125515343 & (^{5} \end{array}$$

Sistema septenario.

$$\begin{array}{rrl} ^{0}) & 5565216543 & \\ & 2256425504 & (^{5} \\ \hline & 3305461036 & (^{1} \end{array}$$

Sistema octonario.

$$\begin{array}{rrl} ^{1}) & 7457674476 & \\ & 1567433274 & (^{0} \\ \hline & 5670241202 & (^{1} \end{array}$$

Sistema novario.

$$\begin{array}{rrl} ^{3}) & 12866843768 & \\ & 6551688878 & (^{6} \\ \hline & 5315143780 & (^{5} \end{array}$$

Sistema binario.

$$\begin{array}{r} 1011100101 \\ 100011010 \\ \hline 111001011 \end{array}$$

Sistema ternario.

$$\begin{array}{rrl} ^{0}) & 2101212210 & \\ & 212101021 & (^{0} \\ \hline & 1112111112 & (^{0} \end{array}$$

Sistema cuaternario.

$$\begin{array}{rrl} ^{2}) & 3210213032 & \\ & 2132321201 & (^{2} \\ \hline & 1011231231 & (^{0} \end{array}$$

Sistema quinario.

$$\begin{array}{rrl} ^{1}) & 2343210123 & \\ & 1324321342 & (^{1} \\ \hline & 1013333231 & (^{0} \end{array}$$

Sistema senario.

$$\begin{array}{rrl} ^{4}) & 5341230213 & \\ & 3452310432 & (^{2} \\ \hline & 1444515341 & (^{2} \end{array}$$

Sistema septenario.

$$\begin{array}{rrl} ^{3}) & 4365216543 & \\ & 2436425434 & (^{1} \\ \hline & 1625461106 & (^{2} \end{array}$$

Sistema octonario.

```
2)  6453674376
    5567435674  (4
    ----------
     664236502  (5
```

Sistema novenario.

```
6)  8566543765
    7657684876  (7
    ----------
     807747778  (7
```

Sistema binario.

```
    1001110110
     110011011
    ----------
      11011011
```

Sistema ternario.

```
0)  1211022201
    1122110212  (1
    ----------
      11211212  (1
```

Sistema cuaternario.

```
2)  2301303120
    1212332231  (2
    ----------
    1022330223  (0
```

Sistema quinario.

```
3)  4231034321
    3342143231  (2
    ----------
     333341040  (1
```

Sistema senario.

```
0)  4531023543
    3432134354  (2
    ----------
    1054445145  (3
```

Sistema septenario.

```
3)  6432150321
    3543261432  (3
    ----------
    2555555556  (0
```

Sistema octonario.

```
2)  7543216027
    2554321000  (1
    ----------
    4766675027  (1
```

Sistema nonario.

```
7)  8765432103
    7656784321  (1
    ----------
    1107536672  (6
```

Sistema decimal.

```
5)  13876743
     0956728  (1
    --------
    12920015  (2
```

Sistema undecimal.

```
7)  84a79432a
    548a34930  (6
    ---------
    30185a4aa  (1
```

Sistema duodecimal.

```
6)  34ab005000746
    12b500ab45abb  (4
    -------------
    21b5bb6076847  (2
```

LECCIÓN V

Sistemas defectivos de numeración.

Sabiendo ya el discípulo la operación de restar, se encuentra en el caso de formar idea de una clase de sistemas de numeración que pudieran llamarse defectivos (1).

Aunque jamás se pondrán en práctica, por ser sólo una curiosidad científica, conviene, no obstante, si no estudiarlos detenidamente, adquirir al menos concepto de su naturaleza y composición, ya que el sistema de los romanos (y probablemente de muchos otros pueblos de la antigüedad), pueden clasificarse entre los sistemas defectivos.

Supongamos que, habiendo de operar en el sistema decimal, sólo tuviéramos los caracteres

1, 2, 3, 4, 5,

y además el cero y el signo — (menos) de restar.

¿Podríamos escribir todos los grados de la escala de la pluralidad con esos solos caracteres?

Sí.

¿Cómo?

Por suma, según las reglas de todos los sistemas, mientras las cifras existentes lo consintiesen.

(1) Sería de gran importancia el estudio de la operación de restar en estos sistemas; pues de su análisis saldrían, naturalmente, las llamadas en álgebra reglas de los signos.

Por resta, en cuanto no hubiera cifras al efecto.

Veamos de qué modo.

En cuanto se carezca de signo se aumentará un uno á la cifra inmediata de la izquierda, el cual valdrá diez; pero para compensar el aumento se pondrá en el inmediato lugar de la derecha la cifra cuyo valor sea preciso rebajar á lo que valga el uno para obtener el grado que se desea; y, para indicar que esta cifra es cifra de compensación, se colocará sobre ella el signo de restar (—). Llamaremos á esta cifra de compensación «*cifra* sustraendo».

En virtud de lo expuesto,

uno	se escribirá	1
dos		2
tres		3
cuatro		4
cinco		5
seis		$1\bar{4} = 10 - 4$
siete		$1\bar{3} = 10 - 3$
ocho		$1\bar{2} = 10 - 2$
y nueve		$1\bar{1} = 10 - 1$

Llegados al diez volveremos á seguir las reglas generales del sistema de numeración decimal, hasta el quince; pero desde el diez y seis en adelante escribiremos 2 decenas, y á su derecha pondremos lo que hubiere que rebajar de 20 para obtener el 16, el 17, el 18 y el 19, todo como sigue:

diez	10
once	11
doce	12
trece	13
catorce	14
quince	15
diez y seis	$2\bar{4} = 20 - 4$
diez y siete	$2\bar{3} = 20 - 3$
diez y ocho	$2\bar{2} = 20 - 2$
diez y nueve	$2\bar{1} = 20 - 1$

Análogamente se escribirán los grados entre 20 y 30, entre 30 y 40 y entre 40 y 50.

Pero, como no hay 6, no podemos escribir 60 por suma, conforme á las reglas generales de los sistemas de numeración.

Recurriremos al sistema de restar lo que fuere preciso, después de aumentar un 1 á la cifra inmediata de la izquierda.

Así sesenta se escribirá $1\bar{4}0$

Por el mismo orden se escribirán las decenas siguientes:

setenta	$1\bar{3}0$
ochenta	$1\bar{2}0$
noventa	$1\bar{1}0$

Generalizando se escribirá:

seiscientos	$1\bar{4}00$
setecientos	$1\bar{3}00$
ochocientos	$1\bar{2}00$
novecientos	$1\bar{1}00$
seis mil	$1\bar{4}000$
siete mil	$1\bar{3}000$
ocho mil	$1\bar{2}000$
nueve mil	$1\bar{1}000$

Como ejemplo, véase la escala de los números entre 1 y 100 del sistema decimal defectivo.

SISTEMA DECIMAL DEFECTIVO

Las cifras que hay son **1, 2, 3, 4, 5 y 0.**

1	vale	1	26	vale	$3\,\overline{4}$	51	vale	5 1	76	vale	$1\,\overline{2}\,\overline{4}$
2	»	2	27	»	$3\,\overline{3}$	52	»	5 2	77	»	$1\,\overline{2}\,\overline{3}$
3	»	3	28	»	$3\,\overline{2}$	53	»	5 3	78	»	$1\,\overline{2}\,\overline{2}$
4	»	4	29	»	$3\,\overline{1}$	54	»	5 4	79	»	$1\,\overline{2}\,\overline{1}$
5	»	5	30	»	3 0	55	»	5 5	80	»	$1\,\overline{2}\,0$
6	»	$1\,\overline{4}$	31	»	3 1	56	»	$1\,\overline{4}\,\overline{4}$	81	»	$1\,\overline{2}\,1$
7	»	$1\,\overline{3}$	32	»	3 2	57	»	$1\,\overline{4}\,\overline{3}$	82	»	$1\,\overline{2}\,2$
8	»	$1\,\overline{2}$	33	»	3 3	58	»	$1\,\overline{4}\,\overline{2}$	83	»	$1\,\overline{2}\,3$
9	»	$1\,\overline{1}$	34	»	3 4	59	»	$1\,\overline{4}\,\overline{1}$	84	»	$1\,\overline{2}\,4$
10	»	1 0	35	»	3 5	60	»	$1\,\overline{4}\,0$	85	»	$1\,\overline{2}\,5$
11	»	1 1	36	»	$4\,\overline{4}$	61	»	$1\,\overline{4}\,1$	86	»	$1\,\overline{1}\,\overline{4}$
12	»	1 2	37	»	$4\,\overline{3}$	62	»	$1\,\overline{4}\,2$	87	»	$1\,\overline{1}\,\overline{3}$
13	»	1 3	38	»	$4\,\overline{2}$	63	»	$1\,\overline{4}\,3$	88	»	$1\,\overline{1}\,\overline{2}$
14	»	1 4	39	»	$4\,\overline{1}$	64	»	$1\,\overline{4}\,4$	89	»	$1\,\overline{1}\,\overline{1}$
15	»	1 5	40	»	4 0	65	»	$1\,\overline{4}\,5$	90	»	$1\,\overline{1}\,0$
16	»	$2\,\overline{4}$	41	»	4 1	66	»	$1\,\overline{3}\,\overline{4}$	91	»	$1\,\overline{1}\,1$
17	»	$2\,\overline{3}$	42	»	4 2	67	»	$1\,\overline{3}\,\overline{3}$	92	»	$1\,\overline{1}\,2$
18	»	$2\,\overline{2}$	43	»	4 3	68	»	$1\,\overline{3}\,\overline{2}$	93	»	$1\,\overline{1}\,3$
19	»	$2\,\overline{1}$	44	»	4 4	69	»	$1\,\overline{3}\,\overline{1}$	94	»	$1\,\overline{1}\,4$
20	»	2 0	45	»	4 5	70	»	$1\,\overline{3}\,0$	95	»	$1\,\overline{1}\,5$
21	»	2 1	46	»	$5\,\overline{4}$	71	»	$1\,\overline{3}\,1$	96	»	$1\,0\,\overline{4}$
22	»	2 2	47	»	$5\,\overline{3}$	72	»	$1\,\overline{3}\,2$	97	»	$1\,0\,\overline{3}$
23	»	2 3	48	»	$5\,\overline{2}$	73	»	$1\,\overline{3}\,3$	98	»	$1\,0\,\overline{2}$
24	»	2 4	49	»	$5\,\overline{1}$	74	»	$1\,\overline{3}\,4$	99	»	$1\,0\,\overline{1}$
25	»	2 5	50	»	5 0	75	»	$1\,\overline{3}\,5$	100	»	1 0 0

Todo sistema defectivo ha de tener cuando menos la mitad de las cifras significativas, que exija el sistema respectivo, el cero y el signo menos.

Así, no puede haber más sistemas defectivos decimales que los siguientes:

Primero..	**1, 2, 3, 4, 5, 0, y el signo —**
Segundo..	**1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, y el signo —**
Tercero...	**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, y el signo —**
Cuarto.....	**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, y el signo —**

Este último es completamente inútil, pues necesita, incluyendo al signo —, diez signos, que son precisamente los mismos que requiere el sistema decimal.

Los treinta primeros grados de la escala, según el segundo, tercero y cuarto sistemas decimales defectivos, se escribirían así:

1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
$1\bar{3}$	7	7
$1\bar{2}$	$1\bar{2}$	8
$1\bar{1}$	$1\bar{1}$	$1\bar{1}$
10	10	10
11	11	11
12	12	12
13	13	13
14	14	14
15	15	15
16	16	16
$2\bar{3}$	17	17
$2\bar{2}$	$2\bar{2}$	18
$2\bar{1}$	$2\bar{1}$	$2\bar{1}$
20	20	20
21	21	21
22	22	22
23	23	23
24	24	24
25	25	25
26	26	26
$3\bar{3}$	27	27
$3\bar{2}$	$3\bar{2}$	28
$3\bar{1}$	$3\bar{1}$	$3\bar{1}$
30	30	30

etc., etc.

OTROS SISTEMAS DEFECTIVOS.

	Sistema quinario que careciese de la cifra 4.	Sistema nonario sin las cifras 7 y 8.	Sistema duodecimal sin las cinco últimas cifras.
Uno...........	1	1	1
Dos.....	2	2	2
Tres...........	3	3	3
Cuatro........	1 $\bar{1}$	4	4
Cinco..........	1 0	5	5
Seis............	1 1	6	6
Siete..........	1 2	1 $\bar{2}$	1 $\bar{5}$
Ocho..........	1 3	1 $\bar{1}$	1 $\bar{4}$
Nueve.........	2 $\bar{1}$	1 0	1 $\bar{3}$
Diez...........	2 0	1 1	1 $\bar{2}$
Once..........	2 1	1 2	1 $\bar{1}$
Doce..........	2 2	1 3	1 0
Trece..........	2 3	1 4	1 1
Catorce........	3 $\bar{1}$	1 5	1 2
Quince........	3 0	1 6	1 3
Diez y seis.....	3 1	2 $\bar{2}$	1 4
Diez y siete....	3 2	2 $\bar{1}$	1 5
Diez y ocho....	3 3	2 0	1 6
Diez y nueve...	1 $\bar{1}$ $\bar{1}$	2 1	2 $\bar{5}$
Veinte.........	1 $\bar{1}$ 0	2 2	2 $\bar{4}$
Veinte y uno ..	1 $\bar{1}$ 1	2 3	2 $\bar{3}$
Veinte y dos...	1 $\bar{1}$ 2	2 4	2 $\bar{2}$
Veinte y tres ..	1 $\bar{1}$ 3	2 5	2 $\bar{1}$
Veinte y cuatro	1 0 $\bar{1}$	2 6	2 0
Veinte y cinco..	1 0 0	3 $\bar{2}$	2 1
Veinte y seis...	1 0 1	3 $\bar{1}$	2 2
Veinte y siete..	1 0 2	3 0	2 3
Veinte y ocho..	1 0 3	3 1	2 4
Veinte y nueve.	1 1 $\bar{1}$	2 2	2 5
Treinta........	1 1 0	2 3	2 6

ADICIÓN

La adición en los sistemas defectivos será una serie de sumas y de restas, por ejemplo:

Sistema decimal defectivo que carezca de las cifras 6, 7, 8 y 9.	Su traducción al sistema decimal.
$\underbrace{1}\ \underbrace{2}$	$\underbrace{5}\ \underbrace{6}$
5 5	5 5
5 5	5 5
2 4	2 4
3 6	3′6′
4 2	4 2
$1\,\overline{3}\,\overline{4}\,(=1\,0\,0+30+4)$	6 6
1 2	1 2
$3\,\overline{2}\,(=\ 3\,0+2)$	2 8
1 0 4	1 0 4′
$1\,\overline{4}\,\overline{4}\,(=1\,0\,0+4\,0+4)$	5 6
$1\,\overline{4}\,5\,(=1\,0\,0+4\,0+5)$	6′5
$1\,\overline{1}\,\overline{2}\,(=1\,0\,0+1\,0+2)$	8 8′
6 3 1	6 3 1

se dirá para sumar la primera columna ó de las protoenas del ejemplo defectivo

5 y 5, 10; y 4, 14; y 6, 20; y 2, 22; menos 4, 18; y 2, 20; menos 2, 18; y 4, 22; menos 4, 18; y 5, 23; menos 2, 21; etc., etc.

Convendrá á veces sumar cada columna por separado, porque pudiera ocurrir que lo que hubiese que restar fuese mayor que lo que debiera sumarse (como en el ejemplo que sigue), y entonces habría que aguardar para restar, á hacer la suma de las demás columnas.

	Traducción al sistema decimal.
$1\,\overline{3}\,\overline{4}$	6 6
$3\,\overline{2}$	2 8
$1\,\overline{2}\,\overline{1}$	7 9
2 4	2 4
$2\,\overline{3}$	1 7
$1\,\overline{1}\,2$	9 2
$\overline{4}$	
1 0	
3 0 0	
$3\,1\,\overline{4}$	8 0 6

Y diremos:

PRIMERA COLUMNA

menos 4 y menos 2, menos 6; y menos 1, menos 7; y + 4, es menos 3; y menos 3, es menos 6; y + 2, es menos 4;

finalizada la suma de la primera columna se escribirá al pie $\overline{4}$.

Luego se dirá:

SEGUNDA COLUMNA

menos 3 y + 3, es cero; menos 2 y + 2, es cero; + 2 y menos 1, es 1;

finalizada esta suma pondremos 1 al pie de la segunda columna en la forma de una deutena, ó sea 10.

Y continuaremos en seguida diciendo:

TERCERA COLUMNA

1 y 1 y 1, 3; y pondremos el 3 en la forma de tres trienas, ó sea 300.

Por último, haremos la suma final, y obtendremos el resultado 3 1 $\overline{4}$.

En la operación de restar números de sistemas defectivos ocurren muchas particularidades, no fáciles de explicar sin nociones de álgebra, como sucede con los casos en que los números del sustraendo son defectivos; pues entonces en vez de restar hay que sumar, ó restar según las circunstancias.

El análisis del gran número de casos que pueden ocurrir ocuparía mucho tiempo sin gran utilidad *práctica* para el estudio puramente aritmético (1).

(1) Quizá algún día saldrá á luz un esbozo de esta clase de sistemas defectivos, para deducir del estudio de tales sistemas las reglas de los signos algebráicos. Muchos son los casos que pueden ocurrir. Sin contar con las operaciones de multiplicar y de partir, sólo en la de restar puede suceder que no sean defectivas las cifras correspondientes de minuendo y sustraendo; que ambas lo sean, que lo sea una y otra no, con dos variantes de que en todos estos casos sea mayor la cifra del minuendo que la del sustraendo, ó que suceda lo contrario; y, en fin, que de restas parciales anteriores vengan ó no reservas al sustraendo.

ARITMÉTICA PURA

LIBRO IV

MULTIPLICACIÓN

MULTIPLICACIÓN

LECCIÓN I

Del multiplicar.

DENOMINACIONES.—TABLAS.

Sabemos que hay varias clases de sumas (además de la que constituye la base y esencia de los sistemas de numeración):

1.ª Suma de sumandos todos desiguales (1);

2.ª Suma en que todos los sumandos son iguales;

3.ª Suma en que todos los sumandos son iguales, menos uno menor.

De la primera clase de sumas trata el anterior Libro II.

A la suma especial, que entraña la operación de restar, está consagrado el Libro III.

Y ahora corresponde estudiar la suma todos cuyos sumandos son iguales.

Desde luego se comprende que á esta suma especial son aplicables las reglas dadas para la suma de sumandos desiguales.

(1) O en que, por accidente, algunos son iguales.
En la operación de restar el minuendo es la suma de dos sumandos, uno de los cuales se conoce. Los dos sumandos son regularmente desiguales; pero pudieran ser tal vez iguales: $8 - 4 = 4$; y, en efecto, $4 + 4 = 8$.

Pero ¡cuánto tiempo no se necesitaría para resolver esta clase de sumas, si no hubiese manera de abreviar la operación!

Supongamos que hay un ejército de cien mil hombres y que cada soldado gana seis reales diarios. ¿Cuánto hay que pagar por tal concepto en un año?

Admitamos que no hubiese medio de abreviar la operación: tendríamos que escribir trescientos sesenta y cinco veces el seis por cada soldado y repetir el resultado luego cien mil veces!!!

Un hábil amanuense que trabajase á razón de diez horas diarias, y que escribiese sin cansancio cien cifras cada minuto, necesitaría solamente para poner por escrito esa enorme cantidad de signos, el espacio de seiscientos días, y es seguro que en dos años no acabaría de sumar. Y, sin embargo, tan laborioso modo de computar puede ser sustituído por otro que exigirá menos de un minuto á quien tenga ya adquirida práctica en multiplicar.

Multiplicar, en Aritmética pura es, pues, una operación en virtud de la cual se hace abreviadamente una suma de sumandos iguales.

¿Cómo?

Vamos á verlo.

Ante todo es preciso aprender de memoria cierto número de sumas cortas en que los sumandos son únicamente números dígitos del sistema de numeración en que se opera. Así en el sistema quinario habrá que aprender de memoria los resultados de las siguientes sumas:

1	2	3	4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
= dos	= cuatro	= seis	= ocho
1	2	3	4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
= tres	= seis	= nueve	= doce
1	2	3	4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
= cuatro	= ocho	= doce	= diez y seis

Aun estas sumas se indicarían abreviadamente en una tabla de la forma que sigue:

2 veces 1 = dos
3 veces 1 = tres
4 veces 1 = cuatro

2 veces 2 = cuatro
3 veces 2 = seis
4 veces 2 = ocho

2 veces 3 = seis
3 veces 3 = nueve
4 veces 3 = doce

2 veces 4 = ocho
3 veces 3 = nueve
4 veces 4 = diez y seis

Y, adoptando la forma de la llamada

TABLA DE MULTIPLICAR (1),

atribuída á Pitágoras, obtendríamos más brevemente los resultados. Hélos aquí anotados, según el sistema decimal:

×	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Y, traducidos estos guarismos al sistema quinario, resultaría:

×	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

(1) En esta tabla se consignan los productos de cada dígito de la primera columna vertical de la izquierda por cada uno de los dígitos del primer renglón horizontal. O viceversa. Véase luego la explicación de la tabla de PITÁGORAS para el sistema decimal.

En el sistema decimal habrá que aprender de memoria los resultados de las sumas siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 2	= 4	= 6	= 8	= 10	= 12	= 14	= 16	= 18
1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 3	= 6	= 9	= 12	= 15	= 18	= 21	= 24	= 27
1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 4	= 8	= 12	= 16	= 20	= 24	= 28	= 32	= 36
1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 5	= 10	= 15	= 20	= 25	= 30	= 35	= 40	= 45
1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 6	= 12	= 18	= 24	= 30	= 36	= 42	= 48	= 54
1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 7	= 14	= 21	= 28	= 35	= 42	= 49	= 56	= 63
1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 8	= 16	= 24	= 32	= 40	= 48	= 56	= 64	= 72

1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 9	= 18	= 27	= 36	= 45	= 54	= 63	= 72	= 81

Aun esto ha parecido largo; y las anteriores sumas se indican más brevemente en la forma que expresa la tabla de Pitágoras, según sigue á continuación:

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Como ya vimos al tratar de la tabla de sumar (Lección III del Restar), los dígitos del primer renglón, así como los de la primera columna de la izquierda, se llaman *argumentos:* si bajamos con la imaginación una línea vertical desde un argumento cualquiera de los del renglón horizontal de arriba, y tiramos horizontalmente otra línea imaginaria hacia la derecha desde otro argumento cualquiera de los de la columna vertical de la izquierda, hallaremos en el sitio donde se corten las dos líneas imaginarias vertical y horizontal, lo que suma el argumento de arriba repetido tantas veces como exprese el argumento de la izquierda (ó viceversa).

Así, si queremos saber cuánto suma el 8 repetido cuatro veces, bajaremos imaginariamente una línea vertical desde el 8 del renglón de arriba, y extenderemos horizontalmente otra línea imaginaria desde el 4 de la izquierda; veremos que ambas líneas se cruzan donde dice 32, y así sabremos que

4 veces 8 es 32

ó, lo que es lo mismo, que

$$8 + 8 + 8 + 8 = 32$$

etc., etc.

