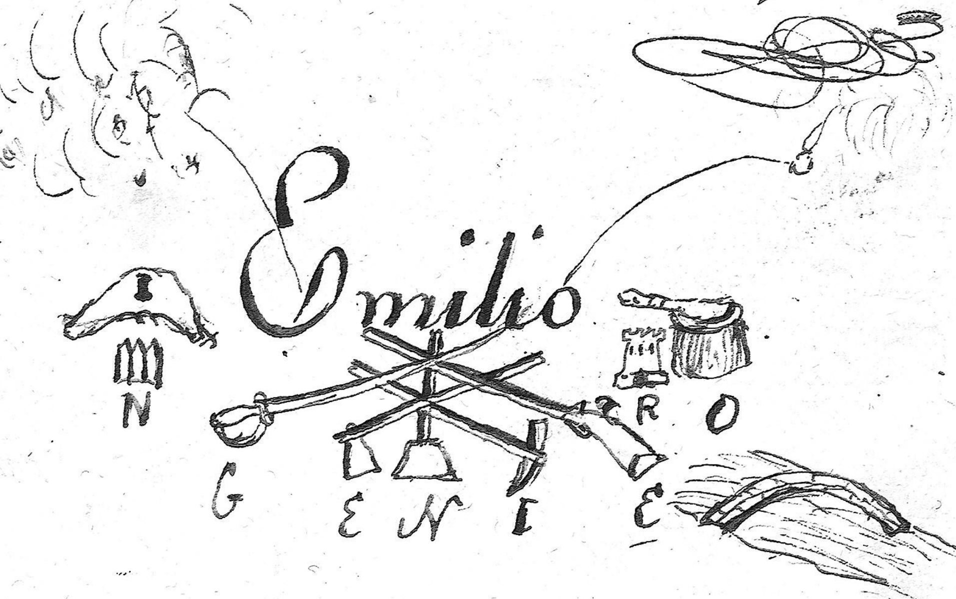
457. Los big:

Considera. [illegible] 7

3 - 7 - 5

1730

Emilio Bernaldez y Tobqueras



ADICIONES

Á LA GEOMETRÍA

DE DON BENITO BAILS

POR

DON JOSEF MARIANO VALLEJO.

MADRID MDCCCVI.

EN LA IMPRENTA DE LA HIJA DE IBARRA.

PRÓLOGO.

Como la Academia se ocupa continuamente en procurar los mayores adelantamientos de todo lo que forma el objeto de su instituto, de ahí es que nada puede ser mas digno de su atencion, que lo que directamente contribuya á conseguir un fin, en que se interesa la instruccion pública, y la gloria nacional. Por esta razon admitió con suma complacencia un quaderno de Adiciones á la Geometría de Don Benito Bails, que le presentó Don Josef Mariano Vallejo, persuadida de que no tanto se dirigiria á perfeccionar la obra de Bails, como á adelantar la misma Geometría, que es el fundamento de todas las Artes. Y aunque los trabajos de un profesor tan benemérito como Vallejo, de cuya ciencia y talento tiene repetidas pruebas la Academia, no podian ménos de serle muy agradables, ya por ser fruto de las investigaciones de un sugeto que se ha formado en la misma casa, ya tambien por el esmero con que ha desempeñado quantos encargos ha puesto á su cuidado; sin embargo, para proceder con el acierto correspondiente en un punto de tanta trascendencia, quiso oir el voto de sus individuos ántes

de

de pasar á la publicacion de las expresadas Adiciones. Con esto ha tenido ocasion de entender que de la obra de Vallejo puede sacar la estudiosa juventud grandes ventajas y utilidades, por tratarse en ella la doctrina del círculo, cilindro, cono y esfera con un grado de rigor y precision propias de estas Ciencias, y que casi ha desaparecido de los tratados Matemáticos por el abuso que se ha hecho de las consideraciones del infinito, é infinitamente pequeño en los ramos elementales. El orígen de este abuso ha sido el siguiente.

Quando Leibnitz, bien penetrado de la doctrina de Arquimedes, quiso exponer con la mayor generalidad y abstraccion los principios en que estrivaba, se valió para ello de las voces de infinito, é infinitamente pequeño; pero omitió, segun lo acostumbran los grandes hombres, los raciocinios intermedios que debia haber para que no se presentase interrumpida la cadena de los conocimientos científicos. Para él, y para otros Geómetras de su siglo, eran evidentes los principios que establecia, por estar en disposicion de suplir lo que faltaba. Mas para otros de inferior gerarquía, cuyo caudal de ciencia no podia compararse con el de aquellos, era inexâcto el nuevo cálculo: de donde resultaron las grandes contestaciones sobre sus principios fundamentales; pero la facilidad y sencillez con que por su medio se demostraban las cosas, que ya se sabian por el método

do

do de Arquimedes, fué el grande argumento que tuvo á su favor dicho cálculo aun para los que no comprehendian sus principios; de manera que esta conformidad con los resultados geométricos fué mas bien quien lo calificó de exâcto y riguroso, y quien le adquirió un gran número de partidarios.

De estas dos cosas que se notaban en el nuevo cálculo, á saber, facilidad y sencillez en sus demostraciones, y conformidad con los resultados geométricos, ha sido ya tanto el partido que de la primera han querido sacar los Matemáticos posteriores, que han sacrificado el rigor y exâctitud á la facilidad de las demostraciones. Por eso han considerado en la Geometría Elemental figuras de infinitos lados en número, é infinitamente pequeños en cantidad: han mirado al círculo como polígono de una infinidad de lados, y han caminado baxo este supuesto en todo quanto han dicho del cilindro, del cono, de la esfera; de modo que han tratado de ellos como si los estuviesen explicando por el cálculo diferencial segun el método de Leibnitz. Y quando al tratar de este cálculo se hallan con los mismos resultados, quieren acreditar su exâctitud por la conformidad que tienen con los que se deducen por la Geometría elemental, sin advertir que ellos mismos han hecho desaparecer este método de comparacion, del qual no pueden usar sin caer en una multitud de círculos viciosos, de peticiones de principios, y de otros mil ab-

absurdos largos de referir, siguiéndose de esto que se queda por demostrar la parte mas preciosa, y mas principal de la Geometría. Por eso dixo con razon Jacobo Bernoulli, uno de los mayores Matemáticos que ha conocido la Europa (1), que la doctrina del círculo mas bien se creía que se demostraba: por dondo se echa de ver que no van enteramente descaminados los que en el dia dicen que no son evidentes todas las cosas en las Matemáticas, ó que es preciso convenir en que la teoría del círculo no se puede demostrar con el rigor que corresponde. Tales son las conseqüencias que se han seguido del abuso hecho de las voces infinito, é infinitamente pequeño con agravio de unas ciencias que se distinguen de todas las demas por la evidencia y rigor de sus demostraciones, y por la exâctitud y precision de sus resultados.

Otro mal de no menor gravedad, y que por desgracia ha hecho rápidos progresos en todos los ramos de estas ciencias, ha sido colocar en la clase de axîomas una multitud de proposiciones, cuya evidencia no consta, ni puede constar por otro camino que el de la demostracion. Este mal es tan antiguo, que en tiempo de Proclo hubo quien impugnó como ociosa é inútil la demostracion con que se manifiesta que los dos lados de un triángulo son mayo-

(1) Act. Erud. Lips. 1697 Maii.

yores que el tercero, pues miraban esto como una proposicion notoria aun al mas negado. Este mismo grado de notoriedad tienen sin duda para algunos Autores el que todos los radios y diámetros de un círculo son iguales, que cuerdas iguales subtenden arcos iguales, que en un mismo triángulo á ángulos iguales se oponen lados iguales &c., puesto que á todas estas proposiciones las miran como verdades evidentes que no necesitan de prueba. De modo que segun esto se puede decir que en la palabra *axîoma* han encontrado un recurso muy singular para dexarse por demostrar cosas muy fundamentales, y para confundir en tales términos las definiciones, teoremas, postulados &c., con lo que se llama axîoma, que los jóvenes principiantes no pueden ya formar concepto de la idea que se sujeta á la voz *axîoma*. No era Leibnitz de este modo de pensar, ni lo podia ser un sugeto que tan á fondo conocia la naturaleza de estas ciencias. Y así dice terminantemente, que hasta los axîomas se debian demostrar, porque de otro modo queda imperfecta la ciencia, y que este es un punto muy interesante, pero que su importancia no la conocen los que miden la utilidad de las ciencias con una medida vulgar (1).

Sea

(1) *Virorum celeb. Got. Guil. Leibn. et Joan. Bernoulli Commercium philosophicum, & mathematicum, Epist. XXX, et XXXII.*

Sea respeto, ó sea preocupacion á favor de los axîomas, lo cierto es que se dexan por demostrar que la circunferencia es mayor que el perímetro de toda figura inscripta en ella, y menor que el de la circunscripta, que la superficie del cilindro y cono es mayor que la del prisma y pirámide inscripta, y menor que el de la circunscripta: se contentan únicamente con aplicar el axîoma de que el continente es mayor que el contenido, sin advertir que ni en las líneas, ni en las superficies de los cuerpos no tiene lugar; fuera de que hay un motivo real y verdadero para dudar de que tal vez el perímetro del polígono circunscripto será mayor que la circunferencia. Porque aunque sea cierto que de dos curvas, cuyos extremos se confunden, la que mas se separa de la recta es la mas larga, no se concibe sin la correspondiente demostracion que el conjunto de dos tangentes tiradas desde un mismo punto á los extremos de un arco sea mayor que la longitud del mismo arco, pues aquel mayor desvío de las dos tangentes respecto de la línea recta podria muy bien ser recompensado, ó excedido por la curvatura del mismo arco, pudiendo suceder otro tanto con la superficie del prisma, ó pirámide circunscriptos respecto de la convexâ del cilindro ó cono; mas para que esto conste con la evidencia necesaria es indispensable demostrar de antemano una proposicion, que es la primera del libro décimo de Euclides, de la

qual

qual dependen las demas que quedan indicadas. Y si los Geómetras no se hubieran olvidado de ella, no se notaria en el dia cierta confusion en los mejores tratados de cálculo (1) y series, y se hubieran quizá evitado la mayor parte de las disputas acerca de los nuevos cálculos.

Pero demostrar proposiciones que llevan el sobrescrito de axîomas, asegurar de una gran parte de otras, que se han colocado solo por creencia en la clase de demostradas, será para algunos una de las mayores extravagancias que se han dicho en el mundo. Porque acostumbrados á nombrar y citar freqüentemente estas proposiciones, se lisonjean de conocerlas con evidencia, solo por haberse familiarizado en nombrarlas, ó por haberse mas bien acomodado á ver por los ojos de otros, respetando su autoridad, antes que á tomarse el trabajo de exâminar qué es lo que está demostrado, y qué no, quál

(1) El que quiera ver una obra bien escrita de cálculo diferencial, consulte las instituciones que ha publicado D. Josef Chaix, á las quales da mucho mayor realce el sencillo método con que este Sabio ha demostrado la teoría de las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. Y aunque esta teoría aun no la ha publicado, su generosidad en esta parte ha sido tanta, que ha remitido copias á varios profesores de esta Corte para que se aprovechen de su doctrina en las explicaciones que hagan al público; por cuya razon los discípulos de la Academia han sido de los primeros que han disfrutado de este beneficio.

es el concepto que se debe formar de los axîomas, y qué método debe seguirse en explicarlos.

Sin embargo Lacroix, Legendre y Bertrand se han distinguido en estos últimos tiempos por los esfuerzos que han hecho para poner varias de estas proposiciones con la claridad y órden que les es debido: y á pesar de que D. Josef Vallejo no conocia las obras de los dos últimos quando dispuso sus Adiciones, ha coincidido no obstante su modo de pensar con el de aquellos sabios, de los quales se diferencia en el mayor grado de exâctitud que ha sabido dar al asunto que trata, como fácilmente se puede convencer qualquiera, comparando sus Adiciones con las Geometrías de aquellos Escritores.

Es cierto que Vallejo parte del mismo principio que Lacroix, esto es, demostrando dos ó tres proposiciones por el método de Arquímedes, pero tambien lo es que añade otras varias, y entre ellas la primera del libro décimo de Euclides, con lo que establece de un modo muy natural y sencillo quanto dice del círculo, cilindro, cono y esfera, sin que en nada de esto se noten los tránsitos violentos que hace Lacroix en varias partes de su obra para demostrar esta teoría.

Mas á pesar de que el autor de las tales Adiciones debia estar muy satisfecho de sus investigaciones, por estar todas ellas caracterizadas con el sello de la evidencia, quiso no obstante tener á su favor una prue-

prueba mas decisiva. Y con esta mira las puso en las manos de los discípulos que tenia á su cargo en el Real Seminario de Nobles: las estudian, las meditan, y las comparan con todo lo que sabian, y desde entónces se les disipan todas las dudas que tenian en la ciencia de la extension, y empiezan á descubrir un nuevo modo de ver, con el que nada se les oculta ya en la Geometría. Así lo acreditaron en aquel certámen público que tuvieron en el mes de Julio del año de 1804, en que en medio de un numeroso concurso trataron con novedad una teoría de las mas trascendentales de las Matemáticas, grangeándose á un mismo tiempo los aplausos del público, y la admiracion de los inteligentes.

Todo esto era necesario que se verificase así, para que Vallejo se resolviese á ofrecer á la Academia las primicias de sus progresos literarios: sabia muy bien que debia á este respetable Cuerpo su primera instruccion en las Ciencias, tenia presente que lo colocó despues entre los profesores de ellas, y que por último formó de su mérito tan alto concepto, que no dudó poner á su cuidado el curso de operaciones prácticas. Circunstancias todas, que pedian por parte de Vallejo mucho miramiento para no presentar á este Cuerpo una cosa que no fuese digna de su respeto, y del reconocimiento y gratitud que le debe.

La Academia pues bien informada de todo esto, y deseosa de que se aprovechen de las expresadas Adiciones así sus discípulos como los de aquellos establecimientos, en que sirve de texto la obra de Don Benito Bails, acordó que se imprimiesen con la mayor brevedad posible, con el fin de que desde este mismo curso empiecen los jóvenes á disfrutar de la instruccion que en ellas se les procura.

ADICIONES
Á LA GEOMETRÍA
DE DON BENITO BAILS.

I.

Definicion I. Se llama cantidad *constante* aquella que en una misma qüestion no puede tener mas que un valor.

Definicion II. Se llama cantidad *variable* la que en una misma qüestion puede tener todos los valores que se quiera.

Definicion III. Se llama *equacion* á la igualdad de dos cantidades; lo que está á la izquierda del signo $=$, se llama primer miembro, y lo que está á la derecha, segundo miembro.

Teorema I. *Si de dos cantidades* X, B, *una variable y la otra constante, la variable* X, *al paso que crece, se acerca á la constante* B, *la cantidad constante* B *será mayor que la variable* X.

Demostracion. Como una cantidad con relacion á otra no puede mas que ser mayor, igual ó menor que ella, quedará probado que es una de las tres cosas, demostrando que no puede ser ninguna de las otras dos. Este método de demostrar le han llamado los Matemáticos *método de exâucion*; y ahora por este método manifestarémos que en el supuesto dicho $B>X$ (1); pues como B no puede ser

 mas

(1) El signo $>$ quiere decir *mayor*, y el signo $<$ *menor*.

mas que mayor, igual ó menor que *X*, si demostramos que no puede ser igual ni menor, es forzoso que sea mayor. En efecto *B* no puede ser igual con *X*, pues siendo $B=X$, si *X* crece se separa del valor de *B*; y si vuelve á crecer, se volverá á separar mas, y á cada paso que vaya creciendo se irá separando del valor de *B*, que no cumple con la circunstancia que exîge lo enunciado de aproxîmarse mas á *B* al tiempo que crece *X*; luego para que esta circunstancia se verifique, como es indispensable, *B* no ha de ser igual con *X*. Tampoco ha de ser menor, pues si $B<X$, al paso que *X* crezca, se diferenciará de *B*, y por lo mismo no se puede cumplir con la circunstancia de que *X* al crecer se acerque á *B*, siendo $B<X$; luego si esta circunstancia no se puede verificar en ninguno de los casos de $B=X$, $B<X$, es claro que indispensablemente se verificará en el otro, á saber que $B<X$. *L. Q. D. D.* (estas letras son las iniciales de *lo que debia demostrar*.

Teorema II. *Si de dos cantidades* X, B, *una variable y la otra constante, la variable* X *al paso que mengua, se acerca al valor de* B, *esta cantidad* B *será menor que la cantidad* X.

Dem. En efecto, si no es $B<X$, será igual ó mayor. Si es $B=X$, y *X* mengua, se diferenciará de *B*, y si vuelve á menguar, se diferenciará mas; y al paso que vaya menguando, se irá diferenciando mas de *B*; lo que no puede ser, pues la condicion exîge que se vaya aproxîmando. Tampoco puede ser $B>X$; pues al paso que *X* mengüe, se irá diferenciando mas de *B*, que tampoco cumple con lo enunciado. Luego si *B* no puede ser igual ni mayor que *X*, será forzosamente menor. *L. Q. D. D.*

Teorema III. *Dadas dos cantidades desiguales, digo, que si de la mayor se quita la mitad, y de lo* *que queda la mitad, y de lo que queda la mitad, y así sucesivamente, llegaré á tener un resultado que será menor que la otra cantidad por pequeña que sea.*

Explicacion. Sean B y K estas dos cantidades, digo que si de la mayor B se quita la mitad, y de lo que queda la mitad, y así sucesivamente, llegaré á tener un residuo menor que la cantidad K por pequeña que sea.

Dem. Multiplíquese K por un número n tal que el producto $n.K$ sea mayor que B, y al mismo tiempo sea el múltiplo mayor mas aproxîmado al valor de B, en este caso será $B<n.K$: ahora estas cantidades que son desiguales, tambien tendrán desiguales sus mitades, y por lo mismo, si á cada una de ellas le quitamos su mitad, las otras mitades que queden serán desiguales; es decir que $\frac{B}{2} < \frac{n.K}{2}$; pero si de $n.K$ se quita solamente K, que será igual con la mitad de $n.K$, solo quando $n=2$, y en todos los demas casos será menor que la mitad de $n.K$, con mayor razon quedarán desiguales los residuos; pues si quedaban desiguales con tomar la mitad, si de la menor quitamos la mitad, y de la mayor menos de la mitad, todo lo que se quite menos de la mitad á la mayor, hará que los resultados queden con mas razon desiguales; luego $\frac{B}{2} < n.K - K = K.(n-1)$; si de estas cantidades, que son desiguales, quitamos la mitad, tambien quedarán desiguales; y si de la mayor quitamos menos de la mitad, como será quitar K en el caso de que $(n-1)$ sea mayor que 2, con mas razon quedarán desiguales; y como prosiguiendo quitando á la menor la mitad, y á la mayor la cantidad K, que solo será igual con la mitad en el caso de que el múltiplo que reste de K sea el duplo, y en todos los demas casos, será menor que la mitad, los resultados quedarán siempre desiguales, es claro que al haber hecho un número de restas expresado por $n-1$, los resultados quedarán desiguales; pero si de $n.K$ se quita la K, $(n-1)$ veces, queda en $n.K-(n-1).K=n.K-n.K+K=K$; luego K será mayor que el residuo que quede de haber quitado á B la mitad, y al residuo la mitad, y así sucesivamente hasta las $n-1$ veces; luego por pequeña que sea la cantidad K, podemos hacer menor á la cantidad B, quitándole su mitad, y á lo que quede la mitad, y así sucesivamente.

Aunque esta demostracion no presentará dificultad á los que hayan entendido bien la Aritmética, sin embargo para no dexar nada que desear, la pondremos aquí tambien por Geometría.

Para esto, supóngase que las dos cantidades desiguales están representadas ahora, la mayor por la línea AB (*fig. I.*), y la menor por la línea K. Colóquese la línea K tantas veces sobre la línea indefinida DM, como se necesite para que un múltiplo de ella tal como DE, sea mayor que AB, y al mismo tiempo sea el múltiplo mayor mas aproxîmado á AB. Dividida la DE en las partes DF, FG, GE iguales con K, quítese de AB la mitad AH, y del residuo HB la mitad HL, repitiendo esto las veces que se necesite para que las partes de la AB sean tantas como las de DE. Y así, por quanto $BA < DE$, si de estas cantidades quitase las mitades AH, DO, los residuos HB, OE serian desiguales, de manera que tendria $HB < OE$; pero si de la menor quito la mitad, y de la mayor la cantidad DF, que solo será igual con la mitad, quando DE sea duplo de K, y en todos los demas casos, como es este, será menor, con mas razon queda-darán los residuos desiguales, y será $HB < FE$; si ahora de estas cantidades se quitan las mitades LH, FG, quedarán los residuos LB, GE desiguales, y se tendrá $LB < GE$; pero LB es lo que resulta de quitar á AB la mitad, y de lo que queda la mitad, y así sucesivamente, y GE es igual con K; luego si de la mayor de dos cantidades desiguales se quita la mitad, &c.

Escolio. Si la DE constase de mas partes iguales con K se procederia del mismo modo, quitándole partes iguales con K, y la mitad á la AB hasta que no quedase mas que una parte igual con K, la qual siempre será mayor que lo quede de la AB.

Corolario. De aquí resulta que si de dos cantidades desiguales, de la mayor se quita mas de la mitad, y de lo que queda mas de la mitad, y así sucesivamente, con mas razon podemos decir que lo que resulte será menor que una cantidad dada por pequeña que sea; pues si esto se podia conseguir quitando solo la mitad, y luego la mitad, &c., con mas razon se conseguirá quitando mas de la mitad, y de lo que quede mas de la mitad, y así sucesivamente.