Para multiplicar en el sistema duodecimal habrá que aprender previamente de memoria los resultados de más sumas aún, las cuales serían los que indica la siguiente tabla:

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121

Esta tabla está escrita, en obsequio á los principiantes, según el sistema decimal, aun cuando los resultados corresponden al duodecimal.

En el cuadro siguiente se halla todo tabulado, según la notación duodecimal.

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**a**	**b**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
2	2	4	6	8	a	10	12	14	16	18	1a
3	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	5	a	13	18	21	26	2b	34	39	42	47
6	6	10	16	20	26	30	36	49	46	50	56
7	7	12	19	24	2b	36	41	48	53	5a	65
8	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
a	a	18	26	34	42	50	5a	68	76	84	92
b	b	1a	29	38	47	56	65	74	83	92	a1

Si queremos saber (según la notación decimal) cuánto es lo que suma el 11 repetido 11 veces, bajaremos en la tabla penúltima una línea imaginaria desde el argumento 11 del renglón de arriba y extenderemos otra línea horizontal hacia la derecha desde el argumento 11 de la columna de la izquierda; y, como esas líneas se encuentran en la casilla del 121, sabremos que

11 veces 11 es 121,

etc., etc.

Y, análogamente procederemos si queremos conocer ese *productillo* según la notación duodecimal: (= a 1).

Así, pues:

Para multiplicar (ó, lo que es lo mismo, para sumar abreviadamente sumandos todos iguales), lo primero que hay que hacer es aprender de memoria la tabla de multiplicar correspondiente al sistema de numeración en que se opere.

Mientras más dígitos tiene un sistema de numeración, mayor número de resultados ó de sumas tenemos que encomendar á la memoria.

Cada tabla de multiplicar contiene los resultados de tantas sumas como se pueden formar con las cifras del sistema repitiendo cada una dos veces, tres veces, cuatro veces... hasta que el número de los sumandos iguala á la cifra máxima.

En el sistema quinario el mayor sumando de las tablas no excede de 4, mientras que en el sistema decimal llega hasta nueve, al par que en el sistema duodecimal alcanza hasta once.

Aprendida una tabla de multiplicar correspondiente á un sistema de numeración que tenga muchos dígitos (por ejemplo el duodecimal), están aprendidas las de todos los sistemas inferiores al 12, porque la tabla del sistema de más dígitos, contiene necesariamente las sumas de los otros sistemas de menor número de cifras.

La suma de sumandos iguales tiene un nombre especial y se llama PRODUCTO. El producto de un dígito por otro suele llamarse (y conviene mucho llamarlo) *productillo.*

El sumando que se repite se llama MULTIPLICANDO, y MULTIPLICADOR el coeficiente expresivo del número de sumandos que hay iguales; ó bien el número de repeticiones de un mismo sumando.

El símbolo de la multiplicación (ó sea de las sumas abreviadas) es el siguiente $\times$, que se lee *multiplicado por*; ó bien *multiplicado*; ó simplemente *por*; ó bien *veces.*

Así

$$8 \times 4 = 32$$

se lee 8 multiplicado por 4, igual á 32;
ó bien 8 multiplicado 4, igual 32;
ó bien 8 por 4, igual 32;
ó bien 8 por 4, 32;
ó bien 8 veces 4, igual 32;
ó bien 8 veces 4, 32.

Claro es que 8×4 simboliza en abreviado las sumas siguientes (1):

(1) En vez del signo $\times$, algunos Aritméticos estampan un punto; de modo que

$$8 \times 4, \text{ es lo mismo que } 8 \,.\, 4, \text{ etc.}$$

Pero esta última indicación puede presentar graves inconvenientes en las operaciones de los llamados *decimales*. Por eso pocos usan el punto en vez del $\times$.

		4
		4
		+ 4
		+ 4
8		+ 4
+ 8	ó bien	+ 4
+ 8		+ 4
+ 8		+ 4
32		32

8 repetido cuatro veces, ó bien 8 veces repetido el 4.

No es de absoluta necesidad aprender de memoria la siguiente tabla; pero es de grandísima importancia el hacerlo. Quien la aprendiere bien, verá largamente premiados sus esfuerzos.

×	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
2	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	77	84	91	98	105	110	119	126	133	140
8	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

LECCIÓN II

Multiplicar por un dígito seguido de ceros.

Si en el sistema decimal se repite diez veces un dígito cualquiera, la suma de estos diez sumandos iguales estará representada por el mismo dígito seguido de un cero:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
= 10	= 20	= 30	= 40	= 50	= 60	= 70	= 80	= 90

Si en el sistema quinario se repite alguno de sus cuatro dígitos cinco veces, la suma de tales sumandos iguales resultará representada por lo que valga en el sistema quinario el mismo dígito seguido de un cero.

1	2	3	4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
= 10 (= cinco)	= 20 (= diez)	= 30 (= quince)	= 40 (= veinte)

En el sistema duodecimal, cualquiera de sus once dígitos repetido doce veces dará los resultados siguientes:

1	2	3 . . . .
+1	+2	+3 . . . . . .
+1	+2	+3 . . . . . .
+.	+.	+.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
= 10 (= doce.)	= 20 (= dos docenas ó veinte y cuatro.)	= 30 (= tres docenas ó treinta y seis.) . .

En general, un dígito repetido tantas veces como cifras tiene un sistema, da por suma en cualquier sistema un grado de la escala de la pluralidad que en el sistema se representa por escrito con el mismo dígito y un cero.

En efecto:

Esta es precisamente la primera propiedad de los sistemas de numeración, aunque dicha de otro modo.

Todos los sistemas tienen cierto número de cifras, de las cuales una (que es el cero) carece de valor, por ser puramente locativa. El número de cifras significativas ó que expresan grados de la escala es, pues, el número de las cifras del sistema menos uno.

Por consiguiente, cuando queremos expresar aquel grado de la escala que sea igual al total de las cifras, como no hay ya después de la cifra máxima, ninguna cifra significativa más, para representar ese grado tenemos que recurrir al uno y al cero, conforme al convenio de que un 1 en segundo lugar vale tantas veces como cifras haya en el sistema: por supuesto, con inclusión del cero mismo.

Generalizadas estas ideas, diremos que para multiplicar un número cualquiera (no precisamente un dígito) por diez en el sistema decimal, por nueve en el nonario, por ocho en el octonario... por once en el undecimal, por doce en el duodecimal, y, en general, por lo que valga, según el sistema en que estemos operando, un 1 seguido de un cero, no necesitamos más que agregar un cero al número que necesitemos multiplicar por diez, ó bien por nueve, ó bien por ocho, etcétera (según el sistema).

Y, continuando la generalización, diremos también que, para multiplicar un dígito ó un guarismo cualquiera por lo que valga en un sistema la expresión formada por un 1 y dos ceros (ó por un 1 y tres ceros, ó cuatro, ó cinco, etc., ceros), no hay más que agregar al dígito, ó al guarismo, dos ceros (ó bien tres, ó cuatro, ó cinco, etc., según el caso).

Ejemplos:

Multiplíquese en el sistema quinario, por veinte y cinco (que se escribe 100) el guarismo siguiente, del mismo sistema quinario:

2434 × veinte y cinco = 243400 (que vale 46125 en el sistema decimal).

Multiplíquese por ciento veinte y uno el siguiente, del sistema undecimal:

8446 × ciento veinte y uno = 844600 que vale en el sistema decimal 1353022.

Multiplíquese por diez y seis el siguiente, del sistema binario:

111 × diez y seis = 11100000 (que vale 224 del sistema decimal).

Es de evidencia que, si en el sistema decimal, multiplicar por 10 es realizar abreviadamente una suma de diez sumandos iguales, multiplicar por 20 será reunir dos sumas, cada una de diez sumandos iguales; y, por consiguiente, que multiplicar por 30 es reunir tres sumas, cada una de diez sumandos iguales, etc., etc.

De modo que, si tuviéramos que repetir en el sistema decimal 40 veces el 7, la operación se reduciría á saber lo que en junto importaban las siguientes sumas, cada una de á diez sumandos iguales á 7.

7	7	7	7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
+ 7	+ 7	+ 7	+ 7

Pero sabemos que cada una de ellas es igual á

70;

de modo que las cuatro reunidas serán

$$\begin{array}{r} 70 \\ +\ 70 \\ +\ 70 \\ +\ 70 \\ \hline \end{array}$$

que en junto importan

280

Ahora bien: ¿pudiéramos hasta ahorrarnos el hacer por el método ordinario la suma de esos cuatro sumandos iguales (70, 70, 70, 70)?

En otros términos:

¿Hay medios de abreviar esa suma de decenas?

Sí.

Al efecto se comete, á sabiendas, un error, que se enmienda inmediatamente después de haberlo cometido.

En lugar de suponer que tenemos que hacer la suma de los cuatro sumandos

$$\begin{array}{r} 70 \\ +\ 70 \\ +\ 70 \\ +\ 70 \\ \hline \end{array}$$

imaginamos que debemos efectuar la suma con los cuatro sumandos

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ +\ 7 \\ \hline \end{array}$$

Pero, por las tablas de multiplicar, sabemos que una suma de 4 sumandos iguales á 7, importa 28; luego, sin escribirla, diremos de memoria

el 7 repetido 4 veces suma 28.

Mas, como ese 28 es diez veces menor de lo que debe ser, lo haremos diez veces mayor agregando un cero, y diremos que una suma en que haya 40 sumandos iguales á 7, suma 280.

Si tuviéramos que repetir 400 veces el 7, supondríamos que no existían los dos ceros (lo que equivaldría á repetir el 7 cien veces menos de lo que debe ser, por lo cual el resultado aparecería cien veces menor).

Pero, suponiendo que no existen los dos ceros, tendremos reducido el caso á repetir 4 veces el 7; suma que ya sabemos, por las tablas, es igual á 28.

Mas, como este resultado es 100 veces menor de lo que debe ser, lo haremos inmediatamente 100 veces mayor (y, por consiguiente, exacto), agregando al 28 los dos ceros omitidos:

$$7 \times 400 = 2800$$

Si tuviéramos que multiplicar el 7 por 4 000, por 40 000, por 400 000... ó, en general, por 4 seguido de cualquier número de ceros, prescindiríamos de los ceros (cometiendo en ello á sabiendas un error), multiplicaríamos de memoria

$$7 \times 4 = 28$$

y enmendaríamos en el acto el error agregando al 28 los ceros suprimidos.

Aunque esto es bien sencillo, hagamos aplicación á algún otro sistema: al quinario, por ejemplo.

Supongamos que tenemos que repetir el 4 quince veces (ó sea tres deutenas quinarias = 30): 4 × cinco tres veces.

La suma se simbolizará en abreviado como sigue:

$$4 \times 30$$

Imaginemos suprimido el cero (con lo que incurrimos en el error de hacer al multiplicador cinco veces menor de lo que debe ser) y tendremos

cuatro por tres = doce

que se escribe en el sistema quinario

$$4 \times 3 = 22$$

Como este resultado es cinco veces menor de lo que debía ser, enmendaremos el error á sabiendas cometido, agregando dicho cero á la expresión obtenida: de modo que

cuatro $\times$ quince = sesenta

lo que se escribirá así en el sistema quinario:

$$4 + 30 = 220$$

Si en vez de multiplicar cuatro por quince, hubiésemos tenido que multiplicarlo por setenta y cinco (= 300), habríamos escrito

$$4 \times 300 =$$

habríamos además prescindido de los dos ceros, cometiendo el error de hacer al multiplicador 25 veces menor de lo que es; habríamos multiplicado

$$4 \times 3;$$

habríamos hallado esta suma

$$= 22$$

y habríamos compensado el error, agregando los dos ceros suprimidos;

$$4 \times 300 = 2200$$

En general, para multiplicar un dígito por otro seguido de ceros

1.º Se prescinde imaginativamente de estos ceros;

2.º Se multiplica de memoria y conforme á las tablas un dígito por otro;

3.º Se escribe este *productillo* como exija el sistema;

4.º Y, por último, se agregan los ceros suprimidos.

Multiplicar en el sistema cuaternario tres por ciento veinte y ocho

(disposición):	3×2000	=
(con error):	3×2	= 12 (seis)
(compensación):	3×2000	= 12000

Multiplicar en el sistema senario cinco por setenta y dos

(disposición):	5×200	=
(con error):	5×2	= 14 (diez)
(compensación):	5×200	= 1400

LECCIÓN III

Ceros en el multiplicador.—Procedimiento general.

Tenemos demostrado que los grados de la escala de la pluralidad se dividen *por razón de su estructura escrita* en tantos grupos como cifras significativas necesite su expresión en un sistema dado; y que, por consiguiente, un mismo grado de la pluralidad aparece compuesto en un sistema de una manera diferente que en otro.

Así, el grado 87 de la escala de la pluralidad se divide en el sistema quinario por razón de la forma escrita en

300 + 40 + 2
dos
veinte
setenta y cinco } ochenta y siete;

y, según el sistema duodecimal, se dividirá en

70 + 3
tres
ochenta y cuatro } ochenta y siete;

etc., etc.

Ahora bien:

Es de evidencia que, si hay que duplicar, triplicar... decuplar... dodecuplar... centuplicar, etc., un todo, se logrará el objeto duplicando, triplicando..., decuplando, dodecuplando..., etc., cada una de sus partes, ó cada uno de sus trozos, secciones ó componentes.

Pues bien: con estas ideas ya tenemos lo necesario para hacer abreviadamente en cualquier sistema todas las sumas de sumandos iguales cuando hay un dígito con ceros en el multiplicador.

Supongamos que en el sistema decimal tengamos que repetir mil veces el número 342.

Esto nos dará (conforme á la Lección anterior)

$$\begin{array}{rr} 300 \times 1\,000 = & 300\,000 \\ +\ 40 \times 1\,000 = & +\ 40\,000 \\ +\ \ 2 \times 1\,000 = & +\ \ 2\,000 \\ \hline & 342\,000 \end{array}$$

pues, para multiplicar por un 1 seguido de ceros, no hay otra cosa que hacer sino agregar los ceros al número dado.

Sea ahora en el sistema decimal la suma de 2 000 sumandos iguales á 342

$$342 \times 2\,000 -$$

En vez de escribir 2 000 sumandos iguales á

342

dividiremos también este número (por razón de su estructura escrita), en los 3 grupos

$$\begin{array}{r} 300 \\ +\ 40 \\ +\ \ 2 \end{array}$$

y repetiremos abreviadamente 2 000 veces el 300, otras 2 000 veces el 40 y otras 2 000 veces el 2.

Supongamos, en primer lugar, que el 300 no es 300, sino 3, y, en segundo lugar, que el 2 000 no es 2 000, sino 2 (doble suposición que nos hace cometer un doble error que luego enmendaremos). Multiplicaremos primeramente de memoria, según la tabla pitagórica, 3 × 2: hallaremos que el productillo (ó suma abreviada) es 6, y enmendaremos al punto el doble error agregando al 6 los cinco ceros suprimidos (tres del 2000 y dos del 300); con lo que habremos hecho expeditivamente una suma de 2 000 sumandos iguales á 300.

Tendremos, pues, 300 × 2 000 = 600 000.

En seguida procederemos á efectuar abreviadamente la suma de 2 000 sumandos iguales á 40; la cual se hará comotiendo á sabiendas el doble error de suprimir los ceros; multiplicaremos en seguida de memoria y con arreglo á la tabla 4×2; y, obtenido el productillo 8, enmendaremos el doble error con la agregación de 4 ceros (tres por el 2 000 y uno por el 40).

Tendremos, pues,

$$40 \times 2\,000 = 80\,000$$

Acto continuo, repetiremos 2 000 veces el 2, según se explicó en la Lección última, y obtendremos

$$2 \times 2\,000 = 4\,000$$

Reuniendo ahora los resultados parciales, sabremos abreviadamente cuanto importa una suma en que haya 2 000 sumandos iguales á 342:

$$\begin{array}{rl} 300 \times 2\,000 = & 600\,000 \\ +\ 40 \times 2\,000 = & +\ 80\,000 \\ +\ 2 \times 2\,000 = & +\ \ 4\,000 \\ \hline = & 684\,000 \end{array}$$

Por este método de cometer errores á sabiendas suprimiendo ceros, de multiplicar luego de memoria y con arreglo á las tablas los dígitos solamente del multiplicando por el multiplicador, de escribir en seguida el productillo de estos dígitos *conforme exige cada sistema*, de agregar después para deshacer el error los ceros suprimidos, y de sumar, en fin, los resultados parciales, se hace abreviadamente y en cortos instantes una suma de muchos centenares, ó de muchos miles, miríadas ó millones... de sumandos iguales.

Supongamos ahora que debamos multiplicar 3231 por 30000:

$$3231 \times 30000;$$

dividiremos el sumando 3231 en sus componentes

$$\begin{array}{r} 3000 \\ +\ 200 \\ +\ 30 \\ +\ 1 \end{array}$$

y repetiremos cada uno 30000 veces. Lo cual nos dará:

$$\begin{array}{rlrr} & 3 \times 3, \text{ con siete ceros} & = & 90000000 \\ + & 2 \times 3, \text{ con seis ceros} & = + & 6000000 \\ + & 3 \times 3, \text{ con cinco ceros} & = + & 900000 \\ + & 1 \times 3, \text{ con cuatro ceros} & = + & 30000 \end{array}$$

y, sumando los cuatro productos parciales, tendremos como producto total........ 96930000

Fácil es ver que, en vez de obtener en cuatro renglones los productos parciales, los habríamos tenido en uno solo, con gran ahorro de tiempo, procediendo como sigue:

$$\begin{array}{r} 3231 \\ \times\ 30000 \\ \hline \end{array}$$

Prescindamos imaginariamente de los ceros, como si sólo tuviéramos

$$\begin{array}{r} 3231 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$$

en lo que cometemos el error de hacer 10000 veces menor de lo que es al multiplicador 3.

Multipliquemos ahora este 3 por cada uno de los dígitos del multiplicando, coloquemos cada productillo en el lugar correspondiente de las protoenas, deutenas, trienas y tetraenas, y tendremos

$$\begin{array}{r} 3231 \\ \times\ 3 \\ \hline = 9693 \end{array}$$

compensemos, en fin, el error, agregando los ceros suprimidos, y vendrá, como producto total, lo que sigue:

$$\begin{array}{r} 3231 \\ \times\ 30000 \\ \hline = 96930000 \end{array}$$

Procediendo análogamente en los ejemplos siguientes, obtendremos en un solo renglón los productos totales:

$$\begin{array}{r} 2212 \\ \times\ 4000 \\ \hline = 8848000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 342 \\ \times\ 200000 \\ \hline = 6840000 \end{array}$$

Pero veamos ahora otro género de dificultad.

Tratemos de repetir 5000 veces el sumando 359

$$\begin{array}{r} 359 \\ \times\ 5000 \\ \hline \end{array}$$

Ya no podríamos (con lo que hasta ahora sabemos) obtener el resultado desde luego y en un solo renglón.

Presentemos el sumando 359 dividido, conforme á su estructura escrita, en sus tres componentes:

$$\begin{array}{r} 300 \\ +\ 50 \\ +\ \ 9 \end{array}$$

Para repetir el 359 cinco mil veces, habría que repetir igual número de veces cada uno de sus componentes.

$$\begin{array}{rl} 300 & \times\ 5000 \\ +\ 50 & \times\ 5000 \\ +\ \ 9 & \times\ 5000 \end{array}$$

Prescindiendo de los ceros resultaría:

$$\begin{array}{lclclr} 3 \text{ trienas} & \times & 5 & = & 15 \text{ trienas.} & 15 \text{ trienas.} \\ +\ 5 \text{ deutenas} & \times & 5 & = & 25 \text{ deutenas.} & +\ 25 \text{ deutenas.} \\ +\ 9 \text{ protoenas} & \times & 5 & = & 45 \text{ protoenas.} & +\ 45 \text{ protoenas.} \\ \cline{6-6} & & & & & = 1795 \end{array}$$

Y, compensando el error con las correspondientes agregaciones de ceros, resultaría como final:

$$\begin{array}{rlcr} 300 & \times\ 5000 & = & 1500000 \\ +\ 50 & \times\ 5000 & = & +\ 250000 \\ +\ \ 9 & \times\ 5000 & = & +\ 45000 \\ \cline{4-4} & & = & 1795000 \end{array}$$

Vése, pues, que el 9 y el 7 del producto total son resultados de suma, y que en el producto total no aparecen los componentes tales como están en los productillos parciales de un dígito por otro. Y sin hacer tales sumas no es posible obtener desde luego y en un solo renglón el producto total.

Pero ¿no podrían hacerse esas sumas de memoria, con ahorro de tiempo y de trabajo?

Por fortuna, cabe efectuarlo. Y con suma facilidad.

Los productillos de un dígito por otro dígito se expresan gráficamente en todos los sistemas con una ó con dos cifras, según lo evidencian las respectivas tablas de multiplicar. (Véanse.)

Si se expresan con una sola cifra, esta cifra se escribe desde luego en el lugar correspondiente, según los ceros que deban seguirla.

Pero supongamos que el productillo parcial de un dígito por otro dígito se escriba con dos cifras: entonces procederemos como sigue:

1.° Empezaremos por la derecha.

2.° Multiplicaremos el primer dígito del multiplicando (protoena) por el dígito multiplicador;

3.° Escribiremos, de las dos cifras que suponemos constituyen el productillo, sólo la de la derecha en el lugar de las protoenas, y retendremos la de la izquierda como *reserva;*

4.° Multiplicaremos la segunda cifra del multiplicando (deutena) por el dígito multiplicador, y al productillo agregaremos la reserva del anterior: esta agregación nos producirá una suma representada siempre por dos cifras; de las cuales escribiremos en el sitio de las deutenas solamente la cifra de la derecha, y retendremos como nueva reserva la cifra de la izquierda;

5.° Multiplicaremos la tercera cifra del multiplicando (triena) por el dígito multiplicador; agregaremos la reserva; escribiremos en el sitio de las trienas sólo la cifra de la derecha del productillo incorporado á su reserva, y guardaremos la otra para reserva...;

6.° Y así continuaremos hacia la izquierda, multiplicando cada cifra del multiplicando por la del multiplicador, agregando al productillo la reserva anterior (si la hay); escribiendo sólo la cifra de la derecha en el correspondiente lugar, y reteniendo para reserva la de la izquierda (si resulta);

7.° Hasta que, cuando se haya multiplicado la última cifra de la izquierda del multiplicando por la del multiplicador, se agregará la última reserva y se escribirá íntegramente el resultado final.

Así, en el anterior ejemplo

$$\begin{array}{r} 359 \\ \times\ 5 \\ \hline \end{array}$$

diremos:

5 por 9, 45: escribo el 5 bajo la raya en el lugar de las protoenas, y guardo el 4 como reserva, para agregarlo al próximo productillo;

$$\begin{array}{r} 359 \\ \times\ 5 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

Y sigo:

5 por 25, 5; 25 del productillo + 4 de la reserva, 29: escribo el 9 en el lugar de las deutenas, y guardo el 2 como reserva;

$$\begin{array}{r} 359 \\ \times\ 5 \\ \hline 95 \\ \hline \end{array}$$

Y continúo:

5 por 3, 15; 15 de este productillo + 2 de la reserva anterior, 17: y escribo bajo la raya esta suma como final de la operación; de modo que el 7 ocupe el lugar de las trienas, y el 1 el lugar de las tetraenas:

$$\begin{array}{r} 359 \\ \times\ 5 \\ \hline 1795 \\ \hline \end{array}$$

Otro ejemplo, también en el sistema decimal:

$$\begin{array}{r} 456789 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$$

8 por 9, 72: escribo el 2 protoena, y reservo el 7 para incorporarlo con el próximo productillo:

$$\begin{array}{r} 456789 \\ \times\ 8 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

8 por 8, 64; 64 + 7 de la reserva, 71: escribo el 1 como deutena, y guardo el 7 como reserva.

$$\begin{array}{r} 456789 \\ \times \quad 8 \\ \hline 12 \\ \hline \end{array}$$

8 por 7, 56; 56 + 7 de la anterior reserva, 63: escribo el 3 como triena, y guardo el 6 como reserva;

$$\begin{array}{r} 456789 \\ \times \quad 8 \\ \hline 312 \\ \hline \end{array}$$

8 por 6, 48; 48 + 6, 54: escribo el 4 y reservo el 5.

$$\begin{array}{r} 456789 \\ \times \quad 8 \\ \hline 4312 \\ \hline \end{array}$$

8 por 5, 40; + 5 de la reserva, 45: escribo el 5 y reservo el 4.

$$\begin{array}{r} 456789 \\ \times \quad 8 \\ \hline 54312 \\ \hline \end{array}$$

8 por 4, 32; + 4 de la reserva, 36: y escribo íntegramente el 36 en el lugar debido, como final de la operación:

$$\begin{array}{r} 456789 \\ \times \quad 8 \\ \hline 3654312 \\ \hline \end{array}$$

LECCIÓN IV

Ejemplos.

Es evidente que, cuando se multiplica un guarismo de varias cifras por un dígito, sin aspirar á obtener el producto total desde luego y en un solo renglón, es indiferente empezar por la derecha ó por la izquierda, ó en otro orden.

EJEMPLO DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA QUINARIO

Empezando por la izquierda.		Empezando por la derecha.		Locativamente ó sin ceros.
234		234		234
$\times$ 2		$\times$ 2		$\times$ 2
400	$= 200 \times 2$	13	$= 4 \times 2$	13
110	$= 30 \times 2$	110	$= 30 \times 2$	11
13	$= 4 \times 2$	400	$= 200 \times 2$	4
1023		1023		1023

abreviadamente y, desde luego, en un solo renglón, diremos:

$$\begin{array}{r} 234 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1023 \end{array}$$

$2 \times 4 = 8$, que se escribe 13; pongo el 3 y guardo de reserva el 1 para agregarlo al siguiente productillo;
$2 \times 3 = 6$, $+ 1$ de la reserva $= 7$, que se escribe 12: pongo el 2 y retengo 1 de reserva para el productillo inmediato;
$2 \times 2 = 4$, $+ 1$ de reserva 5, que se escribe 10, y pongo íntegro este resultado 10, por final de operación.

EJEMPLO DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA SENARIO

Empezando por la izquierda.	Empezando por la derecha.	Locativamente ó sin ceros.
2445	2445	2445
× 4	× 4	× 4
12000	32	32
2400	240	24
240	2400	24
32	12000	12
15112	15110	15112

abreviadamente y, desde luego, en un sólo renglón, diremos:

$$\begin{array}{r} 2445 \\ \times \quad 4 \\ \hline 15112 \end{array}$$

$4 \times 5 = 20$ que se escribe 32; pongo el 2 y reservo el 3 para agregarlo al siguiente productillo parcial.
$4 \times 4 = 16, + 3$ de la reserva $= 19$, que se escribe 31; pongo 1, y llevo 3 de reserva;
$4 \times 4 = 16 + 3$ de la última reserva 19;...
$4 \times 2 = 8, + 3$ de reserva 11, que se escribe 15; expresión que, por ser final de la operación, inscribo íntegra.

EJEMPLO DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA SEPTENARIO

Empezando por la izquierda.	Empezando por la derecha.	Locativamente ó sin ceros.
456	456	456
× 3	× 3	× 3
1500	24	24
210	210	21
24	1500	15
2034	2034	2034

abreviadamente y, desde luego, en un solo renglón, diremos:

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times \quad 3 \\ \hline 2034 \end{array}$$

$3 \times 6 = 18$, que se escribe 24; pongo el 4 y guardo el 2 como reserva para agregarlo al inmediato productillo parcial;
$3 \times 5 = 15, + 2$ de reserva 17, que se escribe 23; pongo el 3 y reservo el 2;
$3 \times 4 = 12, + 2$ de reserva $= 14$, que se escribe 20; expresión que, por final, escribo íntegramente.

EJEMPLO DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA OCTONARIO

Empezando por la izquierda.	Empezando por la derecha.	Locativamente ó sin ceros.
567	567	567
× 6	× 6	× 6
3600	52	52
440	440	44
52	3600	36
4312	4312	4312

abreviadamente y, desde luego, en un solo renglón, diremos:

$$\begin{array}{r} 567 \\ \times \quad 6 \\ \hline 4312 \end{array}$$

$6 \times 7 = 42$, que se escribe 52; pongo el 2 y llevo 5 al siguiente productillo parcial;
$6 \times 6 = 36$, $+ 5$ de la reserva, 41, que se escribe 51; pongo el 1 y llevo 5 al productillo siguiente;
$6 \times 5 = 30$, $+ 5$ de la última reserva $= 35$, que se escribe 43; y pongo íntegramente el resultado por no haber más cifras en el multiplicando.

EJEMPLO DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA NONARIO

Empezando por la izquierda.	Empezando por la derecha.	Locativamente ó sin ceros.
3511	3511	3511
× 7	× 7	× 7
23000	7	7
3800	70	7
70	3800	38
7	23000	23
26877	26877	26877

abreviadamente y, desde luego, en un solo renglón, diremos:

$$\begin{array}{r} 3511 \\ \times \quad 7 \\ \hline 26877 \end{array}$$

$7 \times 1 = 7$, y como en el sistema nonario hay cifra que exprese este productillo, la escribiremos en el lugar de las protoenas;
$7 \times 1 = 7$, la escribiremos en el lugar de las deutenas;
$7 \times 5 = 35$, que se escribe 38; pondremos el 8 y reservaremos el 3 para el siguiente productillo parcial;
$7 \times 3 = 21$, $+ 3$ de la reserva $= 24$, que se escribe 26; y se escribe íntegramente, como final, por no quedar ya en el multiplicando más cifras que multiplicar.

EJEMPLO DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA DECIMAL

Empezando por la izquierda.	Empezando por la derecha.	Locativamente ó sin ceros.
34719	34719	34719
× 6	× 6	× 6
180000	54	54
24000	60	6
4200	4200	42
60	24000	24
54	180000	18
208314	208314	208314

abreviadamente y, desde luego, en un solo renglón, diremos:

$$\begin{array}{r} 34719 \\ \times \quad 6 \\ \hline 208314 \end{array}$$

$6 \times 9 = 54$; pongo el 4, y retengo para reserva el 5;
$6 \times 1 = 6, + 5$ de reserva $= 11$; pongo 1 y reservo 1;
$6 \times 7 = 42, + 1$ de reserva $= 43$; pongo 3 y llevo 4;
$6 \times 4 = 24, + 4 = 28$; pongo 8 y llevo 2;
$6 \times 3 = 18, + 2 = 20$; y escribo el 20 en el lugar de las pentaenas (correlativas), por no haber ya en el multiplicando más cifras que multiplicar.

EJEMPLO DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA UNDECIMAL

Empezando por la izquierda.	Empezando por la derecha.	Locativamente ó sin ceros.
5311	5311	5311
× 8	× 8	× 8
37000	8	8
2200	80	8
80	2200	22
8	37000	37
39288	39288	39288

abreviadamente y, desde luego, en un solo renglón, diremos:

$$\begin{array}{r} 5311 \\ \times \quad 8 \\ \hline 39288 \end{array}$$

$8 \times 1 = 8$; y, como hay dígito que expresa el 8, se escribe 8 en el lugar de las protoenas;
$8 \times 1 = 8$, íd., íd., en el lugar de las deutenas;
$8 \times 3 = 24$, que se escribe 22; pongo el 2 de la derecha y reservo el de la izquierda.
$8 \times 5 = 40, + 2 = 42$, que se escribe 39; y lo copio por final.

EJEMPLO DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA DUODECIMAL

Empezando por la izquierda.	Empezando por la derecha.	Locativamente ó sin ceros.
7411	7411	7411
× 8	× 8	× 8
48000	8	8
2800	80	8
80	2800	28
8	48000	48
4a888	4a888	4a888

abreviadamente y, desde luego, en un solo renglón, diremos:

$$\begin{array}{r} 7411 \\ \times\ 8 \\ \hline 4a888 \end{array}$$

$8 \times 1 = 8$; y escribo en el lugar de las protoenas 8, por haber en el sistema esa cifra;
$8 \times 1 = 8$, lo escribo en el lugar de las deutenas;
$8 \times 4 = 32$, que se escribe 28; pongo el 8 bajo la raya, y constituyo con el 2 la reserva para el productillo parcial inmediato;
$8 \times 7 = 56, + 2$ de la reserva $= 58$, que se escribe 4a; suponiendo que a signifique diez; y copio este último productillo y suma, como final de la operación.

LECCIÓN V

Prueba de la cifra máxima.

Sabemos que todo guarismo está formado, en cada sistema de numeración, por repeticiones de la cifra máxima del mismo sistema, más el valor absoluto de los dígitos con que el guarismo está escrito; y sabemos también que pueden ocurrir dos casos:

1.° O bien que el valor absoluto de las cifras de los guarismos forme sin sobrante una suma exacta de cifras máximas;

2.° O bien que la suma deje un sobrante, después de descontar de ella la cifra máxima cuantas veces sea posible.

Examinemos el primer caso.

Supongamos la multiplicación siguiente, del sistema quinario:

$$\begin{array}{r} 224 \\ \times\ 3 \\ \hline = 1232 \end{array}$$

Esta suma abreviada sería la suma real, si se presentase en los términos siguientes:

$$\begin{array}{r} \underbrace{1\,2} \\ 2\,2\,4 \\ +\ 2\,2\,4 \\ +\ 2\,2\,4 \\ \hline = 1\,2\,3\,2 \end{array}$$

Sumemos las cifras con que está escrito el primer sumando; descontemos de la suma la cifra máxima 4 cuantas veces fuere posible, y hallaremos que ese número está compuesto exactamente por agrupaciones del 4.

Luego los sumandos todos están formados sin sobrante por el 4.

Luego la suma 1232 ha de estarlo también, porque no puede haber en la suma más ni menos que en el conjunto de los sumandos.

Luego sumadas por su valor absoluto las cifras que forman la suma, y descontado el valor de la cifra máxima cuantas veces se pueda, no ha de aparecer sobrante, caso de estar bien hecha la adición; y, si tal sucede, tendremos un indicio de altísima probabilidad de que la suma es la exacta.

Y, en efecto, digamos analizando la suma total:

$$1 + 2 + 3 = 6; \text{ fuera del 4, dos.}$$
$$2 + 2 = 4; \text{ fuera del 4, cero.}$$

Luego suma buena.

De aquí resulta la regla siguiente:

Si el multiplicando está formado sin sobrante por repeticiones de la cifra máxima, y también lo está el producto, la multiplicación está bien efectuada, por ser altamente improbable que hubiese habido dos ó más equivocaciones que se compensasen exactamente.

Examinemos ahora el segundo caso.

Supongamos que el multiplicando deje un sobrante.

Sea la multiplicación siguiente del sistema decimal:

$$\begin{array}{r} 244 \\ \times\ 8 \\ \hline = 1952 \end{array}$$

Esta suma, sin abreviación, es como sigue:

244	sobra	1 fuera de los 9.
244	sobra	1 fuera de los 9.
244	sobra	1 fuera de los 9.
244	sobra	1 fuera de los 9.
244	sobra	1 fuera de los 9.
244	sobra	1 fuera de los 9.
244	sobra	1 fuera de los 9.
244	sobra	1 fuera de los 9.
1952	sobran	8 fuera de los 9.

Luego si en cada sumando sobra 1, ¿no es evidente que en los 8 sumandos sobrarán 8; es decir,

8×1; esto es, 8 veces el 1?

Luego las reglas de la prueba máxima serán, en general, las siguientes:

1.ª Se suman por su valor absoluto las cifras que componen el multiplicando;

2.ª Se excluye cuantas veces se pueda de la suma el valor de la cifra máxima; lo que por hipótesis dará un sobrante;

3.ª Se repite el sobrante las veces que indique el multiplicador;

4.ª Y, si la multiplicación está bien efectuada, sobrará en el producto total lo que importe el productillo del sobrante por el multiplicador.

Para efectuar esta serie de operaciones con facilidad se adopta la disposición siguiente:

1.º Se escribe el sobrante del multiplicando á su derecha, separado del guarismo por un paréntesis;

2.º Se multiplica el sobrante por la correspondiente cifra del multiplicador;

3.º De este productillo se saca la cifra máxima, sumando las cifras que lo expresan; y, si hay sobrante, este sobrante se escribe á la derecha del producto total, separándolo del mismo por un paréntesis;

4.º Por fin, se suman las cifras del producto total; se excluye de la suma cuantas veces se pueda la cifra máxima, y el sobrante ha de ser el escrito á la derecha, si la operación está bien efectuada.

Todo como sigue:

Sistema decimal.

$$\begin{array}{r} 244\ (1 \\ \times\ 8 \\ \hline =\ 1952\ (8 \end{array}$$

$2+4+4=10$; fuera de 9, uno; y se escribe el sobrante 1 á la derecha del multiplicando;
$8+1 \quad = 8$; y se escribe á la derecha del sitio que ha de ocupar el producto total;
$1+5+2= \ 8$. Igualdad de sobrantes, multiplicación bien hecha.

Sea la multiplicación siguiente del sistema duodecimal:

$$\begin{array}{r} 3ab47 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$$

Se empezará preparando la prueba, para lo cual sumaremos las cifras del multiplicando, diciendo:

$3+a \quad =$ trece; fuera de 11, dos;
$2+4+7=$ trece; fuera de 11, dos;

y escribiremos el sobrante 2 á la derecha del multiplicando, separado por el correspondiente paréntesis; así:

$$\begin{array}{r} 3ab47\ (2 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

En seguida multiplicaremos ese sobrante 2 por el multiplicador 4, y colocaremos el producto 8 á la derecha del renglón, donde se pondrá el producto total que hemos de obtener; y, hecha la preparación, aparecerá lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 3ab47\ (2 \\ \times\ 4 \\ \hline =\qquad\quad (8 \end{array}$$

Entonces efectuaremos la operación de multiplicar, y tendremos:

$$\begin{array}{r} 3ab47 \; (^{2} \\ \times \; 4 \\ \hline = \; 137964 \; (^{8} \end{array}$$

Y, para ver si está bien hecha la multiplicación, haremos la prueba diciendo:

$1 + 3 + 7 =$ once; fuera de 11, cero;
$9 + 6 =$ quince; fuera de 11, cuatro;
$4 + 4 = 8$.

Sobrantes iguales, multiplicación buena.

Con frecuencia ocurrirá que el producto del sobrante del multiplicando por el dígito del multiplicador, haya de escribirse con dos cifras.

Sea, en el sistema decimal,

$$\begin{array}{r} 354 \\ \times \; 7 \\ \hline \end{array}$$

Preparemos y saquemos el sobrante del multiplicando.

$$\begin{array}{r} 354 \; (^{3} \\ \times \; 7 \\ \hline \end{array}$$

$3 + 5 + 4 = 12$; ahora bien, $1 + 2 = 3$; y escribimos ese sobrante 3 frente al multiplicando;

multipliquemos ese sobrante 3 por el dígito del multiplicador 7, y tendremos 21.

¿Qué haremos en este caso?

Sumaremos, según su valor absoluto, las cifras del 21, lo cual nos dará 3, y escribiremos ese 3 á la derecha del sitio destinado al producto total que vamos inmediatamente á obtener.

$$\begin{array}{r} 354 \; (^{3} \\ \times \; 7 \\ \hline = \quad\quad (^{3} \end{array}$$

Efectuaremos luego la multiplicación, y tendremos:

$$\begin{array}{r} 354\ (^3 \\ \times\ 7 \\ \hline = 2478\ (^3 \end{array}$$

y comprobaremos diciendo:

$$\begin{array}{ll} 2+4+7 & = 13;\ \text{fuera de } 9,\ 4. \\ 4+8 & = 12;\ \text{fuera de } 9,\ 3. \end{array}$$

Sobrantes iguales, multiplicación buena.

¿Por qué?

Esa suma abreviada sería, sin abreviación, lo que sigue:

$$\begin{array}{r} 354\ (^3 \\ 354\ (^3 \\ 354\ (^3 \\ 354\ (^3 \\ 354\ (^3 \\ 354\ (^3 \\ 354\ (^3 \\ \hline 2478\ (^3 \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 21;\quad \begin{array}{l} \text{Suma de los sobrantes,} \\ \\ \text{y } 21\ (= 2+1);\ \text{fuera de } 9 = 3. \end{array}$$

El sobrante de cada sumando es 3; luego el de los 7 sumandos será 21; luego la suma 2478 estará compuesta por la cifra máxima cierto número de veces + 21.

Pero 21 (como cualquier otro número mayor que 9) está á su vez compuesta por la misma cifra máxima, exactamente ó con sobrante; para saber lo cual no tenemos más que sumar por su valor absoluto las cifras del 21; $(2+1=3)$.

Y, hecha esta suma, sabremos que 21 está compuesto por la cifra máxima + 3.

$$21 = 9 + 9 + 3.$$

Luego, como 2478 está compuesto de la cifra máxima + 3, y como 21 lo está también con un sobrante de 3, resultará que, siendo iguales los sobrantes, está bien la operación.

Todavía puede ocurrir una ligerísima dificultad.

Supongamos el ejemplo del sistema decimal

$$\begin{array}{r} 384 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Sacado el sobrante, resulta

$$\left.\begin{array}{r} 384\ (^6 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 284\ (^6 \\ +\ 284\ (^6 \\ +\ 284\ (^6 \\ +\ 284\ (^6 \\ +\ 284\ (^6 \\ +\ 284\ (^6 \\ +\ 284\ (^6 \\ +\ 284\ (^6 \end{array}\right.$$

Multiplicado ahora el sobrante (^{6} por el multiplicador 8, resulta 48.

Y sumadas las cifras 4 y 8, tenemos 12, suma que se escribe con dos cifras.

¿Qué haremos?

Volver á sumar las cifras de la nueva suma; esto es, el 1 y el 2.

Y, obtenido el 3 (que es dígito en el sistema decimal), lo escribiremos á la derecha del sitio que ha de ocupar el producto.

$$\begin{array}{r} 384\ (^6 \\ \times\ 8 \\ \hline =\underline{\qquad}\ (^3 \end{array}$$

Y, efectuada la multiplicación

$$\begin{array}{r} 384\ (^6 \\ \times\ 8 \\ \hline =\underline{3072}\ (^3 \end{array}$$

veremos que está bien, haciendo la suma $3 + 7 + 2 = 12$; de donde, excluyendo el 9, resulta de sobrante el 3 ($1 + 2 = 3$).

De lo dicho se deduce el procedimiento siguiente, que abarca todos los casos *para la preparación* de la prueba:

1.° Se suman las cifras del multiplicando;

2.° Se excluye la cifra máxima todo lo posible.

3.° Se escribe el sobrante, si lo hay, á la derecha del multiplicando; y, si no lo hay, se pone cero también á la derecha del multiplicando;

4.° Si no hay sobrante, se pone también cero á la derecha del sitio destinado al producto total;

5.° Si hay sobrante se multiplica ese sobrante por el dígito que aparezca como multiplicador;

6.° Esta multiplicación puede dar lugar á dos casos: ó bien se escribe el productillo con una cifra, ó bien con dos;

7.° Si con una, se anota á la derecha del lugar destinado al producto total;

8.° Si con dos, pueden ocurrir tres variantes:

O bien las dos cifras suman menos que la cifra máxima;

O bien suman lo que ella;

O bien suman más;

9.° Si menos, se escribirá á la derecha del sitio del producto total el dígito que represente la suma.

10. Si lo mismo, se pondrá cero;

11. Y si más, se imaginará escrito el número según requiera el sistema en que se opere; se sumarán de nuevo las cifras que lo compongan, y se anotará el resultado á la derecha del sitio que ha de ocupar el producto total.

Hecha *la preparación* se procede á la multiplicación; y, verificada, se pasa *á la prueba;* para lo cual se suman las cifras del producto total; se excluye la cifra máxima, y el sobrante, si la operación está bien, será igual al previamente escrito á la derecha del producto.

Véanse como ejemplos las pruebas de las multiplicaciones analizadas en la Lección anterior.

Quinario.		Senario.	
234	(1	2445	(0
× 2		× 4	
= 1023	(2	= 15112	(0
Septenario.		**Octonario**	
456	(3	567	(4
× 3		× 6	
= 2034	(3	= 4312	(3
Nonario.		**Decimal.**	
3511	(2	34719	(6
× 7		× 6	
= 26877	(6	= 208314	(0

Undecimal.		Duodecimal	
5311	(0	7411	(2
$\times$ 8		$\times$ 8	
$=$ 39288	(0	$=$ 4a888	(5

De lo expuesto en esta Lección se deduce una propiedad curiosa de los productos por 1 dígito de la cifra máxima: observémosla en la decimal.

Todo producto de 9 por 2, por 3, por 4, etc., tiene que ser divisible por 9; pero para que lo sea es forzoso que sumen 9 sin sobrantes las cifras con que el producto se escriba. Y, como las combinaciones de dos dígitos que den 9 de suma, no son más que 1 y 8; 2 y 7; 3 y 6; 4 y 5, forzosamente han de resultar expresados por las permutaciones de las anteriores cifras, los demás productos del 9 por los dígitos restantes del sistema decimal: 5 y 4; 6 y 3; 7 y 2, y 8 y 1.

Y, en efecto

$$
\begin{aligned}
9 \times 2 &= 18; \ (1 \text{ y } 8)\\
9 \times 3 &= 27; \ (2 \text{ y } 7)\\
9 \times 4 &= 36; \ (3 \text{ y } 6)\\
9 \times 5 &= 45; \ (4 \text{ y } 5)\\
9 \times 6 &= 54; \ (5 \text{ y } 4)\\
9 \times 7 &= 63; \ (6 \text{ y } 3)\\
9 \times 8 &= 72; \ (7 \text{ y } 2)\\
9 \times 9 &= 81; \ (8 \text{ y } 1)
\end{aligned}
$$

Y lo análogo en los demás sistemas.

LECCIÓN VI

Multiplicador de muchas cifras.

Hasta ahora en los ejemplos aducidos el multiplicador sólo ha tenido una cifra.

Veamos lo que pasará cuando tenga más.