Teorema IV. *A toda cantidad variable* X *se la puede hacer menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Una vez que por su naturaleza la cantidad X puede tener todos los valores que queramos, y aquí las variaciones son independientes de toda ley, podremos hacer que á cada paso la variacion que resulte, sea el quitarle la mitad ó mas de la mitad, lo que es lo mismo que hacerla dos veces menor, ó mas de dos veces menor, y de este modo, por el teorema antecedente, tendremos un resultado al cabo de cierto tiempo que será menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Cor.

Cor. De aquí resulta que como un producto disminuye, al paso que mengua uno qualquiera de sus factores, quando queramos hacerle menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, no hay mas que hacer á uno de los factores dos veces ó mas de dos veces menor, y luego dos veces, ó mas de dos veces menor, &c.; y como en este caso el producto á cada paso va siendo dos veces, ó mas de dos veces menor, este producto (Teorema III.) podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; y al contrario, si uno de los factores de un producto va siendo á cada paso dos veces, ó mas de dos veces menor, como en el mismo caso el producto irá siendo dos veces, ó mas de dos veces menor, llegará (Teor. III.) á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Teorema V. *Si dos cantidades invariables* A *y* B *son tales que su diferencia* A—B *sea menor que una tercera cantidad* K, *por pequeña que pueda ser esta cantidad, estas dos cantidades son iguales entre sí.*

Dem. En efecto, si fuesen desiguales, se tendria necesariamente $A-B=d$, señalando d su diferencia; luego no sería posible que K tuviese un valor menor que d, y por consiguiente tan pequeño como se quisiese; y como por el supuesto, K puede ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, se sigue que no puede haber la diferencia d entre dichas cantidades; luego serán iguales.

Aquí decimos que las cantidades son invariables, porque se puede encontrar una expresion de $\sqrt{3}$, tal que se diferencie de la verdadera en una cantidad menor que qualquier cantidad dada, sin que llegue jamas al valor exâcto de $\sqrt{3}$, pero estos resulsultados mudan á cada nueva aproxîmacion, mientras que las cantidades A y B no son susceptibles la una ni la otra sino de una sola determinacion.

Teorema VI. *Si tres cantidades* X,A,B *son tales que la primera* X, *que se supone variable, pero siempre mayor ó menor que las otras dos* A, B *que son constantes, se pueda aproxîmar á ambas en el mismo tiempo, tanto como se quiera, dichas dos cantidades* A *y* B *serán iguales.*

Dem. Si no es $A=B$, será porque la una tal como la A lleve á la otra una cantidad qualquiera K, lo que dará $A=B+K$; y entónces acercándose X á A tanto como se quiera, no se podrá acercar á B en el mismo tiempo tanto como se desee, por impedirlo la cantidad K; y como por el supuesto se puede X acercar á ambas á un mismo tiempo tanto como se desee, se sigue que no puede haber ninguna diferencia entre A y B. *L. Q. D. D.*

Teorema VII. *Si dos cantidades variables* X, Z *se pueden acercar tanto como se quiera á las dos cantidades constantes* A *y* B, *y ademas la relacion* $\frac{X}{Z}$ *de las dos primeras es constante, digo que esta relacion es la misma que la* $\frac{A}{B}$ *que tienen las dos constantes.*

Dem. Por poderse acercar X á A tanto como se quiera, y Z á B, tenemos que las relaciones $\frac{X}{A}$, $\frac{Z}{B}$ se podrán diferenciar de la unidad tan poco como se desee, y por lo mismo estas relaciones, si tienen alguna diferencia, no se podrá expresar por ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; en efecto, si supusiésemos que su diferencia se podia señalar por la cantidad d, ten-

tendríamos por exemplo $\frac{X}{A} - \frac{Z}{B} = d$, ó $\frac{X}{A} = \frac{Z}{B} + d$; pero en este caso, pudiéndose acercar $\frac{Z}{B}$ á la unidad tanto como se quiera, no lo podria hacer la cantidad $\frac{X}{A}$ por impedirlo la cantidad d, contra lo dicho ántes; luego la diferencia entre $\frac{X}{A}$ y $\frac{Z}{B}$, si es que la tienen, no se puede expresar. Ahora, por ser constante la relacion $\frac{X}{Z}$, llamándola C, tendrémos $\frac{X}{Z} = C$, de donde $X = Z.C$; substituyendo en vez de X este valor en $\frac{X}{A}$, tendré las relaciones $\frac{Z.C}{A}$ y $\frac{Z}{B}$, que si no se puede expresar su diferencia por ninguna cantidad dada, tampoco se podrá expresar la de las cantidades $\frac{C}{A}$ y $\frac{1}{B}$, que es la que debia constituir dicha diferencia, por ser comun la cantidad Z; y como estas dos cantidades $\frac{C}{A}$ y $\frac{1}{B}$ son constantes, inferimos por el teorema V. que $\frac{C}{A} = \frac{1}{B}$, ó multiplicando por A, $C = \frac{X}{Z} = \frac{A}{B}$. Luego si dos cantidades, &c.

II.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo de los ángulos (*Bails tom. I. de los Principios, pag.* 228, *par.* 439) *dice*: Que si dos ángulos son iguales, y se pone el vértice del uno sobre, &c.

Problema I. *Dadas dos rectas, encontrar su comun*

mun medida, ó si no la tienen, hallar la relacion aproxîmada de la una á la otra.

Res y dem. Sean AB y CD (*fig. II.*) las dos líneas dadas: colóquese la menor CD sobre la mayor, tantas veces como se pueda; y se hallará que está contenida, por exemplo, dos veces desde A hasta E, y ademas queda la resta EB, de modo que se tendrá $AB = 2CD + EB$.

Colóquese despues la resta EB en la CD las veces que se pueda, y se hallará que está contenida tres veces quedando una resta FD, lo que da

$$CD = 3EB + FD$$

Póngase esta segunda resta FD sobre la primera EB las veces que se pueda, y se hallará que está contenida en ella una vez, dexando por resta la GB, de modo que será

$$EB = FD + GB$$

Si colocando la tercera resta GB sobre la segunda FD, se encuentra que está contenida exâctamente quatro veces, se tendrá por último

$$FD = 4GB.$$

Poniendo ahora este valor de FD en el de EB, resultará

$$EB = 4GB + GB = 5GB.$$

Substituyendo estos valores de EB y FD en el de CD, se tendrá

$$CD = 3.5GB + 4GB = 15GB + 4GB = 19GB,$$

Y poniendo en vez de CD y EB sus valores en el de AB, será por último

$$AB = 2.19GB + 5GB = 38GB + 5GB = 43GB.$$

Donde se ve que la última resta GB es la comun medida de las rectas AB y CD; y pues que dicha

B co-

comun medida está contenida 43 veces en *AB* y 19 en la *CD*, se sigue que estas dos rectas tienen entre sí la relacion de 43 á 19.

Si, procediendo de este modo, no se llegase á una resta que estuviese contenida exâctamente en la anterior, dichas dos líneas no tendrian ninguna comun medida, ó serian incomensurables. En este caso, para hallar su relacion aproxîmada, se va colocando cada resta en la antecedente hasta que se llegue á una resta que por su pequeñez no se pueda ya averiguar con el compas las veces que está contenida en la antecedente, y entónces ó se desprecia, si es muy pequeña, ó si no se reputa á ojo las veces que está contenida en la resta anterior; y substituyendo estos valores en las restas antecedentes, se llegará á tener la relacion aproxîmada que tienen entre sí.

Problema II. *Dados dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales, encontrar la relacion de sus longitudes.*

Res. y dem. Esta qüestion se resolvería como la antecedente, si se pudiesen colocar los arcos de círculo los unos sobre los otros, como se hace con las líneas rectas; mas no pudiéndose executar en la práctica esta superposicion, se suple por la de las cuerdas que, siendo iguales, corresponden á arcos iguales. Y así, si los dos arcos dados son *AB* y *CD* (*fig. III.*), se colocará la cuerda del arco *CD*, que es el menor, todas las veces que se pueda sobre el arco *AB*; y si se puede executar dos veces, por exemplo, desde *A* hasta *E*, se tendrá que el arco *AB*, componiéndose de dos partes *Ad*, *dE* iguales cada una con *CD*, y de la resta *EB*, será

$$AB = 2DC + EB.$$

Colóquese la cuerda de la resta *EB* las veces que se se pueda sobre el arco CD, y se tendrá que executándose una vez desde C á F, y dexando la resta FD, será

$$DC = CF + FD = EB + FD.$$

Póngase la cuerda de la resta FD las veces que se pueda sobre la antecedente EB; y si se halla que está contenida en ella exâctamente quatro veces, se tendrá

$$BE = 4FD$$

Substituyendo ahora este valor de BE en el de DC, será

$$DC = 4FD + FD = 5FD.$$

Poniendo ahora los valores de BE y DC en el de AB, será

$$AB = 2.5FD + 4FD = 10FD + 4FD = 14FD;$$

Con lo qual se tendrá que el arco FD será la comun medida de los dos arcos AB y CD, y estando contenido catorce veces en el primero y cinco en el segundo, resulta que tendrán entre sí la relacion de catorce á cinco.

Esc. La operacion se termina tambien aquí quando se halla una resta que esté contenida exâctamente en la precedente; si no se halla, dichos arcos son incomensurables, y se encuentra su relacion aproxîmada, continuando la operacion, hasta que se llegue á una resta, cuya cuerda por su pequeñez no se pueda averiguar ya gráficamente las veces que está contenida en la resta antecedente.

Teorema VIII. *Si haciendo centro en el vértice de un ángulo con un radio qualquiera, se traza un arco, y se concibe dividido en un número qualquiera de partes iguales, los ángulos en que quede dividido el ángulo total por los radios tirados desde su vértice á los puntos de division, serán iguales.*

Explic. Sea el ángulo COA (*fig. IV.*) digo, que si si con un radio tal como *AO* se traza un arco *ABC*, y se concibe este arco dividido en las partes iguales *AB*, *BD*, &c., los ángulos *AOB*, *BOD* formados por los radios tirados á los puntos de division, *B*,*D*, &c. serán iguales.

Dem. Concibiendo doblada la figura por el radio *OB*, se tendrá, por estar todos los puntos de la circunferencia á igual distancia del centro, que todos los puntos del arco *AB* caerán sobre el arco *BD*; y por ser iguales los arcos *AB*, *BD*, el extremo *A* del primero caerá sobre el extremo *D* del segundo; luego en este caso, habiéndose confundido el punto *A* con el *D*, las dos líneas *AO*, *OD*, que parten desde el mismo punto *O*, tambien se habrán confundido, por tener dos puntos comunes; luego los ángulos tambien se confundirán, y por lo mismo serán iguales.

Teorema IX. *Si desde los vértices* O,o *de dos ángulos* AOC *y* aoc (fig. IV.), *se describen con un mismo radio dos arcos de círculo, la relacion de los arcos comprehendidos entre los lados de cada ángulo, será la misma que la de estos ángulos.*

Dem. Aquí pueden ocurrir dos casos, ó que los dos arcos *AC*, *ac*, tengan una comun medida, ó que no la tengan, esto es, que sean comensurables, ó que no lo sean.

1.° Si los dos arcos *AC* y *ac* tienen por comun medida al arco *AB* = *ab*, colocando esta comun medida sobre cada uno de ellos tantas veces como se pueda, quedarán divididos ambos en partes iguales; y si se unen los diferentes puntos de division con el vértice del ángulo correspondiente, por medio de las rectas *OB*, *ob*, quedarán divididos los ángulos *AOC*, *aoc* en tantas partes iguales (Teor. VIII.), como tienen los arcos *AC*, *ac*. Luego los ángulos propuestos *AOC*, *aoc*, estando compuestos respecti-

 timo partes iguales á *AB* contienen los arcos *AC*, *ac*, estarán evidentemente en la misma razon que estos arcos, y tendrán por comun medida el ángulo *AOB*.

2.° Si los arcos *AC*, *ac* son incomensurables, quedará demostrado que la relacion de dichos arcos es igual con la de los ángulos, si demostramos que no puede ser mayor ni menor.

Si suponemos (*fig.V.*) que la relacion de los ángulos es menor que la de los arcos, tendrémos $AOC : aoc < AC : ac$; y para que esta segunda razon sea igual con la primera, se necesitará que su conseqüente *ac* crezca y se convierta por exemplo en *ad*; lo que dará

$$AOC : aoc :: AC : ad.$$

En este caso, concibiendo dividido el arco *AC* en dos partes iguales, y luego en otras dos, y así sucesivamente, se llegará á concebir un arco (Teor. IV.) menor que *cd*, y por consiguiente se podrá colocar esta parte sobre el *ac*, de modo que uno de los puntos de division cayga entre *c* y *d*, por exemplo, en *e*; con lo que los ángulos *AOC* y *aoe* guardarán la misma relacion que los arcos comensurables *AC*, *ae*, y se tendrá esta proporcion

$$AOC : aoe :: AC : ae,$$

que como tiene los mismos antecedentes que la primera, podrémos formar proporcion con los conseqüentes (pues si las alternásemos, tendrian comun la razon $AOC : AC$), y será

$$aoc : aoe :: ad : ae;$$

pero esto es un absurdo, porque *aoc*, siendo menor que *aoe*, la 1.ª razon es de menor desigualdad, y *ad*, pue-

(1) En esto no cabe duda, pues si se coloca el ángulo *aoc* sobre el *AOC* de modo que la *oa* cayga sobre la *OA*, el arco *ac* caerá sobre el *AC*, y por ser iguales los arcos *AB*, *ab*, el punto *b* se confundirá con el punto *B*, por lo que la línea *ob* se confundirá con la *OB*, y sucediendo lo mismo á las demas, es claro que todos los ángulos son iguales.

siendo mayor que ae, la 2.ª es de mayor desigualdad, y jamas pueden ser iguales dos razones de esta especie; luego el supuesto que hemos hecho tambien es un absurdo, luego la relacion de los ángulos no se puede suponer menor que la de los arcos.

Tampoco se puede suponer mayor; porque siendo $AOC : aoc > AC : ac$, se necesitaria que el conseqüente de esta última disminuyese y se convirtiese por exemplo en ad' para ser igual con la primera, lo que daría

$$AOC : aoc :: AC : Ad',$$

y concibiendo dividido como antes el arco AC en partes bastante pequeñas, para que colocada una sobre el arco ac las veces que se necesite, cayga un punto de division entre c y d', como en e', se tendrá

$$AOC : aoe' :: AC : ae',$$

que como tiene los mismos antecedentes que la del supuesto, los conseqüentes nos darán esta proporcion

$$aoc : aoe' :: ad' : ae',$$

que es un absurdo; pues una razon es de mayor desigualdad, y la otra de menor; luego el supuesto que nos ha conducido á él será tambien absurdo. Luego si la razon de los ángulos no puede ser menor ni mayor que la de los arcos, es claro que será igual. *L. Q. D. D.*

Cor. Para medir los ángulos se debe elegir por unidad otro ángulo, cuyo valor absoluto esté bien determinado, y como éste es el ángulo recto, que es el que forma una línea que cae sobre otra sin inclinarse mas hácia un lado que hácia otro, este se debe elegir; pero en este caso todos los ángulos agudos serian fracciones del ángulo recto, y los obtusos estarian representados por un número fraccionario, lo que haria muy fastidioso el lenguage. Para evitar esto, como se acaba de demostrar que la relacion de los ángulos es la misma que la de los arcos, se dice que la medida de los ángulos es el arco de círculo comprehendido entre sus lados, y descrito desde su vertice como centro; y así, como

qua-

quatro ángulos rectos cogen toda la circunferencia, el ángulo recto abraza un quadrante de circunferencia, pero considerándose esta dividida en 360 partes, que se llaman grados, corresponden 90 al quadrante. De manera que quando se dice un ángulo de un grado, de dos, &c. se da á entender que dicho ángulo es $\frac{1}{90}$ ó $\frac{2}{90}$ del ángulo recto, ó que dicho ángulo tiene con el recto, que es el que se toma por unidad la misma relacion que el arco de *uno* ó de *dos* grados tiene con el quadrante, que consta de 90.

III.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo de los triángulos, Bails tom. I. pag. 258, par. 554, dice: Que en un mismo triángulo el mayor lado está opuesto al mayor ángulo.

Teorema X. *La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero.*

Explic. Sea BCA (*fig. VI.*) un triángulo qualquiera, digo que $BA + CA > CB$.

Dem. Haciendo centro en B y con un radio igual al lado mayor BC, trácese el arco CD hasta que encuentre al lado BA prolongado, por el punto de interseccion D y el punto C tírese la DC; y por quanto CB y DB son radios de un mismo círculo, serán iguales; y como en un mismo triángulo á lados iguales (Bails 552) se oponen ángulos iguales, será el ángulo $DCB = CDB$; pero el ángulo DCA, siendo parte del DCB, será menor que él, y tambien menor que el ángulo CDB, que es igual con DCB. Luego en el triángulo DCA el ángulo CDA es mayor que ACD, y como en un mismo triángulo al mayor ángulo está opuesto (B. 554) el el mayor lado, se sigue que CA, lado opuesto al ángulo mayor CDA, será mayor que DA, lado opuesto al ángulo menor DCA; es decir que tenemos probado que $CA > DA$. Ahora bien, si á estas cantidades, que son desiguales, les añadimos una misma cantidad AB, tambien permanecerán desiguales, y por lo mismo tendrémos $CA+AB > DA+AB$, y como $DA+AB=BD$, y DB es igual con BC, se sigue que $CA+AB > BC$, pero CA y AB son dos lados del triángulo CBA, y BC es el tercero; *luego la suma de dos lados, &c. L. Q. D. D.*

Cor. De aquí se infiere que si desde un punto qualquiera M (*fig. VII.*) dentro de un triángulo se tiran las líneas MC y MB á dos ángulos qualesquiera C,B, la suma de estas líneas es menor que la suma de los lados CA,AB opuestos á los ángulos á que se tiraron las líneas: es decir que $CA+AB > CM+BM$. Pues si por el punto M concebimos tirada la NR, por el Teorema antecedente, será $NA+AR > NR$; y añadiendo á estas cantidades desiguales una misma cantidad $NC+RB$, quedarán desiguales; y será $NC+RB+NA+AR > NC+RB+NR$, y como $NC+RB+NA+AR=CA+AB$, será $CA+AB > NC+RB+NR$. Pero (Teorema antec.) $CN+NM > CM$ y $MR+RB > MB$; luego si sumamos estas cantidades desiguales, añadiendo la cantidad mayor á la mayor, y la menor á la menor, tambien permanecerán desiguales, y será $CN+NM+MR+RB > CM+MB$, y como $CN+NM+MR+RB=CN+NR+RB$, y antes teniamos $CA+AB > CN+NR+RB$, con mas razon será $CA+AB > CM+MB$, pero CA y AB son los lados del triángulo opuestos á los ángulos á que se tiraron las líneas, y CM y BM son las líneas tiradas; *luego si desde un punto de un triángulo*, &c.

Teorema XI. *Si desde un punto á otro se tira una rec-*

recta y una curva, la recta es mas corta que la curva.

Explic. Si desde el punto A (*fig. VIII.*) al punto B se tira la recta AB, y la curva ACB, vamos á demostrar que $ACB > AB$.

Dem. Tírense desde A y B á un punto qualquiera C de la curva, las líneas AC y BC, con lo qual tendrémos (Teor. X.) $AC + CB > AB$; y si desde C y A tiramos á un punto intermedio del arco AC, las AD, CD, y desde B y C al punto intermedio E del otro arco, las BE, CE por el mismo Teorema, tendrémos $AD+DC > AC$, $EC+EB > CB$, de donde sumando ordenadamente, será $AD+DC+CE+EB > AC+CB$; y si volviéramos á tirar á los puntos intermedios de los arcos AD,DC, &c. líneas, el conjunto de líneas que tirásemos sería mayor que el conjunto de $AD + DC +$ &c.; pues cada dos líneas $AM+MD$ siempre sería mayor que su correspondiente DA; pero este conjunto de líneas al paso que crece, se aproxîma á la curva ACB, pues va teniendo mas puntos comunes con ella; luego la curva será mayor que cada uno de estos conjuntos de líneas rectas, por tener demostrado (Teor. I.) que si una cantidad que varía, al crecer se aproxîma á otra cantidad constante, ésta será mayor que cada uno de los valores que tenga la cantidad que crece al variar; y como qualquiera de estos conjuntos de líneas es mayor que AB, se sigue que con mas razon será la curva $AMDCEB$ mayor que la recta AB; *luego si desde un punto á otro se tira una recta, y &c.*

Cor. I. De aquí se infiere que el perímetro de una figura qualquiera inscripta en una curva es menor que dicha curva; y que si en una misma curva se inscriben diferentes figuras, el perímetro de la que tenga mas lados, será mayor que el perímetro de la que tenga ménos; puesto que los perímetros de dichas figuras no son otra cosa que los conjuntos de líneas de que hemos hablado en el Teorema antecedente.

Cor. II. Tambien se infiere que la línea recta es la mas corta de quantas se pueden tirar desde un punto á otro, ya sean curvas, como *ACB*, ya se compongan de rectas como las *AD+DC+CE+EB*, ya se compongan de rectas y de curvas, como del arco *AMDC+* la recta *CB*.

Teorema XII. *Si desde un punto á otro se tira una recta, y diferentes curvas que sean cóncavas ó convexâs hácia un mismo lado, la curva que mas se acerque á la recta será la mas corta.*

Explic. Si desde el punto *A* (*fig. IX.*) al punto *B* se tiran diferentes curvas *ACB*, *ADB*, la *ACB*, que es la que mas se acerca á la recta *AB*, es la mas corta.