Sea el ejemplo del sistema decimal

$$\begin{array}{r} 347 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array}$$

multiplico primeramente por el 3 protoena;

$$\begin{array}{r} 347 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 1041 \end{array}$$

multiplico luego por el 3 deutena;

$$\begin{array}{r} 347 \\ \times\ 30 \\ \hline 10410 \end{array} \quad \text{ó bien} \quad \begin{array}{r} 347 \\ 3 \\ \hline 1041 \end{array}$$

Y, por último, sumo los dos productos parciales;

$$\begin{array}{r} 1041 \\ +\ 10410 \\ \hline =\ 11451 \end{array} \quad \text{ó bien} \quad \begin{array}{r} 1041 \\ 1041 \\ \hline 11451 \end{array}$$

Por fortuna, no es necesario hacer todas estas operaciones separadamente. Pueden efectuarse seguidas y hasta suprimiendo el cero de las deutenas; y el resultado será el que sigue:

$$
\begin{array}{r}
347 \\
\times \quad 33 \\
\hline
1041 \\
+ \ 10410 \\
\hline
= \ 11451
\end{array}
\qquad \text{ó bien} \qquad
\begin{array}{r}
347 \\
\times \quad 33 \\
\hline
1041 \\
1041 \\
\hline
11451
\end{array}
$$

Véase esto con todos sus detalles teóricos en el ejemplo siguiente.

Supongamos que tuviéramos que hacer la multiplicación del número 342 por 2 222.

En vez de escribir 2 222 veces el sumando 342, lo repetiremos primero 2 000 veces, luego 200, después 20 y, en fin, 2; y así tendremos:

$$
\begin{array}{rrcrr}
 & 300 \times 2\,000 & = & & 600\,000 \\
+ & 40 \times 2\,000 & = & + & 80\,000 \\
+ & 2 \times 2\,000 & = & + & 4\,000 \\
\hline
 & 342 \times 2\,000 & = & & 684\,000 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrr}
 & 300 \times \ 200 & = & & 60\,000 \\
+ & 40 \times \ 200 & = & + & 8\,000 \\
+ & 2 \times \ 200 & = & + & 400 \\
\hline
 & 342 \times \ 200 & = & & 68\,400 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrr}
 & 300 \times \ 20 & = & & 6\,000 \\
+ & 40 \times \ 20 & = & + & 800 \\
+ & 2 \times \ 20 & = & + & 40 \\
\hline
 & 342 \times \ 20 & = & & 6\,840 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrr}
 & 300 \times \ 2 & = & & 600 \\
+ & 40 \times \ 2 & = & + & 80 \\
+ & 2 \times \ 2 & = & + & 4 \\
\hline
 & 342 \times \ 2 & = & & 684 \\
\hline
\end{array}
$$

Y, reuniendo los productos parciales, aparecerá la suma t otal

$$
\begin{array}{rr}
 & 684\,000 \\
+ & 68\,400 \\
+ & 6\,840 \\
+ & 684 \\
\hline
342 \times 2\,222 = & 759\,924 \\
\hline
\end{array}
\quad \text{ó bien} \quad
\begin{array}{l}
684 \\
\;\,684 \\
\;\;\;684 \\
\;\;\;\;\,684 \\
\hline
759924 \\
\hline
\end{array}
$$

De donde resulta que en teoría para sumar abreviadamente se dividen en sus componentes, según la estructura escrita, tanto el multiplicando como el multiplicador, se prescinde de los ceros, se multiplica ordenadamente cada dígito del multiplicador por cada dígito del multiplicando, y á los productillos se agregan los ceros suprimidos, ó, LO QUE ES LO MISMO, se colocan las cifras en los lugares que los ceros indicarían.

Y, desde luego, empezando por la izquierda, se obtiene la operación así: (protoenas, deutenas, trienas, etc.).

$$
\begin{array}{r}
342 \\
\times\ 2222 \\
\hline
684 \\
684 \\
684 \\
684 \\
\hline
759924 \\
\hline
\end{array}
$$

Sea la suma abreviada 222 repetido 342 veces.

Se dispondrá teóricamente así, si se empieza por la izquierda:

$$
\begin{array}{lcrcl}
\textit{Multiplicando}\ldots\ldots\ldots & & 222 & & \\
\textit{Multiplicador}\ldots\ldots\ldots & \times & 342 & & \\
\hline
 & & 60\,000 & = & 200 \times 300 \\
 & + & 6\,000 & = + & 20 \times 300 \\
 & + & 600 & = + & 2 \times 300 \\
 & + & 8\,000 & = + & 200 \times 40 \\
\textit{Productos parciales}\ldots & + & 800 & = + & 20 \times 40 \\
 & + & 80 & = + & 2 \times 40 \\
 & + & 400 & = + & 200 \times 2 \\
 & + & 40 & = + & 20 \times 2 \\
 & + & 4 & = + & 2 \times 2 \\
\hline
\textit{Producto total}\ldots\ldots\ldots & = & 75\,924 & & \\
\end{array}
$$

La operación, con grandes ventajas, puede empezarse por la derecha, así:

$$\begin{array}{r@{\;}c@{\;}r@{\,\times\,}r}
222 & & & \\
\times\ 342 & & & \\
\hline
4 & = & 2 & 2 \\
40 & = & 20 & 2 \\
400 & = & 200 & 2 \\
80 & = & 2 & 40 \\
800 & = & 20 & 40 \\
8\,000 & = & 200 & 40 \\
600 & = & 2 & 300 \\
6\,000 & = & 20 & 300 \\
60\,000 & = & 200 & 300 \\
\hline
= 75\,924 & & & \\
\end{array}$$

Pueden suprimirse los ceros si cuidadosamente se colocan las cifras de primer orden en primer lugar, las de segundo en segundo, los de tercero en tercero, etc.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 2 & 2 & 2 \\
\times & & 3 & 4 & 2 \\
\hline
 & & & & 4 \\
 & & & 4 & \\
 & & 4 & & \\
 & & & 8 & \\
 & & 8 & & \\
 & 8 & & & \\
 & & 6 & & \\
 & 6 & & & \\
6 & & & & \\
\hline
7 & 5 & 9 & 2 & 4 \\
\end{array}$$

Y claro es que en el ejemplo anterior no habría inconveniente en colocar las cifras en sólo tres renglones, como sigue:

Multiplicando.........		222
Multiplicador.........	$\times$	342
Productos parciales....		444
		888
		666
Producto total.........		75924

Examinemos otro ejemplo también en el sistema decimal.

	Empezando por la izquierda.	Empezando por la derecha.	Locativamente ó sin ceros.
Multiplicando........	897	897	897
Multiplicador........	× 365	× 365	× 365
Productos parciales....	240000	35	35
	27000	450	45
	2100	4000	4
	48000	420	42
	5400	5400	54
	420	48000	48
	4000	2100	21
	450	27000	27
	35	240000	24
Producto total........	327405	327405	327405

Pero ya ahora estos ejemplos no pueden, desde luego, ponerse en tres renglones, como el de la multiplicación anterior, por ser preciso hacer antes las sumas que siguen, á causa de las reservas:

35	420	2 100	4 485
450	5 400	27 000	53 820
4 000	48 000	240 000	269 100
4 485	53 820	269 100	327 405

Pero, si cupiera efectuar las tres sumas primeras de memoria, podríamos ya escribir los productos parciales en tantos renglones como cifras significativas tiene el multiplicador; y entonces, desde luego obtendríamos, con gran ahorro de tiempo y de trabajo, lo que sigue:

Multiplicando.........	897
Multiplicador.........	× 365
Productos parciales....	4485
	5382
	2691
Producto total........	327405

Por suerte, esta clase de sumas puede facilísimamente hacerse de memoria, según lo ya demostrado.

Obtenido el primer renglón de los productos parciales, se obtendrán análogamente el segundo renglón, el tercero, el cuarto, etc., etc., sin más diferencia que la de empezar el segundo renglón desde el segundo lugar (el de las deutenas) hacia la izquierda; dos lugares á la izquierda (trienas) el tercero; tres el cuarto..., y así sucesivamente.

Conseguidos de tal modo y desde luego los productos parciales, se hallará la suma ó producto total sumando todos los productos parciales.

Excusado es decir que, si no hay reserva no habrá nada que agregar al productillo parcial de un dígito por otro, y que, si este productillo se escribe con una cifra, se anotará, desde luego; pero si con dos, sólo se escribirá la cifra de la derecha reteniéndose la de la izquierda para agregarla como reserva al productillo parcial contiguo, á no ser que hubiésemos llegado al fin de la operación, en cuyo caso el productillo incorporado á su reserva se anotaría íntegramente.

REGLA.

Para efectuar una multiplicación, cuyo multiplicador tenga muchas cifras, se multiplica todo el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador y los productos parciales se colocan en el lugar que les corresponda según el orden á que pertenezca la cifra multiplicadora (protoena, deutena, triena, tetraena, pentaena..., etc.) Luego se suman los productos parciales, y esta suma final representa la totalidad del producto. Véanse los siguientes ejemplos del sistema decimal.

```
     384              1007
   × 302            × 5004
  ------           -------
     768              4028
   11520            503500
  ------           -------
  115968           5039028
  ======           =======

      34681                 7467867
   ×   4000               × 2000603
  ---------          --------------
  138724000                22403601
  =========               448072020
                        14935734000
                     --------------
                     14940237123801
                     ==============
```

Los ceros que en los productos parciales resultan á la derecha suelen en la práctica suprimirse; pero es de aconsejar que se estampen siempre, no sea que en la multiplicación se olvide el sitio en que debe empezar el inmediato producto parcial. Por esto resulta censurable la práctica *sistemática* de lo siguiente:

```
          7467867
        × 2000603
  ---------------
         22403601
       44807202
   14935734
  ---------------
   14940237123801
  ===============

          348004567
        × 105006023
  -----------------
         1044013701
         696009134
     20880274002
   1740022835
  348004567
  -----------------
  36561367818107041
  =================
```

LECCIÓN VII

Pruebas.

La prueba de cada producto parcial se hace, como si ese producto existiera solo, escribiendo el sobrante á la derecha separado por un paréntesis: para la prueba de la suma de los productos parciales (cuya integración da el producto total), se suman los sobrantes de los productos parciales; se saca la cifra máxima á la suma total, y el sobrante se coloca á la derecha del sitio que ha de ocupar el producto total.

La multiplicación, pues, resultará bien efectuada si el sobrante de la suma de las cifras del producto total es el mismo que el anotado á su derecha. Sea la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 8706 \\ \times\ 8997 \\ \hline \end{array}$$

PREPARACIÓN

$$\begin{array}{rl} 8706 & (3 \\ \times\ 8997 & \\ \hline & (3 \\ & (0 \\ & (0 \\ & (6 \\ \hline & (0 \\ \hline \end{array}$$

$8 + 7 = 15$; fuera de 9, 6; $6 + 6 = 12$; fuera de 9, 3, y se escribe el 3 á la derecha del multiplicando.

Ahora se multiplica cada cifra del multiplicador por el sobrante 3 obtenido del multiplicando.

$7 \times 3 = 21; 2 + 1 = 3;$ y se escribe el 3 á la derecha del renglón que ha de ocupar el primer producto parcial.
$9 \times 3 = 27; 2 + 7 = 9;$ fuera de 9, cero, y se escribe el cero á la derecha del segundo producto parcial.
Y del tercero.
$8 \times 3 = 24; 2 + 4 = 6;$ y se escribe el 6 á la derecha del cuarto producto parcial.

Ahora se suman los sobrantes:

$3 + 0 + 0 + 6 = 9;$ fuera de 9, cero; y se escribe el cero á la derecha del sitio destinado al producto total.

OPERACIÓN EFECTUADA

$$\begin{array}{r l} 8706 & (3 \\ \times\ 8997 & \\ \hline 60942 & (3 \\ 78354 & (0 \\ 78354 & (0 \\ 69648 & (6 \\ \hline 78327882 & (0 \end{array}$$

Obtenido el primer producto parcial
se comprueba: $6 + 4 + 2 = 12; 1 + 2 = 3.$—Bien.
Id. el segundo: $7 + 8 + 3 + 5 + 4 = 27; 2 + 7 = 9,$ cero.—Bien.
Id. el tercero: Idem.
Id. el cuarto: $6 + 6 + 4 + 8 = 24; 2 + 4, 6.$—Bien.

Respecto del producto total se dirá:

$7 + 8 = 15;$ fuera de 9, 6.
$6 + 3 = 9;$ fuera de 9, cero.
$3 + 7 = 9;$ cero.
$8 + 8 = 16;$ fuera de 9, 7.
$7 + 2 = 9;$ cero. Operación bien hecha.

Puede hacerse esta prueba de una vez, sumando todas las cifras del producto total:

$7 + 8 + 3 + 2 + 7 + 8 + 8 + 2 = 45; 4 + 5 = 9;$ fuera de 9, cero.

A la prueba de la cifra máxima debe darse un altísimo grado de probabilidad.

Sin embargo, conviene saber que es falible; porque, para que no lo fuera, era preciso, como ya se advirtió oportunamente, decir, no que todo número está compuesto de la cifra máxima + un sobrante (que puede ser cero), sino que *tal* número está compuesto de *tantas* veces la cifra máxima + el sobrante que resulte. Pero, á pesar de esta posible falibilidad, sólo hay que pensar alguna cosa en ella cuando en multiplicando y multiplicador haya ceros.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{rl} 300001 & (4 \\ \times\ 200007 & \\ \hline 2100007 & (1 \\ 600002 & (8 \\ \hline 60002300007 & (0 \\ \hline \end{array}$$

El producto verdadero es el que antecede; pero las reglas de la prueba no nos advertirían de error, aun cuando hubiésemos, por equivocación, hecho la operación como sigue:

$$\begin{array}{rl} 300001 & (4 \\ \times\ 200007 & \\ \hline 2100007 & (1 \\ 600002 & (8 \\ \hline 8100027 & (9 \\ \hline \end{array}$$

O de este otro modo, también enormemente equivocado:

$$\begin{array}{rl} 300001 & (4 \\ \times\ 200007 & \\ \hline 217 & (1 \\ 62 & (8 \\ \hline 837 & (0 \\ \hline \end{array}$$

O de este otro:

$$\begin{array}{rl} 300001 & (4 \\ \times\ 200007 & \\ \hline 210007 & (1 \\ 6200 & (8 \\ \hline 830007 & (0 \\ \hline \end{array}$$

Etc., etc.

Cuando haya, pues, ceros en el multiplicando ó en el multiplicador, ó bien en ambos á la vez, además de aplicar la

prueba de la cifra máxima (siempre, siempre, siempre necesaria y oportuna), debe antes examinarse atentamente si cada cifra está colocada en el lugar que le corresponde; y, estándolo, vuelve la prueba á adquirir su inmenso grado de probabilidad.

Por eso conviene tanto no dejar de anotar en los productos parciales (á no ser en casos muy sencillos) los ceros que deban aparecer á la derecha.

300001	(4
× 200007	
2100007	(1
6000020000	(8
60002300007	(0

EJEMPLOS (1)

QUINARIO

1234	(2	400321	(2
203		4003	
4312	(2	2202013	(2
30230	(0	310233400	(0
312112	(2	3110041013	(2

SENARIO

3354	(0	14442	(0
234		534	
22344	(0	111052	(0
14550	(0	42220	(0
11152	(0	12534	(0
1331444	(0	2231052	(0

SEPTENARIO

2666	(2	36603	(0
3046		4601	
23661	(0	36603	(0
14663	(2	326124	(0
11664	(0	216315	(0
12200621	(2	252300303	(0

(1) El signo × suele suprimirse ante el multiplicador cuando se sabe que la operación es de multiplicar.

OCTONARIO

```
     37467 (6           137777 (4
     50034                4706
----------------     ---------------
    176334 (3          1077772 (3
   136645  (4         12377710 (0
 23602300  (2         577774   (2
----------------     ---------------
2362015004 (2        725073072 (5
```

NONARIO

```
    47888  (5          340002 (1
      888               56003
----------------     ---------------
   430881  (0         1130006 (3
  430881   (0       226001300 (6
 430881    (0      1820011    (5
----------------     ---------------
 47840001  (0      21461258006 (6
```

DECIMAL

```
    46974  (3          7640002 (1
      398                52006
----------------     ---------------
   375792  (6         45840012 (6
  422766   (0      1528000400  (2
 140922    (0      38200010    (5
----------------     ---------------
 18695652  (0      397325944012 (4
```

UNDECIMAL

```
     340a  (7            1a003 (4
      235                  4a7
----------------     ---------------
    15946  (5           12401a (8
    a128   (1          181028  (0
   6819    (4         77011    (6
----------------     ---------------
   788a16  (0         958539a  (4
```

DUODECIMAL

```
    74ab3  (2            3b476 (9
      432                 a405
----------------     ---------------
   1299a6  (4           178b16 (1
  1a2899   (6         1896600  (3
 257790    (8         385a30   (2
----------------     ---------------
 27718776  (7        349952b16 (6
```


También se considera como prueba (y como prueba infalible) la repetición de una operación de multiplicar con los factores invertidos. Así, la prueba, por ejemplo, en el sistema decimal, de que 27×53 da 1431, es que también dé 1431 el producto de 53×27.

$$
\begin{array}{r}
27 \\
\times\ 53 \\
\hline
81 \\
135 \\
\hline
1431 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
53 \\
\times\ 27 \\
\hline
371 \\
106 \\
\hline
1431 \\
\hline
\end{array}
$$

Pero, aparte de que pueden siempre coincidir dos resultados erróneos, ó de que una operación bien hecha puede parecer equivocada por equivocación en la prueba, la repetición de una operación larga de multiplicar con los factores invertidos tiene en contra suya el mucho tiempo que exige y el cansancio que produce el no variar de operación. En la prueba de la cifra máxima, el operador deja de multiplicar para encontrar los restos, lo que disminuye la fatiga, pues todo cambio es reposo; pero en la prueba de los factores invertidos no puede haber descanso, porque á una operación de multiplicar sigue otra, también de multiplicar. Por eso no está en uso la prueba de la inversión, consistente, *en Aritmética pura*, en la evidencia de que el orden de los factores no altera el producto: $4 \times 3 = 3 \times 4$.

Sin embargo, por vía de ejercicio, deben repetir los alumnos los 16 ejercicios últimos, tomando como multiplicador á cada uno de los multiplicandos, y como multiplicando á cada uno de los multiplicadores.

QUINARIO

$$
\begin{array}{r}
203 \\
\times\ 1234 \\
\hline
1322 \\
1114 \\
411 \\
203 \\
\hline
312112 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
4003 \\
\times\ 400321 \\
\hline
\\
\text{Etc., etc.}
\end{array}
$$

Como ya hubo ocasión de manifestarlo, el valor de una prueba depende todo de su facilidad de ejecución y de su gran probabilidad de exactitud; ¡preciosas propiedades que recomiendan eficacísimamente la prueba de la cifra máxima de cada sistema de numeración!

Pero, por carencia de tales cualidades, no es de recomendar la prueba de la inversión de los factores, considerada como la única exacta en los Tratados de multiplicar, por ser de evidencia (1), *en Aritmética pura*, que el orden de los factores no cambia el producto.

(1) Los aritméticos no lo consideran así, por lo cual demuestran muy laboriosamente que «el orden de los factores no altera el producto». También en esta obra se demostrará más adelante.

LECCIÓN VIII

Ejercicios de multiplicar.

Ejercítese el alumno en sacar los productos de las operaciones siguientes:

QUINARIO

(Cinco cifras.—Cifra máxima el 4.)

3434 (2
324

(0
(0
(2

(2

SENARIO

(Seis cifras.—Cifra máxima el 5.)

5504 (4
425

(0
(5
(1

(4

SEPTENARIO

(Siete cifras.—Cifra máxima el 6.)

6663 (3
4056

(0
(3
(0

(3

OCTONARIO

(Ocho cifras.—Cifra máxima el 7.

1764 (4
236

(3
(5
(1

(2

NONARIO

(Nueve cifras.—Cifra máxima el 8.)

8788 (2
235

(2
(6
(4

(4

DECIMAL

Diez cifras.—Cifra máxima el 9.)

8788 (8
285

(4
(6
(7

(8

UNDECIMAL

(Once cifras.—Cifra máxima el a)

```
 3aa8  (1
  342
------
       (2
       (4
       (3
------
       (9
======
```

DUODECIMAL

(Doce cifras.—Cifra máxima el b)

```
 8245  (8
  ba6
------
       (4
       (3
       (0
------
       (7
======
```

Para adquirir soltura y ejecutar con firmeza y sin vacilaciones la importante operación de multiplicar en los varios sistemas de numeración estudiados, siguen ejemplos de los que ofrecen alguna particularidad ó combinación difícil. El alumno debe repetir los siguientes casos, consultando los resultados parciales sólo cuando advierta equivocación, manifestada por la prueba de la cifra máxima.

CUATERNARIO

```
     33321   (0
  ×    321
----------
     33321   (0
   133302    (0
  233223     (0
----------
  32021301   (0
==========
```

QUINARIO

```
     24321   (0
  ×    423
----------
    134013   (0
   104142    (0
  213334     (0
----------
  23114333   (0
==========
```

SENARIO

5432104	(4
× 4532	
15304212	(3
25140320	(2
44444532	(0
35012424	(1
435324323412	(1

SEPTENARIO

64321	(4
× 453	
256263	(0
451235	(2
353614	(4
43463343	(0

OCTONARIO

6743	(6
× 243	
24651	(4
33614	(3
15706	(5
2153611	(5

OCTONARIO

76451012235	(1
× 645	
470715063421	(5
372244031164	(4
567366075656	(6
63352165363061	(1

NONARIO

246788	(3
× 37602	
504687	(6
16152830	(2
1863182	(5
752586	(1
10662280087	(6

NONARIO

41006588	(0
× 30020003	
133021886	(0
82014287000	(0
13302188600	(0
1331140246001886	(0

DECIMAL

3965874	(6
× 9743286	
23795244	(0
31726992	(3
7931748	(3
11897622	(0
15863496	(6
27761118	(6
35692866	(0
38640644621964	(0

543265432154387654323548764̇23 (7
× 432532

108653086430877530864709752846 (5
162979629646316296297064629269 (3
271632716077193827161774382115 (8
108653086430877530864709752846 (5
162979629646316296297064629269 (3
217306172861755061729419505692 (1

2349796889006016008998731940899 3036 (7

UNDECIMAL

34a6 (3
× 4a3

a397 (9
31565 (6
12892 (8

1603187 (1

3240aa (9
× 200034

11953a7 (6
9712a8 (7
6481a9000 (8

6482a6a8977 (1

DUODECIMAL

a4b 3
× a2

169a (6
8812 (

899ba (3

8ab (2
× 4a2

79a (4
8812 (9
1378 (9

16b4ba (a

```
       ab4   (3
   ×   3ba
  ----------
      9154   (8
     a048    (0
    28a0     (9
  ----------
    377614   (6
  ==========

    45b43a   (4
   ×   b5a
  ----------
   38b5724   (7
  1a58972    (9
 4154b62     (0
  ----------
 437779444   (5
  ==========

     89b7a   (1
   ×   8b7
  ----------
    51996a   (7
   811822    (0
  5a7928     (8
  ----------
  6720878a   (4
  ==========

       ab9   (8
   ×   3a2
  ----------
      19b6   (5
     9196    (3
    28b3     (2
  ----------
    362a56   (a
  ==========

       a2b
   ×   b3a
  ----------
      8652   (a
     2689    (3
    9481     (0
  ----------
    97b422   (2
  ==========
```

```
    ab32ab432      (1
  ×     b493a
 ---------------
     9148515678    (a
    289988a096     (3
   8255226240      (9
  3790b79508       (4
 a03b804aaa        (0
 ---------------
 a4828454006a18    (4
```

```
      84ba35aab435   (7
  ×          b454b
 ------------------
      786a525004b17  (0
     297b51b779518   (6
    360b355668951    (2
   297b51b779518     (6
  786a525004b17      (0
 ------------------
  7b83ab48393b3b197  (3
```

```
       4b5aabb54328    (7
  ×          43ba5a
 ---------------------
       416b11b656828   (4
      209566b929414    (2
     416b11b656828     (4
    466500b5aab54      (0
   12a588ba40980       (1
  179b77b9950a8        (6
 ---------------------
  1953b9702a89745568   (4
```

APÉNDICE.

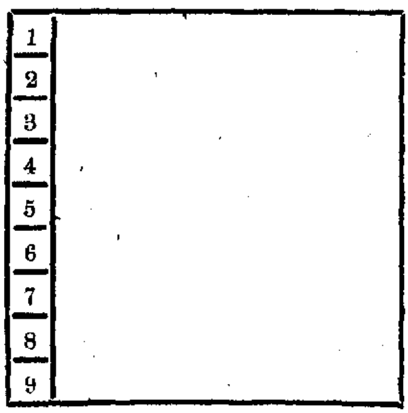
La operación de multiplicar no presenta por lo regular serias dificultades á los que metódicamente se ejercitan en ella todo lo necesario para dominarla por completo.

Pero hay quienes siempre encuentran arduas las operaciones de memoria, especialmente cuando multiplicando y multiplicador tienen muchas cifras; y, para esos individuos, así como para alivio de la atención, aun en los más hábiles y diestros, se inventó el ÁBACO RABDOLÓGICO ó neperiano (de ῥάβδος, varilla, y λόγος, discurso; y de NÁPIER, latinizado en Néperus, apellido del inventor).

Nápier, barón de Merchiston, conocido más bien por los latinismos de su apellido, Néper, Néperus, de donde se han derivado los adjetivos Neperiano y Neperiana, y cuyos trabajos matemáticos parecían tener por muy principal objeto el de facilitar las operaciones aritméticas, publicó su invención de las varillas en una obra impresa en Edimburgo en 1617, titulada Rhabdologia (de ῥάβδος, varilla, y λόγος, discurso). Por su ingenioso invento, la operación de *multiplicar* se reduce á la de sumar, y la de *partir* á la de restar; así como se reducen la de elevación á potencias y la de extracción de raíces á las operaciones de multiplicar y partir por medio de las tablas de logaritmos, inventadas geométricamente por el mismo Nápier ó Néper.

El ÁBACO RABDOLÓGICO Ó NEPERIANO, es un tablero con rebordes (semejante á los de los galerines de imprenta), en el cual se colocan y sujetan las varillas neperianas cuando se usan para las grandes operaciones de multiplicar (ó de partir), y en que, después de hechas las operaciones aritméticas, se guarda clasificado y en orden el juego de varillas.

También por extensión (aunque impropiamente) se da el nombre de ÁBACO NEPERIANO al conjunto de tablero y de varillas.



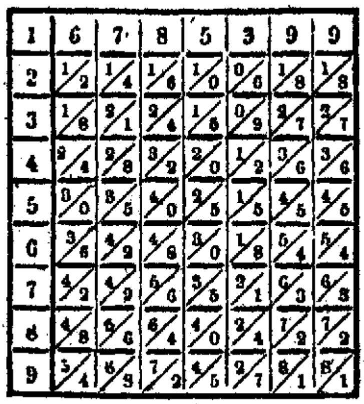
El tablero y las varillas tienen por objeto convertir en *sumas muy sencillas* todas las operaciones aritméticas de multiplicar números enteros (y en *restas* las operaciones aritméticas de dividir).

Las varillas neperianas son por lo regular cuadradillos de madera blanca (peral, por ejemplo), ó bien (y es lo común) tiras de madera, metal ó cartón grueso y resistente; una de cuyas caras está dividida con esmero en nueve cuadrados, y todos los cuadrados, excepto el superior, se hallan subdivididos en dos triángulos por una diagonal tirada desde el ángulo superior de la derecha al ángulo inferior

de la izquierda. En el cuadrado primero de cada varilla (el no dividido en dos triángulos) se halla trazado de tipo muy grueso ó más visible que los demás, uno de los números dígitos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (en la figura adjunta lo está el dígito 8); y en cada uno de los cuadrados inferiores, ya subdivididos en triángulos, se escribe el duplo, el triplo, el cuádruplo... el nóncuplo del número inscrito en el cuadrado superior, cabeza de la varilla. Cuando el producto sea de una sola cifra, ésta se trazará en el triángulo de la derecha; y, cuando de dos, la decena ó deutena se pondrá en la casilla triangular izquierda y la unidad ó protoena en la triangular derecha de un mismo cuadrado.

El ábaco, es decir, el tablero, tiene en su reborde izquierdo, trazados de arriba abajo, los números dígitos 1 á 9, en tipos iguales á los que encabezan las varillas.

Provisto ya el calculador del ábaco ó tablero indicado y de un juego suficiente de varillas neperianas, supongamos que se desee multiplicar el número 6 785 399 por un dígito



cualquiera. Al efecto se colocarán unas junto á otras en el ábaco (como indica la figura), siete varillas encabezadas por los dígitos 6, 7, 8, 5, 3, 9 y 9; y, hecho esto, se podrán obtener todos los productos parciales de 6 785 399 por 2, por 3, por 4, por 5... por 9, utilizando al efecto las cifras de las fajas horizontales.

Así, pues, el producto

$$6\,785\,399 \times 5,$$

se hallará, según la quinta faja horizontal indicada por el 5 que se halla á la izquierda del tablero en el cuadrado quinto de la columna de cuadrados (no divididos por triángulos); y, al efecto, escribiremos de derecha á izquierda:

1.° Las unidades del triángulo inferior de la derecha............. 5
2.° La *suma* de las decenas y de las unidades de los dos triángulos, superior é inferior, de la misma faja horizontal, inmediatos al 5 y á la izquierda.......... . ... 4 + 5........ 9
3.° La *suma* (que por casualidad es también 9) de los otros dos triángulos contiguos á la izquierda......... 4 + 5........... 9
4.° La *suma* de los otros dos............... 1 + 5......... 6
y sucesivamente la *suma*..................... 2 + 0........ 2
la...................................... 4 + 5...... 9
la...................................... 3 + 0.... 3
y el 3 restante de la faja.......................... 3.. 3

resultando, por consiguiente, que el producto buscado es... 33926995

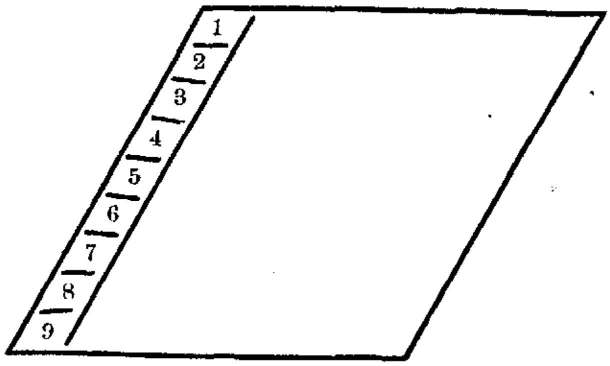
Lo dicho del producto de este multiplicando por 5 se entenderá análogamente del de cualquier otro dígito; y, así, si tuviéramos que multiplicar 6 785 399 por 978 524, los productos parciales serían dados por las *sumas* de decenas y unidades de las fajas del 4, del 2, del 5, del 8, del 7 y del 9, y tendríamos:

```
      6785399 (2
    × 978524
  ------------
     27141596 (8
    13570798  (4
   33926995   (1
  54283192    (7
 47497793     (5
61068591      (0
--------------
6639675771076 (7
```

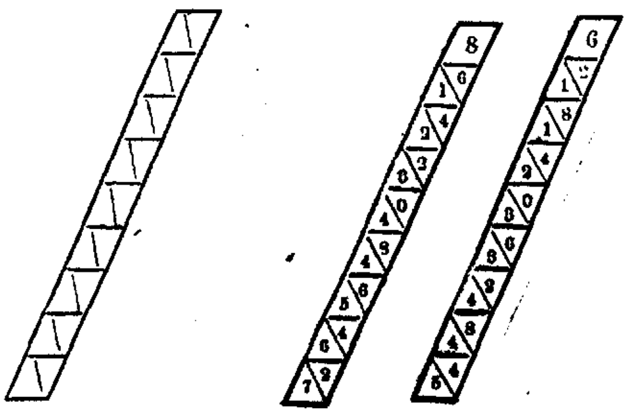
Esta multiplicación que, sin el ábaco y las varillas neperianas, requeriría bastante tiempo á los poco ejercitados, se hace en breves instantes sin más que poner algún cuidado al sentar, siempre de derecha á izquierda, los guarismos correspondientes á cada faja. Sentado cada producto parcial, debe siempre hacerse la prueba de los 9.

(Véase más adelante la aplicación del ábaco Neperiano á la operación de partir.)

Las varillas y el tablero han recibido en este siglo una modificación que hace más fácil su empleo y su lectura, porque, cuando el ábaco está dispuesto para funcionar, cada dos cifras de las que deben ser sumadas en cada faja horizontal se hallan dispuestas dentro de un rectángulo ó de un rombo. Al efecto, se da á los rebordes laterales del tablero una inclinación como de 60 grados,

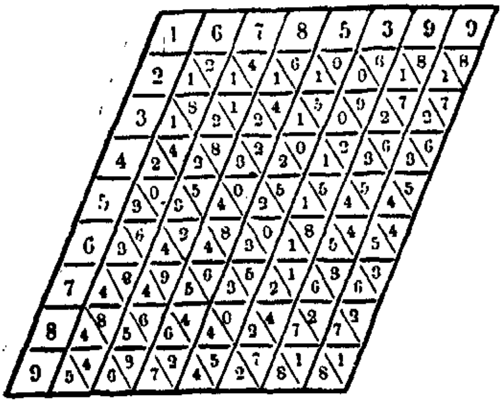


y á cada varilla la forma de un paralelogramo capaz de ajustarse al ábaco modificado.



Así, las rayas que han de formar los rectángulos ó los rombos, cuando se hallan yuxtapuestas las varillas necesarias para un cálculo, aparecen impresas ó grabadas de tal modo, que resultan mucho más visibles que las junturas de cada dos varillas.

Hé aquí el ábaco dispuesto para funcionar:



Ábaco neperiano modificado.

También hay un sistema de varillas oblícuas, cuyo ángulo respecto de la base es de 45°, con lo que los rectángulos ó los rombos resultan cuadrados perfectos.

LECCIÓN VIII

Número de las cifras del producto total.

Designemos, en general, por Z la cifra máxima de un sistema cualquiera.

Designemos por Y la cifra que en valor antecede á la máxima.

Así, en el sistema decimal Z será 9, y Y será 8.

Digo que: Si se multiplica la cifra máxima por sí misma, el producto estará expresado en todos los sistemas por la fórmula

Y 1 (1)

En efecto, en el sistema decimal,

$$\begin{aligned} 9 \times 9 &= 81 \\ &= \text{ocho deutenas decimales} + 1 \\ &= 80 + 1 \end{aligned}$$

En el sistema quinario

$$\begin{aligned} 4 \times 4 &= 31 \\ &= \text{tres deutenas quinarias} + 1 \\ &= 30 + 1 \\ &= \text{en el sistema decimal á } 15 + 1 = 16 \end{aligned}$$

(1) Recuérdese que en Aritmética la yuxtaposición significa suma. Por consiguiente, la expresión Y 1 quiere decir Y 0 + 1; esto es, Y deutenas + 1 protoena; (= 81 en el sistema decimal: en efecto, $9 \times 9 = 81$).

En el sistema duodecimal

$$\begin{aligned} b \times b &= a\,1 \\ &= \text{diez deutenas duodecimales} + 1 \\ &= a\,0 + 1 \\ &= \text{en el sistema decimal á } 120 + 1 = 121 \end{aligned}$$

En el undecimal

$$\begin{aligned} a \times a &= 91 \\ &= \text{nueve deutenas undecimales} + 1 \\ &= 90 + 1 \\ &= \text{en el sistema decimal á } 99 + 1 = 100 \end{aligned}$$

La demostración de esta propiedad es casi de evidencia.

La cifra máxima en todos los sistemas, multiplicada por lo que valga en él un 1 y un cero, es igual á

$$\begin{aligned} Z \times 10 &= Z\,0 \\ &= Z \text{ deutenas} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} Z \times Z &= (Z \times 10) - Z \\ Z \times Z &= Z\,0 - Z \text{ (1)} \end{aligned}$$

Para hacer la resta

$$\begin{array}{r} Z\,0 \\ -\,Z \\ \hline \end{array}$$

diremos: Z no se puede restar de cero: por tanto, agreguemos 10 al minuendo en forma de 10 protoenas, y la misma cantidad al sustraendo, en forma de 1 deutena, y resultará que de Z á 10 va 1, y de 1 á Z va Y. Luego

$$\begin{array}{r} Z\,0 \\ -\,Z \\ \hline Y\,1 \end{array} = Y\,0 + 1$$

Luego

$$\begin{aligned} Z \times Z = Y\,1 &= Y\,0 + 1 \\ &= Y \text{ deutenas} + 1 \end{aligned}$$

Ahora bien; supongamos que deba efectuarse la multiplicación siguiente:

---

(1) La yuxtaposición significa suma.

Y resultará:

$$
\begin{array}{r l}
\mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} & \\
\times\,\mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} & \text{(1)} \\
\hline
\mathrm{Y}\,1 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0 & = \mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} \times \mathrm{Z} \text{ protoenas.} \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0 & = \mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} \times \mathrm{Z}\,0\text{; (esto es, Z deutenas).} \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0 & = \mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} \times \mathrm{Z}\,0\,0\text{; (esto es, Z trienas).} \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0 & = \mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} \times \mathrm{Z}\,0\,0\,0\text{; (esto es, Z tetraenas).} \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\,0 & \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & \\
\hline
\end{array}
$$

Podemos dar otra distribución á estos productos parciales, por ser de evidencia que el orden de los sumandos no altera la suma.

En tal virtud, colocaremos inmediatamente unas bajo otras las cifras del mismo orden, y tendremos:

$$
\begin{array}{r l}
\mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} & \\
\times\,\mathrm{Z\,Z\,Z\,Z} & \\
\hline
\mathrm{Y}\,1 & \text{1.}^{\text{er}}\text{ grupo ó de las protoenas} \\
\left.\begin{array}{r}\mathrm{Y}\,1\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\end{array}\right\} & \text{2.}^{\text{o}}\text{ grupo ó de las deutenas} \\
\left.\begin{array}{r}\mathrm{Y}\,1\,0\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\,0\end{array}\right\} & \text{3.}^{\text{er}}\text{ grupo ó de las trienas} \\
\left.\begin{array}{r}\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\end{array}\right\} & \text{4.}^{\text{o}}\text{ grupo ó de las tetraenas} \\
\left.\begin{array}{r}\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\end{array}\right\} & \text{5.}^{\text{o}}\text{ grupo ó de las pentaenas} \\
\left.\begin{array}{r}\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\,0\\ \mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\,0\end{array}\right\} & \text{6.}^{\text{o}}\text{ grupo ó de las hexaenas} \\
\mathrm{Y}\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & \text{7.}^{\text{o}}\text{ grupo ó de las heptaenas} \\
\hline
\end{array}
$$

Estudiando esta nueva disposición advertiremos:

(1) No se olvide que en Aritmética la yuxtaposición es suma.

Que hay 1 sumando sin ceros;
que hay 2 sumandos con un cero;
que hay 3 sumandos con dos ceros;
que hay 4 sumandos con tres ceros;
que hay 3 sumandos con cuatro ceros;
que hay 2 sumandos con cinco ceros;
que hay 1 sumando con seis ceros.

De otro modo:

Que hay un sólo sumando protoena;
que hay dos sumandos deutenas;
que hay tres sumandos trienas;
que hay cuatro sumandos tetraenas...

y que, después, los grupos de sumandos van decreciendo al revés de como crecieron (aumentando siempre un cero).

La ley de los grupos de sumandos es, pues, muy clara: van creciendo para luego decrecer; y crecen hasta alcanzar el grupo más numeroso un número de sumandos igual al de las cifras del multiplicador.

De modo que, si en vez de la multiplicación que nos sirve de ejemplo (y á la cual volveremos en seguida), se nos hubiese dado la siguiente

$$\begin{array}{r} ZZZZZZZZ \\ \times\ ZZZZZZZZ \\ \hline \end{array}$$

la ley de los grupos pediría lo que sigue:

1 sumando, pretoena;
2 sumandos, deutenas;
3 sumandos, trienas;
4 sumandos, tetraenas;
5 sumandos, pentaenas;
6 sumandos, hexaenas;
7 sumandos, heptaenas;
8, número máximo de sumandos = al de cifras del multiplicador......... 8 sumandos, octoenas;
7 sumandos, eneaenas;
6 sumandos, decaenas;
5 sumandos, endecaenas;
4 sumandos, dodecaenas;
3 sumandos, del lugar décimo tercero;
2 sumandos, del lugar décimo cuarto;
1 sumando, del lugar décimo quinto.

Pero, volvamos á nuestro ejemplo.

Puesto en su última forma con supresión de los ceros, resultará:

```
        Y1
       Y1
       Y1
      Y1
      Y1
      Y1
     Y1
     Y1
     Y1
     Y1
    Y1
    Y1
    Y1
   Y1
   Y1
  Y1
-----------
ZZZY0001
===========
```

Con efecto:

1.° La primera columna da 1 como suma, y no ofrece dificultad;

2.° La segunda columna (la de las deutenas) es lo siguiente:

```
                            Y
                          + 1
                          + 1
                          ----
que sumará ............   = 10
                          ====
```

Esto es claro: ¿qué le falta á la penúltima cifra de un sistema para valer lo que un 1 seguido de un cero? $1 + 1 = 2$. Luego, si á Y se agregan 2, tendremos 10: pongo cero y retengo 1 de reserva para la tercera columna ó de las trienas.

3.° La tercera columna es

```
  Y
+ Y
+ 1
+ 1
+ 1
----
```

Y, agregando el 1 de la reserva que obtuvimos en la suma de la columna anterior, nos resultará

$$\begin{array}{r} Y \\ Y \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ +\ 1 \\ \hline \end{array}$$

lo cual suma............ 20

porque ¿qué les falta á dos cifras penúltimas de un sistema para ser lo que en cualquier sistema valga un 2 y un cero? Claro es que 4.

Pues, siendo así, $Y + Y + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$; pongo cero y retengo 2 como reserva de esta suma.

4.° La cuarta columna ó de las tetraenas es

$$\begin{array}{r} Y \\ +Y \\ +Y \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ \hline \end{array}$$

si agrego el 2 de la reserva producida por la suma anterior, tendremos

$$\begin{array}{r} Y \\ Y \\ Y \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ +\ 2 \\ \hline \end{array}$$

cuyo total será.......... 30

pongo cero y llevo 3 como reserva de esta nueva suma.

5.° La quinta columna es

$$\begin{array}{r} Y \\ +Y \\ +Y \\ +Y \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \end{array}$$

Agregando la última reserva 3, tendremos:

$$\begin{array}{r} Y \\ Y \\ Y \\ Y \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ +\ 3 \\ \hline \end{array}$$

pero claro es que esta suma no podrá ser 40; porque á cuatro cifras penúltimas faltan ocho unos (dos por cada una); y, como no hay más que seis, aun después de agregada la reserva, la suma será $40 - 2 = 30 + Y$: pongo, pues, Y y llevo de reserva 3.

6.° La sexta columna es

$$\begin{array}{r} Y \\ +\ Y \\ +\ Y \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ \hline \end{array}$$

agreguemos los 3 de la última reserva, y tendremos:

$$\begin{array}{r} Y \\ Y \\ Y \\ 1 \\ 1 \\ +\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Esto no podrá sumar 30; porque á las tres cifras penúltimas hay que agregar 6 para que hagan 30: luego

$$\begin{gathered} Y+Y+Y+1+1+3 \\ = Y+Y+Y+1+1+1+1+1 = (Y+1+1)+(Y+1+1)+(Y+1) = 20+Z \end{gathered}$$

Escribo, pues, Z y guardo 2 de reserva.

7.° La séptima columna es

$$\begin{array}{r} Y \\ +\ Y \\ +\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Agrego la reserva 2, y tendré:

$$\begin{array}{r} Y \\ Y \\ 1 \\ +2 \\ \hline \end{array}$$

Esto no puede dar 20, porque para ello era preciso tener

$$Y + Y + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$

y sólo tenemos

$$\begin{aligned} & Y + Y + 1 + 2 \\ = & Y + Y + 1 + 1 + 1 \\ = & (Y + 1 + 1) + (Y + 1) = 10 + Z \end{aligned}$$

Pongo, pues, Z y llevo 1.

8.° La octava columna es

$$Y;$$

y agregándole la reserva 1, tendremos

$$\begin{array}{r} Y \\ +1 \\ \hline Z \\ \hline \end{array}$$

y pongo, pues, Z como final de la operación.

Luego, en cualquier sistema, el producto de una expresión formada de un número n de cifras máximas, multiplicada por sí misma, es

$$\begin{array}{ll} & n - 1 \text{ cifras máximas,} \\ + & \quad \text{la cifra penúltima,} \\ + & n - 1 \text{ ceros,} \\ + & \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

Total = al número de cifras del multiplicando y el multiplicador.

Luego el número de cifras del producto, en el caso de ser el multiplicando lo mayor posible (dado un cierto número n de cifras), multiplicado por sí mismo es igual á 2 veces n, ó sea á la suma de las cifras de multiplicando y multiplicador.

Hagamos aplicación de estas deducciones al siguiente ejemplo del sistema decimal:

$$\begin{array}{r} 99999999 \\ \times\ 99999999 \\ \hline \end{array}$$

Digo:

1.° Que el producto tendrá 16 cifras;

2.° Que de izquierda á derecha habrá ante todo 7 nueves (n — 1 Zetas);

3.° Que seguirá luego un 8, cifra penúltima del sistema decimal;

4.° Que aparecerán á continuación 7 ceros (n — 1 ceros);

5.° Y que será un 1 la primera cifra de la derecha (protoena).

De modo que

$$\begin{array}{r} 99999999 \\ \times\, 99999999 \\ \hline =\, 9999999800000001 \end{array}$$

¿Cuál será en el sistema quinario el producto de

$$4444 \times 4444?$$

Será el siguiente:

$$44430001.$$

¿Cuál será en el duodecimal el de

$$bbb \times bbb?$$

Será

$$bba001.$$

Etc., etc.

Estudiemos ahora el ejemplo

Z Z Z Z		9 9 9 9
× Z Z Z		× 9 9 9
Y 1	1 sumando, protoena;	8 1
Y 1 Y 1	2 sumandos, deutenas;	8 1 8 1
Y 1 Y 1 Y 1	3 sumandos, trienas;	8 1 8 1 8 1
Y 1 Y 1 Y 1	3 tetraenas;	8 1 8 1 8 1
Y 1 Y 1	2 pentaenas;	8 1 8 1
Y 1	1 hexaena.	8 1
Se vé, pues, que el total será = Z Z Y Z 0 0 1		9 9 8 9 0 0 1

El producto tiene tantas cifras como suman reunidas las del multiplicando y multiplicador.