Dem. Si por el punto *C* se concibe la tangente *MCN* á la curva interior, es claro que el conjunto de líneas *AMCNB* se aproxîma mas á la curva *ACB*, que la *ADB*, pues tiene mas puntos comunes con ella; y si despues por otros puntos intermedios entre *A* y *C*, y entre *C* y *B* concebimos otras tangentes *RPS*, *TUQ*, el conjunto de líneas *ARP SCTUQB* se aproxîmará mas á la curva por tener mas puntos comunes con ella; y siguiendo conci- biendo tangentes, el conjunto que se vaya formando se irá aproxîmando cada vez mas á confundirse con ella; y como este conjunto al paso que se va aproxîmando á la curva, mengua, no hay duda en que dicha curva (Teor. II) es menor que el conjunto de líneas; y como cada uno de los conjuntos de líneas es menor que la curva *ADB*, con mas razon la curva *ADB* > *ACB*.

En efecto, la curva *ADB* es mayor que el conjunto de líneas *ARMCNQB*, y este conjunto de lí-

líneas vá disminuyendo al acercarse á la curva, y se verifica que $AMCNB > ARPSCTUQB$; pues por ser (Teor. XI.) $MDN > MN$, si á estas cantidades desiguales les añadimos una misma cantidad $AM+NB$, quedarán desiguales, y será $AM + NB + MDN > AM+NB+MN$; pero $AM+NB+MDN =$ á la curva ADB, y $AM+NB+MN =$ al conjunto de líneas $AMCNB$; luego la curva ADB es mayor que el conjunto de líneas $AMCNB$. Como (Cor. II. de Teor. XI.) $RM+MS > RS$ y $TN+NQ > TQ$; sumando estas desigualdades ordenadamente, es decir, la cantidad mayor con la mayor y la menor con la menor, tambien permanecerá la desigualdad, y tendremos $RM+MS+TN+NQ > RS+TQ$; añadiendo ahora á ambas la cantidad $AR+SCT+QB$, tambien permanecerán desiguales, y será $AR+SCT+QB+RM+MS+TN+NQ > AR+SCT+QB+RS+TQ$; pero $AR+SCT+QB+RM+MS+TN+NQ =$ al conjunto de líneas $AMCNB$ y $AR+SCT+QB+RS+TQ =$ al conjunto $ARPSCTUQB$; luego el conjunto $AMCNB > ARPSCTUQB$; y como si concebimos otras tangentes en los puntos intermedios de los arcos AP, PC, &c. demostraríamos del mismo modo que este conjunto sería menor que el $ARPSCTUQB$, se sigue que estos conjuntos, al paso que se van acercando á la curva, van siendo menores.

Cor. I. De aquí se infiere que una vez que la curva interior es menor que qualquier conjunto de líneas, cada arco de curva es menor que la porcion de líneas correspondientes á dicho arco; y que por lo mismo el arco $PC < PS+SC$, es decir, que una porcion de curva es menor que la suma de las tangentes tiradas á los extremos de dicha curva, prolongadas hasta que se encuentren.

Esto tambien lo podiamos demostrar concibiendo por el punto O la tangente FOG; pues demostraríamos del mismo modo que antes, que el conjunto $PSC > PFOGC$, y volviendo á concebir mas tangentes sería menor el conjunto que se formase, y así sucesivamente; y como al paso que mengua este conjunto se va acercando mas al arco PC, por tener mas puntos comunes con él, inferiríamos (Teor. II.) que el arco $PC < PS + SC$.

Esc. I. Esta proposicion que los Geómetras han tenido por evidente, bien reflexîonado, no lo es; pues aunque el conjunto de líneas $PS + SC$ se separa mas de la recta PC (que es en lo que se fundan) que la curva POC, sin embargo, como dicho conjunto camina en línea recta, concibe nuestro entendimiento, que este mayor desvío, tal vez se podria compensar con la curvatura de dicho arco; y yo confieso que he llegado á dudar de su verdad, habiendo dado orígen á mi duda el suponer tambien los Autores que la línea AB llamada tangente trigonométrica del arco Ac (*fig. XVIII.*) era mayor que el arco Ac, quando se ve lo aventurada que es la proposicion. Ahora no hay duda en ella, porque estando demostrado rigorosamente que $AB + BD >$ arco AcD, como si el arco cD es igual con Ac, es tambien AB igual con BD, por ser isósceles el triángulo ABD (*B.* 521), tendremos substituyendo en vez de BD y AcD sus iguales AB y $2Ac$, $2AB > 2Ac$ ó $AB > Ac$.

Esc. II. Quando me propuse formar estas adiciones para mis Discípulos del Seminario, principié á executarlo sacándolas directamente de las obras de Arquimedes; mas reflexîonando despues que el método seguido por el célebre Matemático La Croix es mas análogo al estado en que se hallan las ciencias en el dia, me resolví á seguirle estableciendo aquellas proposiciones que eran indispensables para darle todo el rigor que es propio de la Geometría.

Co-

Como algunas de estas proposiciones las han tomado por axîomas los Geómetras; y los que no entienden á fondo estas ciencias, si se dexan dominar por la envidia, no encuentran otro modo de disculpar su falta de instruccion que el despreciar ó desacreditar las investigaciones de sus contemporaneos, puse en la advertencia del quaderno impreso de los Certámenes del Real Seminario de Nobles de esta Corte en el año de 1804, que Leibnitz juzgaba que se debian demostrar hasta los axîomas, y manifesté los perjuicios que traía el no explicar la Geometría con el rigor que la caracteriza. Pues aunque la autoridad en estas Ciencias no tiene peso alguno para el verdadero inteligente, le tiene y muy grande para el que debiendo serlo, no lo es. Y ahora añadiré haber visto despues (1) que dos excelentes Geómetras de Europa, á saber, Mr. Legendre, miembro del Instituto nacional de Francia y de la Sociedad Real de Lóndres, y Mr. Bertrand, profesor de Matemáticas en Ginebra, y miembro de la Academia Real de Ciencias y Bellas Letras de Berlin, conociendo la importancia de muchas de mis proposiciones, hacen los mayores esfuerzos para demostrarlas por un método que, aunque digno de cada uno de estos sabios, no me parece, sin embargo, tan sencillo y rigoroso como el mio

Cor. II. Tambien inferimos que el perímetro de una figura qualquiera circunscripta á una curva, es decir, que se componga de tangentes á dicha curva, será mayor que la longitud de la curva; y que de muchas figuras circunscriptas á una misma curva, la que se compone de mas tangentes tendrá menor perímetro; pues cada parte *PSC* compuesta de dos tan-

(1) Estas obras no las pude adquirir hasta principios de octubre de 1804 que las compré en la libreria de Ramos.

tangentes será mayor que *PFOGC* (Cor. antec.) compuesta de tres.

IV.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en la semejanza de las figuras (par. 631) dice así: Luego dos triángulos, cuyos lados son todos perpendiculares, &c.

Teor. XIII. *Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo se baxa una perpendicular á la hipotenusa, se verifican cinco cosas: 1.° el triángulo quedará dividido en otros dos triángulos, que por ser semejantes al total, serán semejantes entre sí: 2.° la perpendicular baxada será media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa: 3.° cada cateto será medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente: 4.° el quadrado de la hipotenusa será igual á la suma de los quadrados de los catetos; y 5.° la perpendicular será quarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos.*

Explic. Si desde el ángulo recto *A* (*fig. X.*) del triángulo rectángulo *ABC* se baxa una perpendicular *AD* á la hipotenusa *BC*, digo que se verificarán cinco cosas: 1.° los dos triángulos *ADB*, *ADC* serán semejantes con el total *BAC*, y por lo mismo semejantes entre sí: 2.° la perpendicular *AD* será media proporcional entre los dos segmentos *BD* y *DC* de la hipotenusa: 3.° cada cateto *AB* ó *AC* será medio proporcional entre la hipotenusa *BC* y el segmento *BD* ó *DC* que á cada uno corresponde: 4.° el quadrado BC^2 de la hipotenusa, será igual á la suma BA^2+AC^2 de los quadrados de los catetos, y finalmente: 5.° la *DA* será quarta proporcional á la hipotenusa *BC* y á los catetos *CA*, *AB*.

Dem. 1.° Por tener los triángulos *BAC* y *BAD* un un ángulo comun en B; y ademas el primero un ángulo recto en A por el supuesto, y el segundo otro en D tambien recto, por ser la AD perpendicular á BC, dichos triángulos (*B.* 629) son semejantes. Por tener los triángulos BAC y DAC comun el ángulo en C, y ademas cada uno, uno recto, el primero el ángulo en A y el segundo el en D, tambien (*B.* 629) serán semejantes; y una vez que los triángulos parciales BAD y DAC son semejantes ambos á uno mismo, que es el total BAC, no hay duda en que son semejantes entre sí; pues cosas semejantes á una tercera, lo son entre sí.

2.° Por ser BAD y DAC semejantes, tendrán proporcionales sus lados homólogos, y será BD, lado menor del triángulo $BDA : DA$, su lado mediano :: DA, lado menor del triángulo $ADC : DC$, su lado mediano; como DA está formando los dos medios, y los segmentos BD y DC, los extremos, inferimos que dicha perpendicular DA es media proporcional entre los dos segmentos BD y DC de la hipotenusa.

3.° Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes BAD y BAC darán; BC, lado mayor del triángulo $BAC : BA$ su lado menor :: BA, lado mayor del triángulo $BAD : BD$ su lado menor. Comparando los BAC y DAC tendremos BC, lado mayor del triángulo $BAC : CA$, lado mediano :: CA, lado mayor del $DAC : DC$ su lado mediano. Como en estas dos proporciones los catetos BA, CA están formando los medios, y los extremos están formados por la hipotenusa, y el segmento que corresponde á cada uno, se sigue que cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa, y el segmento correspondiente.

4.° Si en estas dos proporciones últimas $BC : BA :: BA : BD$ y $BC : CA :: CA : DC$, multiplicamos extremos y medios, tendremos estas dos equaciones.

BC

$BC \times BD = BA^2$, $BC \times DC = CA^2$; que si las sumamos será $BC \times BD + BC \times DC = BA^2 + CA^2$; como en el primer miembro es comun el factor BC, si lo resolvemos en factores, será $BC \times BD + BC \times DC = BC.(BD + DC)$, y como $BD + DC = BC$ se convertirá por último el primer miembro en $BC.BC = BC^2$, y poniendo en vez de $BC.BD + BC.DC$ su igual BC^2, la equacion de arriba se convertirá en $BC^2 = BA^2 + CA^2$; pero BC es la hipotenusa, BA, CA los catetos; luego el quadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los quadrados de los catetos.

5.° Los triángulos BAD, BAC dan $BC : CA :: BA : AD$; luego la perpendicular es quarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos.

Cor. Una vez que $BC^2 = BA^2 + CA^2$, si extraemos la raiz quadrada de ambos miembros, será .....

$BC = \sqrt{BA^2 + CA^2}$; luego conociendo los dos catetos de un triángulo rectángulo, conoceremos la hipotenusa extrayendo la raiz quadrada de la suma de los quadrados de los catetos; y tambien conociendo la hipotenusa y uno de los catetos, conoceremos el otro, extrayendo la raiz quadrada de la diferencia de los quadrados de la hipotenusa y del otro cateto; pues si quitamos la cantidad BA^2 á los dos miembros de la equacion $BC^2 = BA^2 + CA^2$, se convertirá en $BC^2 - BA^2 = CA^2$, es decir, que el quadrado de un cateto es igual al quadrado de la hipotenusa, menos el quadrado del otro cateto; y extrayendo la raiz quadrada conoceremos el otro cateto, que será $CA = \sqrt{BC^2 - BA^2}$.

Teor. XIV. *Si desde un punto qualquiera de la circunferencia se baxa una perpendicular al diámetro, se verificarán quatro cosas: 1.° la perpendicular será me-*

media proporcional entre los dos segmentos del diámetro: 2.º si desde los extremos del diámetro tiramos cuerdas á dicho punto de la circunferencia, las cuerdas serán medias proporcionales entre el diámetro y el segmento correspondiente que corta en el diámetro la perpendicular: 3.º los quadrados de dichas cuerdas, y en general los quadrados de las cuerdas tiradas desde los extremos de un diámetro, tendrán unos con otros la misma razon que los segmentos correspondientes: 4.º que el quadrado del diámetro es igual á la suma de los quadrados de las cuerdas que desde sus extremos se tiren á un punto qualquiera de la circunferencia.

Dem. Si desde el punto *A* (*fig. XI.*) de la circunferencia *BCA* baxamos la perpendicular *AD* al diámetro, y unimos el punto *A* de la circunferencia con los extremos *B*,*C* del diámetro por medio de las *AB*,*AC*, el triángulo *BCA* será rectángulo en *A*; pues el ángulo *BAC*, por estar en la circunferencia, y abrazar con sus lados el diámetro (*B.* 526) es recto; y como desde *A*, que es el vértice del ángulo recto, se ha baxado la *AD* perpendicular á la *BC*, que es la hipotenusa, tenemos aquí un triángulo rectángulo, en que desde el ángulo recto se ha baxado una perpendicular á la hipotenusa, y por lo mismo se verificará (Teor. antec.): 1.º que la perpendicular *AD* será media proporcional entre los dos segmentos *BD* y *DC*; pero como aquí la perpendicular es la baxada al diámetro desde un punto de la circunferencia, y *BD*, *DC* son los segmentos de dicho diámetro, se sigue que la perpendicular baxada desde un punto qualquiera de la circunferencia al diámetro es media proporcional entre los dos segmentos en que queda dividido el diámetro.

2.º Tambien se verificará que *BA* será media proporcional entre *BC* y *BD*; *CA* entre *BC* y *DC*;

y como BA y AC son cuerdas tiradas desde el extremo de un diámetro, y BC, BD, DC son el diámetro y los segmentos del diámetro que á dichas cuerdas corresponden, se sigue que las cuerdas tiradas desde el extremo de un diámetro son medias proporcionales entre el diámetro y el segmento correspondiente.

3.° Por ser estas cuerdas medias proporcionales entre el diámetro y el segmento correspondiente, tendremos $BC : BA :: BA : BD$, y $BC : CA :: CA : DC$, de donde multiplicando extremos y medios sacaremos estas dos equaciones; $BA^2 = BC . BD$, $CA^2 = BC . DC$; y formando proporcion, será $BA^2 : CA^2 :: BC . BD : BC . DC$; y como los términos de esta última razon se pueden dividir ambos por BC, sin que se altere su valor, será $BA^2 : CA^2 :: BD : DC$; pero BA y CA son cuerdas tiradas desde los extremos de un mismo diámetro, BD y DC son los segmentos que las perpendiculares baxadas desde los extremos de las cuerdas al diámetro, cortan en dicho diámetro; luego los quadrados de las cuerdas tiradas desde los extremos de un diámetro son como los segmentos que causan en el diámetro las perpendiculares baxadas desde los extremos de dichas cuerdas.

Cor. Una vez que $BA^2 = BC . BD$ y BA es una cuerda qualquiera, se sigue que siempre el quadrado de una cuerda qualquiera es igual al diámetro multiplicado por el segmento correspondiente á dicha cuerda. Luego si se tienen dos cuerdas tiradas cada una desde su diámetro, el quadrado de cada una será igual al diámetro multiplicado por el segmento que le corresponde; y formando proporcion con las dos equaciones, se tendrá despues de simplificada la última razon, dividiendo sus dos términos por el diámetro, que en general los quadrados de las cuer-

cuerdas, son como los segmentos que causan en el diámetro que pasa por uno de sus extremos, las perpendiculares baxadas desde los otros extremos.

4.° Si sumamos las dos equaciones antecedentes $BA^2 = BC.BD$, y $CA^2 = BC.DC$, será $BA^2 + CA^2 = BC.BD + BC.DC = BC(BD + DC) = BC.BC = BC^2$, y como BC es el diámetro y BA, AC son dos cuerdas tiradas desde sus extremos á un mismo punto de la circunferencia, se sigue que el quadrado del diámetro es igual á la suma de los quadrados de las cuerdas tiradas desde sus extremos á un mismo punto de la circunferencia.

Teor. XV. *En todo triángulo obtusángulo, el quadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que la suma de los quadrados de los lados opuestos á los otros dos ángulos; y en todo triángulo acutángulo, el quadrado del lado opuesto al mayor ángulo, es menor que la suma de los quadrados de los otros dos lados.*

Dem. Sea 1.° el triángulo obtusángulo ABC (*fig. XII.*), digo que el quadrado de AB es mayor que la suma de los quadrados de AC y CB; pues si baxamos la perpendicular BD, el triángulo ADB será rectángulo, y tendremos (Teor. XIII.) $AB^2 = AD^2 + BD^2$; pero $AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + 2AC.CD + CD^2$; y por ser rectángulo el triángulo CBD, tendremos (Cor. del Teor. XIII) $BD^2 = BC^2 - CD^2$; luego si ponemos en vez de estos quadrados sus valores en la equacion de arriba, se convertirá en $AB^2 = AC^2 + 2AC.CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC.CD$; luego el quadrado del lado mayor en este triángulo obtusángulo es mayor que la suma de los quadrados de los otros dos lados, en dos veces el producto de AC por CD.

2.° Si el triángulo es acutángulo tal como ABC (*fig. XIII.*), digo que el quadrado del lado mayor AB es menor que la suma de los quadrados de los otros dos lados; pues si baxamos la perpendicular BD, por ser rectángulo el triángulo ABD, tendremos $AB^2 = AD^2 + BD^2 = (AC - CD)^2 + BD^2 = AC^2 - 2AC.CD + DC^2 + BD^2$, y por serlo tambien el BDC, tendremos $BD^2 = BC^2 - DC^2$, y substituyendo este valor en el de AB, resultará $AB^2 = AC^2 - 2AC.CD + CD^2 + BC^2 - DC^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.CD$; luego el quadrado del lado mayor del triángulo acutángulo es menor que la suma de los quadrados de los otros dos lados, en dos veces el producto de AC por CD.

V.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo de las líneas proporcionales (B. par. 611) dice: Luego 1.º si AB es v. g. la mitad, &c.

Teor. XVI. *Si por un punto qualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á la base, los lados de dicho triángulo quedan divididos en partes proporcionales.*

Explic. Sea el triángulo AEC (*fig. XIV.*): digo que si desde un punto qualquiera D, de uno de los lados, se tira una línea DE paralela á la base, esta línea dividirá á los lados BA, BC en partes proporcionales, de modo que se tendrá $BA : BD :: CB : BE$.

Dem. Aquí pueden ocurrir dos casos: 1.º que BD sea comensurable con BA, esto es, que su relacion se pueda expresar con números; y 2.º que no lo sea. En el primer caso, supongamos que la relacion de $BA : BD$, sea la de $7 : 4$; si se concibe la recta BA dividida en 7 partes iguales, BD contendrá quatro de estas partes, y DA las otras tres. Si

se

se tirasen desde cada uno de estos puntos de division paralelas á la *AC*, quedaria dividida la *BC* en 7 partes tambien iguales, de las que 4 corresponderian á *BE* y las otras tres á *EC*; luego (*B.* par. 611) tendremos *BA* : *BD* :: *BC* : *BE*.

Si *BA* y *BD* son incomensurables, voy á demostrar que en este segundo caso tambien se verifica la proposicion; porque la razon de *BA* : *BD* no puede ser mayor ni menor que la de *BC* : *BE*. En efecto, no se puede suponer que *BA* : *BD* :: *BC* : *BL* siendo *BL* menor que *BE*; porque en este caso podriamos dividir (Teor. IV.) la *BA* en partes tan pequeñas, que tirando paralelas á *AC* por los puntos de division, cayese una de estas paralelas tal como *de* entre *E* y *L*; y á causa de la comensurabilidad de *BA* con *Bd*, tendria *BA* : *Bd* :: *CB* : *Be*.

Como estas dos proporciones tienen unos mismos antecedentes, podré formar proporcion con los conseqüentes, y tendré *BD* : *Bd* :: *BL* : *Be* resultado absurdo, porque la primera razon es de *mayor desigualdad*, y la segunda de *menor*; luego el supuesto que me ha conducido á él es tambien absurdo.

Tampoco se puede suponer que *BA* : *BD* :: *BC* : *BL'*, siendo *BL'* mayor que *BE*, porque dividiendo la *BA* en partes tan pequeñas como se necesite, para que una de las paralelas tal como *d'e'* tiradas á la base *AC* por los puntos de division, cayga entre *E* y *L'*, se tendrá

$$BA : Bd' :: BC : Be';$$

y formando proporcion con los conseqüentes de estas dos proporciones, tendré

$$BD : Bd' :: BL' : Be',$$

resultado absurdo por la misma razon que antes; luego no pudiendo ser la quarta proporcional á *BA*, *BD*, *BC*, menor ni mayor que *BE*, es claro que

la

la *BE* es dicha quarta proporcional, y que será

$$BA : BD :: BC : BE.$$

Cor. De aquí se infiere que $DA : BD :: CE : EB$; porque dividiendo la proporcion antecedente, será

$$BA-BD : BD :: BC-BE : BE,$$

que se convierte en

$$DA : BD :: CE : BE.$$

Teor. XVII. *Si una recta divide los lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela á la base.*

Explic. Sea el triángulo *BAC* (*fig. XV.*), digo que si la *DE* divide los lados *BA*, *BC* de modo que se tenga $BA : BD :: BC : BE$, la línea *DE* será paralela á la base *AC*.

Dem. Si la *DE* no es paralela con *AC*, se le podrá tirar por el punto *D* una línea que lo sea. Si esta paralela fuese la *De*, tendria (Teor. XVI.) $BA : BD :: BC : Be$, de donde inferiría, por tener esta proporcion, y la del supuesto los tres primeros términos comunes, que $BE = Be$; pero esto es un absurdo, porque *BE* es todo, y *Be* parte; luego la paralela á la base no puede caer mas arriba que la *DE*; tampoco puede caer por la parte inferior, porque si supusiese que la *De'* era paralela á la *AC*, sacaría $BE = Be'$, que tambien es absurdo; luego si la paralela tirada por el punto *D* á la base *AC*, no puede pasar ni por mas arriba ni por mas abaxo que la *DE*, es claro que pasa por encima, ó que dicha *BE* es la paralela á *AC*.

VI.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en la semejanza de las figuras (*B. par.* 637) *dice*: *Quando los polígonos son regulares, se verifica del mismo modo la proposicion*: luego los

los perímetros de los polígonos regulares tienen unos con otros la misma razon, &c.

Prob. III. *Dado un polígono regular inscripto en un círculo, inscribir otro de duplo número de lados, y hallar el lado de este último.*

Res. y dem. Sea BA (*fig. XVI.*) uno de los lados del polígono que se nos da inscripto, con lo qual BOA será el ángulo en el centro: si se divide el arco $AB'B$, que le mide, en dos partes iguales en el punto B', y se tiran las AB', $B'B$, serán evidentemente dos lados contiguos del polígono regular de duplo número de lados, pues los arcos que subtenden son la mitad del arco $AB'B$, que subtendia el lado del polígono propuesto.

Para hallar el valor del lado de dicho polígono, prolongarémos el radio $B'O$ hasta D, y por ser toda cuerda $B'A$ media proporcional entre el diámetro $B'D$, y el segmento correspondiente $B'E$ (Teor. XIV.), tendremos $B'D : B'A :: B'A : B'E$, de donde multiplicando extremos y medios, y considerando que el diámetro $B'D$ es duplo del radio $B'O$, será

$$B'A^2 = B'D \,.\, B'E = 2B'O \,.\, B'E;$$

pero $B'E = B'O - EO$, y como el triángulo AEO es rectángulo en E, el lado EO (Cor. del Teor. XIII.) $= \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{B'O^2 - AE^2}$, será...... $B'E = B'O - \sqrt{B'O^2 - AE^2}$; y como $AE^2 = (\frac{1}{2}AB)^2$, substituyendo este valor en el de $B'E$, será $B'E = B'O - \sqrt{B'O^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$; poniendo ahora este valor de $B'E$ en la equacion

$$B'A^2 = 2B'O \,.\, B'E,$$

se convertirá en

$$B'A^2 = 2B'O\left(B'O - \sqrt{B'O^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2}\right).$$

Si

Si hacemos ahora igual á la unidad el radio $B'O$ del círculo en que están inscriptos los polígonos, se convertirá esta equacion en

$$B'A^2 = 2.1\left(1 - \sqrt{1^2 - (\tfrac{1}{2}BA)^2}\right) =$$

$$2\left(1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}BA)^2}\right) = 2 - 2\sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB)^2} =$$

$$2 - 2 \times \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}(AB)^2} = 2 - 2\sqrt{\frac{4 - AB^2}{4}} = \ldots\ldots$$

$2 - \frac{2}{2}\sqrt{4 - AB^2} = 2 - \sqrt{4 - AB^2}$. Si se dividiese ahora en dos partes iguales en el punto B'' el arco AB', se tendria del mismo modo $B''A^2 = 2\left(1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB')^2}\right)$, y sería $B''A$ el lado del polígono de duplo número de lados del que tenia el correspondiente al lado AB'; y siguiendo del mismo modo, inscribiríamos tantos polígonos de duplo número de lados como quisiéramos. Si extraemos la raiz quadrada de ambos miembros de la equacion $B'A^2 = 2 - \sqrt{4 - AB^2}$, será $B'A = \sqrt{2 - \sqrt{4 - AB^2}}$, donde vemos que para hallar el lado del polígono de duplo número de lados, tendremos que sacar primero la raiz quadrada de $4 - AB^2$; luego restarla de 2, y volver á extraer de esta resta otra raiz quadrada, lo que no puede ménos de ser muy complicado, particularmente quando se tenga que repetir esta operacion de ir inscribiendo polígonos de duplo número de lados, cierto número de veces; por lo qual, si tuviésemos necesidad de hallar el lado de un polígono de un número de lados ocho veces mayor que el de otro, para ra evitar el sacar dos raices á cada operacion, hallando primero el lado del polígono de duplo número de lados del que se nos da, y luego el de duplo número de lados de este último, que será de quádruplo número de lados del que se nos da, y luego el del óctuplo &c., en vez de hallar los lados de dichos polígonos, hallaremos el valor de las cuerdas de los arcos, que son suplementos de los arcos correspondientes á los lados del polígono, lo que nos excusará el hacer la mitad de las extracciones de raices. A estas cuerdas les llamaré con Vieta *Apótomes*.

En efecto; pues que los triángulos ABC, $AB'C$, $AB''C$ &c. tienen recto el ángulo que tiene cada uno en la circunferencia, serán rectángulos, y tendremos (Cor. del Teor. XIII.) $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}$, $B'C=\sqrt{AC^2-AB'^2}$ &c. Si tomamos el radio AO por unidad, por ser AC duplo de AO, será $AC=2$, y tendrémos

$$BC=\sqrt{2^2-AB^2}=\sqrt{4-AB^2}, B'C=\sqrt{4-AB'^2};$$

y como ántes teniamos $B'A^2=2-\sqrt{4-AB^2}$, si substituimos en vez de $\sqrt{4-AB^2}$ su valor BC, será $AB'^2=2-BC$, y poniendo este valor en el de $B'C$, será

$$B'C=\sqrt{4-(2-BC)}=\sqrt{4-2+BC}=\sqrt{2+BC},$$

y del mismo modo tendriamos

$$B''C=\sqrt{2+B'C} \text{ \&c. \&c.},$$

de donde se sigue que hallando primero el valor de BC, solo con añadirle dos unidades, y extraer la raiz quadrada, tendrémos la apótome del polígono de duplo número de lados; y añadiendo á ésta otras dos unidades, y extrayendo la raiz quadrada, tendrémos la del siguiente, y así continuando tendríamos las demas; despues para hallar el lado que deseamos, no haríamos mas que restar el quadrado de la apótome en que nos detuvimos, del quadrado del diámetro, y extraer la raiz quadrada, con lo qual tendríamos el lado del polígono propuesto, no habiendo extraido sino la mitad de las raices que se hubieran necesitado, calculando directamente los lados.

Teor. XVIII. *Si en un círculo inscribimos un polígono qualquiera, y despues otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, la sagita correspondiente á estos polígonos irá siendo mas de dos veces menor, y por lo mismo llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Explic. Sea por exemplo *ABED* (*fig. XVII.*) un quadrado inscripto en el círculo; digo, que si se le inscribe un octógono, y luego un polígono de 16 lados, y así sucesivamente, se verificará que la sagita *BK* del quadrado será mas de dos veces menor que el radio *BC*, y que la sagita *BR* del octógono será mas de dos veces menor que la del quadrado, y así sucesivamente; de manera que al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Dem. Si dividimos el arco *BA* en dos partes iguales en *H*, y tiramos la *BH*, éste será el lado del polígono de duplo número de lados, y por ser los quadrados de las cuerdas tiradas desde los extremos de un diámetro (Teor. XIV.) como los segmentos que causan en dicho diámetro las perpendiculares tiradas desde los extremos de las cuerdas, tendrémos

$$BA^2 : BH^2 :: BC : BK;$$

y

y como por ser obtusángulo el triángulo *BHA*, el quadrado de *AB* es mayor que la (Teor. XV.) suma de los quadrados de los lados *BH*, *HA*, y estos son iguales por ser lados del octógono, será el quadrado de *BA* mayor que el duplo del quadrado de *BH*, ó lo que es lo mismo BH^2, será mas de dos veces menor que BA^2, y como BH^2 es el segundo término de la proporcion anterior, y la razon que tiene el primer término con el segundo, esa misma tiene el tercero con el quarto, se sigue que la sagita ó segmento *BK* es mas de dos veces menor que el radio *BC*. Pero *BK* es la sagita del quadrado, pues si prolongamos la *HK* hasta *M*, el arco *HBM* valdrá 90 grados por ser tambien duplo de *BFH*; luego *HM* será lado del quadrado inscripto; y como llamamos sagita en un polígono inscripto á la diferencia que hay entre el radio del círculo á que lo está, y el radio recto de dicho polígono, se sigue que en efecto *BK* es la sagita del quadrado; luego esta es mas de dos veces menor que el radio.

Si dividimos el arco *HB* en dos partes iguales, y tiramos las *BF*, *FH*, estas serán dos lados contiguos del polígono de 16 lados, y *BR* será la sagita del octógono, y por la misma razon que antes será $BH^2 : BF^2 :: BK : BR$, mas por lo expuesto ántes BF^2 es mas de dos veces menor que BH^2; luego tambien será *BR* mas de dos veces menor que *BK*; y como á cada vez que inscribamos un polígono de duplo número de lados, hacemos mas de dos veces menor á la sagita, es claro (Cor. de Teor. III.) que llegaremos á tener al cabo de cierto tiempo una sagita menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Teor. XIX. *Si á un círculo se le circunscribe un polígono regular qualquiera, y despues otro de duplo número de lados: 1.º el lado de este último será mas* *de dos veces menor que el lado del anterior, y 2.° la sagita del segundo será mas de dos veces menor que la sagita del primero; y por lo mismo, haciéndose estas líneas mas de dos veces menores al paso que se circunscriben polígonos de duplo número de lados, dichas líneas podrán llegar á ser menores que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Sea $MRVO$ (*fig. XVIII.*) un quadrado circunscripto al círculo, si tiramos las diagonales RO, MV, y en los puntos en que dichas diagonales cortan á la circunferencia, concebimos las tangentes BT, NP &c., quedará circunscripto el octógono regular $TBANP$ &c., y por ser rectángulo en D el triángulo BDR, será la hipotenusa $BR > BD$, pues al ángulo recto de un triángulo rectángulo, por ser el mayor, se le opone el mayor lado; y como el triángulo ABD es isósceles, por tener los ángulos BDA, BAD una misma medida, que es la mitad del arco (B.521) AcD, será $BD = BA$, y por lo mismo $BR > BA$; por la misma razon tendrémos tambien $MN > NA$, y sumando ordenadamente será $BR + MN > BA + NA$; pero $BA + NA = NB$, y $BR + MN = MR - NB$; luego la desigualdad de ántes se convertirá en $MR - NB > NB$, ó añadiendo á ámbas cantidades la NB, será $MR > 2NB$, ó dividiendo por 2, $\frac{MR}{2} > NB$, ó $NB < \frac{MR}{2}$; y como NB es el lado del octógono, y MR el del quadrado, se sigue que el lado del octógono es mas de dos veces menor que el lado del quadrado; y como si fuésemos circunscribiendo polígonos de duplo número de lados, demostraríamos del mismo modo que á cada operacion iría siendo el lado del polígono mas de dos veces menor, podíamos hacer que dicho lado fuese menor que-

qual

qualquier cantidad dada por pequeña que fuese.

2.º La BE, que aquí le llamamos sagita del polígono circunscripto, y es la diferencia que hay entre el radio obliquo del polígono circunscripto y el radio recto del polígono inscripto del mismo número de lados, por componerse de $cE = Ds$ y de Bc, que cada una se va haciendo mas de dos veces menor, á medida que se circunscriben é inscriben polígonos de duplo número de lados, tambien se irá haciendo mas de dos veces menor, y por lo mismo podrémos hacer que sea menor que qualquier cantidad dada.

En efecto, de la $cE = Ds$, ya lo hemos manifestado en el teorema antecedente, y así lo que nos falta demostrar es que Bc, diferencia entre el radio obliquo del polígono circunscripto, y el radio del círculo ó radio recto del mismo polígono, es mas de dos veces menor que DR, diferencia entre el radio obliquo y recto del de un subduplo número de lados; para esto, baxando la Dl perpendicular á Ca, será paralela á Ra, y por lo mismo el triángulo CaR, dará $Ca : CR :: la : DR = \frac{CR \,.\, la}{Ca}$, y por ser el arco aD la mitad del ADa, será Dl semilado del quadrado inscripto, y por lo mismo $la = DS$; luego substituyendo este valor, será $DR = \frac{CR \,.\, DS}{Ca} = \frac{1}{Ca} \times CR \,.\, DS$. Considerando tirada tambien la cs perpendicular á CD, será paralela á BD, y el triángulo CDB dará $CD : CB :: Ds : cB = \frac{CB \,.\, Ds}{CD} = \ldots \frac{1}{CD} \,.\, CB \,.\, Ds$; pero en este valor de cB entra como factor Ds, que es mas de dos veces menor que DS, y ademas el otro factor $\frac{1}{CD} \,.\, CB$ es menor que.....

$\frac{1}{Ca}.CR$, porque los denominadores son iguales, y CB es menor que CR, luego el valor de Bc será mas de dos veces menor que el de DR; luego á cada circunscripcion de polígono de duplo número de lados vamos haciendo á la diferencia entre el radio obliquo y recto, mas de dos veces menor, y por lo mismo llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea. Luego &c.

Prob. IV. *Dado un polígono regular inscripto en un círculo, circunscribirle otro del mismo número de lados, y hallar el valor del lado de este último.*

Res. y dem. Sea *abcdef* (*fig. XIX.*) el polígono propuesto; tírense los radios obliquos Oa, Ob &c., levántense en los extremos de estos radios las perpendiculares AF, BA, CB &c., y el conjunto de estas perpendiculares, que son tangentes del círculo *abcdef*, por ser perpendiculares al extremo del radio, formarán el contorno del polígono.

En efecto los triángulos aAb, bBc &c. son todos iguales é isósceles, porque los lados ab, bc, cd &c. son iguales por el supuesto, y los ángulos Aab, Aba, Bbc &c. formados por estos lados iguales, que son las cuerdas de los arcos iguales ab, bc &c., y por las tangentes Aa, Ab, bB &c. son tambien iguales (B. 562); luego 1.° $aAb = bBc$, y 2.° $aA = Ab = bB =$ &c., de donde sale tambien $AB = 2Ab$, $BC = 2Bc$ &c., y por consiguiente $AB = BC = CD =$ &c.; luego el polígono, teniendo sus lados y ángulos iguales, será regular como se pide.

Para hallar el valor del lado AB del polígono circunscripto, probarémos que por ser el ángulo OaA recto; y el OGa tambien, por ser la aG perpendicular á OA, los triángulos aGO y AaO (B. 629), serán semejantes, pues ademas del ángulo recto dicho, tienen comun el aOG; y por ser semejantes darán OG,

la-

lado mediano del triángulo $OGa : aG$, su lado menor :: aO, lado mediano del triángulo $aOA : aA$, su lado menor; y como una proporcion no se altera, aunque se multipliquen por una misma cantidad los conseqüentes, si aquí multiplicamos por 2 á los conseqüentes aG, aA, el primero será igual con ab, lado del polígono inscripto, y el segundo con AF, lado del polígono circunscripto; y la proporcion de arriba será $OG : ab :: aO : AF = \frac{ab \cdot aO}{OG}$; y como (Cor. del Teor. XIII.) $OG = \sqrt{Oa^2 - aG^2} = \sqrt{Oa^2 - (\frac{1}{2}ab)^2}$, será $AF = \frac{ab \cdot aO}{\sqrt{Oa^2 - (\frac{1}{2}ab)^2}}$; y si al lado menor ab le llamamos l, al mayor AF, L, y al radio Oa, R, tendrémos $L = \frac{l \cdot R}{\sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}l)^2}}$.

Esc. Los Arquitectos necesitan freqüentemente conocer las partes de un polígono regular inscripto ó circunscripto á un círculo cuyo radio sea conocido; como una de las principales miras de la Academia es la de proporcionar á los que se dedican á esta bella Arte los conocimientos que necesitan, no puedo ménos de contribuir por mi parte á un objeto tan loable; y así pongo aquí una tabla en que están calculadas todas las partes de los 10 primeros polígonos regulares inscriptos y circunscriptos á un círculo cuyo radio es igual con la unidad, lo que en muchas ocasiones les excusará hacer cálculos fastidiosos.

Ta-

Tabla en que están calculadas las partes de los 10 primeros polígonos regulares inscriptos y circunscriptos á un círculo cuyo radio sea la unidad.

	Lado.	*Perím.*	*Rad. obl.*	*Rad. rect.*	*Superf.*
Triáng. inscrip....	1,7321	5,1962	1,0000	0,5000	1,2990
Triáng. circuns...	3,4641	10,3923	2,0000	1,0000	5,1962
Quad. inscrip......	1,4142	5,6569	1,0000	0,7071	2,0000
Quad. circuns.....	2,0000	8,0000	1,4142	1,0000	4,0000
Pent. inscrip........	1,1756	5,8779	1,0000	0,8090	2,3776
Pent. circuns.......	1,4531	7,2654	1,2361	1,0000	3,6327
Exâg. inscrip.......	1,0000	6,0000	1,0000	0,8660	2,5981
Exâg. circuns......	1,1547	6,9282	1,1547	1,0000	3,4641
Ept. inscrip.........	0,8678	6,0744	1,0000	0,9003	2,7345
Ept. circuns........	0,9631	6,7420	1,1099	1,0000	3,3710
Octóg. inscrip.....	0,7654	6,1229	1,0000	0,9239	2,8284
Octóg. circuns....	0,8284	6,6274	1,0824	1,0000	3,3137
Eneág. inscrip.....	0,6840	6,1564	1,0000	0,9397	2,8925
Eneág. circuns....	0,7279	6,5515	1,0642	1,0000	3,2757
Decág. inscrip....	0,6180	6,1803	1,0000	0,9511	2,9389
Decág. circuns....	0,6498	6,4984	1,0515	1,0000	3,2492
Endec. incrip......	0,5635	6,1981	1,0000	0,9595	2,9736
Endec. circuns....	0,5873	6,4598	1,0422	1,0000	3,2299
Dodecág. inscrip.	0,5176	6,2117	1,0000	0,9659	3,0000
Dodecág. circuns.	0,5359	6,4308	1,0353	1,0000	3,2154

Quando por medio de esta tabla se quiera venir en conocimiento de una parte qualquiera de un polígono regular inscripto ó circunscripto á un círculo cuyo radio sea diferente de la unidad, se formará la siguiente proporcion:

1 : al radio que se da :: la parte de polígono que se halla en la tabla : es á la que se busca correspondiente al radio dado.

Si es la superficie la que se busca, entónces el se-

segundo término será el quadrado del radio que se da.

Si conociendo el valor de una parte qualquiera de un polígono inscripto ó circunscripto, se quiere encontrar el radio del círculo á que corresponde, se formará la siguiente proporcion.

La parte que se encuentra en la tabla : al valor de la que se da :: 1 : al radio del círculo que corresponde, si no es superficie la parte que se da, que entónces este quarto término será el quadrado del radio.

Como en estas dos proporciones hay un término que es la unidad, resulta que para hallar una parte qualquiera de un polígono, siendo el radio de círculo diferente de la unidad, no hay mas que *multiplicar el valor de dicha parte que se halla en la tabla, por el del radio*; y para hallar el radio, quando se conoce el de una parte, se *divide el valor dado por el que se halla en la tabla*. Por exemplo: si quiero averiguar el lado del pentágono inscripto en un círculo de 47 pies de radio, tendré que será igual á $1,1756 \times 47 = 55,2532$ pies. Y si quisiera averiguar el radio de círculo que corresponde á un eptágono, cuyo lado es de 35 pies, sacaré que es igual á $\frac{35}{0,8678} = 40,34$ pies.

Teor. XX. *Si en un círculo se inscribe y circunscribe un polígono de un mismo número de lados, y despues se inscriben y circunscriben otros de duplo número de lados, y así sucesivamente, la diferencia entre el perímetro del circunscripto y el del inscripto, llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Por ser semejantes los polígonos regulares de un mismo número de lados, se sigue que los perímetros serán proporcionales á los radios rectos y obliqüos; luego si al perímetro del octógono (*fig. XVIII.*)

XVIII.) *aTBN* &c. circunscripto, le llamamos P, y al del octógono inscripto p, estos perímetros serán como sus radios rectos; y como el radio recto del octógono circunscripto es CD, y el del inscripto es Cs, tendrémos $P : p :: CD : Cs$, y dividiendo será $P-p : P :: CD-Cs : CD$; de donde sale

$P-p = \frac{P(CD-Cs)}{CD} = \frac{P \cdot Ds}{CD}$; y como Ds es la sagita del polígono inscripto, y ésta á cada vez que se inscribe un polígono de duplo número de lados (Teor. XVIII.) se va haciendo mas de dos veces menor, es claro que por ser la diferencia de los perímetros el producto en que entra por factor dicha sagita (Cor. del Teor. IV.) se irá haciendo mas de dos veces menor, y al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Cor. De aquí se infiere que si la diferencia que hay entre el perímetro del polígono circunscripto y el inscripto, podemos hacer que sea menor que qualquier cantidad dada, con mas razon podrémos circunscribir ó inscribir un polígono al círculo, en que la diferencia entre el perímetro de uno ú otro, y la circunferencia sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; pues como la circunferencia (Cor. I. del Teor. XI.) es mayor que el perímetro del polígono inscripto, y (Cor. II. del Teor. XII.) menor que el del circunscripto, al acercarse estos perímetros el uno al otro, se acercarán con mas razon á la circunferencia; y si la diferencia entre dichos perímetros podia ser menor que qualquier cantidad dada, con mas razon la diferencia entre el perímetro de uno de los polígonos, y la circunferencia, llegará á ser menor que qualquier cantidad por pequeña que sea.

Teor. XXI. *Las circunferencias de los círculos son como sus radios ó diámetros.*

Dem.

Dem. Pues que los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados, inscriptos ó circunscriptos á los círculos, son siempre como los radios de dichos círculos, si llamamos P, P' los perímetros de dos polígonos circunscriptos, y R, R' los radios de los círculos á que lo están, tendrémos $P : P' :: R : R'$, ó lo que es lo mismo $\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}$; y como los radios no varían, indica esto que la relacion $\frac{P}{P'}$ es constante. Si llamamos C, C' las circunferencias de los círculos á que están circunscriptos los polígonos, tendrémos aquí dos cantidades variables P, P' que se pueden acercar á las otras dos C, C' (Cor. de Teor. XX.) tanto como se quiera, y cuya relacion $\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}$ es constante; luego en virtud del Teor. VII. será $\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} = \frac{C}{C'}$, de donde sale $C : C' :: R : R' :: 2R : 2R' :: D : D'$, es decir que las circunferencias son unas con otras como sus radios ó diámetros.