Veamos el siguiente:

ZZZZ	9999
×ZZ	×99
Y1	81
Y1	81
Y1	81
Y1	81
Y1	81
Y1	81
Y1	81
Y1	81
ZYZZ01	989901

El producto tiene tantas cifras como suman multiplicando y multiplicador.

Veamos, por fin:

ZZZZ	9999
×Z	×9
Y1	81
Y1	81
Y1	81
Y1	81
YZZZ1	89991

El producto resulta con tantas cifras como tienen multiplicando y multiplicador juntos.

En general, ningún producto (ni aun en el caso de ser los factores lo mayor posibles) puede tener más cifras que la suma del número de cifras de los mismos factores.

Ya sabemos, pues, cuál es el número máximo de cifras de un producto.

Ahora bien: ¿cuál será el número mínimo de ellas posible?

Fácil es verlo.

Tomemos el menor multiplicando posible de un cierto número de cifras, y el menor multiplicador imaginable. Necesariamente serán de las formas siguientes:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 10 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ \times 10 \\ \hline 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000 \\ \times\ 10 \\ \hline =10000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000000 \\ \times\ 1000000 \\ \hline 1000000000000 \end{array}$$

Los productos tienen siempre una cifra menos que la suma del número de cifras de los factores.

De todo lo que resulta, en general, que un producto tiene tantas cifras como los factores ó una menos.

¿Cuándo tendrá el producto igual número de cifras que los factores?

¿Cuándo una cifra menos?

Tendrá una menos cuando se cumplan las condiciones siguientes:

1.ª Cuando no se escriba con dos cifras el productillo de los dos últimos dígitos de multiplicando y multiplicador; es decir, el productillo de las dos cifras de la izquierda de ambos factores.

$$\begin{array}{rl} 311 & (5 \\ \times\ 320 & \\ \hline 6220 & (1 \\ 933 & (6 \\ \hline 99520 & (7 \end{array}$$

Aquí el productillo de $3 \times 3 = 9$, se escribe con una sola cifra: el producto total tiene, pues, una menos que los factores.

2.ª Cuando no se escriba con dos cifras la suma del último productillo y la reserva que haya de agregársele.

$$\begin{array}{rl} 236 & (3 \\ \times\ 274 & \\ \hline 944 & (2 \\ 1652 & (5 \\ 472 & (4 \\ \hline 64664 & (5 \end{array}$$

En este ejemplo, la reserva que viene de la columna del $6 + 7$, unida al productillo 4, del 2×2 (últimas cifras de la izquierda de multiplicando y multiplicador) da una suma que se escribe con una sola cifra. Así el producto total tiene una cifra menos que los dos factores juntos.

LECCIÓN IX

Número máximo de reservas.

Las cifras que aparecen en los productos totales de las multiplicaciones no dejan ver los componentes que las engendraron. Y la razón es obvia.

Esas cifras son el resultado de incorporaciones muy variadas de las reservas con los valores de cada productillo: (multiplicación de cada dígito del multiplicando por cada dígito del multiplicador).

Conviene formarse idea exacta de esta complejidad; pues únicamente su conocimiento puede dar razón cumplida, no sólo de gran número de dificultades de las operaciones no explicadas aún, sino hasta de la últimamente estudiada respecto al número de las cifras de un producto total.

La operación de sumar abreviadamente se efectúa multiplicando cada dígito del multiplicando por cada dígito del multiplicador.-

Estos productillos se escriben con una cifra ó con 2. Y como éstos dan reservas y los otros no (según las combinaciones de las cifras), es casi imposible calcular el total de las reservas en general. Pero sí es posible llegar á una deducción útil y digna de tenerse en cuenta, suponiendo que todos los productillos se escriben con dos cifras.

Admitámoslo así, que sólo así podremos, por lo menos, determinar el máximo de las reservas que concurren á la formación de un producto total, si bien (conviene reiterar la idea) al hacer la suma general todos los productillos parciales de dígito por dígito confunden sus resultados unos en otros, y no hay medio de investigar, por las cifras finales, cuáles fueron los componentes de dígito por dígito generadores de ellas.

$$\begin{array}{rl}
789 & \\
\times\;789 & \\
\hline
\left.\begin{array}{r} 81\\ 72\\ 63\\ 72\\ 64\\ 56\\ 63\\ 56\\ 49\end{array}\right\} & \begin{array}{l}\text{Ninguno de estos sumandos aparece}\\ \text{visible en producto total.}\end{array}\\
\hline
622521 &
\end{array}$$

La suma total será siempre de la forma siguiente:

..... + hexaenas + pentaenas + tetraenas + trienas + deutenas + protoenas;

y la razón de no poderse conocer por las cifras de este producto total los generadores de ellas, se hará evidente analizando la integración.

Sea el multiplicando mayor posible formado con Z dígitos, y sea igual á él el multiplicador. Y, según lo dicho en la Lección última, ambos tendrán la forma siguiente, si Z representa la cifra máxima del sistema de numeración en que se opere:

$$\begin{array}{r}
Z\,Z\,Z\,Z\,Z\\
\times\;\; Z\,Z\,Z\,Z\,Z\\
\hline
\end{array}$$

La multiplicación de cada Z del multiplicando por cada Z del multiplicador nos dará un productillo de dos cifras de la forma Y 1, siendo Y la penúltima cifra del sistema ó la inmediata á la máxima en valor absoluto (no locativo).

Por consiguiente, y conforme á lo explicado en la última Lección, tendremos:

```
           Z Z Z Z Z
         × Z Z Z Z Z
  ---------------------
                   Y 1
                 Y 1 .
               Y 1 . .
             Y 1 . . .
           Y 1 . . . .
                 Y 1 .
               Y 1 . .
             Y 1 . . .
           Y 1 . . . .
         Y 1 . . . . .
               Y 1 . .
             Y 1 . . .
           Y 1 . . . .
         Y 1 . . . . .
       Y 1 . . . . . .
             Y 1 . . .
           Y 1 . . . .
         Y 1 . . . . .
       Y 1 . . . . . .
     Y 1 . . . . . . .
           Y 1 . . . .
         Y 1 . . . . .
       Y 1 . . . . . .
     Y 1 . . . . . . .
   Y 1 . . . . . . . .
  ---------------------

  =====================
```

Examinada la operación anterior, vemos que cada productillo da un 1 para la respectiva columna, y una Y de reserva para la contígua de la izquierda. De modo que (en el caso presente) hay tantas reservas como productillos. Los productillos son, en el ejemplo, 25; y, por consiguiente, 25 son también las reservas en la operación, tal como está presentada para obtener la suma total. De donde resulta que el número de reservas por causa de los productillos será siempre, *cuando éstos se escriban con dos cifras*, igual al número de multiplicaciones que aparezcan de dígito por dígito.

Pero hay más: hay otra clase de reservas, procedentes, no de las multiplicaciones de dígito por dígito, sino de las sumas de las columnas. Y ¿cuántas son? En el caso de resultar cifras máximas todas las del multiplicando y el multiplicador, existen tantas *reservas por sumas de columnas*, como cifras tienen ambos factores menos 2. Cuando no sean cifras máximas las de multiplicando y multiplicador, no es posible determinar las reservas por suma, sino en cada caso particular.

En consecuencia de todo lo analizado, resulta que, en el caso de ser máximos los dígitos de multiplicando y multiplicador, la organización de una suma abreviada, resulta como sigue:

	Z Z Z Z Z	
	× Z Z Z Z Z	
Reservas por suma..	1 2 3 4 4 3 2 1	
	Y 1	1 sumando, protoena
	Y 1 Y 1	2 sumandos, deutenas
	Y 1 Y 1 Y 1	3 sumandos, trienas
	Y 1 Y 1 Y 1 Y 1	4 sumandos, tetraenas
	Y 1 Y 1 Y 1 Y 1 Y 1	5 sumandos, pentaenas
	Y 1 Y 1 Y 1 Y 1	4 sumandos, hexaenas
	Y 1 Y 1 Y 1	3 sumandos, heptaenas
	Y 1 Y 1	2 sumandos, octoenas
	Y 1	1 sumando, eneaena.
	Z Z Z Z Y 0 0 0 0 1	

Hay, pues, dos clases de reservas:

Una, reservas de los productillos;

Otra, reservas de la adición de las columnas.

Estas en el cuadro anterior y todos sus análogos empiezan en la tercera columna.

Ahora podemos ya representarnos y ver en imagen las condiciones necesarias para que un producto total tenga una cifra menos que la suma de las del multiplicando y multiplicador.

Y, á fin de verlo en imagen, dispongamos un ejemplo análogamente al cuadro anterior.

249	249	
× 378	× 378	
1992	72	
1743	32	= 1992
747	16	
	63	
94122	28	= 17430
	14	
	27	
	12	= 74700
	6	
	94122	94122

Se necesita, pues (empezando por abajo el análisis de los productos parciales):

1.° Que el productillo de las cifras de la izquierda de multiplicando y multiplicador no se escriba con dos cifras (como sucede con $3 \times 2 = 6$);

2.° Que, sumadas con este productillo, no le hagan llegar á 10 ni pasar de 10, las dos reservas de los productillos siguientes:

Una, la del último dígito del multiplicador por el penúltimo del multiplicando ($3 \times 4 = 12$);

Otra, la del último dígito del multiplicando por el penúltimo del multiplicador ($2 \times 7 = 14$).

Y, en efecto, 6 (del productillo 3×2) $+ 1$ (de la reserva del 12) $+ 1$ (de la reserva del 14) dan una suma < 10, por lo cual esta suma no se escribe con 2 cifras;

3.° Y, por último, es preciso, además, que la reserva por suma de la columna penúltima no contribuya á que la suma final de la última columna se escriba con 2 cifras. Y, con efecto, la reserva 1 (de la penúltima columna $1 + 2 + 4 + 2 + 2$), no contribuye á que se escriba con 2 cifras la suma de que se trata; $1 + 1 + 6 + 1$ de la reserva por suma. Así, pues, por darse todas estas raras condiciones, el producto total de 249 por 378 tiene una cifra menos que sus dos factores.

Claro es que no se necesita que las tres reservas conjuntamente concurran á hacer que se escriba con 2 cifras el resultado de la última columna (la de la izquierda): basta con que una sola de las tres reservas sea causa de ello para que el producto total se escriba ya con tantas cifras como haya en multiplicando y multiplicador, y no con una menos.

APÉNDICE

Conviene profundizar más aún el análisis de las reservas: ¡tanta es su importancia!

¿Puede igualar alguna vez al multiplicando lo que se agrega por sumas y reservas al mayor producto parcial de una multiplicación? No.

¿Puede llegar esa agregación en valor muy cerca al del multiplicando? Sí.

¿Cuánto faltará á la totalidad de esas agregaciones en su valor máximo para igualarse con el multiplicando?

Les faltará una deutena *correlativa:*

En efecto: el caso en que las reservas son mayores es aquel en que multiplicando y multiplicador se escriben con sólo cifras máximas, y el multiplicador tiene tantas cifras como el multiplicando.

```
        Z Z Z Z Z Z Z                       9999999
      × Z Z Z Z Z Z Z                     × 9999999
      ---------------                     ---------
      Y Z Z Z Z Z Z 1 0 0 0 0 0 0         89999991
        Y Z Z Z Z Z Z 1 0 0 0 0 0          89999991
          Y Z Z Z Z Z Z 1 0 0 0 0           89999991
            Y Z Z Z Z Z Z 1 0 0 0            89999991
              Y Z Z Z Z Z Z 1 0 0             89999991
                Y Z Z Z Z Z Z 1 0              89999991
                  Y Z Z Z Z Z Z 1               89999991
      ---------------------------         --------------
      Z Z Z Z Z Z Y 0 0 0 0 0 0 1         99999980000001
```

Supongamos divididas en dos alas ó mitades las cifras del producto total:

```
Z Z Z Z Z Z Y
              0 0 0 0 0 0 1
```

Ahora bien:

¿Qué es lo que se agrega por todos conceptos al producto parcial de mayor valor, que es el

Y Z Z Z Z Z Z 1 0 0 0 0 0 0?

Se le agregan dos clases de sumas:

1.° Lo que valen los fragmentos siguientes de los otros seis productos parciales del ala izquierda de la operación:

```
Y Z Z Z Z Z Z
  Y Z Z Z Z Z
    Y Z Z Z Z
      Y Z Z Z
        Y Z Z
          Y Z
-------------
```

2.° Y lo que valga la reserva que por suma haya que agregar procedente del resto de los fragmentos del ala derecha; el cual resto es como sigue:

1 0 0 0 0 0
Z 1 0 0 0 0
Z Z 1 0 0 0
Z Z Z 1 0 0
Z Z Z Z 1 0
Z Z Z Z Z 1

La reserva, por suma, de esta parte de la derecha importa 5; pues la suma es como sigue;

1 0 0 0 0 0
Z 1 0 0 0 0
Z Z 1 0 0 0
Z Z Z 1 0 0
Z Z Z Z 1 0
Z Z Z Z Z 1

5 0 0 0 0 0 1

la cifra máxima + 1 = 10; pongo 0 y llevo 1.
la cifra máxima 2 veces + 1 + 1 de reserva = 20.
la cifra máxima 3 veces + 1 + 2 de reserva = 30.
la cifra máxima 4 veces + 1 + 3 de reserva = 40.
la cifra máxima 5 veces + 1 + 4 de reserva = 50.

Por consiguiente, si agregamos este 5 de reserva por suma á los fragmentos anteriores que se juntan al más alto producto parcial, tendremos:

Y Z Z Z Z Z Z
Y Z Z Z Z Z
Y Z Z Z Z
Y Z Z Z
Y Z Z
Y Z

Z Z Z Z Z Y Z

á 6 cifras máximas faltan 6 para poderse escribir 60: es así que no tenemos más que 5 de reserva; luego la suma será 5 Z: pongo Z y llevo 5.
5 de reserva + 5 veces la cifra máxima + Y = 5 Z (= 50) + Y: pongo Y y llevo 5.
5 de reserva + 4 veces la cifra máxima + Y = 4 Z (= 40) + Z: pongo Z y llevo 4.
4 de reserva + 3 veces la cifra máxima + Y = 3 Z (= 30) + Z: pongo Z y llevo 3.
3 de reserva + 2 veces la cifra máxima + Y = 2 Z (= 20) + Z.
2 de reserva + Z + Y = 1 Z (= una deutena + Z): pongo Z y llevo 1.
1 de reserva + Y = Z.

En donde se observa que las reservas (tanto por causa de los productillos como por suma de columnas) en su importe máximo alcanzarán un valor de

ZZZZZYZ;

y como el multiplicando es

ZZZZZZZ,

se ve clarísimamente que jamás las agregaciones pueden igualar al multiplicando, y que para igualarlo en el caso máximo les faltará siempre una deutena *(deutena correlativa).*

$$\begin{array}{r} \text{ZZZZZYZ} \\ +\,10 \\ \hline \text{ZZZZZZZ} \end{array}$$

En el ejemplo este 10 es una deutena de heptaenas.

Hemos visto el valor de las dos clases de reservas cuando el multiplicador tiene tantas cifras como el multiplicando.

¿Cuál será el valor máximo cuando tenga una menos?

$$\begin{array}{r} \text{ZZZZZZZ} \\ \times\ \text{ZZZZZZ} \\ \hline \text{YZZZZZZ100000} \\ \text{YZZZZZZ10000} \\ \text{YZZZZZZ1000} \\ \text{YZZZZZZ100} \\ \text{YZZZZZZ10} \\ \text{YZZZZZZ1} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9999999 \\ \times\ 999999 \\ \hline 89999991 \\ 89999991 \\ 89999991 \\ 89999991 \\ 89999991 \\ 89999991 \end{array}$$

Pues será lo que valen los conjuntos parciales de la izquierda de la operación, + la reserva por suma de los fragmentos de la derecha:

$$\begin{array}{r} \text{IZQUIERDA} \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4 \\ \text{YZZZZZZ} \\ \text{YZZZZZ} \\ \text{YZZZZ} \\ \text{YZZZ} \\ \text{YZZ} \\ \hline \text{ZZZZYZZ} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{DERECHA} \\ \\ \text{Z10000} \\ \text{ZZ1000} \\ \text{ZZZ100} \\ \text{ZZZZ10} \\ \text{ZZZZZ1} \\ \hline \text{Z00001} \ \text{ y llevo 4.} \end{array}$$

4Z + Z; (= 40 + Z): pongo Z y llevo 4.
4Z; (= 40 + Z): pongo Z y llevo 4.
4Y; (= 40 + Y): pongo Y y llevo 4.
3Z; (= (30 + Z): pongo Z y llevo 3.
2Z; (= 20 + Z): pongo Z y llevo 2.
1Z; (= (10 + Z): pongo Z y llevo 1.

Pero
Restando ahora

$$\begin{array}{rll} & Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z, & \text{que es el multiplicando.} \\ - & Z\,Z\,Z\,Z\,Y\,Z\,Z, & \text{total de estas reservas.} \\ \hline = & 1\,0\,0 & \end{array}$$

Luego falta á estas dobles reservas una triena correlativa para igualar al multiplicando; esto es, 100.

¿Qué faltará cuando el multiplicador tenga dos cifras menos?

$$\begin{array}{r} Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z \\ \times\ Z\,Z\,Z\,Z\,Z \\ \hline Y\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,1\,0\,0\,0\,0 \\ Y\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,1\,0\,0\,0 \\ Y\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,1\,0\,0 \\ Y\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,1\,0 \\ Y\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,Z\,1 \end{array}$$

Análogamente á lo anterior, los fragmentos de la izquierda constituyen el conjunto de las reservas de los productillos, á lo que habrá que agregar la reserva por suma de los fragmentos de la derecha; todo lo cual importará

Z Z Z Y Z Z Z

Faltará, pues, en el ejemplo á estas dobles reservas una tetraena correlativa para igualar al multiplicando.

Se ve, pues, ya la ley. Cuando el multiplicador tenga tres cifras menos que el multiplicando, faltará á las reservas una pentaena correlativa; cuando cuatro menos, una hexaena; cuando cinco menos, una heptaena... y así sucesivamente.

Evidente es que á las reservas faltará mucho más para igualarse con el multiplicando cuando éste y el multiplicador no estén constituídos por cifras máximas.

Concluyamos por una observación.

Si consideramos divididas en dos alas (ó mitades) las cifras con que se escribe un producto al cual hayamos agregado un sumando menor que el multiplicando, notaremos que el influjo de este sumando se ejerce principalmente sobre el ala derecha, mientras que el de las dobles reservas llega hasta las cifras más altas del ala izquierda.

En el caso máximo de multiplicando y multiplicador iguales y constituídos por cifras máximas, el influjo de un sumando menor que el multiplicando no alcanza al ala izquierda.

LECCIÓN X

Número de las cifras de un factor conocidas las del producto y las del otro factor.

Para efectuar sin vacilaciones la operación (no estudiada aún) de dividir, importa mucho tener resuelto el siguiente problema de multiplicar:

Dado un producto y un factor, averiguar el número de cifras del otro factor.

Recordemos que un producto puede tener igual número de cifras que los dos factores juntos, ó bien una menos.

Ahora bien; ¿cómo, viendo sólo el producto total y un factor, conoceremos cuándo el otro factor unido al factor conocido completa el número de cifras del producto, ó bien difiere en una?

Primer caso.—Si el producto tiene tantas cifras como los dos factores juntos, entonces el factor incógnito está constituído por un número de cifras igual á la diferencia entre las cifras del producto total dado y las cifras del factor conocido.

Así, pues, y en tal supuesto, si el producto total tiene 10 cifras y 4 el factor dado, digo que el desconocido tiene 6.

Segundo caso.—El producto total tiene una cifra menos que los dos factores juntos; ¿cuál será, en este caso, el número de cifras del factor incógnito? ¿Nos será dado hallar ese número?

Sí. Lo hallaremos sacando, como antes, la diferencia entre el número de cifras del producto total dado y el número de cifras del factor conocido, y agregando 1 á la diferencia resultante.

Así, pues, si un producto de menos cifras que sus factores consta de 11 cifras, y de 3 el factor conocido, ¿cuántas tendrá el incógnito?

Digo que tendrá

$$(11 - 3) + 1 = 9$$

De donde resulta las siguientes reglas:

1.° Dado un producto total y uno de sus dos factores, lo primero que hay que hacer es averiguar si el producto es de los que igualan en cifras al conjunto de cifras de los factores, ó bien si es de los que tienen una menos.

2.° Si resulta lo primero, entonces para averiguar el número de cifras del factor incógnito, se saca la diferencia entre las del producto total dado y las del factor conocido.

3.° Pero si resulta lo segundo, á la diferencia se le agregará un 1.

Conocidas estas reglas, la dificultad queda, pues, reducida á saber cómo por el análisis de los datos conoceremos á qué clase pertenece el producto total dado; si á la clase de los que igualan en número de cifras á sus dos factores, ó bien si pertenece á la clase de los que resultan con una menos.

Ahora bien:

¿En qué se conocerá que el producto total dado tiene un número de cifras igual á la suma de las de los dos factores?

¿En qué, si tiene una menos?

A

Cuando un producto total tiene tantas cifras como sus dos factores reunidos, ese producto total posee una propiedad preciosa: su primera cifra de la izquierda es menor que la primera también de la izquierda de cualquiera de los factores: (multiplicando ó multiplicador).

En efecto, sea Z la última cifra de un sistema.

Sea Y la penúltima;

Sea X la antepenúltima;
Sea V la ante-antepenúltima, etc.
Y tendremos en todos los sistemas:

En general.		En el sistema decimal.
$2 \times Z = 1\,Y$	$(= 20 - 2)$	$2 \times 9 = 10 + 8$
$3 \times Z = 2\,X$	$(= 30 - 3)$	$3 \times 9 = 20 + 7$
$4 \times Z = 3\,V$	$(= 40 - 4)$	$4 \times 9 = 30 + 6$
$5 \times Z = 4\,U$	$(= 50 - 5)$	$5 \times 9 = 40 + 5$
$6 \times Z = 5\,T$	$(= 60 - 6)$	$6 \times 9 = 50 + 4$
Etc.		Etc.

Se ve, pues, que cuando el productillo de un dígito por otro exige dos cifras, entonces la primera cifra de la izquierda del producto total es menor que el dígito, cuya repetición ha generado el productillo de dos cifras (1).

Así, pues, si la primera cifra de la izquierda de un producto total es menor que la primera de la izquierda en cualquiera de sus factores, entonces el otro factor tiene tantas cifras como sean necesarias para completar entre los dos el número de las cifras del producto total; es decir, el factor incógnito tiene tantas cifras como resulte de la diferencia entre las del producto total dado y las del factor conocido.

¿Cuántas cifras, pues, tendrá en el sistema quinario el factor que multiplicado por la expresión 4003 ha dado el producto 3110041013? Seis: (10 — 4). Y, con efecto:

$$400321 \times 4003 = 3110041013$$

¿Cuántas cifras tendrá en el sistema senario el factor que con el 234 ha dado el producto total 1331444?