Cor. I. De aquí se infiere que la relacion que la circunferencia tiene con el diámetro es la misma en todos los círculos; y que por lo mismo, si conocemos la relacion que el diámetro D tiene con su circunferencia C, hallaremos la circunferencia C' correspondiente á otro diámetro qualquiera D', diciendo $D : C :: D' : C' = \frac{C \cdot D'}{D}$.

Cor. II. Tambien se infiere que una vez que las circunferencias tienen la misma razon que sus diámetros, y una razon no se altera, aun quando se partan por un mismo número sus dos términos, si dividimos por 2, por 4, y en general por n, la primera razon de $C : C' :: D : D'$, quedará en $\frac{C}{2} : \frac{C'}{2} :: D : D'$; $\frac{C}{4} : \frac{C'}{4} :: D : D'$, y en general que $\frac{C}{n} : \frac{C'}{n} :: D : D'$, lo que nos dice que tambien las semicircunferencias, quadrantes de circunferencias, y en general los arcos de un mismo número de grados, que son los que se llaman semejantes, tambien tienen la misma razon que los diámetros y radios.

Prob. V. *Hallar la relacion aproxîmada del diámetro á la circunferencia.*

Res. y dem. Siendo el lado del exâgono igual al radio del círculo, si se toma por unidad este radio, el perímetro del exágono inscripto será 6, y la expresion (Prob. IV.) $L = \frac{l \,.\, R}{\sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}l)^2}}$ nos dará en este mismo supuesto para el lado L del exâgono circunscripto el valor $L = \frac{l \,.\, 1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2} 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{4-1}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{4-1}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

y el perímetro del exâgono circunscripto, será

$$6L = \frac{6 \,.\, 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}};$$

luego la circunferencia del círculo, siendo el radio igual con la unidad, será mayor que 6, y menor que $\frac{12}{\sqrt{3}}$, y si circunscribimos é inscribimos polígonos de mas lados, tendrémos valores mas inmediadiatos, por lo que para hallar la circunferencia inscribirémos y circunscribirémos polígonos de un gran número de lados; y como la diferencia entre los perímetros de éstos va disminuyendo á proporcion que va siendo mayor el número de lados, con mas razon disminuirá la diferencia entre el perímetro de uno qualquiera de ellos, y la circunferencia, y así lo haremos por medio de la fórmula (Prob. III.) $BC = \sqrt{4 - AB^2}$, que en nuestro caso, por ser AB lado del exágono $= 1$, se convierte en $BC = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} = 1,720$ &c.; y como añadiendo 2 al valor de esta apótome, y extrayendo la raiz quadrada, tendrémos el valor de la apótome $B'C$, y añadiendo 2, y volviendo á extraer la raiz quadrada, nos vendrá el de $B''C$, resulta que si á BC, $B'C$, $B''C$ las llamamos a, a', a'', a''' &c., por ser la a inicial de apótome, y á los lados del polígono correspondiente, l, l', l'', l''' &c. tendrémos los valores contenidos en la adjunta Tabla.

Esc.

Esc. El primero que sacó aproxîmadamente la relacion del diámetro á la circunferencia fué Archîmedes; pues demostró (Archîm. Op. prop. II. de Circ. Dim.) que siendo el diámetro igual con 1, la circunferencia era menor que $3\frac{1}{7}$, y mayor que $3\frac{10}{71}$; de donde tomando el primer valor aproxîmado de la circunferencia, resulta $D:C :: 1:3\frac{1}{7} :: 1:\frac{22}{7} :: 7:22$. Adriano Mecio da por relacion aproxîmada la de $113:355$, que es muy fácil de retener en la memoria, porque no hay mas que poner repetidos los tres primeros números impares, de lo que resulta que los tres guarismos primeros de este conjunto expresarán el diámetro, y los otros tres la circunferencia. Ludolpho Van-Ceulen la sacó con 35 guarismos decimales; y Lagni, en las Memorias de la Academia de Ciencias de Paris año de 1719, la presentó con 127 guarismos decimales exâctos. Hay otra relacion del diámetro á la circunferencia, que es la de $1250: 3927$, encontrada por los Ingleses en una obra de los Bramanes de la India, que es mas exâcta, y tiene visos de ser mas antigua que la de Arquimedes. Como esta relacion es el principio de donde dimanan todas las fórmulas que presento en estas Adiciones, y es una cosa hecha por pocos, pudiera suceder que se hubieran equivocado; y así, para no exponerme á edificar sobre débiles cimientos, me tomé el trabajo de calcular dicha relacion, y la he sacado como se vé en la tabla con 17 guarismos exâctos. Mas por si en algun caso no bastase esta aproxîmacion, he calculado por las series con los 34 primeros guarismos decimales exâctos, la de $1:\ldots\ldots$ $3,1415926535897932384626433832795028 5587$.

Cor. Una vez que siendo el diámetro 1, la circunfetencia es $3,14159265358 9$ &c., y que (Teor. XXII.) las circunferencias son proporcionales con sus diámetros, si llamamos C á la circunferencia que tie-

tiene por diámetro D, tendrémos, tomando los diez primeros guarismos

$$1 : 3,1415926536 :: D : C = \frac{3,1415926536 . D}{1} = \ldots\ldots 3,1415926536 . D.$$

Si en vez de D substituimos su valor $2R$, es decir, dos veces el radio, será tambien el valor de la circunferencia con relacion al radio,

$$C = 3,1415926536 . 2R = 6,2831853072 \times R.$$

Si dada la circunferencia quisiésemos hallar el diámetro, invertiríamos la proporcion de arriba, y sería

$$3,1415926536 : 1 :: C : D = \frac{1 . C}{3,1415926536} = \frac{1}{3,1415926536} \times C = 0,3183098862 . C;$$

Y si quisiésemos hallar el radio, dada la circunferencia, tomaríamos la mitad del diámetro, y sería

$$R = \frac{D}{2} = \frac{0,3183098862 . C}{2} = 0,1591549431 . C.$$

Prob. VI. *Dada la circunferencia, diámetro ó radio de un círculo, y el número de grados de un arco, rectificar dicho arco; ó lo que es lo mismo, hallar quanto coge tendido en plano.*

Res. y dem. Una vez que (Cor. II. del Teor. XXI.) los arcos son proporcionales con las circunferencias á que corresponden, si llamamos G el número de grados del arco, y L la longitud de dicho arco despues de rectificado, la razon que tenga $360°$, que es el valor de toda la circunferencia con G, número de grados del arco, esa misma tendrá la longitud de toda la circunferencia con la longitud L del arco que buscamos; y por lo mismo tendrémos es-

esta proporcion $360 : G :: C : L = \frac{G \cdot C}{360^\circ} = \frac{1}{360} \times \ldots$ $G \times C = 0{,}0027777778 \cdot G \cdot C.$

Si en vez de C substituimos su valor con relacion al diámetro sacado en el Cor. antec., será con relacion al diámetro

$$L = \frac{G.C}{360} = \frac{G.3{,}1415926536.D}{360} = \frac{3{,}1415926536}{360}.D.G =$$

$0{,}0087266463 . D . G$;

y si en vez de D substituimos su valor $2R$, será con relacion al radio,

$L = 0{,}0087266463 . 2R . G = 0{,}0174532925 . R . G.$

Prob. VII. *Dada la circunferencia, diámetro ú radio de un círculo, y la longitud* L *de un arco qualquiera, hallar el número de grados de dicho arco.*

Res. y dem. Si permutamos la proporcion del Prob. VI., será $C : L :: 360^\circ : G = \frac{360^\circ . L}{C}$, que es el número de grados del arco con relacion á la circunferencia; pero si en vez de C substituimos su valor con relacion al diámetro (Cor. del prob. V.), será

$$G = \frac{360 . L}{C} = \frac{360 . L}{3{,}1415926536 . D} = \frac{360}{3{,}1415926536} \times \frac{L}{D} =$$

$114{,}5915590262 . \frac{L}{D}$, y si en vez de D substituimos su valor $2R$, será

$$G = 114{,}5915590262 . \frac{L}{2R} = \frac{114{,}5915590262}{2} \frac{L}{R} =$$

$57{,}2957795131 . \frac{L}{R}$.

VII.

VII.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo de la medicion de las superficies (B. 665) concluye : síguese que la superficie del polígono regular, &c.

Teor. XXII. *La diferencia entre la superficie del polígono circunscripto á un círculo, y la del polígono inscripto del mismo número de lados, se puede hacer menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Si llamamos P' la superficie del polígono circunscripto, p' la del inscripto; P, p sus perímetros; y R, r sus radios rectos, tendrémos (B. 664) $P' = \frac{P.R}{2}$ y $p' = \frac{p.r}{2}$; formando proporcion con estas dos equaciones, será $P' : p' :: \frac{P.R}{2} : \frac{p.r}{2} :: P.R : p.r.$

Y como en una razon compuesta se puede substituir (B. 272) en vez de una de las razones simples, qualquiera otra igual con ella, se sigue que si en la última razon de la proporcion de arriba en vez de la razon $P : p$, substituyo la de $R : r$, que es igual con ella, porque todos los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes, y sus perímetros tienen la misma razon que sus radios rectos, tendré $P' : p' :: R.R : r.r :: R^2 : r^2$; y dividiendo, será $P' - p' : P' :: R^2 - r^2 : R^2$, de donde sale $P' - p' = \frac{P'(R^2 - r^2)}{R^2}$; pero sea qual fuere el polígono circunscripto, su radio recto siempre es igual al radio del círculo, y este, por exemplo, CD (*fig. XVIII.*) es igual al radio recto Cs del polígono inscripto mas la sagita sD, se sigue que si á la sagita sD la llamamos s, una vez que el radio recto del ins-

inscripto le hemos llamado r, será $R = r + s$, y $R^2 = r^2 + 2rs + s^2$; y substituyendo este valor de R^2 en el numerador de la expresion de arriba, será $P' - p' =$

$$\frac{P(r^2 + 2rs + s^2 - r^2)}{R^2} = \frac{P(2rs + s^2)}{R^2} = \frac{P.s.(2r + s)}{R^2};$$ y

como s, que es la sagita, es un factor que le podemos hacer menor que qualquier cantidad dada (Teor. XVIII.), se sigue que tambien podemos hacer menor que qualquier cantidad dada, todos los productos en que entre (Cor. del Teor. IV.), y por lo mismo podemos hacer que la diferencia $P' - p'$ de las superficies de dichos polígonos sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Cor. Si la diferencia entre la superficie del polígono circunscripto é inscripto, se puede hacer menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, siendo la superficie del círculo mayor que la superficie del inscripto, y menor que la del circunscripto, se sigue que con mas razon podremos hacer que la diferencia entre la superficie de uno de estos polígonos, y la del círculo sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Teor. XXIII. *La superficie del círculo es igual al producto de la circunferencia por la mitad del radio, ó á* $\frac{C.R}{2}$, *llamando* C *á la circunferencia, y* R *al radio.*

Dem. Una vez que el perímetro del polígono circunscripto, á medida que se va aumentando el número de lados, va acercándose al valor de la circunferencia, y que podemos hacer que la diferencia que haya entre los dos (Cor. del Teor. antec.) sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, se sigue que podremos hacer que $\frac{P.R}{2}$, que es la superficie del polígono circunscripto, se acerque tan-

tanto como se quiera á $\frac{C.R}{2}$; y como $\frac{P.R}{2}$, que es la superficie del polígono, al mismo tiempo que se aproxîma á $\frac{C.R}{2}$, se acerca al valor de la superficie del círculo, tambien se sigue que podemos hacer que $\frac{P.R}{2}$ se acerque á $\frac{C.R}{2}$, y á la superficie del círculo á un mismo tiempo tanto como queramos, y por lo mismo podremos hacer que la diferencia que $\frac{P.R}{2}$ lleve á $\frac{C.R}{2}$, y á la superficie del círculo, sea menor que qualquier cantidad dada; luego tenemos aquí tres cantidades, una variable $\frac{P.R}{2}$, y las otras dos constantes, á saber $\frac{C.R}{2}$, y la superficie del círculo, en que la variable se puede acercar á las dos constantes á un mismo tiempo tanto como se quiera; luego en virtud del Teor. VI. inferimos que las dos cantidades constantes son iguales, y que por lo mismo, superficie del círculo $= \frac{C.R}{2}$; luego la superficie de todo círculo es igual á su circunferencia multiplicada por la mitad del radio.

Cor. Si la equacion sup. de círc. $= \frac{C.R}{2}$, la partimos por 2, será $\frac{\text{sup. de círc.}}{2} = \frac{C}{2} . \frac{R}{2}$; lo que nos dice que la superficie del semicírculo es igual á la semicircunferencia multiplicada por la mitad del radio; si los miembros de dicha equacion se dividen por 4, se convertirá en $\frac{\text{sup. de círc.}}{4} = \frac{C}{4} . \frac{R}{2}$; lo que nos dice que la superficie del quadrante de círculo es igual al quadrante de circunferencia multiplicado por la mitad del radio; y si en general, los dos miembros de la expresada equacion los dividimos por n, será $\frac{\text{sup. de círc.}}{n} = \frac{C}{n} \cdot \frac{R}{2}$; lo que nos dice que la superficie de una porcion qualquiera de círculo, comprehendida por un arco y dos radios tirados á sus extremos, que es lo que se llama sector, es igual al arco correspondiente multiplicado por la mitad del radio.

Esc. Los Autores de Geometría se han contentado con poner la regla que se debe seguir para hallar la superficie del círculo, y de las figuras que le pertenecen, y no han pasado á determinar lo que se debe hacer para que, dada una línea qualquiera de las que determinan un círculo, como son el radio, diámetro, circunferencia, ó un arco con su número de grados, se halle su superficie inmediatamente sin tener necesidad de hacer ninguna operacion auxîliar. Por lo que mi Catedrático el Señor D. Antonio Varas, cuyo zelo por la instruccion pública es bien notorio, siempre ha introducido al explicar la Geometría esta idea feliz, tan propia de la sencillez y exâctitud de esta ciencia, como útil y ventajosa en la práctica; cuyo trabajo es tanto mas apreciable, quanto mayores son las aplicaciones que de él se hacen á diferentes asuntos, y quanto mayor es el tiempo que ahorra; y así, sus discípulos tienen la ventaja de poder resolver en muy pocos minutos qüestiones que, de otro modo, no lo podrian executar en muchas horas, y sin auxîlio de libros. Siguiendo pues sus sabias é interesantes investigaciones, con la mira de facilitarlas quanto posible sea, y de que los jóvenes se familiaricen con ellas, he calculado una multitud de fórmulas; pero en estas Adiciones solo presentaré las que expresan el modo de hallar, sin ningun rodeo, la superficie del círculo, las de algunas figuras que dependen de él, y las de la superficie y volúmen del cilindro, cono y esfera.

Prob. VIII. *Hallar las fórmulas para la superficie del círculo con relacion al radio, al diámetro y á la circunferencia.*

Res. y dem. Sup. de círc. (Teor. XXIII.) $= \frac{C.R}{2}$; substituyendo en vez de C su valor (Cor. del Prob. V.) 3, 14 &c. D, será

Sup. de círc. $= \frac{3,14159 \text{ \&c. } D.R}{2} = \frac{3,141 \text{ \&c. } 2R.R}{2} =$ $3,1415926536.R^2$: lo que nos dice que multiplicando el quadrado del radio por el factor constante 3,141 &c., hallarémos la superficie del círculo.

Si en vez de R substituimos su valor $\frac{D}{2}$ en la equacion de arriba, se tendrá la fórmula con relacion al diámetro, á saber;

Sup. de círc. $= 3,141 \text{ \&c. } R^2 = 3,141 \text{ \&c.} \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \ldots$ $3,141 \text{ \&c.} \frac{D^2}{4} = \frac{3,1415926536}{4}.D^2 = 0,7853981634.D^2$.

Si en la equacion sup. de círc. $= \frac{C.R}{2}$, substituimos en vez de R su valor $\frac{D}{2}$, y luego en vez de D su valor (Cor. del Prob. V.) 0,318 &c. C, tendrémos

$$\text{Sup. de círc.} = \frac{C.R}{2} = \frac{C.\frac{D}{2}}{2} = \frac{C.D}{4} =$$

$$\frac{C.0,3183 \text{ \&c. } C}{4} = \frac{0,3183098862}{4} \times C^2 = 0,0795774715.C^2.$$

Prob. IX. *Dadas las circunferencias, los diámetros ó los radios, hallar la superficie de la corona.*

Res. y dem. Como la superficie de la corona es igual á la del círculo mayor, menos la del menor, si si llamamos c, d, r á la circunferencia, diámetro y radio del círculo menor, y hacemos uso de las fórmulas del Prob. antec., será

Sup. de la corona $=$ sup. de Circ. grande $-$ sup. de circ. pequeño $= 0{,}079$ &c. $C^2 - 0{,}079$ &c. $c^2 = \ldots\ldots$ $0{,}0795774715.(C^2-c^2) = 0{,}0795774715.(C+c).(C-c)$, porque siempre podemos poner en vez de la diferencia de dos quadrados la suma de las raices multiplicada por su diferencia.

Sup. de corona $=$ sup. de Circ. $-$ sup. de circ. $=$ $0{,}7853$ &c. $D^2 - 0{,}7853$ &c. $d^2 = 0{,}7853981634.(D^2-d^2) = 0{,}7853981634.(D+d).(D-d)$.

Sup. de corona $=$ sup. de Circ. $-$ sup. de circ. $=$ $3{,}141$ &c. $R^2 - 3{,}141$ &c. $r^2 = 3{,}1415926536.(R^2-r^2) = 3{,}1415926536.(R+r).(R-r)$.

Prob. X. *Dado el radio, diámetro ó circunferencia de un círculo, y el número de grados del arco de un sector, hallar su superficie.*

Res. y dem. Como la superficie de un sector es (Cor. de Teor. XXIII.) igual á la longitud del arco multiplicada por la mitad del radio, si en vez de la longitud de dicho arco, ponemos su valor (Prob. VI.) con relacion al radio, tendrémos

Sup. del sector $=$ longitud del arco $\times \frac{R}{2} = \ldots\ldots\ldots$ $0{,}0087266463\ G.D.\frac{R}{2} = 0{,}0087266463.2R.G.\frac{R}{2}$ $= 0{,}0087266463.G.R^2$.

Si en vez de R substituimos su valor $\frac{D}{2}$, tendrémos la fórmula con relacion al diámetro, y será Sup. de sector $= 0{,}00872$ &c. $G.R^2 = 0{,}00872$ &c. $G\times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 0{,}00872$ &c. $G.\frac{D^2}{4} = \frac{0{,}0087266463}{4}.G.D^2 =$

$$0{,}0021816616.G.D^2.$$

Si en vez de L substituimos su valor (Prob. VI.) $0{,}00277$ &c. $G.C$, y luego en vez de R el suyo

0,

$0{,}159154943\,1\,.\,C$ (Cor. de Prob. V.), tendrémos para la superficie del sector una fórmula en que no entre mas que la circunferencia y el número de grados del arco; la qual será

$$\text{Sup.de sector} = L.\text{ del arco} \times \frac{R}{2} = 0{,}0027777778\,.\,G.C \times \frac{0{,}159154943\,1\,.\,C}{2} = 0{,}0027777778\,.\,G.C \times \ldots\ldots\ldots$$
$$0{,}079577471\,5\,.\,C = 0{,}0027777778\,.\,0{,}0795774715\,.\,G.C.C = 0{,}0002210485\,.\,G.C^2.$$

Cor. Como la superficie del segmento es igual á la del sector, menos la del triángulo, si de dicha superficie quitamos $\frac{\text{alt. base}}{2}$, que es la superficie de dicho triángulo, tendrémos la superficie del segmento: por ahora no podemos conocer el valor de la cuerda del arco, que es la base del triángulo, ni tampoco su altura; pero mas adelante se verá que la superficie de este triángulo está representada, llamando G al número de grados del arco, por sen. $\frac{1}{2}G$. cos. $\frac{1}{2}G$.

VIII.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo del prisma y medicion de su superficie (B. 728) dice: De aquí inferimos: 1.º que quando un prisma, &c.

Teor. XXIV. *Si se inscriben y circunscriben al círculo, que sirve de base al cilindro, polígonos regulares de un mismo número de lados; y por los vértices de los ángulos se tiran rectas paralelas al exe del cilindro, juntando sus extremos superiores por otras rectas, se formarán dos prismas, uno inscripto y otro circunscripto al cilindro propuesto; y se podrá hacer que la diferencia entre la superficie del prisma circuns-*

cunscripto y la del inscripto sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Dem. Las rectas aa', bb' (*fig. XX.*) elevadas paralelamente á OO', y por consiguiente perpendiculares al plano $abcdef$, estarán en la superficie del cilindro, pues que los rectángulos $aOO'a'$, $bOO'b'$ son iguales al rectángulo generador; y como la superficie lateral de un prisma recto (B. 728) es igual al producto del perímetro de su base por su altura, y aquí los dos prismas tienen una misma altura, que es el lado del cilindro, se sigue que si al perímetro de la base del circunscripto, le llamamos P, y al de la del inscripto p, y á la altura le llamamos L, por ser inicial del lado del cilindro, la superficie del circunscripto será $P.L$, y la del inscripto $p.L$, y la diferencia entre estas superficies será

$$P.L-p.L=L.(P-p);$$

y como $P-p$, siendo la diferencia entre los perímetros de los polígonos de las bases, podemos hacer (Teor. XX.) que sea menor que qualquier cantidad dada, se sigue que tambien podemos hacer menor que qualquier cantidad dada, por pequeña que sea, la diferencia entre la superficie del prisma circunscripto y la del inscripto; pues en esta diferencia entra como factor una cantidad que puede llegar á ser menor que qualquier cantidad dada.

Cor. De donde se infiere que, siendo la superficie del cilindro mayor que la superficie del prisma inscripto, y menor que la del circunscripto, con mas razon podrémos inscribir ó circunscribir un prisma á un cilindro, en que la diferencia entre la superficie del prisma y la del cilindro sea menor que una cantidad dada por pequeña que sea.

En efecto la superficie convexâ del cilindro es mayor que la lateral del prisma inscripto; pues si lla-

llamamos *P* al perímetro de la base del prima inscripto de un número de lados expresado por *n*, é inscribimos otro prisma de duplo número de lados, la superficie de éste será mayor que la del anterior, pues siempre será igual al perímetro de su base multiplicado por el lado del cilindro, y como hemos manifestado (Cor.I. del Teor. XI.) que de muchas figuras inscriptas en una misma curva, qual es aquí la circunferencia del círculo de la base del cilindro, la que tiene mayor número de lados, es la que tiene mayor perímetro, no hay duda en que aumentando uno de los factores, ha de aumentar el producto, y por lo mismo la superficie de este último prisma será mayor que la del prisma primitivo.

Ademas, como un prisma tiene tantas aristas como lados el polígono de su base, y estas aristas hemos probado en el Teorema antecedente, que están en la superficie convexá del cilindro, se sigue que por tener el prisma de *n* lados, *n* líneas en la superficie del cilindro, y el de duplo número de lados, duplo número de líneas en la misma superficie convexâ, la superficie lateral del prisma de duplo número de lados, se acerca mas á la convexâ del cilindro, que la del prisma anterior de *n* lados: y como si volviésemos á inscribir otro prisma de duplo número de lados, demostraríamos del mismo modo que la superficie de éste sería mayor que la del anterior, y que se iba aproxîmando mas á la superficie del cilindro, y así sucesivamente, se sigue que tenemos aquí dos cantidades, una variable, que es la superficie del prisma que vamos inscribiendo, y otra constante, que es la del cilindro, en que la variable al paso que crece, se acerca á la constante; luego en virtud del Teor. I. la constante es mayor que la variable; y como la constante es la superficie convexâ del cilindro, y la variable la superficie lateral de qualquier prisma inscripto en él, inferimos que supusimos arriba muy bien, que la superficie convexâ del cilindro era mayor que la lateral del prisma inscripto.

Tambien supusimos que la superficie convexâ del cilindro era menor que la lateral del prisma circunscripto; en efecto, llamando *P* al perímetro de la base del prisma circunscripto, y *L* al lado del cilindro á que lo está; la superficie lateral de dicho prisma (Teor. antec.) será *P.L*; si circunscribimos á la base del cilindro un polígono de duplo número de lados, el perímetro de éste (Cor. II. del Teor. XII.) es menor que el del anterior, y por consiguiente la superficie del prisma circunscripto que tenga esta base, tambien será menor que la del prisma anterior; y por tener duplo número de líneas en la superficie convexâ del cilindro, se aproxîmará mas á ella que la superficie del prisma anterior, y circunscribiendo así otros prismas de duplo número de lados, manifestariamos del mismo modo que la superficie lateral iba disminuyendo al mismo tiempo que se aproxîmaba á la superficie convexâ del cilindro; de donde se sigue que tenemos aquí dos cantidades, una variable, que es la superficie del prisma que se circunscribe, y otra constante, que es la superficie convexâ del cilindro, en que la variable al paso que mengua se acerca á la constante; por lo que (Teor. II.) la constante será menor que qualquier valor de la variable; luego supusimos muy bien que la superficie convexâ del cilindro era menor que la lateral de qualquier prisma circunscripto á él.

Teor. XXV. *La superficie convexâ del cilindro recto es igual al producto de la circunferencia de su base por su lado; es decir, que si llamamos* L *al lado del cilindro recto, y* C *á la circunferencia de la base, será superficie del cilindro recto = C.L.*

Dem.

Dem. Si señalamos con P el perímetro del prisma circunscripto, una vez que su altura es el lado del cilindro, será su superficie igual á $P.L$; y como P se va acercando á C á medida que se aumenta el número de lados (Cor. del Teor. XX.), y en el mismo tiempo (Cor. del Teor. XXIV.) la superficie del prisma circunscripto se acerca á la superficie del cilindro, se sigue que tenemos tres cantidades, una variable $P.L$, y las otras dos constantes, á saber, la superficie verdadera del cilindro, y $C.L$, en que la variable se acerca al mismo tiempo á ambas tanto como se desea; luego dichas dos cantidades constantes (Teor. VI.) serán iguales; y tendrémos; superficie de cilindro recto $= C.L$. Luego la superficie del cilindro recto es igual á la circunferencia de la base multiplicada por el lado; y como éste es igual con la altura, se sigue que tambien podemos decir, haciendo igual á A la altura, que superficie de cilindro recto $= C.A$.

Cor. I. De aquí se infiere que si en vez de C substituimos su valor (Cor. del Prob. V.) 3,141 &c. D, tendrémos

Sup. de cil. recto $= C.A = 3,1415926536.D.A$.

Cor. II. Partiendo por 2, por 4, y en general por n, los dos miembros de la equacion sup. de cil. recto $= C.A$, demostraríamos que para hallar la superficie del semicilindro, se habia de multiplicar la semicircunferencia por el lado ú altura; para hallar la del quadrante de cilindro, multiplicar el quadrante de circunferencia por la altura, y en general para hallar la superficie de un sector cilíndrico multiplicar el arco por la altura; de manera que si en vez del arco ponemos sus valores (Prob. VI.), tendrémos con relacion al diámetro

Sup. del sector cilíndrico $=$ arco . altura $=$.......
0,0087266463.$D.G.A$.

Con relacion al radio

Sup. de sector cilíndrico $=$ arco . altura $=$ ....
0,0174532925 . R . G . A;

y con relacion á la circunferencia,

Sup. de sector cilíndrico $=$ arco . altura $=$ ....
0,0027777778 . G . C . A.

IX.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo de la medicion de los prismas, dice: 1.º Si el prisma es recto, su solidez será igual &c.

Teor. XXVI. *A un cilindro recto se puede inscribir y circunscribir un prisma, tal que la diferencia entre el volúmen del prisma circunscripto y el del inscripto, sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Si llamamos P la superficie de la base del prisma circunscripto, y p la del inscripto, A la altura del cilindro, que es la misma que la de los dos prismas, será por la proposicion antecedente (B. 732) $P.A$ el volúmen del prisma circunscripto; y $p.A$ el del inscripto, y la diferencia entre estos volúmenes, será

$$P.A - p.A = A.(P-p);$$

y como podemos hacer que $P - p$ sea menor que qualquier cantidad dada (Teor. XXII.), se sigue (Cor. de Teor. IV.) que tambien podrémos hacer menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, la diferencia de estos volúmenes; luego, &c.

Cor. De donde se infiere que, que siendo el volúmen del cilindro mayor que el del prisma inscripto, y menor que el del circunscripto, podrémos con mas razon inscribir ó circunscribir al cilindro un prisma, en que la diferencia del volúmen de dicho

pris-

prisma y la del cilindro, sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Como el cilindro está contenido en el prisma circunscripto, y el inscripto lo está en el cilindro, no se necesita probar que el volúmen del cilindro es menor que el del prisma circunscripto, y mayor que el del inscripto; pues para que una cosa esté contenida en otra, necesita ésta ser mayor que la primera.

Teor. XXVII. *El volúmen del cilindro es igual á la superficie de su base multiplicada por su altura; es decir, que si llamamos C′ la superficie de la base, y A su altura, será volúmen de cilindro recto* $= C'.A$.

Dem. Si señalamos con P la superficie de la base del prisma circunscripto, será $P.A$ su volúmen (B. 732); pero hemos manifestado que $P.A$ se puede acercar á $C'.A$ tanto como se quiera, pues podemos hacer que P se diferencie de C' tan poco como queramos (Cor. de Teor. XXII.); y como tambien podemos hacer que $P.A$, que representa el volúmen del prisma circunscripto, se diferencie del volúmen del cilindro tan poco como deseemos, se sigue que tenemos aquí tres cantidades $P.A$, $C'.A$, y el verdadero volúmen del cilindro, de las quales la variable $P.A$, se puede acercar á las otras dos constantes tanto como se quiera; luego en virtud del Teor. VI. dichas dos cantidades serán iguales; luego volúmen de cilindro $= C'.A$.

Esc. Del mismo modo demostraríamos que el volúmen del cilindro obliquo era igual á la superficie de su base por su altura (1).

(1) Viendo que mis discípulos aprendian con la mayor docilidad y aplicacion quanto les explicaba, al decirme el maquinista que entre los cuerpos geométricos que se necesitan para formarse idea de lo que representan las láminas, no me podia hacer el cilindro ni cono obliquos, por haberse contentado los que le habian encargado semejantes colecciones con un ci-

Cor. I. De aquí se deduce que si en vez de C', que representa la superficie de la base del cilindro, substi-

cilindro y cono rectos, á que habian dado una seccion obliqua, no me parecieron acreedores á que abusase de la confianza que en mí tenian, presentandoles tan equivocadas estas primeras ideas; y así, me puse á reflexîonar sobre el asunto, y dí al maquinista las siguientes reglas.

Regla para formar el cilindro obliquo.

Torneese un cilindro elíptico con una excentricidad tal, que si se la multiplica por 14,928, ó proxîmamente por $14\frac{9}{10}$, resulte el exe mayor de la elipse, que ha de ser el diámetro del círculo de la base del cilindro obliquo que se ha de formar. Unanse con líneas los extremos de los exes mayores y menores de las bases de este cilindro elíptico; tómese en uno de los lados del cilindro que une los extremos del exe menor una parte igual con la mitad del exe mayor, y en otro lado de los que unen los extremos de los exes mayores, tómese la quarta parte de dicho exe mayor, y haciendo pasar por estos dos puntos y el otro extremo del exe menor, un plano (ó lo que es lo mismo, un corte de sierra), la seccion del cilindro elíptico será un círculo que servirá de base al cilindro obliquo. Haciendo pasar otra seccion paralela á ésta, se tendrá formado un cilindro obliquo, que se sostendrá sobre su base siempre que su lado sea menor que el duplo del diámetro de la base.

Regla para formar el cono obliquo.

Torneese un cono elíptico en que el exe mayor sea igual á $13\frac{6}{7}$ veces la excentricidad que da el torno, y cuya altura sea $10\frac{2}{7}$ veces la excentricidad; tírense al vértice líneas desde los extremos de los exes de la elipse; tómese en una de las que unen los extremos del exe menor una parte igual á $5\frac{3}{2}$ veces la excentricidad, y en una de las que unen los extremos del exe mayor, una parte igual con $4\frac{1}{7}$ veces la misma excentricidad; por estos dos puntos y el otro extremo del exe menor hágase pasar un plano, el qual cortará á dicho cono elíptico, de modo que la seccion sea círculo, y quedará hecho el cono obliquo que se deseaba.

tituimos sus valores (Prob. VIII.), será con relacion al diámetro

Volúmen de cilindro $= C'.A = 0{,}7853981634.D^2.A$.

Con relacion al radio, volúmen de cilindro $= C'.A = 3{,}141592653 6.R^2.A$.

Con relacion á la circunferencia:

Volúmen de cilindro $= C'.A = 0{,}0795774715.C^2 A$.

Cor. II. Si se nos pidiese el volúmen de una corona cilíndrica, que ocurre freqüentemente en la Arquitectura, no haríamos mas que restar del volúmen del cilindro mayor el del menor; así es que si designamos con las letras mayúsculas las líneas del cilindro mayor, y con las minúsculas las del menor; una vez que la altura *A* es comun para ambos cilindros, tendrémos con relacion al diámetro

Volúmen de corona cilínd. = volúmen de Cil. — vol. de cil. $= 0{,}7853$ &c. $D^2.A - 0{,}7853$ &c. $d^2 A =$

$$0{,}7853981634.A.(D^2 - d^2).$$

Con relacion al radio

Vol. de Corona cilínd. = vol. de Cil. — vol. de cil. $=$ $3{,}141$ &c. $R^2.A - 3{,}141$ &c. $r^2.A =$ ....

$$3{,}1415926536.A.(R^2 - r^2),$$

Con relacion á la circunferencia

Vol. de Cor. cilínd. = vol. de Cil. — vol. de cil. $=$ $0{,}079$ &c. $C^2.A - 0{,}079$ &c. $c^2.A = 0{,}0795774715.$

$$A.(C^2 - c^2).$$

X.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo de la pirámide y medicion de su superficie (B. 745.) dice: Y como la superficie de un trapecio es igual al producto, &c.

Teor. XXVIII. *A todo cono recto se le puede inscribir y circunscribir una pirámide regular, de modo que la* *la diferencia entre la superficie lateral de la inscripta y la de la circunscripta, sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Si en el círculo que sirve de base al cono inscribimos un polígono regular *abcd* &c. (*fig. XXI.*), y le circunscribimos otro del mismo número de lados, del qual para evitar la confusion, solo representamos uno de los lados *AB* en la figura, y por los vértices de sus ángulos tiramos líneas al cúspide del cono, tendrémos inscripta y circunscripta al cono una pirámide regular; y si llamamos *P* al perímetro de la base de la circunscripta, y *p* al de la inscripta, una vez que la superficie lateral de una pirámide regular (B.743.) es igual al perímetro de su base multiplicado por la mitad de su apotema, será la superficie lateral de la pirámide circunscripta igual á $\frac{P.SG}{2}$, pues *SG* es su apotema; y $\frac{p.Sg}{2}$ la de la inscripta; y $\frac{P.SG}{2} - \frac{p.Sg}{2}$ será su diferencia; y como al paso que se aumenta el número de lados de las bases de las pirámides, se acerca *P* á *p* (Teor. XX.), y *SG* á *Sg*, de manera que la diferencia entre estas cantidades puede llegar á ser menor que qualquier cantidad dada ó asignable, inferimos que tambien la diferencia entre dichas superficies podrá ser menor que qualquier cantidad por pequeña que sea: en efecto la diferencia entre *SG* y *Sg* puede ser menor que qualquier cantidad; pues como la suma de dos lados de un triángulo es siempre (Teor. X.) mayor que el tercero, en el *SGg* será $Sg+Gg>SG$, y quitando de ambos miembros la cantidad *Sg*, será $Gg>SG-Sg$, es decir, que la sagita es mayor que la diferencia entre la apotema de la pirámide circunscripta, y la de la inscripta; pero la sagita puede llegar á ser menor

que

que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; luego con mas razon podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada la diferencia entre dichas apotemas.

Cor. De aquí se infiere que, siendo la superficie del cono mayor que la de la pirámide inscripta, y menor que la de la pirámide circunscripta, con mas razon podremos inscribir ó circunscribir á un cono una pirámide en que la diferencia entre su superficie y la del cono sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Hemos dicho que la superficie del cono era mayor que la de la pirámide inscripta, y menor que la de la circunscripta; en efecto, siendo la superficie de la pirámide inscripta (Teor. antec.) $\frac{p.Sg}{2}$, si inscribimos una pirámide de duplo número de lados, el perímetro de su base (Cor. I. del Teor XI.) será mayor que el de la base del anterior, y por lo mismo su superficie lateral será mayor que la de la pirámide anterior; y como esta de duplo número de lados tendrá un duplo número de aristas en la superficie convexá del cono, se acerca su superficie mas á la del cono que la de la pirámide primitiva. Siguiendo inscribiendo pirámides de duplo número de lados, manifestaríamos del mismo modo que la superficie iba aumentando al mismo tiempo que se aproxîmaba á la superficie convexâ del cono; luego tenemos aquí dos cantidades, una variable, que es la superficie lateral de la pirámide inscripta, que al paso que va creciendo, se aproxîma á la constante, que es la superficie convexâ del cono; luego (Teor. I.) la superficie convexâ del cono es mayor que la lateral de qualquier pirámide inscripta en él.

Una vez que (Teor. antec.) la superficie lateral de la pirámide circunscripta es $\frac{P.SG}{2}$, y que si circunscribimos otra pirámide de duplo número de lados del de esta última, el perímetro de su base (Cor. II. del Teor. XII.) será menor que el de la base de la pirámide primitiva, se sigue que la superficie lateral de la de duplo número de lados es menor que la de la primitiva; y como en la de duplo número de lados hay duplo número de caras, y cada cara es tangente á la superficie convexâ del cono, y tiene por lo mismo una línea en dicha superficie, se sigue que la superficie de esta última, por tener mas líneas en la superficie del cono, se aproxîma mas á ella. Circunscribiendo pirámides de duplo número de lados, manifestaríamos del mismo modo que la superficie lateral iba disminuyendo al paso que se aumentaban los lados, y que al mismo tiempo se iba aproxîmando su superficie á confundirse con la del cono; luego nos encontramos aquí con dos cantidades, una variable, que es la superficie de la pirámide circunscripta, que al paso que mengua se aproxîma á la constante, que es la superficie convexâ del cono; luego (Teor. II.) la superficie convexâ del cono es menor que la lateral de qualquier pirámide circunscripta á él; por lo qual hicimos muy bien en decir que la superficie del cono era mayor que la de la pirámide inscripta en él, y menor que la de la circunscripta.

Teor. XXIX. *La superficie de un cono recto es igual á la mitad del producto de la circunferencia de su base por el lado; es decir, que si llamamos* C *la circunferencia, y* L *el lado, tendrémos sup. lateral de cono recto* $= \frac{C.L}{2}$.

Dem. Si *P* representa el perímetro del polígono circunscripto á la base del cono, una vez que la apotema de la pirámide circunscripta es el lado del cono, se-

será $\frac{P.L}{2}$ la superficie de dicha pirámide; pero $\frac{P.L}{2}$ se puede acercar á $\frac{C.L}{2}$ tanto como queramos, pues lo puede hacer P á C (Cor. de Teor. XX.), y como tambien $\frac{P.L}{2}$, que representa la superficie lateral de la pirámide circunscripta, se puede acercar á la superficie lateral del cono (Cor. de Teor. antec.) tanto como se desee; tenemos aquí tres cantidades, en que la variable $\frac{P.L}{2}$ se puede acercar á las otras dos cantidades $\frac{C.L}{2}$, y la superficie lateral del cono tanto como queramos; luego (Teor. VI.) dichas cantidades constantes serán iguales, y tendrémos

$$\text{Sup. lateral de cono recto} = \frac{C.L}{2}.$$

Cor. Luego si substituimos en vez de C sus valores con relacion al radio y diámetro (Cor. de Prob. V.), tendrémos con relacion al radio

$$\text{Sup. lateral de cono recto} = \frac{C.L}{2} = \frac{3{,}141\ \&c. 2R.L}{2} = 3{,}1415926536 . R.L.$$

Con relacion al diámetro

$$\text{sup. lateral de cono recto} = \frac{C.L}{2} = \frac{3{,}1415926536}{2} \times D.L = 1{,}5707963268 . D.L.$$

XI.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo de la solidez de la pirámide, &c. (B. 755.) dice: 2.º luego la solidez de la pirámide es el tercio, &c.

Esc. Como esta última proposicion supone que dos

dos pirámides de igual base y altura son iguales en volúmen, y esto no está bien demostrado, lo executaremos en los dos siguientes Teoremas.

Teor. XXX. *A toda pirámide se la puede inscribir y circunscribir un número de prismas, de manera que la diferencia entre la suma de los circunscriptos y la de los inscriptos sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Sea *SABC* (*fig. XXII.*) la pirámide propuesta; si se divide la altura en un número qualquiera de partes iguales, por exemplo, en quatro, y por los puntos de division se conciben planos paralelos á su base, tendremos dividida la pirámide en otra pirámide *SQRT*, y en tantos trozos *QRTNML*, *LMNHGF*, *FGHCBA* como partes tenia la altura menos una. Concibiendo ahora un prisma *ZUSTRQ* que tenga la misma base y altura que la pirámide, y en cada trozo dos prismas de la misma altura que él, y que el uno tenga por base la mayor del trozo, y el otro la menor, tendrémos el número de prismas circunscriptos

ZUSTRQ, *OPTNML*, *YKNHGF*, *DEHCBA*,

y el de los inscriptos

QRTNml, *LMNHgf*, *FGHCba*.

Pero el primer prisma circunscripto *ZUSTRQ* es igual con el primero inscripto *QRTNml* por tener la misma base y altura; el segundo circunscripto, por la misma razon, tambien es igual con el segundo inscripto, y el tercero con el tercero; luego la diferencia entre la suma de los circunscriptos é inscriptos está representada por el último circunscripto *DEHCBA*; como si inscribiéramos y circunscribiéramos duplo número de prismas, el último circunscripto que expresaria la diferencia sería dos veces menor que el *DEHCBA*, se sigue que continuando del mismo modo, como el último prisma va haciénciéndose dos veces menor, al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; pero este prisma expresa la diferencia entre la suma de los circunscriptos y la de los inscriptos; luego *á cada pirámide se la puede inscribir y circunscribir, &c.*

Cor. De aquí se infiere que, siendo el volúmen de la pirámide mayor que la suma de los prismas inscriptos, y menor que la de los circunscriptos, con mas razon se podrá inscribir ó circunscribir un número de prismas, de modo que la diferencia entre la suma de éstos y el volúmen de la pirámide, sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Teor. XXXI. *Dos pirámides de igual base y altura, son iguales en volúmen.*

Dem. Sean $SABC$, $S'A'B'C'$ las dos pirámides; si se concibe dividida su altura en un mismo número de partes iguales, y por los puntos de division se hacen pasar planos, las secciones que causen estos planos serán iguales (B. 751.); concibiendo ahora un prisma circunscripto á cada una de las partes en que quede dividida la pirámide, y llamando S la suma de los prismas circunscriptos á $SABC$, y S' á la de los circunscriptos á $S'A'B'C'$, tendrémos

$$S = S' \text{ ó } \frac{S}{S'} = 1,$$

pues cada prisma de la $SABC$, por tener igual base y altura que el correspondiente en la $S'A'B'C'$ es igual en él; pero S se puede acercar á la pirámide $SABC$ (Cor. de Teor. antec.) tanto como se quiera, y S' á $S'A'B'C'$; luego tenemos aquí dos cantidades variables S, S', que se pueden acercar tanto como se quiera á dichas dos constantes, y cuya relacion es constante, á saber la unidad; luego en virtud del Teor. VII. inferimos que esta relacion

es

es la de las dos cantidades constantes $SABC$, $S'A'B'C'$, y por lo mismo tendrémos

$$\frac{SABC}{S'A'B'C'}=1, \text{ ó } SABC=S'A'B'C';$$

luego dos pirámides de igual base, &c.