Tendrá $7 - 3 = 4$. Y, efectivamente:

$$234 \times 3354 = 1331444$$

¿Cuántas cifras tiene en el sistema decimal el factor que multiplicado por 46974 da el producto total 18695652? $(8 - 5 = 3)$.

$$46974 \times 398 = 18695652$$

(1) Véase esto confirmado en las tablas de PITÁGORAS (ó tablas de multiplicar), donde se hallan registrados todos los casos que pueden ocurrir.

¿Cuántas cifras tiene en el sistema duodecimal el factor que con el 74ab3 ha generado el producto total 27713776? $(8 - 5 = 3)$.

$$74ab3 \times 432 = 27713776$$

Pero podrá preguntarse:

¿No invalidarán las reservas por sumas esta regla? Admitiendo que se escriban con 2 cifras los productillos de los dígitos de la extrema izquierda de multiplicando y multiplicador, y suponiendo que estos productillos empiecen necesariamente con una cifra menor que los dígitos generadores, ¿no podrá suceder que las reservas por sumas hagan que el producto total empiece con una cifra mayor que los dígitos generadores?

No.

Supongamos que los dígitos de la extrema izquierda de un multiplicando y de un multiplicador sean respectivamente 7 y 6, cuyo productillo da 42, guarismo que empieza por 4, cifra $<$ que 6, y con mayor razón $<$ que 7.

Digo que, sean las que fueren las cifras restantes de los dos factores, el producto total no puede nunca, por mucho que sumen las reservas, empezar con una cifra mayor que el 6.

En efecto; el peor multiplicando que empezando por 7 se nos pudiera dar, sería, en este caso, uno cuyas cifras restantes fuesen todas cifras máximas (nueve, por ejemplo, en el sistema decimal), y el peor multiplicador sería, análogamente, una expresión que empezase por un seis seguido de nueves. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 79999 \\ \times \quad 6999 \\ \hline \end{array}$$

Pues, aún así, el producto total de esa multiplicación sería, indudablemente, menor todavía que el de la siguiente:

$$\begin{array}{r} 80000 \\ \times \quad 7000 \\ \hline \end{array}$$

Y como el producto de 7 por 8 no empieza todavía por 6, resulta que no puede empezar por una cifra mayor que 6 el último productillo de los factores

$$79999 \times 6999$$

Por otra parte, en el caso peor posible estudiado en la Lección anterior, que es el de un ejemplo como

$$\begin{array}{r} Z\,Z\,Z\,Z\,Z \\ \times\ \ Z\,Z\,Z\,Z\,Z \\ \hline \end{array}$$

hemos visto que las reservas por sumas después de llegar á un máximo, empiezan á decrecer hasta descender la última á 1.

$$\begin{array}{lr} & Z\,Z\,Z\,Z\,Z \\ & \times\ \ Z\,Z\,Z\,Z\,Z \\ \cline{2-2} \text{Reservas máximas:} & (^1\ (^2\ (^3\ (^4\ (^4\ (^3\ (^2\ (^1\quad\ \ \\ & Y\,1 \\ & Y\,1\quad \\ & \\ & \text{Etc., etc.} \end{array}$$

De donde resulta que todo lo más que puede agregarse á la cifra de la izquierda del último productillo, es una reserva por sumas igual á 1. Por manera que la cifra primera de la izquierda de un producto total nunca, ni aún en el caso peor posible, puede ser (por multiplicación de los dígitos extremos de los factores ni por agregación de la reserva final) mayor que la cifra inicial de cualquiera de los factores.

Pero puede igualarla, caso que pronto estudiaremos.

B

Cuando la primera cifra de la izquierda de un producto total es mayor que cada una de las iniciales de los dos factores, entonces el producto total tiene una cifra menos que el conjunto de multiplicando y multiplicador (1).

Esto es claro: si (independientemente de las reservas) se escribe con una cifra el productillo de dos dígitos, la cifra del productillo es mayor que las de los factores.

---

(1) Véanse las tablas de Pitágoras, donde están todos los casos posibles de los productillos que no se escriben con 2 cifras.

Por consiguiente, cuando la primera cifra de la izquierda de un producto total dado aparece mayor que la primera de la izquierda del factor conocido, entonces el otro factor tiene tantas cifras como resulte de la diferencia de cifras de los datos $+ 1$.

Y con tanta más razón resultará así, cuando á la cifra de la izquierda del producto se haya agregado una reserva.

Así, si nos dan en el sistema decimal el producto total

$$3\,675$$

y el factor

$$25$$

diremos:

Puesto que el 3, primera cifra de la izquierda del producto total 3 675, es mayor que el 2, primera cifra de la izquierda del factor conocido 25, debe el factor incógnito tener una cifra más que la diferencia entre 4, número de cifras del producto total y el número de cifras del factor conocido: luego tiene 3 cifras: $(4 - 2) + 1 = 3$.

Y, en efecto,

$$3\,675 = 25 \times 147.$$

¿Cuántas cifras tiene en el sistema decimal el factor que con el 346 ha concurrido á la formación del producto total 77 158?

Puesto que el 7 de la izquierda del producto total es mayor que el 3 de la izquierda del factor conocido, diremos que el factor desconocido tiene una cifra más que la diferencia entre el número de cifras de los datos: tiene, pues, 3. $(5 - 3) + 1 = 3$.

Y, con efecto,

$$77\,158 = 346 \times 223.$$

¿Cuántas cifras tiene el factor del sistema decimal que multiplicado por

$$33\,333$$

ha engendrado el producto

$$74\,073\,333\,325\,926?$$

Tiene 10 cifras; $(14 - 5) + 1 = 10$; y, en efecto,

$$7407333325926 = 33333 \times 2222222222$$

Respecto de las reservas hay que considerar dos casos:

O las reservas agregadas al último productillo dan una suma que todavía se escribe con un dígito solamente;

O la suma se escribe con dos cifras.

Si la suma se escribe todavía con un dígito, entonces es de evidencia que el dígito-suma será mayor que cualquiera de los de la extrema izquierda de multiplicando ó multiplicador, que engendraron el productillo de una cifra;

Y, por consiguiente, estamos todavía dentro de la regla dada.

Y, si las reservas hacen que la suma se escriba con dos cifras, entonces ya el producto total tiene tantas cifras como los dos factores, y nos encontramos en el caso estudiado en la anterior sección A.

C

Puede suceder que el producto total y el factor dados empiecen con la misma cifra.

Primer ejemplo . .	3267	*producto total;*
	33	*factor conocido.*
Segundo ejemplo. .	3366	*producto total;*
	33	*factor conocido.*
Tercer ejemplo. . .	3498	*producto total;*
	33	*factor conocido.*

En las tres variantes cuyas indicaciones preceden, empiezan por la misma cifra 3, tanto los productos totales, como el factor dado para multiplicador.

¿Cómo conoceremos ahora el número de cifras del factor incógnito?

Por las cifras inmediatas de la derecha de los datos. Estas nuevas cifras auxiliares serán en los productos totales menores, ó iguales ó mayores que sus correspondientes en los factores dados; y, según lo que fueren, se les aplicarán las reglas de las secciones anteriores A y B.

Si resultan menores, el producto total es de los que tienen tantas cifras como los dos factores juntos; y, por consiguiente, el número de cifras del factor incógnito será igual á la diferencia de cifras de los datos.

Y, efectivamente, en el primer ejemplo anterior tendremos: $(4-2)=2$

$$3267 = 33 \times 99$$

Y, si son iguales, ó mayores, entonces el producto total tendrá una cifra menos que sus dos factores juntos; y, por consiguiente, el número de cifras del factor incógnito será igual á la diferencia $+1$. (En cada uno de los dos últimos casos anteriores, $(4-2)+1=3$).

Y, efectivamente

$$3366 = 33 \times 102$$
$$3498 = 33 \times 106$$

Puede aún acontecer que no baste todavía la inspección de las segundas cifras de la izquierda y haya que recurrir á las terceras, ó á las cuartas, ó á las quintas, etc.; pero, sea como fuere, siempre tendremos que, cuando una cifra del producto total dado sea menor que su correspondiente del factor conocido que haga de multiplicador, tendrá el factor incógnito el número de cifras que resulte de la diferencia entre las de los datos;

Y una más cuando no suceda así; esto es, cuando la respectiva cifra del producto total sea igual ó mayor que su correspondiente del factor conocido.

$$530796 = 534 \times 994; (6-3)=3$$

porque en el producto total la tercera cifra cero es $<$ que la correspondiente tercera 4 del factor.

$$534000 = 534 \times 1000; (6-3)+1$$

porque la tercera del producto es $=$ á la correspondiente del factor.

$$535068 = 534 \times 1002; (6-3)+1$$

porque el 5, tercera del producto, es $>$ que la correspondiente 4 del factor.

De lo expuesto en las tres secciones anteriores A, B y C, resultan las siguientes reglas prácticas para averiguar el número de cifras que ha de tener un factor incógnito, cuando nos den un producto total y el otro factor:

1.ª Se separarán mentalmente en el producto total tantas cifras de izquierda á derecha como haya en el factor conocido;

2.ª Se examinará en seguida si la sección mentalmente aislada representa en la escala de la pluralidad un grado menor, igual ó mayor que el factor conocido;

3.ª Si es menor, entonces pertenece el producto total á la clase de los que tienen tantas cifras como los dos factores juntos; y, por consiguiente, las del factor incógnito serán en número igual á la diferencia entre los datos;

4.ª Y si es igual ó mayor, entonces pertenece el producto total á la clase de los que tienen una cifra menos que los dos factores juntos, y, por consiguiente, se hallarán las del factor incógnito agregando un 1 á la diferencia resultante de los datos.

Si todavía esta inspección no resultase decisiva, se recurrirá á inspeccionar las cifras inmediatas.

¿Cuántas cifras tendrá el factor incógnito con los datos siguientes?

9999800001	*producto total;*
99999	*factor.*

Las cinco cifras de la izquierda del producto

99998

representan un grado menor que las del factor dado

99999

Luego el factor incógnito tendrá 5; $(10 - 5 = 5)$.

¿Cuántas cifras tendrá el factor incógnito, siendo los datos como siguen?

ZZZZY00001	*producto total*
ZZZZZ	*factor.*

Como ZZZZY del producto es menor que ZZZZZ del factor conocido, el factor desconocido tendrá 5: $(10 - 5 = 5)$.

¿Cuántas cifras tiene el factor que multiplicado por

64458

ha dado en el sistema decimal el producto total

64393542?

Tiene tres: (8 — 5).

¿Por qué? Porque la sección 643 de la izquierda del producto es < que la sección 644 de la izquierda del factor.

Y, efectivamente,

$$64458 \times 999 = 64393542.$$

¿Cuántas cifras tiene el factor que con el

854325

ha engendrado en el sistema decimal el producto total

85431645675?

Tiene 5; (11 — 6 = 5); porque 85431 es < 85432.
En efecto,

$$854325 \times 99999 = 85431645675$$

¿De cuántas cifras es el factor que con el

1111

ha formado el producto total

1234469132963? De diez (13 — 4) + 1.

¿Por qué? Porque no hay en la sección de la izquierda del producto total ninguna cifra menor que en el factor dado.

Y, en efecto:

$$12 > 11$$
$$1111 \times 1111133333 = 1234469132963$$

¿Cuántas cifras tiene el factor, que multiplicado por

22222

ha engendrado el producto

24691111108642? Diez (14 — 5) + 1;

porque 24 > 22.

Y, en efecto,

$$22222 \times 1111111111 = 24691111108642$$

¿De cuántas cifras es el factor que con el

$$456789$$

da

$$4567891370367?$$

De 8; $(13 - 6) + 1$; porque la sección separada mentalmente á la izquierda del producto total

$$456789$$

es igual al factor dado

$$456789$$

Y, con efecto,

$$456789 \times 10000003 = 4567891370367.$$

APÉNDICE.

Las propiedades siguientes son sencillísimas consecuencias de los principios sentados en la Lección anterior; mas, por tener continua aplicación en la operación de dividir exigen una especial atención.

Si de una expresión formada por un dígito seguido de ceros se resta el mismo dígito, la diferencia será igual:

1.° A una suma de sumandos todos iguales;

2.° Su número será igual al dígito en cuestión;

3.° Y cada sumando estará constituído por tantas cifras máximas como ceros hubiere á continuación del dígito. Así:

$$\begin{aligned} 4000 - 4 &= 999 + 999 + 999 + 999 \\ &= 999 \times 4 = 3996 \end{aligned}$$

La razón es obvia:

$$1000 - 1 = 999$$

Por consiguiente:

$$\begin{array}{r} 1000 - 1 = 999 \\ +1000 - 1 = 999 \\ +1000 - 1 = 999 \\ +1000 - 1 = 999 \\ \hline = 4000 - 4 = 999 \times 4 \end{array}$$

Así

$$300 - 3 = 99 + 99 + 99$$
$$= 99 \times 3 = 297$$

$$800000 - 8 = 99999 \times 8$$

y en general

$$700000000 - 7 = ZZZZZZZZ \times 7$$

De lo expuesto se deduce inmediatamente la propiedad siguiente (de continua aplicación en la operación de dividir).

Una expresión de cifras máximas multiplicada por un dígito da un producto menor que la expresión formada por el mismo dígito y tantos ceros como hubiere cifras máximas.

Ejemplo en el sistema decimal:

$$999 \times 4 < 4000$$
$$999999 \times 7 < 7000000$$

Y en todos los sistemas

$$ZZZZZZZZ \times 6 < 600000000$$

De aquí resulta también que el producto de una expresión compuesta de cifras máximas yuxtapuestas, multiplicada por un dígito cualquiera, empieza siempre por el dígito inmediatamente inferior al dígito multiplicador.

Sea

$$9999 \times 4 = 39996$$
$$ZZZZ \times 4 = (3ZZZZ) - 4$$

En efecto, el dígito multiplicador es 4, y el primer dígito de la izquierda en el producto total es 3. Pero el 3 es la cifra inmediatamente inferior al dígito multiplicador 4.

De lo cual asimismo se deduce inmediatamente que, si al producto de un dígito por una expresión formada con cifras máximas yuxtapuestas se agrega el mismo dígito multiplicador, la suma empezará ya por una cifra igual al mencionado dígito:

$$4 \times 99999 + 4 = 400000$$
$$7 \times 99999 + 7 = 700000$$
$$8 \times 99999 + 8 = 800000$$

Dónde se ve que *en esta clase de productos*

$$3 \times 99$$
$$8 \times 999, \text{ etc.}$$

basta la agregación de un sumando tan pequeño como el respectivo dígito, para que ya la primera cifra de la suma sea el dígito mismo seguido de tantos ceros como hubiere cifras máximas yuxtapuestas.

LECCIÓN XI

Condensaciones en la multiplicación y en las pruebas

CONDENSACIÓN DEL MULTIPLICAR

Las personas de gran expedición y facilidad para las operaciones aritméticas pueden abreviar todavía la multiplicación, con gran ahorro de tiempo, y menos exposición á equivocaciones; por ser de experiencia que, dentro de ciertos límites, mientras ménos signos se escriben, menos probabilidades hay de error.

Es una propiedad notable de la inteligencia que la seguridad del cálculo es tanto más grande cuanto mayor número de operaciones se hacen de memoria: (se entiende cuando las personas de felices facultades tienen la memoria suficientemente ejercitada, y cuando el ejercicio se ha convertido tan en hábito que espontáneamente y sin pensar se llega á los resultados aritméticos).

Natural es que los que ya sepan bien la operación de multiplicar, juzguen innecesario el aprendizaje de un nuevo procedimiento que condense y abrevie todavía más una operación de suyo tan rápida y expeditiva como lo es ya la multiplicación; pero el que quiera dominar por completo el cálculo, debe aún aprender los procedimientos de condensación; tanto por su aplicación frecuente para las multiplicaciones pequeñas, como por ser una especie de gimnasiá que hace adquirir inmensa seguridad en la suma; operación en la cual nadie podrá decir jamás que se ha ejercitado con exceso.

Inspeccionando la composición de los productos parciales de una multiplicación, por ejemplo, de 4 cifras por otras 4, se observará:

	Multiplicador.		Multiplicando.	
1.º que	1.ª cifra	×	1.ª cifra	da cifras de primer orden, ó protoenas;
2.º que	1.ª	×	2.ª	dan cifras de segundo orden, ó deutenas;
	2.ª	×	1.ª	
3.º que	1.ª	×	3.ª	dan cifras de tercer orden, ó trienas;
	2.ª	×	2.ª	
	3.ª	×	1.ª	
4.º que	1.ª	×	4.ª	dan cifras de cuarto orden, ó tetraenas;
	2.ª	×	3.ª	
	3.ª	×	2.ª	
	4.ª	×	1.ª	
5.º que	2.ª	×	4.ª	dan cifras de quinto orden, ó pentaenas;
	3.ª	×	3.ª	
	4.ª	×	2.ª	
6.º que	3.ª	×	4.ª	dan cifras de sexto orden, ó hexaenas;
	4.ª	×	3.ª	
7.º y que	4.ª	×	4.ª	da cifras de séptimo orden, ó heptaenas, etc.

La ley de formación de los productillos del mismo orden es, pues, sumamente visible.

Así, si se nos presentase una multiplicación cuyo multiplicando tuviera diez cifras y el multiplicador otras diez, darían cifras de 10.º lugar las multiplicaciones de dígito por dígito siguientes:

$$\text{De} < \text{á} > \left\{ \begin{array}{ccc} 1.^a & \times & 10.^a \\ 2.^a & \times & 9.^a \\ 3.^a & \times & 8.^a \\ 4.^a & \times & 7.^a \\ 5.^a & \times & 6.^a \\ 6.^a & \times & 5.^a \\ 7.^a & \times & 4.^a \\ 8.^a & \times & 3.^a \\ 9.^a & \times & 2.^a \\ 10.^a & \times & 1.^a \end{array} \right\} \text{De} > \text{á} <$$

Si el multiplicador tuviese menor número de cifras, claro es que no habría diez combinaciones: suponiendo sólo cinco cifras en el multiplicador las combinaciones serían las que siguen:

1.ª × 10.ª
2.ª × 9.ª
3.ª × 8.ª
4.ª × 7.ª
5.ª × 6.ª

De aquí resulta que, si (sabida la correspondiente reserva) multiplicamos de memoria la primera combinación que dé cifras de un orden cualquiera deseado, y luego la segunda y sumamos, también de memoria, los dos resultados; y después la tercera, y la sumamos igualmente con la suma anterior y en seguida la cuarta y la sumamos con la suma últimamente hallada,... y así sucesivamente, obtendremos de una vez la cifra del orden en cuestión, juntamente con la reserva por suma que ha de agregarse á las combinaciones del orden inmediato de la izquierda.

De este modo, el producto total se obtiene de una vez sin necesidad de escribir los parciales, con gran ventaja del tiempo y de los procedimientos de los cálculos, y con aumento de probabilidad en la exactitud: (se entiende—repitámoslo—en cuanto un operador de buenas y expeditas facultades aritméticas ha adquirido la práctica suficiente, pues ¿quién hace la operación más insignificante sin sujetarse á las condiciones de ejercicio y repetición?)

Sin embargo, preciso es conceder que no á todos es dado hacer de memoria multiplicaciones largas de una vez y prescindiendo de escribir los productos parciales; pero no hay nadie que no pueda ejecutar las cortas.

Sean los ejemplos siguientes en condensación:

SISTEMA DECIMAL

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 23 \\ \hline 5 \end{array}$$

Se dirá:

$3 \times 5 = 15$; se pone el 5 y se guarda 1 de reserva.

Ahora se procede á las multiplicaciones que dan decenas:

$3 \times 3 = 9, + 1$ de la reserva 10; $+ (2 \times 5 =)$ 10, 20: pongo cero en el lugar de las deutenas, y llevo 2.

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 23 \\ \hline 05 \end{array}$$

Ahora procedo á la multiplicación que da trienas:

$2 \times 3 = 6$, y 2 de la anterior reserva 8; y pongo el 8 por final de operación:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 23 \\ \hline 805 \\ \hline \end{array}$$

Véase en comprobación:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 23 \\ \hline 105 \\ 70 \\ \hline 805 \\ \hline \end{array}$$

Otro ejemplo en el mismo sistema:

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 28 \\ \hline \end{array}$$

1.° Se hace la multiplicación que da la protoena;
2.° Luego las dos que dan deutenas;
3.° Y, por último, la que da la triena.

Protoenas	Deutenas	Trienas
$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 28 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 28 \\ \hline 04 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 28 \\ \hline 1204 \end{array}$
$8 \times 3 = 24$; pongo 4 y llevo 2.	$8 \times 4 = 32 + 2 = 34 + (2 \times 3) = 6$; $34 + 6 = 40$; pongo cero y llevo 4.	$2 \times 4 = 8$; $+ 4$ de la reserva $= 12$; y lo pongo por final de operación.

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 28 \\ \hline 344 \\ 86 \\ \hline 1204 \\ \hline \end{array}$$

Sea ahora la siguiente operación, que se ejecutará análogamente á las dos anteriores:

$$\begin{array}{r} 5471 \\ 23 \\ \hline 125833 \end{array} \quad (4 \qquad \begin{array}{c} 8 \\ \times 4 \\ 5 \end{array}$$

Diremos de memoria:

$3 \times 1 = 3$; y se escribe el 3.
$3 \times 7 = 21, + (2 \times 1 =) 2 = 23$; pongo 3 y reservo 2.
$3 \times 4 = 12, + 2$ de reserva $= 14, + (2 \times 7 =) 14 = 28$; pongo 8 y reservo 2.
$3 \times 5 = 15, + 2$ de reserva $= 17, + (2 \times 4 =) 8 = 25$; pongo 5 y llevo 2.
$2 \times 5 = 10, + 2 = 12$; y lo copio por final de la multiplicación.

En este procedimiento expeditivo, si la protoena del multiplicador se multiplica, v. gr., por la triena del multiplicando,

la *siguiente* deutena del multiplicador se multiplica por la deutena *anterior* del multiplicando,

la triena del multiplicador por la protoena del multiplicando,

Y así sucesiva y análogamente (1).

Sea la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ 1234 \\ \hline 152345677626 \end{array} \quad (9 \qquad \begin{array}{c} 0 \\ \times 0 \\ 1 \end{array}$$

El procedimiento ha sido el siguiente:

4 × 9			
4 × 8 y	3 × 9		
4 × 7;	3 × 8 y	2 × 9	
4 × 6;	3 × 7;	2 × 8 y	1 × 9
4 × 5;	3 × 6;	2 × 7 y	1 × 8
4 × 4;	3 × 5;	2 × 6 y	1 × 7
4 × 3;	3 × 4;	2 × 5 y	1 × 6
4 × 2;	3 × 3;	2 × 4 y	1 × 5
4 × 1;	3 × 2;	2 × 3 y	1 × 4
	3 × 1;	2 × 2 y	1 × 3
		2 × 1 y	1 × 2
			1 × 1

(1) Claro es que, si no hay cifras á la derecha de la que da un productillo, no se busca otro productillo ninguno más.

Claro es que á los productillos y sus sumas habrá habido que agregar las correspondientes reservas.