Teor. XXXII. *A todo cono se puede inscribir y circunscribir una pirámide de modo que la diferencia entre el volúmen de la circunscripta y el de la inscripta, sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Si llamamos P la superficie de la base de la pirámide circunscripta, y p la de la inscripta, una vez que ámbas tienen una misma altura SO (*fig. XXI.*), que la llamarémos A, y que el volúmen de toda pirámide es igual á la superficie de la base multiplicada por el tercio de la altura, se sigue que $\frac{P.A}{3}$ será el volúmen de la pirámide circunscripta, y $\frac{p.A}{3}$ el de la inscripta, y la diferencia entre dichos volúmenes será

$$\frac{P.A}{3}-\frac{p.A}{3}=\frac{A}{3}(P-p);$$

y como podemos hacer que $P-p$ sea menor (Teor. XXII.) que qualquier cantidad dada, se sigue (Cor. del Teor. IV.) que tambien podrémos hacer menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, la diferencia entre el volúmen de la pirámide circunscripta y el de la inscripta; luego &c.

Cor. Siendo el volúmen del cono mayor que el de la pirámide inscripta, y menor que el de la circunscripta; se sigue que con mas razon podrémos inscribir ó circunscribir á un cono una pirámide, tal que la diferencia entre el volúmen de la pirámide y el del cono sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Teor.

Teor. XXXIII. *El volúmen de todo cono es igual á la superficie de la base multiplicada por el tercio de la altura, es decir, que si llamamos C′ á la superficie de la base, y A á su altura, será*

$$\textit{volúmen de cono} = \frac{C'.A}{3}.$$

Dem. Si P representa la superficie de la base de la pirámide circunscripta, y A la altura, que es la misma que la del cono, será $\frac{P.A}{3}$ el volúmen de dicha pirámide; pero $\frac{P.A}{3}$ se puede acercar á $\frac{C'.A}{3}$ tanto como queramos (Cor. de Teor. XXII.) por poderlo hacer P á C; y como tambien $\frac{P.A}{3}$, que representa el volúmen de la pirámide, se puede acercar al volúmen del cono tanto como se quiera (Cor. del Teor. antec.), tenemos aquí tres cantidades, de las quales la variable $\frac{P.A}{3}$ se puede acercar á las otras dos constantes $\frac{C'.A}{3}$, y al volúmen del cono, tanto como se quiera; luego en virtud del (Teor. VI.) tendrémos

$$\text{Volúmen de Con.} = \frac{C'.A}{3}.$$

Cor. Si en vez de C', que representa la superficie del círculo de la base del cono, substituimos sus valores (Prob. VIII.), tendrémos con relacion al diámetro

$$\text{Volúm. de Con.} = \frac{C'.A}{3} = \frac{0{,}7853981634.D^2.A}{3} = \ldots 0{,}2617993878.D^2.A.$$

Con relacion al radio

$$\text{Volúm. de Con.} = \frac{C'.A}{3} = \frac{3{,}1415926536.R^2.A}{3} =$$

1,

$$1,047197551 2 . R^2 . A.$$

Con relacion á la circunferencia

$$\text{Volúm. de Con.} = \frac{C^2 . A}{3} = \frac{0,0795774715 . C^2 . A}{3} = 0,0265258238 . C^2 . A.$$

XII.

Lo que sigue se debe estudiar despues de la proposicion que en el capítulo de la esfera, &c. *dice*: Finalmente se llama sector de esfera, &c.

Teor. XXXIV. *Si á un arco ad del semicírculo adp (fig. XXIII.) se le inscribe una porcion de polígono regular abcd, y se le circunscribe otra* ABCD, *y se hace girar al semicírculo al rededor del diámetro ap con las porciones de los polígonos, la diferencia entre la superficie del cuerpo que describa el circunscripto, y la del inscripto, podrémos hacer que sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Si por los extremos d y c, y por el medio l de un lado qualquiera cd se baxan al diámetro ap las perpendiculares dg, cf y lq, se tira la lO, y se baxa la cr perpendicular á dg, los triángulos dcr, qlO serán semejantes, por tener los lados del uno perpendiculares á los del otro, pues cr es perpendicular á lq, dr prolongada á qO, cd á lO; y por lo mismo darán $cd : cr :: lO : lq$; pero siendo las circunferencias de los círculos como sus radios, se puede substituir en vez de la relacion $lO : lq$ la de circunf. lO : circunf. lq, pues $lO : lq ::$ circunf. lO : circunf. lq, y por lo mismo tendrémos

$$cd : cr :: \text{cincunf. } lO : \text{circunf. } lq;$$

de donde multiplicando extremos y medios, sale

$$cd \times \text{circunf. } lq = cr \times \text{circunf. } lO.$$

Y como la medida de la superficie de un trozo de de cono es (B. 748.) igual á la circunferencia de un círculo trazado á distancias iguales de las bases paralelas, multiplicado por su lado, es claro que pues hemos tirado la *lq* desde el medio de *cd*, la superficie lateral del trozo de cono trazado por el trapecio *fcdg* al girar al rededor del exe *fg*, será igual á su lado *cd* multiplicado por circunferencia *lq*, es decir, que la superficie lateral de dicho trozo de cono será *cd*. circunf. *lq*, y como cd . circunf. $lq = cr \times$ circunf. lO, y por otra parte $cr = gf$ por lados opuestos del paralelogramo *crgf*, tendrémos que la superficie lateral de este trozo de cono será igual á la circunferencia del círculo trazado con el radio recto *lO* del polígono, multiplicada por la parte del exe *ap*, que corresponde al arco que subtende el lado de dicho polígono.

Del mismo modo demostraríamos que la superficie lateral del trozo, originado por *cb*, seria fe . circunf. iO, y la del originado por *ab*, ae. circunf. hO, y como todos los radios rectos *lO*, *iO*, *hO* &c. del polígono inscripto son iguales, se sigue que la suma de todos estos trozos de conos será igual á la circunferencia $lO \,.\, gf +$ circunf. $lO \,.\, ef +$ circunf. $lO \,.\, ae =$ circùnf. $lO\,(gf + fe + ae) =$ circunf. $lO \times ga$.

Ahora por ser la superficie lateral del trozo de cono originado de la revolucion del trapecio *DGFC*, igual (B. 748.) á DC. circunferencia LQ, y ser tambien semejantes los triángulos *CDR*, *OLQ*, por tener los lados perpendiculares, tendrémos

$$CD : CR = GF :: LO : LQ :: (\text{Teor. XXI.})\ \text{circunf.}\ LO : \text{circunf.}\ LQ;$$

de donde multiplicando extremos y medios, será

$$CD\,.\,\text{circunf.}\ LQ = GF\,.\,\text{circunf.}\ LO;$$

y como CD . circunf. LQ es igual á la superficie lateral del trozo, se sigue que la superficie lateral del trozo causado por CD será igual á FG. circunf. LO;

y del mismo modo demostraríamos que la del originado por CB era FE . circunf. OY, y la originada por BA igual á EA . circunf HO, y por ser iguales todos los radios rectos LO, YO, HO del polígono, que son los mismos que los del círculo á que está circunscripto, la suma de estos trozos será GF . circunf. $LO + FE$. circunf. $LO + EA$. circunf. $LO =$ circunf. $LO \times (GF + FE + EA) =$ circunf. $LO . GA$.

De manera que la diferencia de las superficies originadas por las porciones de los polígonos dichos es igual á circunf.

$$LO . GA - \text{circunf. } lO \times ag;$$

y como podemos hacer que (Teor. XVIII.) la diferencia entre LO radio del círculo, y lO radio recto del polígono inscripto, que es lo que constituye la sagita, sea menor que qualquier cantidad dada, tambien podrá ser menor que qualquier cantidad dada la diferencia entre sus circunferencias; y como por otra parte la diferencia entre AG y ag se puede hacer tan pequeña como se quiera, se sigue que una vez que la diferencia entre los dos factores que producen dichas superficies, puede llegar á ser menor que qualquier cantidad dada, tambien la diferencia entre dichas superficies originadas por la revolucion de la porcion de polígono circunscripto y la del inscripto, se puede hacer menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

En efecto la diferencia entre AG y ag puede ser tan pequeña como queramos; pues una vez que $AG = aG + Aa$ y $ag = aG + Gg$, será dicha diferencia $AG - ag = aG + Aa - aG - Gg = Aa - Gg$, y como $Aa = Dd$, y la dg es paralela á la base DG del triángulo OGD (B. 491), tendremos

$$Od : Og :: Dd = Aa : Gg = \frac{Aa.Og}{Od},$$ será

tam-

tambien $AG - ag = Aa - \frac{Aa.Og}{Od} = Aa\left(1 - \frac{Og}{Od}\right)$; de donde se sigue que una vez que podemos hacer á Aa, que es la diferencia entre el radio obliquo del polígono circunscripto y el del inscripto á que lo está, tan pequeña como queramos (Teor. XIX. part. II.), tambien podrá ser tan pequeña como se quiera la diferencia $AG - ag$; luego es cierto lo que arriba aseguramos.

Cor. La expresion $AG - ag = Aa \times \left(1 - \frac{Og}{Od}\right)$ tambien manifiesta que AG disminuye al mismo tiempo que Aa, puesto que ag no varía; y permaneciendo el mismo el radio LO, se sigue que miéntras mas se aumente el número de lados, mas va disminuyendo la superficie del cuerpo originado por la porcion de polígono circunscripto, y al mismo tiempo, por tener mas circunferencias comunes con la esfera, se va aproxîmando á la superficie de dicha esfera; y como lO tambien aumenta, aumentando el número de lados de la porcion de polígono, se sigue que tambien aumenta la superficie del cuerpo descrito por la porcion de polígono inscripto, y que al mismo tiempo que aumenta se va aproxîmando á la esfera, pues va teniendo comunes con ella mas circunferencias; luego la superficie de la porcion de esfera trazada por el arco ad es mayor (Teor. I.) que la trazada por la porcion de polígono inscripto, y menor (Teor. II.) que la del circunsto; y si la diferencia entre la superficie de los cuerpos originados por la porcion de polígono inscripto y circunscripto puede ser menor que qualquier cantidad dada, con mas razon podrémos hacer que la diferencia entre la superficie de uno de estos cuerpos, y la de la porcion de esfera, trazada por el arco de círculo correspondiente, sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Teor. XXXV. *La superficie de la porcion de esfera descrita por el arco abcde es igual á la circunferencia de un círculo máxîmo multiplicada por la parte ag del exe comprehendida entre el extremo a del arco, y la perpendicular tirada desde el otro extremo d; es decir, que dicha superficie será igual á ag. circunf.* LO.

Dem. Una vez que la porcion descrita por *ABCD* es igual á *AG*. circunf. *LO*, y que *AG*. circunf. *LO* se puede aproxîmar á *ag*. circunf. *LO* tanto como se quiera, pues *AG* se puede aproxîmar á *ag* (Teor. XXXIV.) lo que deseemos, se sigue que como tambien por el Cor. antec. *AG*. circunf. *LO*, que representa la superficie del cuerpo originado por la porcion circunscripta, se puede acercar á la superficie de dicha porcion de esfera tanto como se quiera, que tenemos aquí tres cantidades con las circunstancias de las del Teor. VI., es decir, una variable *AG*. circunf. *LO*, que puede acercarse á las otras dos, que son constantes, tanto como se quiera; luego dichas dos cantidades constantes serán iguales, y tendrémos sup. de casquete esférico trazado por el arco *abcd* = *ga*. circunf. *LO*.

Cor. I. De aquí se infiere que la superficie de toda la esfera es igual á su diámetro multiplicado por la circunferencia de un círculo máxîmo; pues lo que hemos manifestado del casquete ó segmento originado por el arco *abcLd*, manifestaríamos del originado por el arco *dmp*; es decir, que la superficie de dicho segmento sería tambien igual á la circunferencia de un círculo máxîmo, tal como el trazado por *LO*, multiplicada por la altura *gp*, y una vez que la del casquete originado por *abcLd* es igual á *ag*. circunf. *LO*, será

Sup. de esfera = sup. de casquete orig. por *abcLd*+ sup. del originado por *dmp* = *ag*. circunf. *LO* + *gp*.

cir-

circunf. $= LO =$ circunf. $LO(ag + gp) =$ circunf. $LO . ap$ ci $D \cdot C$, llamando C á la circunferencia, y D al diámetro.

Cor. II. Tambien se infiere que la superficie de la esfera es quádrupla de la de uno de sus círculos máxîmos; pues la superficie de éste es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio, y el diámetro, por que se ha de multiplicar la circunferencia de dicho círculo máxîmo en la superficie de la esfera es quádruplo de la mitad del radio. Si en vez de C substituimos sus valores (Cor. del Prob. V.), tendrémos con relacion al diámetro

$$\text{Sup. de Esfera} = C . D = 3{,}14159 \ \&c. \ D . D = \ldots\ldots 3{,}1415926536 . D^2.$$

Con relacion al radio

$$\text{Sup. de Esfera} = C . D = 6{,}283 \ \&c. \ R . 2R = \ldots\ldots 6{,}2831853072 . 2R^2 = 12{,}5663706144 . R^2.$$

Y si en vez de D substituimos su valor $0{,}318$ &c. C (Cor. de Prob. V.), tendrémos la fórmula con relacion á la circunferencia que será

$$\text{Sup. de Esfera} = C . D = C . 0{,}3183 \ \&c. \ C = \ldots\ldots 0{,}3183098862 . C^2.$$

Cor. III. Tambien demostraríamos del mismo modo (Teor. XXXV.) que la superficie de una zona qualquiera tambien es igual á la circunferencia de un círculo máximo, multiplicada por la altura de dicha zona; de donde resulta que si á dicha altura la llamamos A, y substituimos en vez de C su valor, tendrémos

$$\text{Sup. de Zona esférica} = C . A = \text{(Cor. de Prob. V.)} \ 3{,}1415926536 . D . A.$$

Y con relacion al radio

$$\text{Sup. de Zona esférica} = C . A = 6{,}2831853072 . R . A.$$

Teor. XXXVI. *La diferencia entre los volúmenes de los cuerpos engendrados por las porciones abcd,* ABCD (*fig. XXIII.*) *de los polígonos regulares inscrip-*

criptos y circunscriptos al arco ad, al girar al rededor de ap, y terminados por la superficie cónica descrita al mismo tiempo, por la recta DO puede llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Dem. Despues de efectuada la construccion indicada en el Teor. XXXIV. prolónguese la recta *cb* hasta que encuentre al exe *ap* en *t*, y tírense desde el punto *O* á *ba* y *bc* las perpendiculares *Oh* y *Oi*.

Hecho esto, es patente que las cuerdas *ab* y el radio *Ob*, girando al rededor de *aO*, engendran dos conos que tienen una misma base, que es el círculo descrito por la perpendicular *be*. Luego siendo el volúmen del primero (Teor. XXXIII.) sup. de círc. $be.\frac{ae}{3}$, y el del segundo sup. de círc. $be.\frac{eO}{3}$, es claro que la suma de estos dos volúmenes, ó el volúmen del cuerpo originado por la revolucion del triángulo *abO*, será

$$\text{Sup. de círc. } be.\frac{ae}{3} + \text{sup. de círc. } be \times \frac{eO}{3} = \text{sup. de círc. } be \times \left(\frac{ae+eO}{3}\right) = \text{sup. de círc. } be.\frac{aO}{3}.$$

Pero hemos visto (Cor. de Teor. XXIX.) que la superficie lateral del cono engendrado por la cuerda *ab* era igual á 3,141 &c. $be.ab$; y como sup. de círc. $be = 3{,}141$ &c. be^2, si formamos con estas dos equaciones una proporcion, tendrémos

$$\text{Sup. del cono orig. por } ab : \text{Sup. de círc. } be :: 3{,}141 \text{ \&c. } be.ab : 3{,}141 \text{ \&c. } be^2 :: ab : be;$$

dividiendo los dos términos de la última razon por 3,141 &c. *be*; y como por tener el ángulo en *a* comun los triángulos rectángulos *abe* y *abO* son semejantes, dan $ab : be :: aO : Ob$; y poniendo en la proporcion de arriba en vez de la razon $ab : be$, su igual $aO : Ob$, tendrémos

Sup.

Sup. del cono orig por ab : Sup. de círc. be :: aO : Oh, y por consiguiente

Sup. de círc. $be = \frac{Oh}{aO}$. sup. del cono orig. por ab;

y substituyendo en la expresion del volúmen del cuerpo originado por la revolucion del triángulo abO, que es sup. de círc. $be . \frac{aO}{3}$, será

Volúm. de cuerpo originado por el triángulo $abO = \frac{Oh}{aO}$ sup. del cono orig. por $ab . \frac{aO}{3} = \frac{Oh}{3}$. sup. del cono orig. por ab; es decir, *que el volúmen descrito por un triángulo que gira al rededor de uno de sus lados* aO, *tiene por medida la superficie del cono engendrado por uno de dichos dos lados, multiplicada por la tercera parte de la perpendicular tirada á este lado.*

De aquí se infiere que el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo Oct será igual á $\frac{Oi}{3}$. sup. de cono ct; y el del engendrado por el triángulo Obt, será igual á $\frac{Oi}{3}$. sup. de cono bt; y la diferencia entre estas dos expresiones, ó la medida del cuerpo engendrado por el triángulo cOb será visiblemente igual á $\frac{Oi}{3}$ multiplicado por la superficie del cono truncado descrito por el lado cb. Del mismo modo probaríamos que el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo dOc es igual á $\frac{Ol}{3}$. sup. de cono truncado descrito por dc. Continuando del mismo modo, y observando que las perpendiculares Oh, Oi, Ol &c. son todas iguales, se ve que qualquiera que sea el número de lados ab, bc, cd &c. el volúmen del cuerpo engendrado por esta porcion de polígono, será igual

igual á $\frac{Ol}{3}$ multiplicado por la suma de todas las superficies descritas por los lados *ab*, *bc*, *cd* &c. ó por la superficie total del cuerpo propuesto. Tambien probaríamos del mismo modo que el volúmen del cuerpo engendrado por la revolucion del polígono circunscripto es igual á $\frac{OL}{3}$ multiplicado por su superficie; y como (Teor. XXXIV.) hemos probado que la superficie de este cuerpo y la del inscripto correspondiente se pueden aproxîmar tanto como queramos; y por otra parte la diferencia entre *OL* y *Ol*, que es la sagita, se puede hacer tan pequeña como se quiera, resulta evidentemente que sus volúmenes se pueden aproxîmar á la igualdad tanto como se quiera; y por lo mismo su diferencia llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Cor. De aquí se deduce que al paso que se aumenta el número de lados de la porcion circunscripta, disminuye de volúmen el cuerpo que describe, y en el mismo caso aumenta el volúmen del inscripto, pues que la superficie (Cor. del Teor. XXXIV.) del uno disminuye, y la del otro aumenta en este mismo supuesto; y como al mismo tiempo se van aproxîmando mas á confundirse con la porcion de esfera descrita por el sector correspondiente *abcLdO*, se sigue que esta porcion, que se llama sector esférico, es menor (Teor. II.) que el cuerpo exterior, y mayor (Teor. I.) que el interior, y que por lo mismo la diferencia entre el volúmen de uno de estos cuerpos, y el sector esférico, podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Teor. XXXVII. *El volúmen de un sector esférico es igual á la superficie del casquete multiplicada por el ter-*

tercio del radio, es decir, que si llamamos S *á su superficie, y* R *al radio, será*

$$\textit{Volúmen de casquete esférico} = \frac{S.R}{3}.$$

Dem. Si representa *P* á la superficie del cuerpo originado por la porcion de polígono circunscripto *ABCD*, el volúmen de dicho cuerpo, será

$$\frac{P.OL}{3} = \frac{P.R}{3};$$

mas *P* se puede acercar á *S* tanto (Cor. del Teor. XXXIV.) como queramos; luego la cantidad $\frac{P.R}{3}$ se puede acercar á $\frac{S.R}{3}$ tanto como se desee; y como por otra parte $\frac{P.R}{3}$, que expresa el volúmen del cuerpo circunscripto, se puede acercar al volúmen del sector tanto (Cor. de Teor. antec.) como se desee; se sigue que tenemos aquí tres cantidades, de las quales la variable $\frac{P.R}{3}$ se puede acercar á las otras dos cantidades constantes, que son $\frac{S.R}{3}$ y el volúmen del sector, tanto como queramos; luego (Teor. VI.) dichas cantidades constantes serán iguales, y tendrémos

$$\text{Volúm. de sect. esf.} = \frac{S.R}{3};$$

y como *S* representa la superficie del casquete, y ésta es igual (Teor. XXXV.) á la circunferencia de un círculo máxîmo, multiplicada por la altura, si llamamos *A* á la altura, y *C* á la circunferencia, será con relacion al radio

$$\text{Volúm. de sector esférico} = \frac{S.R}{3} = \frac{C.A.R}{3} = \ldots\ldots$$

(Cor. de Prob. V.) $\frac{6,2831853072 . R . A . R}{3}$ =........... $2,0943951024 . A . R^2$.

Con relacion al diámetro

Volúmen de sector esférico $= 2,094$ &c. $A . R^2 =$ $2,094$ &c. $A . \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 2,094$ &c. $A . \frac{D^2}{4} =$..................... $\frac{2,0943951024}{4} . A . D^2 = 0,5235987756 . A . D^2$.

Con relacion á la circunferencia

Volúm. de sector esf. $= \frac{C . A . R}{3} =$ (Cor. de Prob. V.) $\frac{C . A . 0,1591549431 . C}{3} = 0,0530516477 . A . C^2$.

Cor. I. De aquí se infiere que el volúmen de la esfera es igual á su superficie multiplicada por el tercio del radio; pues si se toma el arco *ad* igual al quadrante de circunferencia *adm*, este sector esférico será igual á la mitad de la esfera, porque el radio *mo* perpendicular á *aO* describirá un plano que dividirá la esfera en dos partes iguales; y tendrémos, llamando S á la superficie de toda la esfera,

$$\text{Volúm. de Hemisferio} = \frac{S}{2} . \frac{mO}{3};$$

de donde multiplicando por 2 los dos miembros de esta equacion, el primero se convertirá en el volúmen de la esfera; pues se compone de los dos hemisferios, y será

$$\text{Volúm. de Esfera} = \frac{S . mO}{3};$$

de donde se sigue, que si en vez de S ponemos sus valores (Cor. II. de Teor. XXXV.), será con relacion al diámetro

Vol. de Esfera $= 3,141$ &c. $D^2 . \frac{R}{3} = 3,141$ &c. $D^2 . \frac{D}{6} =$

3,

$$\frac{3,141 \text{ \&c. } D^3}{6} = 0,5235987756\, D.^3$$

Con relacion al radio

$$\text{Volúm. de Esfera} = \frac{S.mO}{3} = 12,5663706144 \,.\, R.^2$$

$$\frac{R}{3} = \frac{12,5663706144}{3} . R^3 = 4,1887902048 \,.\, R^3,$$

Con relacion á la circunferencia

$$\text{Volúm. de esfera} = \frac{S.mO}{3} = 0,3183 \text{ \&c. } C.^2 \frac{R}{3} =$$

$$(\text{Cor. de Prob. V.})\ 0,3183 \text{ \&c. } C.^2 \frac{0,1591549431}{3} . C =$$

$$0,3183 \text{ \&c. } C.^2\, 0,0530516477 . C = 0,3183098862 .$$

$$0,0530516477 . C = 0,0168868639 . C^3.$$

Como la superficie de un círculo máxîmo es igual á 0,78539 &c. D^2, y el volúmen de la esfera es......

$$3,141 \text{ \&c. } D.^2 \frac{R}{3} = 0,78539 \text{ \&c. } 4 . D^2 . \frac{R}{3} = \ldots\ldots\ldots$$

$$0,78539 \text{ \&c. } D.^2 \frac{4R}{3} = 0,78539 \text{ \&c. } D.^2 \frac{2D}{3},$$ resulta que tambien podemos decir que el volúmen de la esfera se halla multiplicando la superficie de uno de sus círculos máxîmos por los dos tercios del diámetro; y como para hallar el volúmen del cilindro circunscripto se multiplica la superficie de dicho círculo máxîmo por todo el diámetro, se deduce la proposicion de Arquimedes, á saber, que la esfera es igual á los dos tercios del cilindro circunscripto.

Cor. II. Si quisiéramos hallar el volúmen del casquete esférico originado por la revolucion del arco *abd*, quitaríamos del volúmen del sector el del cono originado por el triángulo *dgO*; y como el volúmen de dicho cono se halla (Cor. de Teor. XXXIII.) multiplicando 0,2617 &c. por el quadrado del diámetro de la base, y por la altura de dicho cono, se sigue

 que

que como el diámetro es aquí igual á $2dg$, su quadrado será $4dg^2$, y la altura del cono será $gO = aO - ga = R - A$, llamando R al radio, y A á la altura ag del casquete; de donde se sigue que el volúmen de dicho cono será $0,2617$ &c. $4dg.^2 (R-A)$, y como dg^2 (Teor. XIV.) $= ag \,.\, gp = ag.(ap-ag) = A.(D-A)$, será el volúmen de dicho cono $= 0,2617$ &c. $4A$ $(D-A).(R-A) = 0,2617$ &c. $4.A.(D-A).\left(\frac{D}{2}-A\right) = 0,2617$ &c. $2.2.A.(D-A).\left(\frac{D-2A}{2}\right) = 0,2617$ &c. $2.A(D-A).(D-2A) = 0,52359$ &c. $A.(D-A).(D-2A) = 0,52359$ &c. $A.(D^2-AD-2DA+2A^2) = 0,52359$ &c. $(D^2-3AD+2A^2)$; de donde resulta

Volúmen de casquete esférico $=$ volúm. de sector $-$ volúm. de cono $=$ (Teor. XXXVII.) $0,52359$ &c. $A.D^2 - 0,52359$ &c. $A.(D^2-3DA+2A^2) = 0,52359$ &c. $A.(D^2 - D^2 + 3DA - 2A^2) = 0,52359$ &c. $A.(3DA-2A^2) = 0,52359$ &c. $A.(3DA-2A^2) = 0,52359$ &c. $A.A.(3D-2A) = 0,5235987756A^2$ $(3D-2A)$.

Substituyendo en vez de D su igual $2R$, tendrémos la fórmula con relacion al radio, que será

Volúm. de casquete esf. $= 0,5235987756A.(3D-2A) = 0,5235987756\,A.(3.2R-2A) = 0,5235987756.A.^2 2.(3R-A) = 1,047197551 2.A^2.(3R-A)$.

Cor. III. Si quisiésemos sacar fórmulas correspondientes para hallar el volúmen de una zona tal como la originada por la revolucion del arco dc, no haríamos mas que restar del volúmen del casquete originado por el arco ad, el del originado por el ac; de manera que si señalamos con las letras mayúsculas las líneas del casquete mayor, y con las minúsculas las del casquete menor, tendrémos con relacion al diámetro

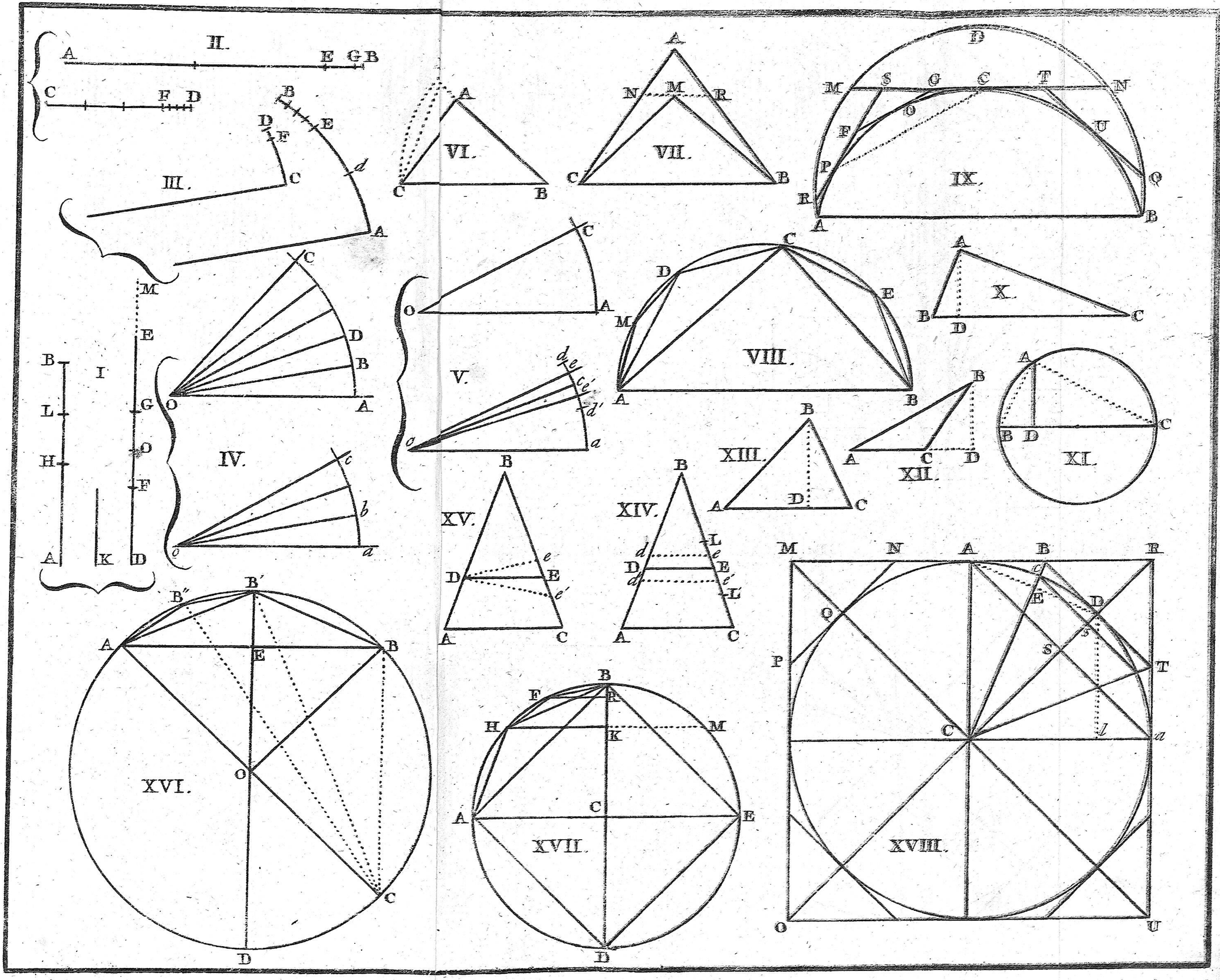
Volúm. de Zona esfér. $=$ Vol. de Casquete $-$ Vol. de de casq. $=$ (Cor. antec.) $0{,}5235$ &c. $A^2.(3D-2A)-0{,}5235$ &c. $a.^2(3D-2a)=0{,}5235$ &c. $(A.^2(3D-2A)-a^2.(3D-2a))=0{,}5235$ &c. $(3A^2D-2A^3-3a^2D+2a^3)=0{,}5235987756.(3D.(A^2-a^2)-2.(A^3-a^3))$.

Substituyendo aquí en vez de D su valor $2R$, tendrémos la fórmula con relacion al radio, que será

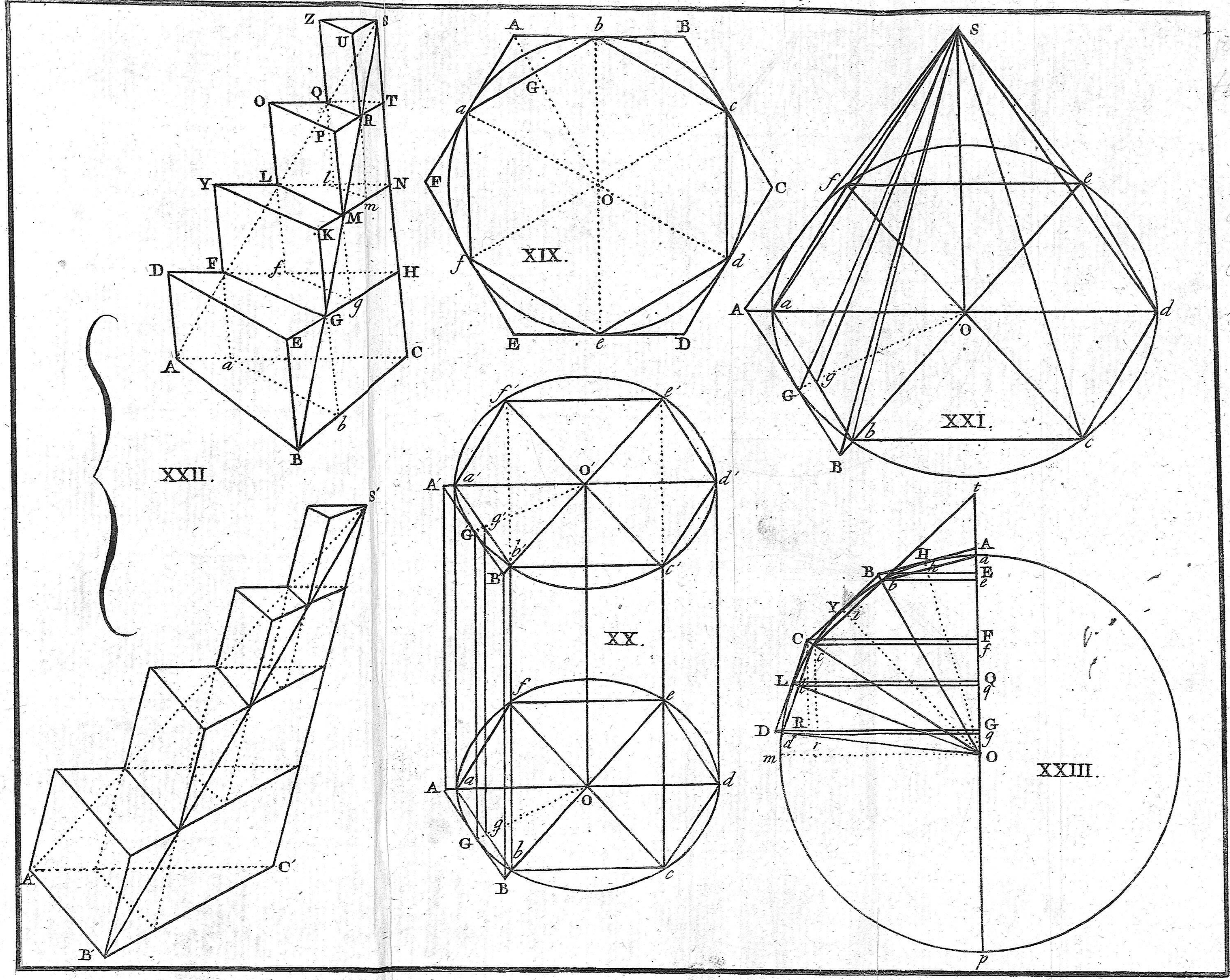
Volúm. de Zona esf. $=0{,}5235987756.(3D.(A^2-a^2)-2.(A^3-a^3))=0{,}5235$ &c. $.(3.2R.A^2-a^2)-2.(A^3-a^3))=0{,}5235987756.2.(3.R(A^2-a^2)-(A^3-a^3))=1{,}047197551 2.(3R.(A^2-a^2)-A^3+a^3)$.

ERRATAS.

Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Léase.*
2	18	B< X	B >X
46	35	(Teor.XXII.)	(Teor. XXI.)
60	28	que, que	que
62	30	$5\frac{3}{2}$	$5\frac{3}{7}$
69	28	en él	con él
76	3	*abcde*	*abcd*
82	15	*mo*	*mO*
83	9	62	62 . C².



I
II.
III.
IV.
V.
VI.
VII.
VIII.
IX.
X.
XI.
XII.
XIII.
XIV.
XV.
XVI.
XVII.
XVIII.


XIX.
XX.
XXI.
XXII.
XXIII.

$$a = \sqrt{3} = \ldots\ldots\ldots 1{,}732050807568877293527446341505872367$$
$$a' = \sqrt{(3{,}732050807568877293527446341505872367)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}931851652578136573499486399457794734$$
$$a'' = \sqrt{(3{,}931851652578136573499486399457794734)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}982889722747620822289115053857125742$$
$$a''' = \sqrt{(3{,}982889722747620822289115053857125742)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}995717846477207013476139582545555211$$
$$a^{iv} = \sqrt{(3{,}995717846477207013476139582545555211)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}998929174952731288859672892485719895$$
$$a^{v} = \sqrt{(3{,}998929174952731288859672892485719895)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999732275819123565725494298120200056$$
$$a^{vj} = \sqrt{(3{,}999732275819123565725494298120200056)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999933067834802206915207621158278230$$
$$a^{vij} = \sqrt{(3{,}999933067834802206915207621158278230)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999983266888701298295117241137669420$$
$$a^{viij} = \sqrt{(3{,}999983266888701298295117241137669420)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999995816717800362083327448653700943$$
$$a^{ix} = \sqrt{(3{,}999995816717800362083327448653700943)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999998954179176655222196474928028158$$
$$a^{x} = \sqrt{(3{,}999998954179176655222196474928028158)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999738544777074097150310343234696$$
$$a^{xj} = \sqrt{(3{,}999999738544777074097150310343234696)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999934636193200417477744298215987$$
$$a^{xij} = \sqrt{(3{,}999999934636193200417477744298215987)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999983659048233347693276060267954$$
$$a^{xiij} = \sqrt{(3{,}999999983659048233347693276060267954)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999995914762054164631050491770769$$
$$a^{xiv} = \sqrt{(3{,}999999995914762054164631050491770769)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999998978690513280389495707074128$$
$$a^{xv} = \sqrt{(3{,}999999998978690513280389495707074128)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999744672628303799357242446085$$
$$a^{xvj} = \sqrt{(3{,}999999999744672628303799357242446085)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999936168157074931213267808860$$
$$a^{xvij} = \sqrt{(3{,}999999999936168157074931213267808860)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999984042039268669139189276543$$
$$a^{xviij} = \sqrt{(3{,}999999999984042039268669139189276543)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999996010509817163305789339400$$
$$a^{xix} = \sqrt{(3{,}999999999996010509817163305789339400)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999002627454290577759336118$$
$$a^{xx} = \sqrt{(3{,}999999999999002627454290577759336118)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999750656863572628896834112$$
$$a^{xxj} = \sqrt{(3{,}999999999999750656863572628896834112)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999937664215893156252771037$$
$$a^{xxij} = \sqrt{(3{,}999999999999937664215893156252771037)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999984416053973289002477919$$
$$a^{xxiij} = \sqrt{(3{,}999999999999984416053973289002477919)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999996104013493322246824805$$
$$a^{xxiv} = \sqrt{(3{,}999999999999996104013493322246824805)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999999026003373330561469037$$
$$a^{xxv} = \sqrt{(3{,}999999999999999026003373330561469037)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999999756500843332640352440$$
$$a^{xxvj} = \sqrt{(3{,}999999999999999756500843332640352440)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999999939125210833160086937$$
$$a^{xxvij} = \sqrt{(3{,}999999999999999939125210833160086937)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999999984781302708290021680$$
$$a^{xxviij} = \sqrt{(3{,}999999999999999984781302708290021680)} = \ldots\ldots\ldots 1{,}999999999999999996195325677072505422$$

Como a es la apótome del exâgono, a' la del polígono de 12 lados igual á 6.2^1 lados, a'' la del de 24 lados ó $6.4 = 6.2^2$, a''' la de 6.2^3 &c., se sigue que a^{xxviij} será la apótome del polígono de un número de lados expresado por 6.2^{28}; y como añadiendo á esta apótome 2 tendrémos el quadrado de la apótome del polígono de duplo número de lados de este último, á saber a^{xxix}, que corresponde al polígono de un número de lados expresado por $2.6.2^{28} = 2.2.3.2^{28} = 3.2^{30} = \ldots\ldots 3.1073741824 = 3221225472$, se sigue que el lado del polígono de 3221225472 lados, será $l^{xxix} = \sqrt{4-(a^{xxix})^2} = \ldots$

$$\sqrt{(4-3{,}999999999999999996195325677072505422)} = \ldots\ldots$$

$$\sqrt{(0{,}000000000000000003804674322927494578)} = \ldots\ldots$$

0,000000001950557439022879574 7; este valor está sacado en el supuesto de ser el radio igual con 1, y por consiguiente el diámetro igual á 2; luego para hallar el perímetro del polígono en el supuesto de ser el diámetro igual con la unidad, en vez de multiplicar el valor del lado sacado en el supuesto de $R = 1$ por el número de lados 3221225472, le multiplicarémos por la mitad de dicho número, á saber, por 1610612736; y hecha esta multiplicacion, resulta que el perím. del políg. inscripto de 3221225472 lados, siendo el diámetro la unidad, es

Perím. de políg. inscripto de 3221225472 lados $= \ldots\ldots$ $0{,}0000000019505574390228795747 \times 1610612736 = \ldots\ldots$ 3,14159265358979323840608 33792.

Y como, llamando l al lado del polígono inscripto, siendo $R = 1$, el lado del polígono circunscripto, del mismo número de lados, es $L = \frac{l}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}l)^2}}$, resulta que el lado del polígono circunscripto de 3221225472 lados $= \ldots\ldots$

$$\frac{0{,}0000000019505574390228795747}{\sqrt{1-0{,}000000000000000000951168580731873 64}} =$$

0,0000000019505574390228795756.

Multiplicando el valor de este lado por 1610612736, resultará por las razones dadas arriba el perím. del políg. circunscripto de 3221225472 lados, en el supuesto de ser el diámetro la unidad, y será:

Perím. de políg. circunscripto de 3221225472 lados $= \ldots\ldots$ $0{,}0000000019505574390228795756 \times 1610612736 = \ldots\ldots$ 3,14159265358979323985563 48416.

Bien se ve que ambos perímetros tienen comunes las 17 primeras figuras decimales, y que se empiezan á diferenciar en que los dos guarismos siguientes del perímetro del inscripto son 84, y los del circunscripto 98; y como la circunferencia es mayor que el perímetro del inscripto, y menor que el del circunscripto, se sigue que los dos guarismos siguientes del valor de la circunferencia han de valer mas que 84 y menos que 98, y por lo mismo el guarismo siguiente de la circunferencia lo menos será 8; por lo qual siendo $D = 1$, será...... $C = 3{,}141592653589793238$, y algo mas; pero como este último guarismo pasa de 5, podrémos omitir el 8, y lo que venga detras de él, añadiendo una unidad al último 3, y tendrémos por razon aproxîmada del diámetro á la circunferencia la de 1 : 3,14159265358979324.