Efectuadas las operaciones anteriores, resultará:

		36; se pone 6 y se llevan 3
3 + 32 + 27	=	62; se pone 2 y se llevan 6
6 + 28 + 24 + 18	=	76; se pone 6; reserva 7
7 + 24 + 21 + 16 + 9	=	77; se pone 7; reserva 7
7 + 20 + 18 + 14 + 8	=	67; se pone 7; reserva 6
6 + 16 + 15 + 12 + 7	=	56; se pone 6; reserva 5
5 + 12 + 12 + 10 + 6	=	45; se pone 5: reserva 4
4 + 8 + 9 + 8 + 5	=	34; se pone 4: reserva 3
3 + 4 + 6 + 6 + 4	=	23; se pone 3 y se llevan 2
2 + 3 + 4 + 3	=	12; se pone 2 y se lleva 1
1 + 2 + 2	=	5; se escribe el 5
1	=	1; y se escribe.

Sea ahora, en el sistema decimal, la operación de multiplicar siguiente:

$$\begin{array}{r} 321028 \\ \times\ 128 \\ \hline 41091584 \end{array} \quad (5 \qquad \begin{array}{c} 7 \\ \times\,5 \\ 2 \end{array}$$

Diré:

8 × 8 = 64; pongo 4 y reservo 6.
8 × 2 16, + 6 de reserva = 22, + (2 × 8 =) 16 = 38; pongo 8 y reservo 3.
8 × 0 = 0, + 3 de reserva = 3, + (2 × 2 =) 4 = 7, + (1 × 8 =) 15; pongo 5 y llevo 1.
8 × 1 = 8, + 1 de reserva = 9, + (2 × 0 =) 0, + (1 × 2 =) 2 = 11: pongo 1 y reservo 1.
8 × 2 = 16, + 1 de reserva 17, + (2 × 1 =) 2 = 19, + (1 × 0 =) 0 = 19; pongo 9 y llevo 1.
8 × 3 = 24, + 1 = 25, + (2 × 2 =) 4 = 29, + (1 × 1 =) 1 = 30; pongo 0 y retengo 3.
2 × 3 = 6, + 3 de reserva = 9, + (1 × 2 =) 2 = 11; pongo 1 y reservo 1.
1 × 3 = 3, + 1 = 4, y lo pongo por final de operación.

Sólo con la práctica puede hacerse desembarazadamente y dominarse por completo este rápido y elegante modo de operar que, para algunas personas, sin embargo, nunca resulta accesible.

Pero, en definitiva, no es de absoluta necesidad habituarse á este expeditivo procedimiento.

CONDENSACIÓN DE LA PRUEBA.

La condensación de la prueba de la cifra máxima es operación, por suerte, sumamente fácil, y para la cual no se requiere apenas práctica.

Sistema decimal.

$$\begin{array}{r} 3747 \\ \times \quad 374 \\ \hline \end{array}$$

1.° Se sacan los 9 del multiplicando y sobra el 3: se escribe el 3 sobre un aspa trazada al lado.

$$\begin{array}{rc} 3747 & 3 \\ 374 & \times \\ \hline \end{array}$$

2.° Se sacan los 9 del multiplicador y sobra el 5: se escribe el sobrante 5 bajo el aspa.

$$\begin{array}{rc} 3747 & 3 \\ 374 & \times \\ \hline & 5 \end{array}$$

3.° Se multiplican entre sí los sobrantes que están en lo alto y en lo bajo del aspa.

$$5 \times 3 = 15;$$

4.° Y se sacan los 9 del 15, diciendo: $1 + 5 = 6$, y se escribe á la derecha del aspa el sobrante 6 de este productillo de los sobrantes anteriores.

$$\begin{array}{rccc} 3747 & & 3 & \\ 374 & & \times & 6 \\ \hline & & 5 & \end{array}$$

Hecha así la preparación, se efectuará la multiplicación:

$$\begin{array}{rccc} 3747 & & 3 & \\ 374 & 6 & \times & 6 \\ \hline 14988 & & 5 & \\ 26229 & & & \\ 11241 & & & \\ \hline 1401378 & & & \end{array}$$

y del producto total se sacará los 9;

$$\begin{array}{l} 1 + 4 + 1 + 3 + 7 + 8 = 24 \\ \qquad\quad 2 + 4 \qquad\quad\;\; = 6 \end{array}$$

y este sobrante 6 se escribirá á la izquierda del aspa; y, como ambos sobrantes son iguales, diremos que la operación está bien hecha.

Abreviadamente	3747 374 ——— 1401378	3 6 × 6 5

Ya se habrá observado que las dos últimas multiplicaciones condensadas que anteceden aparecieron con sus pruebas de condensación como sigue:

5471 23 ——— 125833 (4	8 × 4 5
321028 128 ——— 41091584 (5	7 × 5 2

ADVERTENCIA IMPORTANTE.

Cuando hemos ya adquirido tanta práctica en multiplicar que es más probable el no equivocarnos que el incurrir en error; ó bien, cuando la multiplicación es corta, entonces, aun cuando no condensemos las *multiplicaciones* (prefiriendo escribir todos los productos parciales), es de aconsejar el no efectuar para cada producto parcial la prueba de la cifra máxima, pues bastará únicamente el efectuar una sola prueba de condensación para el producto final.

Sistema decimal			
3747 × 374 ——— 14988 26229 11241 ——— 1401378	3 6×6 5	en vez de	3747 (3 × 374 ——— 14988 (3 26229 (3 11241 (0 ——— 1401378 (6

Quinario		Senario	
1234	2	3354	0
203	2×2	234	0×0
4312	1	22344	4
3023		14550	
312112		11152	
		1331444	

Septenario		Octonario	
2666	2	37467	6
3046	2×2	50034	2×2
23661	1	176334	5
14663		186645	
11664		236023	
12200621		2362015004	

Nonario		Decimal	
47888	3	46974	3
888	0×0	398	6×6
430881	0	375792	2
430881		422766	
430881		140922	
47840001		18695652	

Undecimal		Duodecimal	
340a	7	74ab3	2
235	0×0	432	7×7
15946	0	1299a6	9
a128		1a2899	
6819		257790	
788a16		27718776	

Pero, si, hecha la prueba condensada, advirtiésemos error, entonces deberá efectuarse de memoria la prueba á cada producto parcial, para ver cuál es el equivocado y no tener que rehacer la operación entera.

Y, si los productos parciales resultasen bien, entonces la equivocación se buscará en su suma.

Es evidente que puede efectuarse también en la imaginación la prueba del aspa sin necesidad de escribirla, con ahorro, por supuesto, de tiempo y de trabajo.

La prueba del aspa es muy fácil de explicar.

Sistema decimal

$$\begin{array}{r l} 248 & (5 \\ \times\ 867 & \\ \hline & (8 \\ & (3 \\ & (4 \\ \hline & (6 \\ \hline \end{array}$$

El sobrante 5 del multiplicando se ha de repetir 8 veces, y 3 veces, y 4 veces, y de la suma de los sobrantes de estas repeticiones se han de excluír los 9; obvio es, pues, que lo mismo es repetir sucesivamente el 5 de ese modo que repetirlo de un golpe 15 veces, ó bien 6 veces ($1 + 5 = 6$), y excluír los 9 del producto $15 \times 5 = 75$; ó bien, en fin, repetir de un golpe cinco veces el sobrante 6 del 15; etc.

LECCIÓN XII

Otra disposición de la operación de multiplicar.

Entre las propiedades de la multiplicación (que estudiaremos más adelante en sección especial), encontraremos las siguientes:

1.ª Si al multiplicador se agrega un 1 encontraremos en el producto un multiplicando más.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 3 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 4 \\ \hline 60 \end{array} = 45 + 15$$

Si al multiplicando se agrega un 1, tendremos en el producto un multiplicador más.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 3 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 3 \\ \hline 48 \end{array} = 45 + 3$$

Si al multiplicando se agrega un 1 y otro 1 al multiplicador, habrá en el producto lo siguiente:

Un multiplicando más;
Un multiplicador más;
Y un producto de ($1 \times 1 =$) 1 más.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 3 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 4 \\ \hline 64 \end{array} = 45 + 15 + 3 + 1$$

Por consiguiente;

Si al multiplicador se agrega un 2, un 3, un 4, un 5... un n, habrá en el producto 2, 3, 4, 5... n, multiplicandos más.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 3 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 5\ (=3+2) \\ \hline 75 \end{array} = 45 + (2 \times 15) = 45 + 30$$

Si al multiplicando se agrega un 2, un 3, un 4, un 5... un n, habrá en el producto 2, 3, 4, 5... n multiplicadores más;

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 3 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 17\ (=15+2) \\ \times\ 3 \\ \hline 51 \end{array} = 45 + (2 \times 3) = 45 + 6$$

y, en fin, si al multiplicando se agrega m y al multiplicador se agrega n, habrá en el producto:

m multiplicadores más;
n multiplicandos más,
y un producto $m \times n$ más.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 3 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 20\ (15+5) \\ \times\ 7\ (\ 3+4) \\ \hline 140 \end{array} \Big\} \text{ Véase } \textit{Involución.}$$

$$140 = 45 + (5 \times 3\ ) + (4 \times 15) + (4 \times 5)$$
$$= 45 + 15 + 60 + 20$$

De lo expuesto resulta una nueva manera de efectuar la operación de multiplicar.

Sean los factores

$$41 \times 31;$$

cometamos á sabiendas el error de suponer que, en vez de los datos, tenemos:

$$\begin{array}{r} 40 \\ 30 \\ \hline \end{array}$$

cuyo producto es $\quad 1200$

¿Qué falta á este guarismo 1200 para ser el verdadero?

Un multiplicador,	30
un multiplicando,	40
y el producto $1 \times 1 =$	1
	71

Luego agregando 71 al 1200 tendremos el verdadero producto

$$1271$$

Y, en efecto:

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times\ 31 \\ \hline 41 \\ 123 \\ \hline 1271 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 \\ 2 \times 2 \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Abreviadamente} \\ \hline 41 \\ \times\ 31 \\ \hline 1271 \end{array}$$

Supongamos que los factores hubiesen sido

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 32 \\ \hline \end{array}$$

y que los hubiésemos considerado como

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times\ 30 \\ \hline 1200 \end{array}$$

Para corregir el error, sería preciso agregar

$$\begin{array}{rr} 2\ \textit{multiplicandos;} & 2 \times 40 = 80 \\ 3\ \textit{multiplicadores;} & 3 \times 30 = 90 \\ \textit{y el producto de los complementos;} & 2 \times\ \ 3 = \ \ 6 \\ \hline & 176 \end{array}$$

Por manera que

$$\left.\begin{array}{r} 1200 \\ +\ \ 176 \\ \hline 1376 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 43 \\ \times\ 32 \\ \hline 86 \\ 129 \\ \hline 1376 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7 \\ 8 \times 8 \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Abreviadamente} \\ \hline 43 \\ \times\ 32 \\ \hline 1376 \end{array}$$

Haciendo de memoria las operaciones, tendríamos:

$$\begin{array}{rcrcr}
43 & & & & \\
\times\ 32 & & & & \\
\hline
12 & = & 40 \times 30 & = & 1200 \\
9 & = & 3 \times 30 & = & 90 \\
8 & = & 2 \times 40 & = & 80 \\
6 & = & 2 \times 3 & = & 6 \\
\hline
1376 & & & & 1376
\end{array}$$

Estos resultados son los mismos, aunque en otra disposición, que los que daría la multiplicación locativa común de dígito por dígito:

Nueva manera.	Manera conocida.
43	43
× 32	× 32
12	6
9	8
8	9
6	12
1376	1376

Otro ejemplo:

85		85	
× 76		× 76	
56	trienas	30	protoenas
35	deutenas	48	deutenas
48	deutenas	35	deutenas
30	protoenas	56	trienas
6460		6460	

Otros ejemplos:

67	67
× 84	× 84
48	28
56	24
24	56
28	48
5628	5628

```
     67          67
 ×   45      ×   45
 ------      ------
   24            35
    28          30
    30          28
     35        24
 ------      ------
   3015        3015
 ======      ======

     98          98
 ×   32      ×   32
 ------      ------
   27            16
    24          18
    18          24
     16        27
 ------      ------
   3136        3136
 ======      ======
```

Pasemos ahora á factores de más cifras, y sean éstos:

```
   345
 × 678
 -----
```

Cometamos el error de suponer que sólo tenemos

```
   30
 × 60
 ----
```

el producto será 1800 según las tablas.

Enmendemos en parte el error, admitiendo que los factores dados fueron

```
   34
 × 67
 ----
```

Y, siendo así, resultará, conforme á lo que ya sabemos,

```
   34
 × 67
 ----
  18
   24
   21
    28
```

Pero, como el error no está aún corregido del todo, este resultado no puede serlo más que de

$$
\begin{array}{r}
340 \\
\times\ 670 \\
\hline
180000 \\
24000 \\
21000 \\
2800
\end{array}
$$

de manera que para obtener el valor verdadero hay que agregar

8 *multiplicandos,*	340
5 *multiplicadores*	670
y el producto de 8 *por*	5

Completemos de memoria los productos parciales y aparecerá íntegramente lo que sigue:

$$
\begin{array}{rl}
345 & \\
\times\ 678 & \\
\hline
18 & ;\ 6 \times 3 \\
24 & ;\ 6 \times 4 \\
21 & ;\ 7 \times 3 \\
28 & ;\ 7 \times 4 \\
32 & ;\ 8 \times 4 \\
24 & ;\ 8 \times 3 \\
35 & ;\ 5 \times 7 \\
30 & ;\ 5 \times 6 \\
40 & ;\ 8 \times 5 \\
\hline
233910 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
3 \\
0 \times 0 \\
8
\end{array}
$$

Estos resultados, aunque en otro orden, son los mismos que los de la ya conocida multiplicación locativa común de dígito por dígito:

Nueva manera.	Manera conocida.
345	345
× 678	678
18	40
24	32
21	24
28	35
32	28
24	21
35	30
30	24
40	18
233910	233910

El procedimiento es, pues, como sigue:

1.° Se multiplican entre sí las dos primeras cifras de la izquierda y el producto se coloca en el correspondiente lugar;

2.° Se multiplican las dos cifras inmediatas primeramente entre sí, y luego cada una por las anteriores; de modo que la del multiplicador, sea factor del multiplicando, y la del multiplicando de la del multiplicador;

3.° Se multiplican luego entre sí las contiguas á las anteriores; luego la del multiplicador por las dos anteriores del multiplicando, y la del multiplicando por las dos anteriores del multiplicador...

Y así sucesivamente, si hay más cifras todavía.

```
   857                                              857      2
 × 643                                           ×  643    8 × 8
 ------                                          ------      4
  48      se multiplica 6 por  8                     21
    20  { se multiplica 4 por  5                    15
   32   { luego         4 por  8                   24
   30   { y después     5 por  6                    28
      21{ se multiplica 3 por  7                   20
     15 { luego         3 por 85                  32
    24  { y déspués     7 por 64                   42
     28 {                                         30
    42  {                                        48
 ------                                          ------
 551051                                          551051
```

La nueva operación puede hacerse más expeditivamente.

```
       857
     × 643
     ------
      48    ;  6 × 8
        20  ;  5 × 4
       30   ;  5 × 6
       32   ;  4 × 8
         21 ;  3 × 7
       448  ;  7 × 64
       255  ;  3 × 85
     ------
     551051
```

```
   4         832          973         1
 5 × 5     × 647        × 864       0 × 0
   8       ------       ------        0
           48           72
             12           42
           18           56
           32           54
              14            12
            128           258
            581           388
           ------       ------
           538304       840672
```

El nuevo modo de operar se facilita como sigue:

1.° Se multiplica cada cifra del multiplicando por la de su mismo orden del multiplicador (ó sea por la que está debajo).

2.° Se multiplica cada cifra del multiplicando por las de orden superior del multiplicador.

3.° Se multiplica cada cifra del multiplicador por las de orden superior del multiplicando.

832	
× 647	
481214	productillos de 6 por 8; 4 por 3, y 7 por 2.
18	productillo de 3 por 6.
128	productillo de 2 por 64.
32	productillo de 4 por 8.
581	producto de 7 por 83.
538304	

973	
× 864	
724212	; 8 × 9; 6 × 7; 4 × 3
56	; 7 × 8
258	; 3 × 86
54	; 6 × 9
388	; 4 × 97
840672	

	3
687	0 × 0
× [illegible]	3
303221 ;	5 × 6; 4 × 8; 3 × 7
40 ;	8 × 5
378 ;	7 × 54
24 ;	4 × 6
204 ;	3 × 68
373041	

	6
834	0 × 0
× 765	0
561820 ;	7 × 8; 6 × 3; 5 × 4
21 ;	3 × 7
304 ;	4 × 76
48 ;	6 × 8
415 ;	5 × 83
638010	

	4
697	1 × 1
× 493	7
248121 ;	6 × 4; 9 × 9; 7 × 3
36 ;	9 × 4
343 ;	7 × 49
54 ;	9 × 6
207 ;	3 × 69
343621	

	5
698	7 × 7
× 743	5
423624	
63	
592	
24	
207	
518614	

	0
999	0 × 0
× 972	0
816318	
81	
878	
63	
198	
971028	

	0
324	0 × 0
× 312	6
90208	
6	
124	
8	
64	
101088	

```
    321          6                     203         5
  × 234        0 × 0                 × 431       4 × 4
  -----          0                   -----         8
  60604                              80003
   4                                  0
     23                                129
   9                                  6
    128                                 20
  -----                              -----
  75114                              87493
```

```
                    7
     8764         7 × 7
   × 3592           1
  ---------
   24355408  ;    3 × 8; 5 × 7; 9 × 6; 2 × 8
    21       ;    7 × 3
     210     ;    6 × 35
      1436   ;    4 × 359
    40       ;    5 × 8
     783     ;    9 × 87
      1752   ;    2 × 876
  ---------
   31480288
```

```
                      3
    987654          0 × 0
    321321            3
  ------------
  271607181004 ;    3 × 9; 2 × 8; 1 × 7; 3 × 6; 2 × 5; 1 × 4
    24         ;    8 × 3
     224       ;    7 × 32
      1926     ;    6 × 321
       16065   ;    5 × 3213
        128528 ;    4 × 32132
    18         ;    2 × 9
      98       ;    1 × 98
      2961     ;    3 × 987
       19752   ;    2 × 9876
         98765 ;    1 × 98765
  ------------
  317353970934
```

```
      4569873           6
      9876542         3 × 3
   ---------------      5
    36404254402806
      45
       588
        8883
         79008
          691355
           2962962
      32
       315
        2736
         22845
          182792
            913974
   ---------------
    45134542619166
```

Caso de no tener el multiplicador el mismo número de cifras que el multiplicando, la ley de simetría que preside á los ejemplos anteriores se modifica; pero el carácter de los raciocinios no varía.

Sean los factores

$$\begin{array}{r} 3456 \\ \times \quad 78 \\ \hline \end{array}$$

Cometamos el error de suponer que en vez de esos datos se nos dieron los siguientes:

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times \; 78 \\ \hline \end{array}$$

Entonces, por lo que ya sabemos, tendremos:

$$\begin{array}{r} 34 \\ 78 \\ \hline 2132 \\ 28 \\ 24 \\ \hline 2652 \\ \hline \end{array}$$

Pero el multiplicando es por lo pronto cien veces mayor; de modo, que al producto deben agregarse dos ceros, como correspondería si los datos fuesen

$$\begin{array}{r} 3400 \\ \times \quad 78 \\ \hline 213200 \\ 28000 \\ 24000 \end{array}$$

Pero con esta corrección no basta todavía. El multiplicando dado no es

$$3400$$

sino

$$3456$$

Y, habiendo 56 unidades más en el multiplicando, faltan al producto total 56 multiplicadores; de modo que, para corregir completamente el error cometido, habrá que agregar esos 56 multiplicadores; y, si lo hacemos, la operación aparecerá entera como sigue:

```
  3456
 × 78
------
213200  ; 3 ×  7; 8 × 4;
  28    ; 4 ×  7;
  24    ; 8 ×  3;
   390  ; 5 × 78;
    468 ; 6 × 78.
------
269568
```

Hecha la operación sin abreviaciones sería:

```
Nueva manera.        Manera conocida.   0
                                       0 × 0
   3456                 3456             6
 ×   78               ×   78
 ------               ------
 21                       48
    32                   40
  28                    32
  24                   24
     40                    42
   35                     35
     42                  28
      48                21
 ------               ------
 269568               269568
```

Otro ejemplo, sin abreviaciones á fin de que estén á la vista los pormenores todos:

```
                                      2
   23456            23456           3 × 3
 ×   978         ×    978             6
 --------         --------
 18000000               48
  2700000              400
  1400000             3200
   210000            24000
    28000           160000
   360000              420
    24000             3500
   160000            28000
     3200           210000
      400          1400000
     3500             5400
    45000            45000
       48           360000
      420          2700000
     5400         18000000
 --------         --------
 22939968         22939968
```

Abreviadamente tendríamos:

```
   23456
×    978
--------
182132  ;  9 × 2; 7 × 3; 8 × 4
 27     ;  3 × 9
  388   ;  4 × 97
  14    ;  7 × 2
   184  ;  8 × 23
    4890; 50 × 978
     5868; 6 × 978
--------
22939968
```

ADVERTENCIA

Esta nueva manera de operar no tiene en la práctica ventaja sobre la usual y corriente; pero su conocimiento es de la mayor importancia, porque enseña una disposición nueva de los componentes de un producto, la cual es indispensable conocer para la teoría de la INVOLUCIÓN y la EXTRACCIÓN DE RAÍCES. Nunca, por tanto, el alumno dedicará demasiada atención á esta nueva manera de multiplicar.

De lo explicado en este Libro se deduce que, cualesquiera que fueren las combinaciones ó los medios que se adopten, para multiplicar, ó sea para hallar abreviadamente una suma,

1.° Se multiplica cada dígito del multiplicando por cada dígito del multiplicador; lo cual da un número de productillos igual al de los dígitos del multiplicando repetido tantas veces como cifras tiene el multiplicador: (si el multiplicando tiene cuatro cifras y el multiplicador tres, el número de productillos es 12; 4 × 3).

2.° Estos productillos se colocan ordenadamente unos bajo otros, de modo que las deutenas caigan bajo las deutenas, las trienas bajo las trienas, etc., y

3.° Colocados así los productillos se suman, y su suma es la suma total ó producto total que se busca.

Doce productillos (= 4 × 3).

4567	4567
× 398	× 398
56 48 40 32	36536
63 54 45 36	41103
21 18 15 12	13701
1817666	1817666

4.° En la práctica se suprimen los ceros de la derecha que hubieran de indicar la categoría de los respectivos productillos, y

5.° Para que sólo aparezcan tantos renglones de productos parciales como cifras tuviere el multiplicador, se suman de memoria los productillos parciales de cada dígito del multiplicador por todos los del multiplicando. Al efecto, suponiendo que cada productillo conste de dos cifras, siempre la de la izquierda se agrega como reserva al productillo de orden inmediato superior.

Cada producto parcial es del orden de la cifra del multiplicador que lo ha generado. Así la 1.ª cifra del multiplicador produce protoenas, la 2.ª deutenas, la 3.ª trienas, etc.

(Véase en la *Involución* otro modo de multiplicar.)

FIN DEL TOMO PRIMERO

ÍNDICE

Libro II

INTEGRACIÓN

Libro III

SUBSTRACCIÓN

Libro IV

MULTIPLICACIÓN